به نام خدا

KONKUR.IN

Forum.konkur.in

Club.konkur.in

Shop.konkur.in

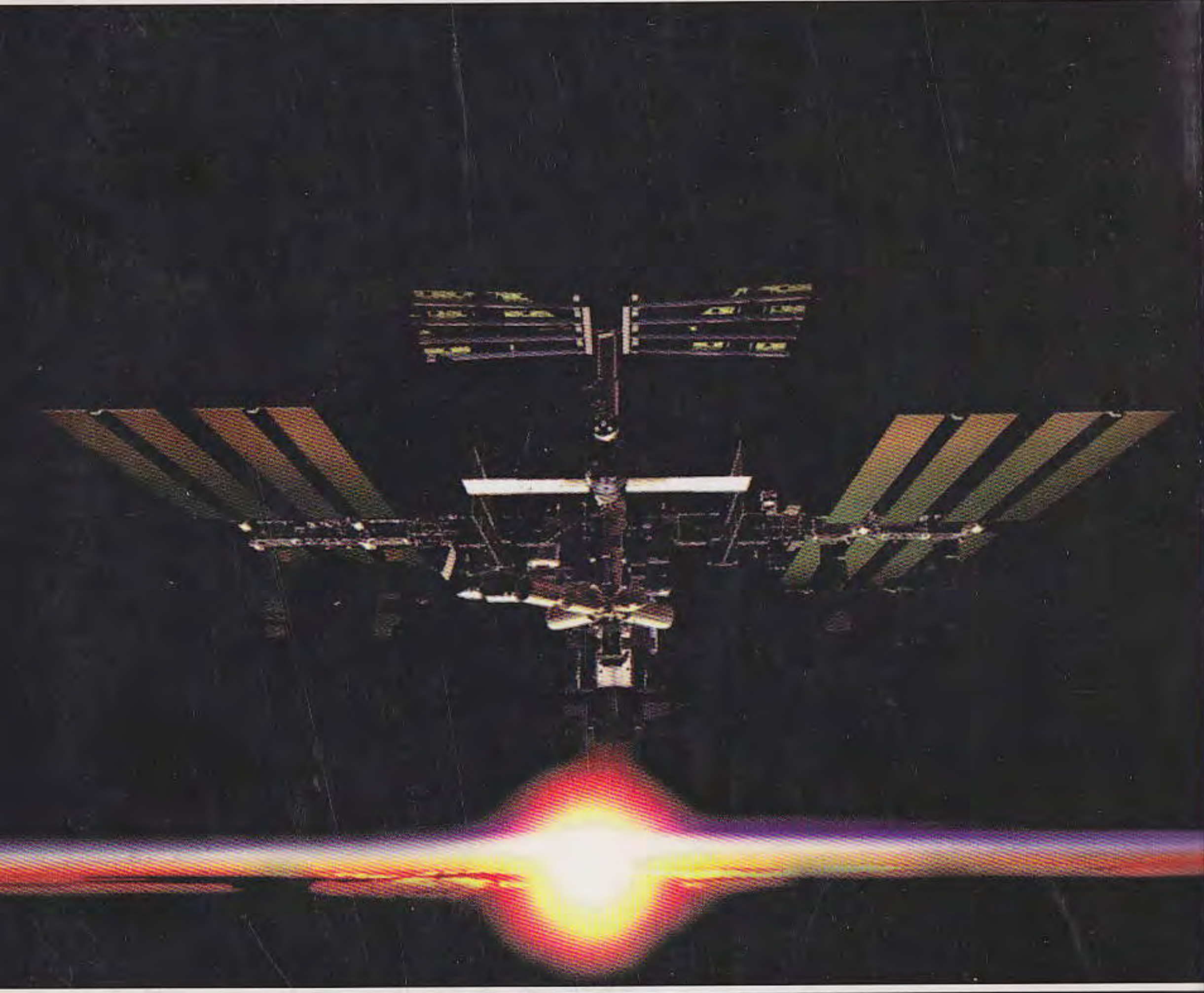
Admin : Araz & Faraz RahbaR

Email : Konkur.in@gmail.com

ویرایش پنجم
(SI - 2003)

دینامیک

جی. ال. مریام   ال. جی. کریگ



ترجمه : دکتر سعید محجوب مقدس
عضو هیئت علمی دانشگاه امام حسین (ع)

DYNAMICS

2003 - SI

FIFTH EDITION

J.L.MERIAM - L.G.KRIGE

دانش دینامیک برای تمامی مهندسین، دانشجویان و علاقه مندان رشته های مهندسی مکانیک هوافضا، عمران،معدن و ... از اهمیت ویژه ای برخوردار است و اصولاً مبنای کلیه طراحی های مهندسی را شامل می گردد.

یکی از خصوصیات قابل توجه ویرایش پنجم، همچون ویرایش های پیشین ، ارائه ارزشمندی از مسائل جذاب و مهم است که در طراحی مهندسی به کار می آیند.

در حقیقت تمام مسائل بر مبنای اصول و روش هایی ارائه شده اند که واقعاً در طراحی و تحلیل سازه های مهندسی و سیستم های مکانیکی کاربرد دارند.

ISBN 964-91016-8-3

انتشارات سپاهان

بسم الله الرحمن الرحیم

دینامیـــک

ویرایش پنجم (SI - 2003)

تالیف: جی. ال. مریام
ال. جی. کریگ

ترجمه: دکتر سعید محجوب مقدس
عضو هیئت علمی دانشگاه امام حسین (ع)

Meriam, James Lathrip　　　مریام، جیمز لیثرب، ۱۹۱۷ – م
مکانیک مهندسی: دینامیک ویرایش پنجم (SI - 2003)/ تالیف جی.
ال. مریام، ال. جی. کریگ؛ ترجمه سعید محجوب مقدس.-- اصفهان :
سپاهان ، ۱۳۸۳.
۸۰۰ ص.
ISBN: 964-91016-8-3
این کتاب ترجمه ویرایش پنجم از جلد دوم کتاب "Engineering Mechanics" بنام دینامیک می‌باشد.
این کتاب در سالهای مختلف توسط ناشرین مختلف منتشر شده است.
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا.
۱. دینامیک. الف. کریگ، گلن ، Kraige, Glenn. ب. محجوب مقدس، سعید، ۱۳۳۴ – ، مترجم.
۹۳د۴م/ TA ۳۵۲　　　۶۲۰ /۱۰۴
کتابخانه ملی ایران　　　۸۳-۳۶۶۳۶م

انتشارات سپاهان

نام کتاب: دینامیک(ویرایش پنجم SI)

مولف: جی . ال.مریام، جی . کریگ

قطع و تیراژ: وزیری ۵۰۰۰ نسخه

نوبت و سال انتشار: اول زمستان ۸۳

لیتوگرافی: نگین

حروفچینی و صفحه بندی : مهندس رضا نیکوکار

چاپ: بهار

صحافی: سپاهان

قیمت: ۶۵۰۰۰ ریال

شابک: ۳ - ۸ - ۶۱۰۱۶- ۹۶۴

مرکزپخش: انتشارات سپاهان تلفن : ۶۹۵۸۷۹۹ همراه: ۰۹۱۳ ۱۱۴ ۸۷۷۶

مقدمه مترجم

به نام خدا

شناخت اصول و مبانی مکانیک مهندسی برای کلیه دانشجویان رشته‌های فنی و مهندسی لازم می‌باشد. یکی از این مبانی، مطالعه درباره اجسام صلب است که *استاتیک* و *دینامیک* از این مقوله می‌باشند. *استاتیک* مطالعه اجسام را در حالت ایستا و *دینامیک* رفتار اجسام را در حالت پویا بررسی می‌کند.

این شاخه مهم از علم مکانیک، برای کلیهٔ مهندسین بخصوص مهندسین مکانیک، هوافضا، عمران، معدن و از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است و اصولاً مبانی بسیاری از طراحی‌های مهندسی مکانیک را شامل می‌شود. دینامیک که اهمیتش از استاتیک کمتر نیست از گذشته‌های دور، یکی از موانع و مشکلات درسی دانشجویان مهندسی بوده که خوشبختانه در سالهای اخیر، در اکثر دانشگاه‌های فنی و مهندسی دنیا مورد توجه بیشتری قرار گرفته است و استادان با تجربه‌ای که سال‌های عمر پربار خود را برای تدوین و تدریس این درس گذرانده‌اند، این واقعیت را به اثبات رسانده‌اند که طراحی دستگاه‌ها و ماشین‌های پیچیده ساخته بشر، بر پایه چند تئوری ساده بنا شده است و با قدرت استدلال و تحلیل می‌توان از همین تئوری‌ها برای حل معضلات مهندسی استفاده نمود.

این مجموعه، ترجمه آخرین ویرایش دینامیک (ویرایش پنجم، چاپ ۲۰۰۳، سیستم SI) کتاب ارزشمند اساتید بنامی چون «جیمز مریام» و «گلن کریگ» است که شرح و تفسیر کارهای شایسته این استادان بر محققان و دانشمندان این رشته پوشیده نیست. حل مسائل این کتاب که کاملاً توسط اینجانب صورت گرفته تحت عنوان «متمم دینامیک» است که شامل پاسخگویی به کلیه مسائل حل نشده کتاب اصلی می‌باشد. تلاش بنده بر این بوده که دانشجویان عزیز بتوانند از متمم دینامیک به صورت مستقل نیز استفاده نمایند. به این صورت که در ابتدای کتاب فرمول‌های مورد نیاز آورده شده و در انتهای آن پیوست‌های آمده که در حل مسائل بکار گرفته شده‌اند.

بنده بیش از ۱۸ سال است که به کار آموزش و تحقیق این شاخه از علم مشغول هستم و کتاب دینامیک «پروفسور مریام» را به عنوان کتاب مرجع درسی دانشجویان مهندسی برگزیده‌ام و سعی نموده‌ام که ویرایش‌های مختلف کتاب ایشان را ترجمه کنم و بر حل مسائل آن اهتمام ورزم و در نوبت‌های مختلف منتشر نمایم.

یکی از دلایل انتخاب این کتاب به عنوان مرجع و حل مسائل آنها را که قبلاً نیز در متمم‌های دینامیک متذکر شده‌ام این است که اصولاً دانشجویان مهندسی برای کسب مهارت‌های لازم، جهت طراحی و بدست آوردن اعتماد به نفس در این راستا، باید با مسائل واقعی، عملی، کاربردی و روزآمد سروکار داشته باشند که متاسفانه در کتاب‌های قدیمی دینامیک، معمولاً مسائل را برای اثبات تئوری خشک و بی هدف به خدمت می‌گرفتند که کاربرد چندانی نیز نداشتند.

پروفسور مریام (که اخیراً دار فانی را بدرود گفتند و جامعه علمی را از تجارب خود محروم ساختند) پس از سالها کار و تحقیق در صنایع مهم و کار آکادمیک در دانشگاه‌های معتبر و تدریس مداوم، همزمان با کار تحقیقاتی، مسائل کاربردی و روزآمدی را مطرح نمودند که یا در صنعت به عینه وجود داشت و یا از معضلات صنایع به شمار می‌آمد که بایستی حل شوند. به نظر بنده ایشان این تحول اساسی را بوجود آورد تا تئوری‌ها را هدفدار کند و به خدمت حل مسائل درآورد.

همانطور که انسان جایزالخطا است، در ترجمه و متمم این کتاب احتمال وجود غلط‌های املایی و چاپی وجود دارد که از این بابت عذر بنده را پذیرفته و انشاء ا... با عنایتی که در حق بنده خواهید داشت، در صورت مشاهده، به اینجانب و یا همکاران منعکس خواهید نمود.

در اینجا لازم می‌دانم ابتدا از خانواده خود و همچنین دوستان محترم و دانشجویان عزیزم که مشوق بنده در تهیه این آثار بودند، تقدیر و تشکر نمایم.

از همکار خوبم جناب آقای مهندس رضا نیکوکار که زحمت حروفچینی، طراحی جلد، صفحه آرایی، ویرایش، مونتاژ و امور گرافیکی تصاویر و طراحی جلد این کتاب فنی را با همه مشکلات و در مدت زمان کوتاه متقبل شدند، تشکر کنم.

بر خود لازم می‌دانم از دست اندرکاران انتشارات سپاهان که قبول زحمت چاپ و نشر کتاب را کشیدند، قدردانی کنم.

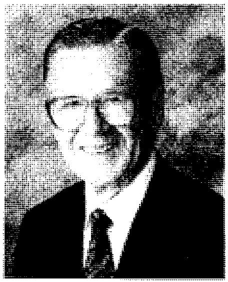
در انتها خداوند متعال را سپاس می‌گزارم که حقیر را در لحظات بسیار سخت یاری نمود و همه توفیق خود را مدیون لطف و کرم *ائمه اطهار* (سلام ا... علیهم اجمعین) می‌دانم.

والسلام

سعید محجوب مقدس

دیماه ۱۳۸۳

09126125131



جیمز لثروپ مریام
۱۹۱۷-۲۰۰۰

JAMES LATHROP MERIAM
1917-2000

دکتر جیمز مریام، نویسنده و مولف معروف بین المللی کتب مهندسی مکانیک و پروفسور بزرگ و معروف و مشـهور مهندسی، در ۱۸ جولای سال ۲۰۰۰ در خانه‌اش واقع در سانتا باربارا، بدرود حیات گفت. بدلیل شغل‌های مختلفی که در حرفه مهندسی داشت، دکتر مریام یکی از نخستین مربیان مهندس قرن بیستم بشمار می‌آید. دکتر مریام، سه دانشنامه از دانشگاه «یـال» دریـافت نمـود کـه آخرین آن دانشنامه Ph.D ایشان در سال ۱۹۴۲ بود. او در طول جنگ جهانی دوم در گارد ساحلی آمریکا خدمت کـرد. اولیـن تجربـه صنعتی او در شرکت هواپیمایی «پرات وینتی» و شرکت «جنرال الکتریک» شروع شدند.

دکتر مریام به مدت بیست و یک سال عضو هیات علمی دانشگاه «برکلی کالیفرنیا» بود و در این مدت در آنجـا در سـمت‌های، استاد مهندسی مکانیک، معاونت تحصیلات تکمیلی و رئیس بخش مکانیک و طراحی خدمت نمود. از سال ۱۹۶۳ تا سال ۱۹۷۲ ریاست دانشکده مهندسی دانشگاه «دوک» را بعهده داشت و تمام انرژی خود را صرف گسترش دانشکده مهندسی آنجا نمـود. در سـال ۱۹۷۲، پروفسور مریام بنا به میل خود به تدریس تمام وقت روی آورد و در دانشگاه ایالتی «پلی تکنیک کالیفرنیـا» تـا هنـگام بازنشسـتگی در سال ۱۹۸۰ در آن دانشگاه مشغول به کار بود. سپس در دانشگاه «کالیفرنیا ـ سانتاباربارا» به عنوان استاد میهمان تا هنگام بازنشسـتگی مجدد تا سال ۱۹۹۰ ادامه داد.

او هر جا که بود با نشان دادن توانایی‌های تدریس بسیار عالی‌اش همواره مورد توجه و قدردانی بود. در سال ۱۹۶۳ در «برکلی» او اولین دریافت کننده «جایزه ممتاز تاو ـ بتا ـ پای» گردید و در سال ۱۹۷۸ به دلیل خدمات ارزنده‌اش در آموزش مکانیک مهندسـی جایزه «مدرس برجسته» را از انجمن آموزش مهندسی آمریکا (ASEE) دریافت کرد. در سال ۱۹۹۲ برنده جایزه «بنجامین گارورلامه» از ASEE گردید. ایشان عضو هر دو انجمن ASEE و انجمن مهندسان مکانیک (ASME) بود.

دکتر مریام در سال ۱۹۵۰ شروع به تالیف سری کتاب‌های *مکانیک مهندسی* نمود. مفاهیم و موضوعات *استاتیک* و *دینـامیک* از مبحث مکانیک اولیه جدا و تغییر وضعیت یافتند و در طول پنج دهه به صورت کتاب‌های کـامل و رشـد یافتـه‌ای درآمدنـد. عـلاوه بـر ویرایش US، کتب به صورت ویرایش SI در آمده‌اند و به اکثر زبان‌های خارجی ترجمه شده‌اند. تئوری سخت را به سادگی با مثال‌هـای نمونه حل شده و مسائل متعدد به عنوان تکالیف خانه به روشنی توصیف نموده است. بعلاوه تصاویر و شـرح عـالی و مـورد قبـول او در سری کتاب‌هایش مشهور و زبانزد بوده است.

در اوایل سالهای ۱۹۸۰ دکتر مریام در مدتی حدود سه سال به طراحی و ساخت یک قایق بادبانی ۲۳ فوتی با چوب در سواحل جزایر هاوایی نمود و چندین سال او به همراه دوستش با قایق بادبانی ساعت‌های خوشی را در دریا و دور از سواحل سانتا باربارا به قایق رانی پرداختند. دکتر مریام همچنین چهار خانه را طراحی کرد و ساخت.

علاوه بر مشارکت در حرفه‌های بسیار زیاد، دکتر مریام به خاطر همکاری دوستانه و آشـکارانه‌اش، رفتـار مودبانـه و محترمانـه، قضاوتهای سنجیده، توانایی‌های رهبری، سخاوت، بلند نظری و اعتماد کامل و خالص به عنوان عالی‌ترین و بهترین مربی آموزشی مـورد قبول همگان همیشه به یادها خواهد ماند.

پیشگفتار

مکانیک مهندسی اساس و چارچوب بیشترین رشته‌های مهندسی است. بسیاری از مقولات در سطوح مهندسی ساختمان، مکانیک، هوافضا، مهندسی کشاورزی و البته خود مهندسی مکانیک بر روی موضوعات استاتیک و دینامیک بنا گذاشته شده است. حتی در رشته‌هایی مانند مهندسی برق، متخصصین در سیر عملیات ساخت اجزای الکتریکی یک دستگاه روباتیک یا سایر دستگاه‌های الکتریکی احتیاج به داشتن اطلاعات مکانیکی می‌باشند.

از اینرو، فصل مکانیک مهندسی جزء دروس آموزشی بسیار مهم مهندسی است. نه تنها این فصل جهت دروس مکانیک مهندسی مورد نیاز است، بلکه فهم دانشجویان را در موضوعات مهم دیگر مانند ریاضیات کاربردی و فیزیک و گرافیک بالا می‌برد. بعلاوه این دروس در تقریب بخشیدن به توانایی حل مسائل، جایگاه بسیار خوبی را دارا می‌باشند.

اصول کلی

هدف اصلی از مطالعه مکانیک مهندسی، ایجاد قدرت پیش‌بینی اثرات نیرو و حرکت در طی انجام کار طراحی خلاقه مهندسی است. پیش‌بینی موفقیت آمیز به چیزی بیش از معلومات اصول فیزیک و ریاضیِ مکانیک نیاز دارد. پیش‌بینی این اثرات مستلزم توانایی تجسم سازی پیکره‌بندی‌های فیزیکی نیز می‌باشد که به عواملی چون مواد حقیقی، قیود واقعی و محدودیت‌های عملی حاکم بر رفتار ماشین‌ها و سازه‌ها می‌باشد.

کمک به دانشجو در ایجاد این استعداد تصویر سازی یکی از اهداف اصلی ما در آموزش مکانیک است که در فرمول‌بندی مسائل نقش بسیار اساسی دارد. در حقیقت، ساختن یک مدل ریاضی با مفهوم، اغلب از حل آن مهمتر است. موقعی که اصول و محدودیت‌های آنها با هم در زمینه کاربرد مهندسی آموخته شد، حداکثر پیشرفت حاصل شده است.

غالباً مشاهده می‌شود که درس مکانیک را به صورتی ارائه می‌نمایند که در آن مسائل اصولاً به ابزاری برای روشن ساختن تئوری به خدمت گرفته می‌شوند، در حالیکه تئوری باید چنان مطرح شود که در تحلیل مسائل بکار برده شود. موقعی که نگرش اول غلبه پیدا نمود، مسائل به سمت غیر واقعی بودن سوق پیدا می‌کنند و رابطه خود را با مهندسی و مسائل عملی از دست داده و درس خسته کننده و نامطلوب می‌گردد. این روش دانشجو را از تجربه گرانقدر فرمول‌بندی مسائل و در نتیجه از کشف نیاز به مفهوم تئوری محروم می‌سازد. نگرش دوم، انگیزه قوی‌تری برای آموختن تئوری فراهم می‌کند و سعی در ایجاد توازن بهتر بین مطالب تئوری و کاربردی می‌نماید. نقش قطعی علاقه و هدف در ایجاد قوی‌ترین انگیزه ممکن، برای آموختن را نمی‌توان نادیده گرفت.

علاوه بر این، باید بر این نگرش تاکید کنیم که تئوری، فقط در بهترین شرایط، تقریبی از دنیای واقعی مکانیک را بیان می‌کند. این اختلاف در تفکر و نگرش به درستی اساس وجه تمایز بین *مهندسی* مکانیک از *علم* مکانیک است.

در طی چند دهه اخیر، گرایش‌های قوی در آموزش مهندسی وجود داشته است. اول به نظر می‌رسد تاکید بر مفاهیم هندسی و فیزیکی ریاضیات مورد نیاز، کاهش یافته است. دوم، کم کردن و حتی حذف تدریس به روش ترسیمی، که در گذشته برای نشان دادن و معرفی مسائل مکانیک استفاده می‌گردید. سوم، آموزش ریاضیات پیشرفته در مکانیک، گرایشی را بوجود می‌آورد که اجازه می‌دهد محاسبات نمادین، عملیات برداری بر نمایش هندسی چیره گشته یا جایگزین آن گردد. مکانیک ذاتاً موضوعی است که وابسته به درک و بینش هندسی و فیزیکی بوده و باید کوشش خودمان را جهت توسعه این قابلیت‌ها گسترش دهیم.

نکته‌ای خاص در مورد استفاده از کامپیوتر را متذکر می‌شویم. ما بر تجربه اندوزی از فرمول‌بندی مسائل، مبتنی بر استدلال و قضاوت و پرورش آنها تاکید می‌نماییم که برای دانشجو بسیار با اهمیت‌تر از عملیات ریاضی برای یافتن پاسخ مسائل می‌باشد. به این دلیل معتقدیم که استفاده از کامپیوتر باید به دقت کنترل گردد. در زمان حاضر، رسم ترسیمه آزاد جسم و فرمول‌بندی حاکم بر معادلات با قلم و کاغذ خیلی بهتر انجام می‌شود. از طرف دیگر، مواردی پیش می‌آید که استفاده از کامپیوتر برای حل معادلات و

آشکارسازی آنها بهتر است. مسائلی که توسط کامپیوتر حل می‌شوند اصولاً دارای شکل و شرایط خاصی می‌باشند. مسائل کامپیوتری باید با هوشیاری در جهت یافتن یک شرط یا قید طراحی و یا مواقع خاص مطرح شوند، نه اینکه به صورت مسائل «کارساز» درآیند که در آنها یک متغیر، بدون دلیل تغییر داده می‌شود تا به شکل مصنوعی، کامپیوتر به کار گرفته شده باشد. به همین دلیل در ویرایش پنجم مسائلی که با کامپیوتر حل می‌گردند، با این دیدگاه طراحی شده‌اند. برای صرف وقت لازم جهت فرمول‌بندی مسائل پیشنهاد می‌گردد که دانشجو فقط تعدادی محدود از مسائل کامپیوتری را جزء تکالیف خود قرار دهد.

ویرایش پنجم *مکانیک مهندسی* ، مانند ویرایش قبلی با توجه به اصول کلی که در بالا تشریح شد، نوشته شده است. اصولاً، این کتاب اولین درس مهندسی در مکانیک است که معمولاً در سال دوم تحصیل ارائه می‌گردد. کتاب *مکانیک مهندسی* با سبکی دارای صراحت و دوستانه نوشته شده است. تاکید اصلی بر اصول و روش‌های اساسی است و نه بر کثرت حالت‌های خاص. کوشش فراوانی برای نشان دادن همبستگی بین تعداد نسبتاً اندک ایده‌های بنیادین با تنوع زیاد مسائلی که از این ایده‌های اندک حل خواهند شد، انجام گرفته است.

خصوصیات آموزشی

ساختار پایه این کتاب شامل بخشی است که در آن به موضوع مورد نظر به دقت پرداخته شده است که با یک یا چند مسئله نمونه حل شده و سپس تعدادی مسئله حل نشده همراه می‌گردد.

مسائل. ۱۱۵ مسئله نمونه حل شده در این کتاب وجود دارد. حل مسائل دینامیکی نمونه با جزئیات تشریح شده‌اند. به علاوه هر مسئله نمونه شامل تذکرات (نکات مفید) و نکات کلیدی برای معرفی بهتر می‌باشند.

۱۵۲۶ مسئله حل نشده که از بین آنها تعداد زیادی را می‌توان به عنوان تکلیف خانه برای دانشجویان انتخاب نمود. بیش از ۴۰ درصد مسائل در ویرایش پنجم، جدید هستند. مسائل به دو بخش *مسائل مقدماتی* و *مسائل ویژه* تقسیم بندی شده‌اند. در بخش اول، مسائل غیر پیچیده و ساده طراحی شده‌اند تا به دانشجویان در درک و فهم مطالب موضوع جدید اعتماد به نفس بدهند. در صورتیکه بیشتر مسائل بخش دوم به طور متوسط دشوار و طولانی هستند. عموماً مسائل به ترتیب مشکل شدن، مرتب شده‌اند و در بخش پایانی *مسائل ویژه*، مسائل مشکلی وجود دارند که با علامت ◀ مشخص شده‌اند. *مسائل کامپیوتری* در بخش ویژه‌ای در انتهای *مسائل دوره* و در پایان هر فصل قرار دارند. جواب تمام مسائل با شماره فرد و مسائل مشکل داده شده است.

یکی از خصوصیات قابل توجه ویرایش پنجم، همچون ویرایش‌های پیشین، ارائه ارزشمندی از مسائل جذاب و مهم است که در طراحی مهندسی به کار می‌آیند؛ چه به صورت مستقیم ارائه شده باشند و چه به صورت غیر مستقیم. در حقیقت تمام مسائل بر مبنای اصول و روش‌هایی ارائه شده‌اند که واقعاً در طراحی و تحلیل سازه‌های مهندسی و سیستم‌های مکانیکی کاربرد دارند.

سازماندهی

تقسیم بندی منطقی بین دینامیک ذره (بخش I) و دینامیک اجسام صلب (بخش II) برقرار شده است که در هر بخش سینماتیک قبل از سینتیک مطرح شده است. با این تقسیم بندی و با آشنایی جامع از دینامیک ذره، دینامیک اجسام صلب به طور کامل و سریع فرا گرفته می‌شود.

در فصل ۱، مفاهیم اساسی مورد نیاز جهت مطالعه دینامیک ارائه می‌گردد.

فصل ۲، سینماتیک حرکت ذره در دستگاه‌های مختصات مختلف و همچنین موضوعات حرکت نسبی و حرکت مقید تشریح می‌شود.

فصل ۳، در مورد سینتیک ذره به سه روش اساسی نیرو ـ جرم ـ شتاب (بخش A)، کار ـ انرژی (بخش B) و ضربه ـ مومنتم (بخش C) تمرکز دارد. مباحث خاص برخورد، حرکت تحت اثر نیروی مرکزی و حرکت نسبی (بخش D) تحت عنوان کاربردهای خاص گرد آمده‌اند و با نظر استاد و محدودیت وقت کلاس جزء مواد اختیاری درس پیشنهاد می‌شوند. با این ترتیب، توجه بیشتر دانشجو بر روی سه موضوع اساسی سینتیک متمرکز می‌گردد.

فصل ٤، در مورد سیستم‌های ذرات می‌باشد که تعمیم یافته اصول حرکت یک ذره بوده و برای پی‌ریزی روابط کلی که پایه مهم دینامیک جدید است، بسیار ضروری می‌باشد. این فصل همچنین شامل عناوین جریان جرم پایا و جرم متغیر است که با توجه به وقت موجود می‌تواند به صورت موضوع اختیاری مطرح گردد.

در فصل ۵، سینماتیک اجسام صلب در حرکت صفحه‌ای، معادلات سرعت و شتاب نسبی مطرح می‌گردد و به روش حل آنها توسط هندسه و جبر برداری تاکید می‌شود. پیشنهاد کاربرد این دو روش در حل، تقویت کردن مفهوم ریاضیات برداری را در بر دارد.

در فصل ٦، با عنوان سینتیک اجسام صلب، تاکید زیادی بر معادلات اساسی حاکم بر انواع حرکت صفحه‌ای داریم. وابستگی زیادی بین تشخیص تعداد معلومات و مجهولات و معادلات حرکتی لازم و کافی وجود دارد که حل مسئله را تضمین می‌کند. تاکید خاصی نیز وجود دارد که بین نیروها وگشتاورهای واقعی اعمال شده و برآیند آنها یعنی $m\bar{a}$ و $\bar{I}\alpha$ تساوی مستقیم برقرار شود. در این جهت، بر سهولت استفاده از اصل گشتاور تاکید می‌گردد و دانشجو تشویق می‌شود که مستقیماً به اثرات دینامیکی برآیند، فکر کند.

فصل ۷، که می‌تواند به عنوان بخش اختیاری مطرح گردد، مقدمه‌ای اساسی را در دینامیک سه بعدی فراهم می‌سازد که برای حل بیشتر مسائل متداول حرکت در فضا کافی است. فصل ۷ برای دانشجویانی که بعدها می‌خواهند کار بر روی دینامیک را به صورت پیشرفته‌تری دنبال نمایند، پایه محکمی را مهیا می‌سازد. حرکت ژیروسکوپی به دو روش برای حرکت با پیشروش پایا مطرح گشته است. اولین روش با استفاده از تشابه منطقی رابطه بین بردارهای نیرو و مومنتم خطی و بردارهای گشتاور و مومنتم زاویه‌ای است. با این روش دانشجو می‌تواند پدیده ژیروسکوپی با پیشروش پایا را درک نموده و قادر به حل اکثر مسائل مهندسی در مورد ژیروسکوپ‌ها بدون ورود به جزئیات مطالعه دینامیک سه بعدی گردد. دومین روش، استفاده از معادلات کلی‌تر مومنتم در دوران سه بعدی است که در آن تمامی مولفه‌های مومنتم منظور می‌شوند.

فصل ۸ ، اختصاص به موضوع ارتعاشات دارد. این فصل کاملاً برای دانشجویان مهندسی که تنها از طریق درس مکانیک با ارتعاشات آشنا می‌شوند، مفید خواهد بود.

ممان‌ها و حاصلضرب‌های اینرسی جرم در پیوست B کتاب آورده شده و در پیوست C مرور مختصر بر موضوعات برگزیده ریاضی شده است و چندین روش عددی مورد نیاز برای استفاده دانشجو در حل مسائل کامپیوتری نیز مطرح شده است. جدول‌های مفید شامل ثابت‌های فیزیکی، مراکز سطح و جرم، ممان‌های اینرسی در پیوستD آمده است.

ال. گلن کریگ

بلاکسبورگ، ویرجینیا

خلاصه کتاب در یک نگاه

بخش I دینامیک ذرات

بخش II دینامیک اجسام صلب

پیوست‌ها

فهرست مطالب

بخش ۱

دینامیک ذرات

فصل ۱

مقدمه‌ای بر دینامیک

فصل ۲

سینماتیک ذرات

فصل ۳

سینتیک ذرات

فصل ۴

سینتیک سیستم ذرات

بخش II

دینامیک اجسام صلب

فصل ۵

سینماتیک اجسام صلب در صفحه

فصل ۶

سینتیک اجسام صلب در صفحه

فصل ۷

مقدمه‌ای بر دینامیک سه بعدی اجسام صلب

فصل ۸

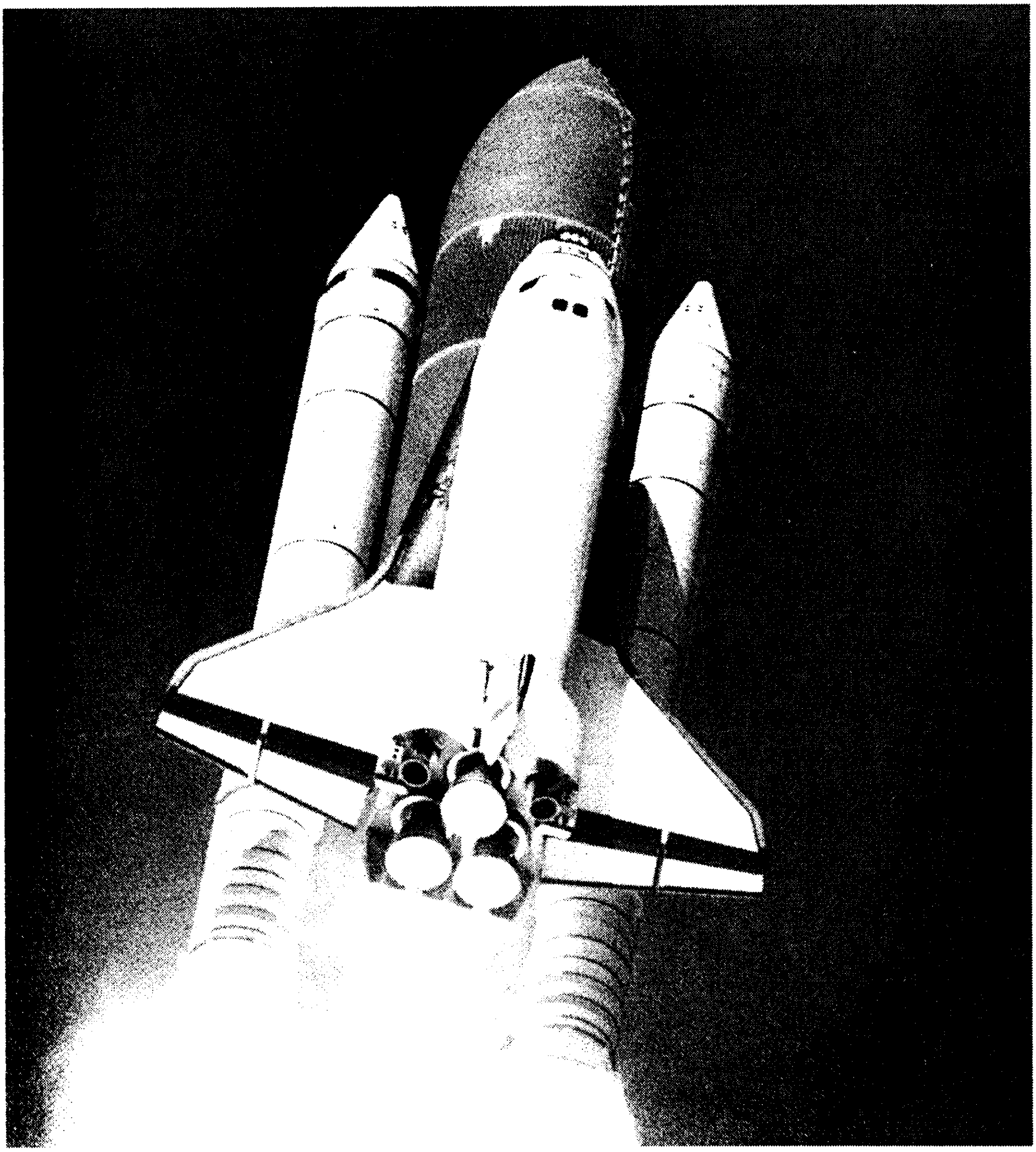
ارتعاش و پاسخ زمانی

پیوست‌ها

فصل اول

مقدمه‌ای بر دینامیک

فهرست مطالب



تشریح کامل حرکت یک فضاپیما داخل جو زمین، متضمن در نظر گرفتن ترکیبی از جسم به صورت ذره، جسم صلب، جسم غیر صلب و جرم متغیر است.

۱-۱ تاریخچه و کاربردهای نوین

دینامیک شاخه‌ای از مکانیک است که در مورد حرکت اجسام در اثر اعمال نیرو بحث می‌کند. معمولاً در مهندسی، دینامیک پس از استاتیک مورد مطالعه قرار می‌گیرد که موضوع آن تاثیر نیروها بر اجسام ساکن است. دینامیک دارای دو بخش مجزا می‌باشد: *سینماتیک*، که عبارت از مطالعه حرکت بدون در نظر گرفتن عامل آن یعنی نیرو و سینتیک، که نیروهای وارد بر جسم را به حرکت ناشی از آنها ارتباط می‌دهد. درک کامل دینامیک، یکی از مفیدترین و قویترین ابزارهای تحلیل در مهندسی می‌باشد.

تاریخچه دینامیک

موضوع دینامیک در مقایسه با استاتیک از نظر تاریخی، نسبتاً جدید است. شروع درک دینامیک با استفاده از اصول استدلالی به گالیله (۱٦٤۲-۱٥٦٤) نسبت داده می‌شود که در مورد سقوط آزاد اجسام، حرکت روی سطح شیبدار و حرکت آونگ مشاهدات دقیقی انجام داد. وی در زمینه ارائه روش علمی برای تحقیقات در مسائل فیزیکی مسئولیت بزرگی را متحمل شده است. گالیله به جهت نپذیرفتن اعتقادات زمان خود که مبتنی بر فلسفه ارسطویی بود، مثلاً این عقیده که اجسام سنگین‌تر سریعتر از اجسام سبکتر سقوط می‌کنند، پیوسته مورد انتقاد شدید قرار داشت. فقدان روشهای دقیق برای اندازه گیری زمان از موانع جدی گالیله بود و پیشرفتهای مهم بعدی در دینامیک در انتظار اختراع ساعت آونگی توسط هویگنس در سال ۱٦٥۷بود.

نیوتن (۱۷۲۷-۱٦٤۲) بر اساس تحقیقات گالیله توانست فرمولهای دقیقی را برای قوانین حرکت ارائه کند و در نتیجه، دینامیک را در جایگاه استواری قرار دهد. کار مشهور نیوتن در اولین ویرایش کتابش با عنوان اصول (Principia) * منتشر شد، که معمولاً از آن به عنوان یکی از بزرگترین مقالات علمی ثبت شده یاد می‌شود. نیوتن علاوه بر بیان قوانین حاکم بر حرکت ذرات، اولین کسی بود که قانون جاذبه عمومی را به طور صحیح فرموله کرد. با اینکه توصیف ریاضی او دقیق بود، او حس می‌کرد که انتقال خارجی نیروی جاذبه بدون پشتیبانی یک واسط خیالی پوچ و بیهوده است. دانشمندانی که پس از دوره نیوتن مشارکتهای مهمی در توسعه علم مکانیک داشتند عبارتند از: اویلر، دالامبر، لاپلاس، پوآنسو،

* فرمول بندی اصلی «اسحاق نیوتن» را می‌توان در ترجمه کتاب Principia (۱٦۸۷) توسط «F.Cajori» از انتشارات دانشگاه «کالیفرنیا» در سال ۱۹۳۴ پیدا کرد.

کوریولیس، اینشتین و دیگران.

کاربردهای دینامیک

فقط از زمانی که ماشینها و سازه‌هایی با سرعت زیاد و شتابهای قابل توجه به کار افتادند، محاسبات بر اساس اصول دینامیک در مقایسه با اصول استاتیک ضروری‌تر شد. امروزه رشد سریع تکنولوژی افزایش کاربردهای اصول مکانیک به ویژه دینامیک را طلب می‌کند. این اصول مبنای تحلیل و طراحی سازه‌های متحرک، سازه‌های ثابت با بارهای ضربه‌ای، روباتها، سیستمهای کنترل اتوماتیک، راکتها، موشکها، فضاپیماها، وسایل حمل و نقل زمینی، دریایی و هوایی، بالستیک الکترونی در دستگاههای الکتریکی، و انواع ماشینها نظیر توربینها، پمپها، موتورهای پیستونی، بالابرها، ماشینهای ابزار و غیره می‌باشد.

دانشجویانی که به یک و یا چند مورد از فعالیتهای مذکور علاقه‌مند هستند، نیاز مستمر به کارگیری اصول و مبانی دینامیک را در خواهند یافت.

۱-۲ مفاهیم اساسی

مفاهیم اساسی مکانیک که در بخش ۲-۱ از جلد اول این مجموعه یعنی استاتیک بیان گردید، دوباره به همراه توضیحات ویژه مطالعهٔ دینامیک در اینجا خلاصه می‌شوند.

فضا: ناحیه هندسی اشغال شده توسط جسم می‌باشد. موقعیت در فضا بوسیله اندازه‌گیریهای خطی و زاویه‌ای نسبت به سیستم مرجع هندسی تعیین می‌شود. چارچوب اساسی سیستم مرجع در قوانین مکانیک نیوتن عبارت است از سیستم *اینرسی اصلی* یا *دستگاه مرجع نجومی*، که سیستم مختصاتی مجازی با محورهای متعامد می‌باشد و فرض می‌شود که هیچگونه انتقال یا دورانی در فضا نداشته باشد. اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهد که اعتبار قوانین مکانیک نیوتنی در این سیستم مختصات تا هنگامی است که سرعتها در مقایسه با سرعت نور که برابر km/s ۳۰۰۰۰۰ یا mi/s ۱۸۶۰۰۰ می‌باشد قابل صرفنظر کردن باشند. به اندازه‌گیریهایی که نسبت به این دستگاه صورت می‌گیرند *مطلق* گفته می‌شود و این سیستم مرجع در فضا «ثابت» در نظر گرفته می‌شود.

دستگاه مرجع الصاقی به سطح زمین دارای حرکت پیچیده‌ای در سیستم مرجع اصلی است و بنابراین باید بر مبنای اندازه‌گیریهای انجام شده در دستگاه مرجع روی زمین، تصحیحاتی در معادلات اساسی مکانیک صورت گیرد. مثلا حرکت مطلق زمین در محاسبه مسیر راکتها و پروازهای فضایی، پارامتر مهمی محسوب می‌شود. در بیشتر مسائل مهندسی مربوط به ماشینها و سازه‌هایی که به طور ثابت در سطح زمین مستقر شده‌اند، تصحیحات فوق العاده کوچک بوده و می‌توان از آن صرفنظر کرد. در چنین مسائلی قوانین مکانیک را می‌توان مستقیما در اندازه‌گیریهای انجام شده نسبت به زمین بکار برد، که در عمل چنین اندازه‌گیریهایی *مطلق* تلقی می‌شوند.

زمان: عبارت است از سنجش وقایع متوالی است که در مکانیک نیوتنی به عنوان کمیت مطلق در نظر گرفته می‌شود.

جرم: عبارت از سنجش کمی اینرسی یا مقاومت در مقابل تغییر حرکت یک جسم است. همچنین جرم را می‌توان کمیت مادی موجود در یک جسم در نظر گرفت که سبب جاذبه ثقلی می‌شود.

نیرو: عمل برداری یک جسم بر جسم دیگر است. خواص نیروها در کتاب استاتیک به طور کامل مورد بحث قرار گرفته است.

ذره: جسمی است با ابعاد ناچیز. همچنین، هنگامی که ابعاد جسمی در توصیف حرکت آن یا عمل نیروهای وارد بر آن بی‌تاثیر باشند، با آن جسم می‌توان به صورت یک ذره برخورد کرد. مثلا، برای توصیف مسیر پرواز هواپیما، می‌توان آن را به صورت یک ذره در نظر گرفت.

جسم صلب: جسمی است که تغییر شکل آن در مقایسه با ابعاد کلی و یا تغییر مکان جسم به عنوان یک کل، ناچیز باشد. به عنوان مثال از فرض صلبیت می‌توان حرکت خمشی کوچک لبهٔ بال هواپیمای در حال پرواز در یک هوای آشفته را، در توصیف حرکت کلی هواپیما در سراسر مسیر پروازش کاملا بی‌تاثیر دانست. به همین جهت این فرض که هواپیما یک جسم صلب است هیچگونه مشکلی ایجاد نمی‌کند. از طرفی، اگر منظور مسئله یافتن تنشهای داخلی موجود در بال، در اثر تغییر بارهای دینامیکی باشد، در آن صورت باید مشخصات تغییر شکل سازه در نظر گرفته شود و به همین دلیل هواپیما را نمی‌توان به صورت جسم صلب در نظر گرفت.

بردار و اسکالر: کمیتهای هستند که در کتاب استاتیک مورد بحث بسیار قرار گرفته‌اند و اکنون باید فرق آنها را به روشنی مشخص کرد. کمیتهای اسکالر با حروف نازک و کمیتهای برداری با حروف سیاه نشان داده می شود. در نتیجه V اندازه اسکالری بردار $\mathbf{V}$ است. بنابراین استفاده از علائم خاص بسیار مهم است. مثلا خط تیرهٔ زیرین در $\underline{V}$ ، که در نوشتن تمام بردارها میتوان آنرا جایگزین حروف چاپی سیاه ضخیم کرد. برای دو بردار غیر موازی، باید به خاطر داشت که $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$ و $V_1 + V_2$ دارای دو مفهوم کاملا متفاوت می‌باشند.

فرض بر این است که شما با مطالعه قبلی مباحث استاتیک و ریاضی، با هندسه و جبر بردارها آشنایی دارید. دانشجویانی که به مرور این مطالب نیاز دارند، می‌توانند خلاصه‌ای از آنها را به همراه سایر روابط ریاضی که غالبا در مکانیک بکار می‌روند، در پیوست C پیدا کنند. تجربه نشان داده که غالبا مبحث هندسهٔ مکانیک منشاء مشکلات است. مبحث مکانیک به دلیل طبیعتش کاملا هندسی است و دانشجویان باید این موضوع را در هنگام مرور ریاضیاتشان در نظر داشته باشند. دینامیک علاوه بر جبر بردارها، نیاز به حساب بردارها دارد و در موقع لزوم، موارد ضروری در متن درس استفاده خواهند شد.

در دینامیک مشتقات بردارها و اسکالرها نسبت به زمان اغلب مورد استفاده قرار می‌گیرد. اکثرا برای تسریع در نوشتن، جهت نشان دادن مشتق نسبت به زمان یک کمیت، از یک نقطه در بالای آن کمیت استفاده می‌شود. بنابراین، $\dot{x}$ به معنای $\frac{dx}{dt}$ و $\ddot{x}$ به مفهوم $\frac{d^2x}{dt^2}$ می‌باشد.

۱-۳ قوانین نیوتن

قوانین سه گانهٔ نیوتن در باب حرکت که در بخش ٤-١ کتاب استاتیک به آن اشاره شد، در اینجا نیز به دلیل اهمیت خاص در دینامیک بیان می‌شود. بیان آنها با اصطلاحات نوین چنین است:

قانون اول: تا هنگامیکه نیروی نامتوازنی به یک ذره اثر نکند، یا ساکن می‌ماند و یا به حرکت مستقیم الخط با سرعت ثابت ادامه می‌دهد.

قانون دوم: شتاب یک ذره متناسب با برآیند نیروهای وارد بر آن بوده و در جهت این نیرو* می‌باشد.

قانون سوم: نیروهای عمل و عکس‌العمل میان اجسام عمل کننده با تاثیر متقابل، از نظر اندازه، مساوی و در جهت مخالف یکدیگر بوده و هم راستا هستند.

درستی این قوانین با اندازه‌گیریهای فیزیکی فراوان به اثبات رسیده است. دو قانون اول و دوم برای اندازه‌گیریهایی که در دستگاه مرجع مطلق انجام گرفته صادق است، اما هنگامی که همانند دستگاه الصاقی به سطح زمین، حرکت نسبت به دستگاه مرجعی صورت می‌گیرد که خود دارای شتاب است، باید تصحیحاتی انجام شود.

قانون دوم نیوتن مبانی اکثر تحلیلهای دینامیکی را تشکیل می‌دهد. این قانون برای ذره‌ای به جرم m که تحت تاثیر نیروی برآیند $\mathbf{F}$ قرار گرفته، چنین بیان می‌شود.

$$\boxed{\mathbf{F}=m\mathbf{a}} \qquad (۱-۱)$$

که در آن $\mathbf{a}$ شتاب برآیند اندازه‌گیری شده در دستگاه مرجع بدون شتاب می‌باشد. قانون اول نیوتن نتیجه قانون دوم است زیرا هنگامیکه نیرو صفر باشد هیچگونه شتابی وجود ندارد و ذره یا در حال سکون است و یا با سرعت ثابت حرکت می‌نماید. قانون سوم نیوتن بیانگر اصل عمل و عکس العمل است که ما می‌بایست در مسائل استاتیک با آن کاملا آشنا باشیم.

۱-۴ آحاد

سیستم بین المللی آحاد متریک (SI) در این کتاب معرفی و استفاده شده است. به منظور آشنایی با این سیستم لازم است که مستقیما با آحاد SI اندیشه و کار شود. سیستم بین المللی آحاد متریک (SI) و آحاد متداول آمریکایی در *کتاب دینامیک* معرفی و استفاده شده است. تبدیل اعداد از واحدهای متداول آمریکایی به سیستم SI، در کاربردهای مهندسی باید به تدریج طی سالها انجام پذیرد، لیکن تصور اینکه آشنایی با آحاد SI از طریق تبدیل نتایج عددی از سیستم قدیمی به سیستم جدید به سادگی حاصل خواهد شد، تصوری اشتباه خواهد بود.

جدولهایی که آحاد SI را تعریف نموده و تبدیل عددی بین آحاد متداول آمریکایی و آحاد SI را ارائه می‌کنند در پیوست این کتاب درج شده‌اند که به این ترتیب کار تبدیل واحدها آسان شده و به درک نسبت اندازهٔ واحدها در هر دو سیستم کمک می‌کند.

* عده‌ای ترجیح می‌دهند که قانون دوم نیوتن را به این مفهوم تفسیر کنند که برآیند نیروهای وارد بر یک ذره متناسب با میزان تغییر مومنتم ذره بوده و این تغییر در راستای نیرو می‌باشد. هر دو بیان مزبور معادل یکدیگر بوده و هنگامی که برای ذره‌ای با جرم ثابت بکار می‌روند، صحیح می‌باشند.

در جدول زیر چهار کمیت اساسی مکانیک و واحدها و نمادهای آنها در دو سیستم خلاصه شده‌اند:

کمیت	نماد ابعادی		آحاد SI: واحد	آحاد SI: نماد		آحاد متداول آمریکایی: نماد	آحاد متداول آمریکایی: واحد
جرم	M	آحاد اصلی	کیلوگرم	kg		slug	اسلاگ
طول	L	آحاد اصلی	متر	m	آحاد اصلی	ft	فوت
زمان	T	آحاد اصلی	ثانیه	s	آحاد اصلی	sec	ثانیه
نیرو	F		نیوتن	N	آحاد اصلی	lb	پوند

همانطورکه در جدول نشان داده شده، در سیستم SI جرم، طول و زمان، آحاد اصلی در نظر گرفته شده و واحد نیرو از قانون دوم نیوتن، معادله ۱-۱، استخراج شده است. در سیستم متداول آمریکایی، آحاد نیرو، طول و زمان اصلی بوده و واحد جرم از قانون دوم نیوتن بدست آمده است. سیستم SI یک سیستم *مطلق* نامیده می‌شود زیرا استاندارد واحد جرم، کیلوگرم (که از یک استوانه فلزی از جنس پلاتینیوم ـ ایریدیم است و در دفتر استانداردهای پاریس فرانسه نگهداری می‌شود) وابسته به جاذبه ثقلی زمین نمی‌باشد؛ در صورتیکه سیستم متداول آمریکایی یک سیستم *جاذبه‌ای* نامیده می‌شود زیرا استاندارد واحد نیرو، پوند (وزن جرم استانداردی که در سطح دریا و در عرض جغرافیایی 45° اندازه‌گیری می‌شود) به جاذبه میدان زمین وابسته می‌باشد. این تفاوت، اختلاف اساسی این دو سیستم است.

بنابراین تعریف یک نیوتن در واحدهای SI ، نیرویی است که به جرم یک کیلوگرم شتابی برابر با یک متر بر مجذور ثانیه بدهد. در سیستم متداول آمریکایی جرمی برابر با ۳۲/۱۷۴۰ پوند جرم (یک اسلاگ) به ازای اعمال نیرویی برابر یک پوند شتابی برابر با یک فوت بر مجذور ثانیه به خود می‌گیرد. در نتیجه از معادله ۱-۱ برای هر سیستمی داریم:

آحاد SI	آحاد متداول آمریکایی
$(1\text{ N}) = (1\text{ kg})\,(1\text{ m/s}^2)$	$(1\text{ lb}) = (1\text{ slug})\,(1\text{ ft/sec}^2)$
$\text{N} = \text{kg}\,.\,\text{m/s}^2$	$\text{slug} = \text{lb-sec}^2/\text{ft}$

در سیستم آحاد SI، کیلوگرم *فقط* بعنوان واحد جرم بکار می‌رود و هرگز به عنوان نیرو بکار نمی‌رود. متاسفانه، سالها سیستم MKS (متر، کیلوگرم و ثانیه) به عنوان سیستم جاذبه‌ای در بعضی از کشورها به طور عادی مورد استفاده واقع شده است. کیلوگرم هم جهت واحد نیرو و هم برای واحد جرم هر دو بکار رفته است. در آحاد متداول آمریکایی واحد پوند هم جهت واحد نیرو(lbf) و هم برای واحد جرم (lbm) استفاده می‌شود. استفاده از واحد lbm بیشتر در اجسامی مثل مایعات و گازها رایج است. lbm مقدار جرمی است که وزن ۱ lbf را تحت شرایط استاندارد (در عرض جغرافیایی 45° و سطح دریا) ایجاد می‌کند. اغلب استفاده از دو واحد برای جرم (slug و lbm) موجب بروز اشکال می‌گردد. در این کتاب بیشتر اوقات از واحد slug برای جرم استفاده شده است. این عمل حل مسائل دینامیکی را ساده‌تر از موقعی می‌کند که از واحد lbm استفاده شود. بعلاوه با این کار می‌توان از نماد lb بجای پوند ـ نیرو استفاده نمود.

سایر کمیتهایی که در مکانیک بکار می‌روند و نیز معادلهای آحاد اصلی آنها در فصلهای آینده به موقع تعریف خواهند شد. بهرحال برای سهولت مراجعه به این کمیتها، مقادیر آنها را در یک فهرست در پیوست کتاب خواهید یافت.

سازمان‌های حرفه‌ای رهنمودهایی جهت استفاده از سیستم آحاد SI تهیه نموده‌اند که در تمامی متن این کتاب از این رهنمودها پیروی خواهد شد. از میان این رهنمودها، اساسی‌ترین آنها در پیوست کتاب درج شده که شما بایستی به دقت آنها را مراعات نمایید.

۱-۵ جاذبه

قانون جاذبه نیوتن که بر جاذبه متقابل بین دو جسم حاکم است به صورت زیر می‌باشد.

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}} \qquad (۱-۲)$$

که در آن:

F = نیروی جاذبهٔ متقابل بین دو ذره

G = ثابت جهانی موسوم به *ثابت جاذبه*

m_1 و m_2 = جرم دو ذره

r = فاصله بین مراکز ذرات

مقدار عددی ثابت جاذبه از روی آزمایش برابر $G=6/673(10^{-11})\ m^3/kg.s^2$ بدست آمده است. تنها نیروی جاذبه‌ای که بزرگی آن قابل توجه است، نیروی ناشی از جاذبه زمین می‌باشد. مثلا در کتاب *استاتیک*، نشان داده شده است که هر یک از دو گوی آهنی به قطر ۱۰۰ mm، با نیروی جاذبه ۳۷/۱N به سمت زمین جذب می‌شوند، که *وزن* نامیده می‌شود، اما هنگامی که کاملا به هم نزدیک باشند نیروی جاذبه متقابل بین آنها برابر با ۰/۰۰۰۰۰۰۰۹۵۱N می‌شود.

چون جاذبه ثقلی یا وزن جسم از جنس نیرو است، بنابراین باید همیشه بر حسب آحاد نیرو، یعنی نیوتن (N) در سیستم SI و پوند نیرو (lb) در سیستم متداول آمریکایی بیان شوند. به منظور پرهیز از هرگونه اشتباه کلمه «وزن» در این کتاب منحصرا به معنای نیروی جاذبه است.

تاثیر ارتفاع

نیروی جاذبه‌ای که از طرف زمین به جسم وارد می‌شود، بستگی به موقعیت جسم نسبت به زمین دارد. اگر زمین یک کره کامل با همان حجم می‌بود، در آن صورت جسمی به جرم دقیقا ۱ kg با نیرویی برابر با N ۹/۸۲۵ در ارتفاع ۱ km، با نیروی N ۹/۵۲۳ در ارتفاع ۱۰۰ km، با نیروی N ۷/۳۴۰ در ارتفاع ۱۰۰۰ km ، و با نیروی N ۲/۴۵۶ در ارتفاعی برابر با شعاع متوسط زمین (۶۳۷۱ km) به سمت زمین جذب می‌شد. کاملا واضح است که برای راکتها و فضاپیماهایی که در ارتفاع بالا حرکت می‌کنند، تغییرات جاذبه از اهمیت ویژه‌ای برخوردار می‌شود.

هر شیئی که از نزدیکی سطح زمین سقوط کند، همان شتاب g را خواهد داشت. این مطلب را می‌توان با ترکیب معادله ۱-۱ و ۲-۱و حذف جرم شیئی در حال سقوط یافت. نتیجه ترکیب این معادلات چنین است.

$$g = \frac{G\, m_e}{R^2}$$

که m_e جرم زمین و R شعاع آن می‌باشد*. جرم m_e و شعاع متوسط R زمین از طریق آزمایش به ترتیب برابر

---

* هنگامی که زمین به صورت کره‌ای با توزیع جرمی متقارن حول مرکزش در نظر گرفته می‌شود، می‌توان با اثبات، آن را ذره‌ای در نظر گرفت که تمام جرمش در مرکز متمرکز می‌باشد.

$5/976(10^{24})$ kg و $6/371(10^{6})$ m بدست آمده‌اند. پس از جایگزینی این مقادیر به همراه مقدار G در رابطه مربوط به g، مقدار متوسطی برابر با $g = 9/825\ m/s^2$ دست می‌آید.

تغییرات g بر حسب ارتفاع از قانون جاذبه به آسانی تعیین می‌شود. اگر g_0 بیانگر شتاب مطلق جاذبه در سطح آزاد دریا باشد، مقدار مطلق آن در ارتفاع h چنین است.:

$$g = g_0 \frac{R^2}{(R+h)^2}$$

که در آن R شعاع زمین است.

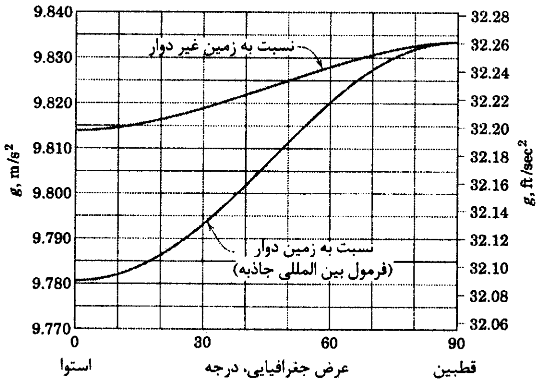
تاثیر چرخش زمین

در تعیین شتاب جاذبه که از قانون جاذبه تعیین شد، می‌توان از محورهایی استفاده کرد که در مرکز زمین قرار داشته و بدون دوران می‌باشند. در این صورت با «ثابت» بودن محورها، این مقدار برابر با مقدار *مطلق* g خواهد بود. با توجه به این واقعیت که زمین در حال چرخش است، شتاب سقوط آزاد یک جسم که از سطح زمین اندازه گیری می‌شود، قدری کمتر از مقدار مطلق آن است. اندازه‌گیری مقادیر دقیق شتاب جاذبه نسبت به زمین بر اساس این واقعیت صورت می‌گیرد که زمین کره‌ای دو سر تخت است که در قطبها کمی مسطح می‌باشد. این مقادیر را می‌توان با دقتی بالا از فرمول بین المللی جاذبه که در سال ۱۹۸۰ ارائه شده بدست آورد که چنین است.

$$g = 9.780327\ (1 + 0.005279 \sin^2 \gamma + 0.000023 \sin^4 \gamma + \ldots)$$

که در آن γ عرض جغرافیایی و g بر حسب متر بر مجذور ثانیه بیان شده است. این فرمول بر اساس یک مدل بیضی‌وار از زمین ارائه شده و همچنین اثر دوران آن را در بر دارد.

در تعیین شتاب مطلق ناشی از جاذبه برای زمین غیر دوار، می‌توان عبارت $3/382 \times 10^{-2} \cos^2\gamma\ m/s^2$ را به فرمول فوق افزود و آن را با تقریب خوبی محاسبه کرد، که به این ترتیب اثر دوران زمین از بین می‌رود. در شکل ۱-۱ تغییرات مقادیر مطلق و نسبی g با عرض جغرافیایی در شرایط سطح دریا با هم نشان داده شده‌اند.*



شکل ۱-۱

* شما می‌توانید پس از مطالعه حرکت نسبی فصل ۳، این روابط را برای زمین کروی استخراج کنید.

مقدار استاندارد g

مقدار استاندارد بین المللی پذیرفته شده برای شتاب جاذبه نسبت به زمین دوار در سطح دریا و عرض جغرافیایی °۴۵ برابر با m/s^2 ۹/۸۰۶۶۴ و یا ft/sec^2 ۳۲/۱۷۴۰ می‌باشد. این مقدار اندکی با آنچه که از فرمول بین المللی جاذبه در °۴۵ = γ بدست می‌آید، متفاوت است. این اختلاف کوچک به این دلیل است که زمین مطابق فرضی که در فرمول بین المللی جاذبه انجام شده، کاملا بیضی‌وار نیست.

نزدیکی اجرام بزرگ مربوط به عوارض طبیعی و نیز تغییرات در چگالی پوسته زمین اثرات کوچک ولی قابل ملاحظه‌ای را بر مقدار محلی g می‌گذارد. در اغلب مسائل مهندسی که اندازه‌گیریها نسبت به سطح زمین صورت می‌گیرد، از اختلاف بین مقادیر مطلق و نسبی شتاب جاذبه و نیز از اثر تغییرات محلی صرفنظر می‌شود و مقدار g در شرایط سطح دریا در سیستم SI برابر با m/s^2 ۹/۸۱ و در سیستم متداول آمریکایی برابر با ft/sec^2 ۳۲/۲ بکار می‌رود.

وزن ظاهری

نیروی جاذبه‌ای که از طرف زمین به یک جسم به جرم m اعمال می‌شود را به کمک آزمایشهای ساده گرانشی می‌توان تعیین کرد. جسم آزادانه در خلاء رها شده و شتاب مطلقش اندازه گیری می‌شود. اگر نیروی جاذبه یا وزن حقیقی جسمی برابر W باشد، در آن صورت چون جسم با شتاب مطلق g در خلاء سقوط خواهد کرد، از معادله ۱-۱ نتیجه می‌شود:

$$\boxed{W = mg} \tag{۱-۳}$$

وزن ظاهری یک جسم که به کمک یک ترازوی فنری و مدرج برای خواندن نیروی صحیح در سطح زمین انجام می‌شود، از وزن واقعی آن کمتر است. این اختلاف به دلیل دوران زمین می‌باشد. نسبت وزن ظاهری به شتاب ظاهری یا نسبی ناشی از جاذبه نیز مقدار صحیح جرم را به دست می‌دهد. وزن ظاهری و شتاب نسبی جاذبه، کمیتهایی هستند که از طریق آزمایش در سطح زمین اندازه‌گیری می‌شوند.

۱-۶ ابعاد (دیمانسیون)

بعدی نظیر طول را می‌توان بر حسب واحدهای مختلفی همچون متر، میلی‌متر و یا کیلومتر بیان کرد. به این ترتیب کلمه *بعد* از *واحد* متمایز می‌گردد. روابط فیزیکی همواره باید از نظر ابعادی همگن باشند، یعنی بعد تمامی عبارات موجود در یک معادله باید یکسان باشند. معمولا نمادهای L، M، T و F به ترتیب برای طول، جرم، زمان و نیرو بکار می‌رود. در سیستم SI، نیرو یک کمیت بدست آمده از سایر کمیتها می‌باشد. بنابراین معادله ۱-۱ دارای بعد حاصلضرب جرم در شتاب است.

$$F = ML/T^2$$

یکی از کاربردهای مهم نظریه ابعاد، بررسی صحت ابعادی روابط فیزیکی بدست آمده می‌باشد. رابطه زیر برای جسمی با سرعت v و جرم m که توسط نیروی F از حالت سکون به حرکت در آمده و مسیر افقی x را طی کرده، قابل

استخراج است.

$$Fx=\frac{1}{2}mv^2$$

که در آن $\frac{۱}{۲}$ضریب بی بعدی است که در نتیجه انتگرال‌گیری بدست می‌آید. این معادله از نظر ابعادی صحیح است، زیرا با جایگزینیL، M و T داریم:

$$[MLT^{-2}][L]=[M][LT^{-1}]^2$$

همگنی ابعاد، شرط لازم و درستی رابطه است اما شرط کافی نیست. زیرا با این روش درستی ضریب بی بعد قابل بررسی نیست.

۱-۷ حل مسائل دینامیک

مطالعه دینامیک معطوف به درک و تشریح حرکت اجسام است. چنین تشریحی که بخش عمدهٔ آن ریاضی است، توانایی پیش بینی رفتار دینامیکی را فراهم می‌کند. فرمول بندی چنین توصیفی به یک فرآیند فکری دو جانبه نیاز دارد. ضروری است که بر اساس شرایط فیزیکی و نیز بر اساس توصیف ریاضی مرتبط با آن تدبیر لازم اندیشیده شود. تحلیل هر مسئله نیازمند کار فکری مکرر میان فیزیک و ریاضی مسئله است. بی شک یکی از بزرگترین مشکلاتی که دانشجویان با آن مواجه هستند، عدم توانایی در ایجاد این انتقال آزادانه فکر می‌باشد. آنان باید بدانند که فرمولبندی ریاضی یک مسئله فیزیکی، بیانگر توصیف محدود و ایده‌آل آن، یا همان مدل است که مسئله را تقریب می‌زند؛ ولی هیچگاه با شرایط فیزیکی واقعی تطابق ندارد.

در بخش ۸-۱ کتاب *استاتیک*، در مورد روش حل مسائل استاتیکی بحث کردیم. در اینجا برای آشنایی شما برای حل مسائل دینامیکی مطالبی را مطرح می‌کنیم.

تقریب در مدلهای ریاضی

در ساخت یک مدل ریاضی ایده‌آل برای هر مسئله مهندسی، همواره تقریبهای خاصی وجود دارد. برخی از این تقریبها ریاضی و بقیه فیزیکی‌اند. به عنوان مثال، غالبا لازم است که از فواصل، زوایا و نیروهای کوچک در مقایسه با مقادیر بزرگ آنها صرفنظر شود. اگر میزان تغییر سرعت جسم نسبت به زمان تقریبا یکنواخت باشد، آنگاه می‌توان شتاب را ثابت فرض کرد. اگر برهه‌ای از حرکت را نتوان به آسانی و مرتبط با کل آن توصیف کرد، اغلب به پاره‌های کوچک تقسیم می‌شود که هرکدام را می‌توان جداگانه تقریب زد.

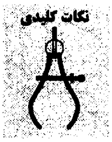
به عنوان مثالی دیگر، از اثر کاهنده اصطکاک یاتاقان در حرکت یک ماشین اغلب می‌توان صرفنظر کرد، در صورتیکه نیروهای اصطکاک آنها در مقابل نیروهای دیگر کوچک باشد. در حالی که اگر منظور، تعیین افت بازده ماشین در اثر فرآیند اصطکاک باشد، دیگر از همین نیروهای اصطکاک نمی‌توان صرفنظر کرد. بنابراین، نوع فرضیات انجام شده به اطلاعات مطلوب و دقت لازم بستگی دارد.

شما باید همواره به دنبال فرضیاتی باشید که در فرمولبندی مسائل واقعی بکار می‌آید. توانایی در درک و بکارگیری فرضیات مناسب در مرحله فرمولبندی و حل مسائل مهندسی مسلما یکی از مهمترین ویژگیهای یک مهندس موفق است.

در راستای گسترش و توسعه اصول و ابزارهای تحلیلی مورد نیاز برای دینامیک جدید، یکی از مهمترین اهداف این کتاب فراهم آوردن بیشترین فرصت، جهت کسب مهارت در فرموله کردن مدلهای مناسب ریاضی است. تاکید زیاد این کتاب بر طیف گسترده‌ای از مسائل عملی است که برای حل آنها نه تنها به تئوری نیاز دارید، بلکه مجبورید فرضیات لازم مربوطه را نیز بسازید.

روش مبادرت به کار حل

همانند تمامی مسائل مهندسی، برای حل مسائل دینامیک یک روش موثر ضروری است. ایجاد یک عادت خوب در فرموله کردن مسائل و بیان راه حل آنها، دارای ارزش فوق العاده‌ای می‌باشد. هر راه حلی، باید برای رسیدن از فرض به حکم یک روال منطقی را طی کند. مراحل زیر در حل مسائل مفید می‌باشد.



۱- فرموله کردن مسئله

a) اطلاعات داده شده را بیان کنید.

b) نتیجه مطلوب را مشخص نمایید.

c) فرضیات و تقریبها را تعیین کنید.

۲- توسعه راه حل

a) ترسیم هر نمودار که احتیاج به فهم روابطش دارید.

b) حاکم کردن اصولی که در حل شما بکار گرفته می‌شود.

c) انجام دادن محاسبات.

d) اطمینان پیدا کنید که محاسبات براساس دقت مناسب داده‌ها انجام گرفته است.

e) مطمئن باشید که از واحدهای سازگار در سراسر محاسباتتان استفاده کرده‌اید.

f) اطمینان پیدا کنید که جوابهایتان از نظر مقدار، جهت و غیره معنادار باشند.

g) استنتاج کردن نتایج.

ارائه کارتان بایستی تمیز و مرتب باشد. این کار باعث کمک به پیشرفت فکری خودتان و قادر ساختن دیگران به درک و فهم کار شما می‌گردد. انضباط در انجام مرتب کار، شما را در بالا بردن مهارتتان در فرموله کردن و تشریح مسائل کمک خواهد کرد. مسائلی که ابتدا مشکل و پیچیده به نظر می‌رسند، با اتخاذ یک روش منطقی و منظم، واضح و سر راست خواهند گردید.

بکار گیری اصول پایه

مبحث دینامیک به طور شگفت انگیز بر پایه چند اصل و مفهوم بنیانی قرار دارد، ولی قابل توسعه بوده و بر گسترهٔ وسیعی از مسائل، قابل اعمال است. یکی از با ارزشترین جنبه‌های مطالعهٔ دینامیک، کسب تجربه از طریق استدلال و بر اساس مبنای آن است. این تجربه تنها از طریق به ذهن سپردن معادلات سینماتیکی و دینامیکی که حرکتهای مختلف را توصیف می‌کنند، بدست نمی‌آید؛ بلکه باید از راه برخورد با گستره‌ای از مسائل با شرایط مختلف حاصل شود و باید با انتخاب، بکارگیری و توسعه اصول اساسی، شرایط داده شده تحقق یابند.

در توصیف روابط بین نیروها و حرکتهای ناشی از آنها ضروری است سیستمی که یک اصل دینامیکی در آن به کار می‌رود به طور کامل و واضح تعریف شود. گاهی سیستم عبارت از ذره و یا یک جسم صلب می‌باشد، در حالیکه در زمانی دیگر، دو یا چند جسم با یکدیگر تشکیل یک سیستم می‌دهند.

تعیین سیستمی که باید تحلیل شود از روی ***ترسیمه آزاد جسم*** انجام می‌شود. این ترسیمه شامل محدودهٔ بسته‌ای از مرز خارجی سیستم تعریف شده می‌باشد. تمام اجسامی که با این سیستم در تماس بوده و به آن نیرو وارد می‌کنند اما بخشی از آن نیستند، حذف شده و به جای آنها بردارهایی گذاشته می‌شود که بیانگر نیروهای وارد بر سیستم هستند. در این روش، بین عمل و عکس العمل هر نیرویی تمایز قائل می‌شویم و تمام نیروهای خارجی وارده بر سیستم را به حساب می‌آوریم. فرض بر این است که همه شما با فن رسیم ترسیمه آزاد جسم در درس استاتیک آشنایی قبلی پیدا کرده‌اید.

حل‌های عددی و نمادی

در هنگام اعمال قوانین دینامیک، مقادیر عددی کمیتها را می‌توان مستقیماً در خلال حل مسئله بکار برد و یا از نمادهای جبری استفاده کرد که بیانگر کمیتهایی هستند که در جواب نهایی به صورت فرمول ظاهر می‌شوند. به هنگام جایگزینی عددی در هر مرحله از محاسبات، اندازه تمام کمیتهایی که بر حسب واحد خاص خودشان بیان شده‌اند، کاملاً مشخص است. این روش هنگامی که مقادیر هر عبارت از اهمیت عملی برخورد می‌شود، دارای مزیت است.

بهرحال حل نمادی مسئله نسبت به حل عددی آن ارجحیت دارد.

۱- استفاده از علائم اختصاری در ایجاد تمرکز بر موقعیت فیزیکی و توصیف ریاضی مرتبط با آن کمک می‌کند.

۲- حل نمادی مسئله این امکان را می‌دهد که در هر مرحله، کنترل ابعادی صورت گیرد. در حالیکه اگر فقط از مقادیر عددی استفاده شود، کنترل همگن ابعاد ممکن نخواهد شد.

۳- از حل نمادی می‌توان در بدست آوردن جوابهای همان مسئله با اعداد و ارقام دیگر مکرراً استفاده کرد.

تسلط بر هر دو راه حل ضروری بوده و انجام تمرینهای فراوانی از هر کدام نیاز است.

روشهای حل

حل معادلات مختلف دینامیک با یکی از سه روش زیر انجام می‌گیرد.

۱- با انجام محاسبات مستقیم می‌توان یک حل دستی ارائه کرد که نهایتاً جواب به صورت نتایج عددی یا نمادهای جبری ظاهر خواهند شد. اکثر مسائل در این طبقه بندی قرار می‌گیرند.

۲- بعضی از مسائل را می‌توان از راه حل ترسیمی ارائه کرد. نظیر مسائل مربوط به تعیین سرعت و شتاب نسبی اجسام صلب در دو بعد.

۳- حل مسئله توسط کامپیوتر، تعدادی از مسائل در این *کتاب دینامیک* تحت عنوان *مسائل کامپیوتری* وجود دارند. آنها در انتهای مجموعه مسائل دوره‌ای می‌آیند که به منظور نشان دادن مزایای ویژه استفاده از کامپیوتر در حل مسائل دینامیکی انتخاب شده‌اند.

انتخاب بهترین روش حل، امری تجربی است که در اثر حل مسائل حاصل می‌شود. تاکید ما بر این است که مهمترین تجربه در فراگیری مکانیک، در فرمولبندی مسائل نهفته است که ذاتاً با حل آنها تفاوت دارد.

دوره فصل

این فصل مفاهیم، تعاریف و آحاد استفاده شده در دینامیک را مطرح ساخته و روش فرموله کردن و حل مسائل دینامیکی را نشان می‌دهد. اکنون با اتمام این فصل، شما تواناییهای زیر را خواهید داشت:

۱- شرح قوانین حرکتی نیوتن

۲- انجام محاسبات با استفاده از سیستمهای آحاد SI و آحاد متداول US

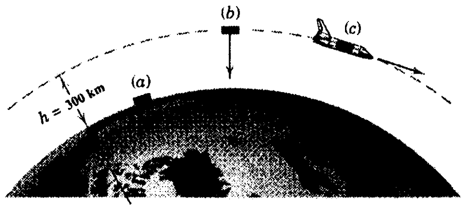
۳- بیان قانون جاذبه و محاسبه وزن یک جسم

٤- تحلیل اثرات ارتفاع و دوران زمین بر روی شتاب ناشی از جاذبه

۵- استفاده اصل همگنی ابعادی با رابطه فیزیکی داده شده

٦- توصیف روشهای علمی استفاده شده برای فرموله کردن و حل مسائل دینامیکی

مسئله نمونه ۱-۱



یک شاتل فضایی یک مدول به جرم ۵۰ kg را موقعی که از روی سطح زمین در عرض جغرافیایی °۴۵ است حمل می‌کند.

a) تعیین کنید وزن مدول را بر حسب نیوتن و پوند و جرم آنرا در روی سطح زمین بر حسب اسلاگ.

b) حال فرض کنید که مدول در ارتفاع ۳۰۰ کیلومتری بالای سطح زمین و بدون سرعت نسبت به مرکز زمین رها می‌گردد. مشخص کنید وزن آنرا در این شرایط برحسب نیوتن و پوند.

c) بالاخره، فرض کنید که مدول بدون حرکت، داخل محفظه شاتل قرار گرفته است. شاتل در مدار مدور، به ارتفاع ۳۰۰ کیلومتری بالای سطح زمین در حرکت است. وزن مدول را برحسب نیوتن و پوند در این شرایط معین کنید.

برای سطح زمین مقدار شتاب ثقل نسبت به زمین دوار (۳۲/۱۷۴ ft/sec^2) $g = \text{۹/۸۰۶۶۵ m/s}^2$ است. برای مقدار مطلق نسبت به زمین غیر دوار از (۳۲/۲۳۴ ft/sec^2) $g = \text{۹/۸۲۵ m/s}^2$ استفاده کنید.

حل: (a) از رابطه ۳-۱، داریم:

❶ جواب $\quad W = (50\ \text{kg})(9.80665\ \text{m/s}^2) = 490\ \text{N} \qquad [W = mg]$

در اینجا از شتاب جاذبه نسبت به زمین دوار استفاده نمودیم، زیرا شرایطی است که مدول در قسمت (a) دارد. با استفاده از جدول تبدیل داخل کتاب ۴/۴۴۸۲ نیوتن معادل یک پوند است. بنابراین، وزن مدول بر حسب نیوتن برابر:

❷ جواب $$W = 490\ \text{N}\left[\frac{1\ \text{lb}}{4.44828\ \text{N}}\right] = 110.2\ \text{lb}$$

بالاخره، جرم آنها بر حسب کیلوگرم:

❸ جواب $$[W = mg] \qquad m = \frac{W}{g} = \frac{110.2\ \text{N}}{32.1740\ \text{ft/sec}^2} = 45.4\ \text{kg}$$

روش دیگر برای بدست آوردن مقدار بالا، می‌توان از تبدیل کیلوگرم به اسلاگ استفاده کرد. دوباره از جدول تبدیل کتاب استفاده کرده و داریم:

$$m = 50\ \text{kg}\left[\frac{1\ \text{slug}}{14.594\ \text{kg}}\right] = 3.43\ \text{slug}$$

یادآوری می‌کنیم ۱ lbm مقدار جرمی است که تحت شرایط استاندارد، وزن یک پوند نیرو را دارد. بندرت در این کتاب از واحد جرم lbm در سیستم آمریکایی استفاده می‌کنیم و بیشتر از اسلاگ به عنوان جرم استفاده می‌گردد.

b) محاسبه شتاب مطلق جاذبه (نسبت به زمین غیر دوار) را در ارتفاع ۳۰۰ کیلومتری شروع می‌کنیم.

$$\left[g = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2}\right] \qquad g_h = 9.825\left[\frac{6371^2}{(6371+300)^2}\right] = 8.96\ \text{m/s}^2$$

وزن در ارتفاع ۳۰۰ کیلومتری به صورت:

جواب $W_h = mg_h = 50(8.96) = 448\ \text{N}$

حال W_h را تبدیل به آحاد پوند می‌نماییم.

جواب $$W_h = 448\ \text{N}\left[\frac{1\ \text{lb}}{4.4482\ \text{N}}\right] = 100.7\ \text{lb}$$

به عنوان راه حل دیگر قسمت (b)، می‌توانیم از قانون جاذبه عمومی نیوتن استفاده کنیم. در آحاد SI داریم:

$$\left[F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}\right] \quad W_h = \frac{Gm_em}{(R+h)^2} = \frac{[6.673(10^{-11})][5.976(10^{24})][50]}{[(6371+300)(1000)]^2}$$
$$= 448\ \text{N}$$

می‌توان نتیجه گرفت وزن مدول وقتی در ارتفاع ۳۰۰ کیلومتری می‌باشد، تقریبا ۹۰٪ وزن در سطح زمین است. مطالعه اثرات این وزن روی حرکت مدول را در فصل ۳ خواهیم داشت.

c) وزن جسم (نیروی جاذبه کششی) رابطه‌ای با حرکت جسم ندارد. بنابراین جواب برای قسمت (c) همان است که در قسمت (b) داشتیم.

جواب $W_h = 448\ \text{N}$ یا $100.7\ \text{lb}$

نکات مفید

❶ نتیجه محاسبه با ماشین حساب ۴۹۰/۳۳۲۵ نیوتن را می‌دهد که ما در اینجا عدد را به سه رقم گرد نمودیم (یعنی ۴۹۰ نیوتن). در واقع عدد ا را به جای چهار رقم اعشار آوردیم.

❷ یک روش خوب برای تبدیل واحد، ضرب در واحدی مانند $\left[\frac{1\ \text{lb}}{۴/۴۴۸۲\ \text{N}}\right]$ می‌باشد که مقدار ۱ دارد. زیرا صورت و مخرج کسر معادل هستند. مطمئن شوید که حذف واحدها، واحد دلخواه را بدهد. در اینجا واحدهای N حذف و واحد lb باقی می‌ماند.

❸ توجه داشته باشید که از نتیجه قبلی (۱۱۰/۲ lb) استفاده نمودیم. در استفاده از ماشین حساب بایستی دقت شود که محاسبات در حافظه آن با دقت قرار گیرد و در موقع لزوم از آن استفاده نمود. مثلا (۱۱۰/۲۲۳۱۶) در حافظه قرار گیرد نه اینکه بدون استفاده از آن ۱۱۰/۲ را وارد ماشین حساب کرده و بر ۳۲/۱۷۴۰ تقسیم نمود. این کار دقت عمل را پایین می‌آورد.

این مثال نمونه، در حذف بعضی از اصطلاحات غلط که رایج است کمک می‌کند. اول اینکه جسمی که در شاتل در ارتفاع بالا می‌رود، بی وزن نیست و این حقیقت است که جسمی که بدون سرعت نسبت به مرکز زمین رها گردد در روی مدار شاتل یا در مسیر دلخواهمان قرار می‌گیرد. ثانیا شتاب جاذبه در این ارتفاع صفر نیست. تنها روش کم کردن شتاب جاذبه و وزن متناظر جسم و به صفر رساندن آن قرار دادن آن در فاصله بی‌نهایت از زمین است.

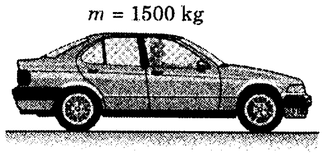
مسائل

(برای داشتن مقادیر مربوط به منظومه شمسی به جدول D-۲ در پیوست D مراجعه کنید)

۱-۱ وزن اتومبیلی که دارای جرم ۱۵۰۰ kg است، بر حسب نیوتن معین کنید. جرم اتومبیل را به اسلاگ تبدیل کرده و وزن متناظر آنرا بر حسب پوند محاسبه کنید.

جواب $m =$ ۱۰۲/۸ اسلاگ و $W =$ ۳۳۱۰ lb

$W =$ ۱۴۷۲۰ N



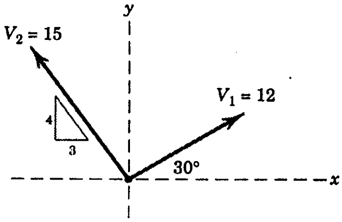
شکل مسئله ۱-۱

۱-۲ اگر جرم مردی ۸۰ کیلوگرم باشد، وزن او را بر حسب نیوتن حساب کنید و جرم متناظر را بر حسب اسلاگ بدست آورید.

۱-۳ جرم یک دوجین سیب ۲ kg است. وزن متوسط یک سیب را در هر دو سیستم آحاد SI و U.S. معین کنید. در این مورد، «حساب سرانگشتی» وزن هر سیب به طور متوسط ۱ N می‌باشد تا چه حد کاربردی است.

جواب $W =$ ۱/۶۳۵ N و $W =$ ۰/۳۶۸ lb

۱-۴ برای بردارهای مشخص شده $\mathbf{V}_1$ و $\mathbf{V}_2$، مطلوبست محاسبه V_1+V_2، $\mathbf{V}_1+\mathbf{V}_2$، $\mathbf{V}_1-\mathbf{V}_2$، $\mathbf{V}_1\times\mathbf{V}_2$ و $\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{V}_2$. فرض کنید این بردارها بدون بُعد هستند.

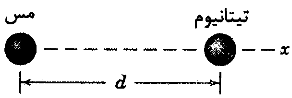


شکل مسئله ۱-۴

۱-۵ دو گوی به قطر ۱۰۰mm که از جنس‌های مختلف هستند در اعماق فضا قرار گرفته‌اند. معین کنید نیروی جاذبه $\mathbf{F}$ که گوی مسی به گوی تیتانیوم وارد می‌کند، اگر (الف) $d =$ ۲ m و (ب) $d =$ ۴ m باشد.

جواب (الف) $\mathbf{F} = -1/255(10^{-10})\mathbf{i}$ N

(ب) $\mathbf{F} = -3/14(10^{-11})\mathbf{i}$ N



شکل مسئله ۱-۵

۱-۶ یک شاتل فضایی در ارتفاع ۲۵۰ km در یک مدار مدور قرار دارد، مقدار مطلق g را در این ارتفاع محاسبه کرده و وزن واقعی متناظر فضانورد شاتل را که وزنش در سطح زمین در عرض جغرافیایی ۴۵° برابر ۸۸۰ N است، بدست آورید. آیا اصطلاحات «g صفر» و «بی وزنی» که بعضی اوقات برای تشریح شرایط داخل فضاپیما در مدارش بکار می‌رود، از نظر معنا مطلق درست هستند.

۱-۷ در چه ارتفاع h، بالای قطب شمال وزن یک جسم به نصف وزن آن در سطح زمین کاهش می‌یابد؟ زمین را کره‌ای به شعاع R فرض کرده، h را بر حسب R بیان نمایید.

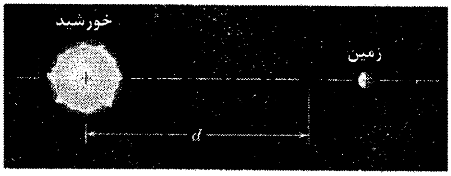
جواب: $h =$ ۰/۴۱۴ R

۱-۸ وزن مطلق و وزن نسبی مردی به جرم ۹۰ kg را که بر سطح زمین در عرض جغرافیایی ۴۰° ایستاده است را نسبت به زمین دوار بدست آورید.

۱-۹ نیروی F_s اعمال شده از طرف خورشید را بر مردی به جرم ۹۰ kg که روی سطح ماه ایستاده حساب کنید. F_s را با نیروی F_m که از طرف ماه به وی وارد می‌شود مقایسه کنید.

جواب: $F_s =$ ۰/۵۳۴ N و $F_m =$ ۱۴۶ N

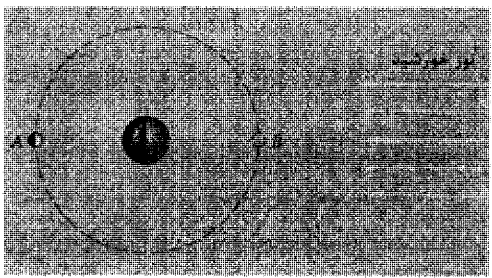
۱-۱۰ فاصله d یک ذره را نسبت به مرکز خورشید چنان حساب کنید که جاذبه خورشید و زمین بر آن یکسان باشد. ذره بر روی خطی که مراکز زمین و خورشید را به هم وصل می‌کند قرار دارد. دو پاسخ را از نظر فیزیکی توجیه نمایید.



شکل مسئله ۱۰-۱

۱-۱۱ معین کنید R_A ، نسبت نیروی اعمال شده توسط خورشید بر ماه به نیروی اعمال شده توسط زمین بر ماه را برای موقعیت Aی ماه. همین عمل را برای موقعیت Bی ماه تکرار کنید.

جواب: $R_A =$ ۲/۱۹ و $R_B =$ ۲/۲۱



شکل مسئله ۱۱-۱

۱-۱۲ معادله زیر را از نظر همگنی ابعادی بررسی نمایید.

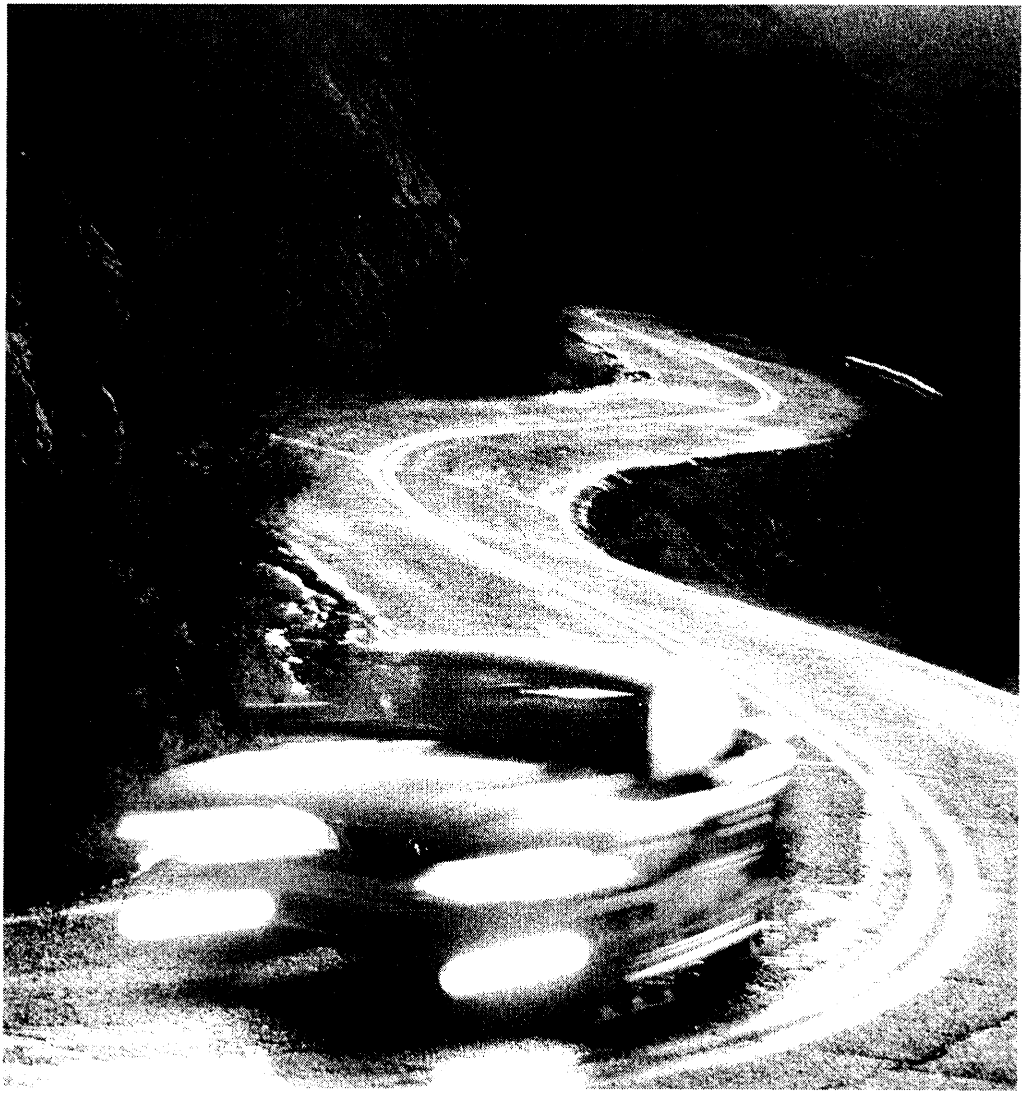
$$m\upsilon = \int_{t_1}^{t_2} (F\cos\theta)dt$$

که در آن m جرم، υ سرعت، F نیرو، θ یک زاویه و t زمان است.

فصل دوم

سینماتیک ذرات

فهرست مطالب



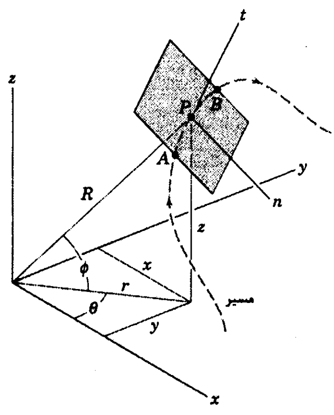
حتی اگر این اتومبیل سرعت خود را در جاده مارپیچی ثابت نگه دارد، شتاب جانبی خواهد داشت و این شتاب بایستی در طراحی و خود جاده مد نظر قرار گیرد.

۱-۲ مقدمه

سینماتیک شاخه‌ای از دینامیک است که حرکت اجسام را بدون اشاره به نیروهای عامل حرکت توصیف می‌کند. غالباً از سینماتیک به عنوان «هندسه حرکت» یاد می‌کنند. طراحی بادامکها، چرخ دنده‌ها، مکانیزمهای میله‌ای و سایر اجزاء ماشین برای کنترل یا ایجاد حرکات خاص و محاسبه مسیر پرواز هواپیماها، راکتها و فضاپیماها مثالهایی از مسائل سینماتیکی است که مورد استفاده مهندسان واقع می‌شود. آشنایی کامل در مورد سینماتیک، مقدمه‌ای لازم جهت سینتیک است که رابطه بین حرکت و نیروهای متناظری که باعث حرکت می‌شوند را مطالعه می‌کند.

حرکت ذره

در این فصل مطالعه سینماتیک را ابتدا با حرکت نقاط یا ذرات مادی آغاز کرده و آن را بسط می‌دهیم. یک ذره جسمی است که از نظر ابعاد فیزیکی در مقایسه با شعاع انحنای مسیرش، آن قدر کوچک است که می‌توانیم حرکت آنرا مانند حرکت یک نقطه در نظر بگیریم. به عنوان مثال فاصله دهانه بالهای یک هواپیمای جت که بین لوس‌آنجلس و نیویورک در پرواز است، در مقایسه با شعاع انحنای مسیر پروازش ناچیز است به طوری که اگر هواپیما را به صورت یک ذره در نظر بگیریم سئوالی را بر نمی‌انگیزد.



شکل (۱-۲)

برای توصیف حرکت ذره روشهای متعددی را می‌توان یافت و انتخاب مناسب‌ترین آنها به تجربه زیاد و چگونگی داده‌های موجود بستگی دارد. حال به چند روش که در این فصل بسط داده خواهد شد نگاهی گذرا می‌اندازیم. شکل ۱-۲ حرکت ذره P در فضا را در یک مسیر کلی نشان می‌دهد.

اگر ذره در یک مسیر خاص هدایت شده باشد، مانند مهره‌ای که در امتداد سیمی ثابت می‌لغزد، حرکت را *مقید* نامند. اگر هیچ نوع هادی فیزیکی وجود نداشته باشد، حرکت را *نامقید* می‌خوانند. سنگ کوچکی که به انتهای نخی بسته و چرخانده می‌شود، حرکت مقید دارد و پس از پاره شدن نخ، حرکت نامقید می‌شود.

انتخاب مختصات

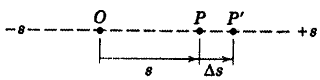
موقعیت ذره P در هر لحظه t را می‌توان توسط مختصات قائم (کارتزین)* x، y و z یا مختصات استوانه‌ای r، θ و z و یا مختصات کروی R، θ و ϕ توصیف نمود. همچنین حرکت P بوسیله اندازه‌گیری‌ها در امتداد مماس منحنی، t و عمود بر منحنی، n قابل تشریح است. جهت n به صفحه محلی منحنی بستگی دارد**. این دو معیار اندازه‌گیری، به «متغیرهای مسیری» معروفند.

حرکت ذرات (یا اجسام صلب) را می‌توان با استفاده از مختصاتی که نسبت به محورهای ثابت سنجیده می‌شوند، تشریح نمود (تحلیل حرکت *مطلق*) و یا با بهره‌گیری از مختصات نسبت به محورهای متحرک (تحلیل حرکت *نسبی*) توصیف کرد. هر دو نوع توصیف در بخشهای بعدی تشریح و بکار گرفته خواهد شد.

در قسمت نخست این فصل با این تصویر از تشریح حرکت ذره در ذهن، توجه خود را به حالتی از حرکت در *صفحه* معطوف می‌کنیم که در این حالت همه حرکتها در یک صفحه رخ داده یا می‌توان آنها را روی یک صفحه نمایش داد. بخش عمده‌ای از حرکات ماشینها و سازه‌ها در مهندسی را می‌توان توسط حرکت در صفحه، معرفی نمود. بعداً در فصل ۷، مقدمه‌ای از حرکت سه بعدی نشان داده خواهد شد. در رابطه با حرکت در صفحه بحث خود را با حرکت *مستقیم الخط* آغاز می‌کنیم که حرکت روی یک خط راست انجام گرفته؛ سپس حرکت منحنی الخط در صفحه را تشریح خواهیم کرد.

۲-۲ حرکت مستقیم الخط

ذره P را که در امتداد یک خط مستقیم حرکت می‌نماید در نظر بگیرید (شکل ۲-۲). موقعیت P در هر لحظه از زمان t توسط فاصله s آن از یک مبدا ثابت O در روی خط مشخص می‌گردد. در زمان $t+\Delta t$ ذره به P' حرکت نموده و مختصاتش به $s+\Delta s$ می‌رسد. تغییرات موقعیت مختصات در فاصله زمانی Δt را جابجایی Δs ذره می‌نامند. اگر ذره در جهت منفی s حرکت کند، جابجایی باید منفی باشد.



شکل (۲-۲)

سرعت و شتاب

سرعت متوسط ذره در مدت زمان Δt از تقسیم جابجایی بر مدت زمان آن بدست می‌آید یا $v_{av}=\Delta s/\Delta t$. اگر Δt کوچکتر شده و به سمت صفر میل نماید، سرعت متوسط به *سرعت لحظه‌ای* ذره نزدیک می‌گردد که عبارت است از $v=\lim_{\Delta t\to 0}\Delta s/\Delta t$ یا:

$$\boxed{v=\frac{ds}{dt}=\dot{s}} \qquad (۲-۱)$$

---

* اغلب مختصات کارتزین را مختصات دکارتی می‌نامند که نام یک ریاضیدان فرانسوی است که هندسهٔ تحلیلی را وضع نمود.

** این صفحه به صفحه «بوسان» معروف است و صفحه‌ای است که شامل P و دو نقطه A و B در دو طرف P می‌باشد و با نزدیک شدن فاصله نقاط به سمت صفر، صفحه مزبور به صفحه «بوسان» تبدیل می‌گردد.

بنابراین، سرعت، آهنگ تغییرات زمانی مختصات موقعیت s می‌باشد. سرعت مثبت یا منفی بستگی به جابجایی مثبت یا منفی دارد.

شتاب متوسط یک ذره در طی مدت زمان Δt از تقسیم تغییرات سرعت بر زمان آن تغییرات بدست می‌آید یا $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. اگر Δt کوچکتر شده و به سمت صفر میل نماید، شتاب متوسط به *شتاب لحظه‌ای* ذره تبدیل می‌گردد که عبارت است از: $a = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$ یا:

$$\boxed{a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}} \quad \text{یا} \quad \boxed{a = \frac{dv}{dt} = \dot{v}} \qquad (۲-۲)$$

با افزایش یا کاهش سرعت، شتاب مثبت یا منفی خواهد بود. توجه داشته باشید که شتاب می‌تواند مثبت باشد، اگرچه سرعتش منفی بوده و در حال کاهش میزان منفی بودن باشد. اگر سرعت ذره در حال کاهش باشد، حرکت آن *کند شونده* است. چنانکه در حرکت منحنی الخط در بخش ۳-۲ خواهیم دید، سرعت و شتاب کمیتهای برداری هستند. در حرکت مستقیم الخط که در این بخش مطالعه می‌شود (به طوری که مسیر حرکت روی یک خط مستقیم قرار دارد) جهت بردار در امتداد مسیر توسط علامت مثبت یا منفی مشخص می‌گردد. در بحث حرکت منحنی الخط علاوه بر تغییرات اندازه بردارهای سرعت و شتاب، تغییرات جهت این بردارها نیز مورد نظر خواهند بود.

با حذف dt بین معادله ۲-۱ و اولین معادله ۲-۲ معادله دیفرانسیلی بدست خواهد آمد که تغییر مکان، سرعت و شتاب را با هم مرتبط می‌سازد*.

$$\boxed{\dot{s}\, d\dot{s} = \ddot{s}\, ds} \quad \text{یا} \quad \boxed{v\, dv = a\, ds} \qquad (۲-۳)$$

معادلات ۱-۲، ۲-۲ و ۳-۲ معادلات مختلف حرکت مستقیم الخط یک ذره‌اند. مسائل حرکت مستقیم الخط که شامل تغییرات محدود در متغیرهای حرکتی‌اند، با انتگرال گیری از این روابط دیفرانسیلی بنیادین حل می‌گردند.

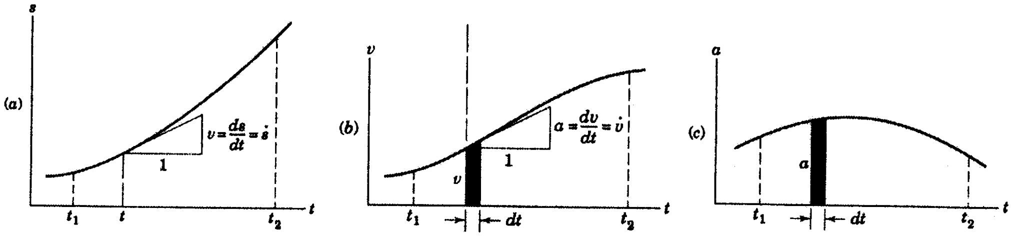
جابجایی s، سرعت v و شتاب a کمیتهای جبری بوده و بنابراین باید علامتهای آنها یعنی مثبت و یا منفی بودنشان با دقت در نظر گرفته شود. توجه کنید که جهت مثبت برای v و a همانند جهت مثبت s می‌باشد.

روش ترسیمی

اگر روابط بین s، v، a و t به صورت ترسیمی ارائه شوند، تحلیل معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت مستقیم الخط به طور قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. شکل ۳a-۲ تغییرات s را بر حسب t از زمان t_1 تا t_2 در یک حرکت مستقیم الخط مفروض به صورت شمایی نشان می‌دهد. با رسم مماس بر منحنی در هر زمان t و بدست آوردن شیب آن، سرعت یا $v = ds/dt$ حاصل می‌شود. بنابراین سرعت در تمامی نقاط منحنی به ترتیب تعیین و رسم آن بر حسب زمان مسانند شکل

* کمیتهای دیفرانسیلی را می‌توان مانند کمیتهای جبری ضرب و تقسیم کرد.

۲-۳b انجام می‌گردد. به همین ترتیب، شیب dv/dt از منحنی v - t در هر لحظه، شتاب لحظه‌ای را می‌دهد و سپس منحنی a-t به صورت شکل ۲-۳c بدست خواهد آمد.



شکل ۳-۲

حال با توجه به شکل ۲-۳b، سطح زیر منحنی v - t در مدت زمان dt یعنی $v\,dt$ مطابق رابطه ۱-۲ برابر با جابجایی ds می‌گردد. در نتیجه، جابجایی خالص ذره در مدت زمان بین t_1 تا t_2 برابر سطح زیر منحنی متناظر آن است.

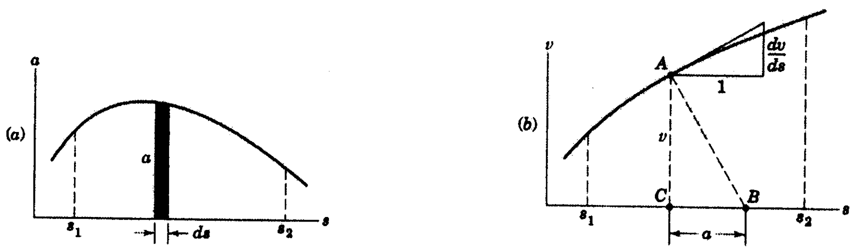
$$\int_{s_1}^{s_2} ds=\int_{t_1}^{t_2} v dt \qquad \text{یا} \qquad s_2\ \ s_1 = (\text{سطح زیر منحنی } v\text{ - }t)$$

به همین ترتیب، در شکل ۲-۳c ملاحظه می‌شود که سطح زیر منحنی a-t در فاصله زمانی dt برابر adt است که با توجه به اولین رابطه ۲-۲ مساوی با dv است. بنابراین تغییرات خالص سرعت بین t_1 و t_2 با سطح زیر منحنی متناظر آن برابر می‌گردد.

$$\int_{v_1}^{v_2} dv=\int_{t_1}^{t_2} adt \qquad \text{یا} \qquad v_2\ \ v_1 = (\text{سطح زیر منحنی } a\text{-}t)$$

در اینجا دو رابطه ترسیمی دیگر نیز مورد توجه می‌باشند. موقعی که شتاب a برحسب موقعیت s مطابق شکل ۲-٤a رسم شده باشد، سطح زیر منحنی طی جابجایی ds یعنی $a\,ds$ ، مطابق رابطه ۳-۲ برابر با $v\,dv = d\left(v^۲/۲\right)$ می‌گردد. بنابراین سطح خالص زیر منحنی بین دو موقعیت s_1 و s_2 برابر است با:

$$\int_{v_1}^{v_2} v\,dv=\int_{s_1}^{s_2} a\,ds \qquad \text{یا} \qquad \frac{1}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right)= (\text{سطح زیر منحنی } a\text{-}s)$$



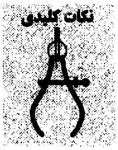
شکل (۴-۲)

هنگامی که سرعت v به عنوان تابعی از s رسم شود، شکل ۲-٤b، شیب منحنی در هر نقطه مانند A برابر با dv/ds است. با رسم عمود AB بر منحنی در این نقطه، از تشابه مثلثها ملاحظه می‌شود که $\overline{CB}/v = dv/ds$ است. بنابراین بر اساس رابطه ۳-۲ در مورد شتاب، $\overline{CB}=v\left(dv/ds\right)=a$ لازم است که محورهای مختصات سرعت و جابجایی با یک مقیاس رسم

گردند تا شتابی که در مقیاس جابجایی بر حسب متر یا فوت خوانده می‌شود، نمایانگر شتاب واقعی و بـر حسـب مـتر (یـا فوت) بر مجذور ثانیه گردد.

نمایشهای ترسیمی فوق نه تنها در مشاهده روابط بین کمیتهای مختلف مفید می‌باشد، بلکه در تخمین نتـایج توسـط مشتق یا انتگرال‌گیری ترسیمی نیز قابل استفاده است، به خصوص هنگامی که عدم اطـلاع از روابـط ریـاضی مـانع از بیـان کمیتهای حرکت به صورت یک تابع مشخص ریاضی باشد. داده‌های تجربی و حرکت‌هایی که شامل رابطه‌های ناپیوسته بین متغیرها می‌باشند، غالباً به روش ترسیمی تحلیل می‌شوند.

تحلیل انتگرالی



اگر مختصه موقعیتی s به ازای تمام مقادیر زمانی معلوم باشد، مشتق گیری متوالی ریاضی یـا ترسیمی نسبت به t، به ترتیب، سرعت v و شتاب a را خواهد داد. در بسیاری از مسائل، رابطه بین جابجایی و زمان مجهول بوده و بایستی با انتگرال‌گیری متوالی از شتاب بدسـت آیـد. شـتاب را بـا استفاده از نیروهای وارد بر جسم در حال حرکت و از روابط سینتیکی توصیف شده در فصول آتـی می‌توان بدست آورد. شتاب را می‌توان، بسته به ماهیت نیروها، برحسـب تـابعی از زمـان، سـرعت، جابجایی یا ترکیبی از این توابع مشخص کرد. روش انتگرال‌گیری از معادله دیفرانسیل در هر حالت به صورت ذیل می‌باشد.

(a) شتاب ثابت: هنگامیکه a ثابت است، از اولین رابطه معادلات ۲-۲ و ۳-۲، می‌تـوان مسـتقیماً انتـگرال گرفـت. برای ساده شدن مسئله فرض می‌شود که شرایط اولیه حرکت $s = s_0$ ، $v = v_0$ و $t = 0$ باشد. بنابراین پس از گذشت زمـان t ، معادله انتگرال‌گیری شده به صورت زیر در می‌آید.

$$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt \qquad \text{یا} \qquad v = v_0 + at$$

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = a\int_{s_0}^{s} ds \qquad \text{یا} \qquad v^2 = v_0^2 + 2a(\qquad {}_0)$$

با قرار دادن v از روابط فوق در معادله ۱-۲ و انتگرال‌گیری از آن نسبت به زمان t:

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + at)dt \qquad \text{یا} \qquad s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

این روابط الزاماً در حالت خاصی که شتاب ثابت است، صحت دارد. حدود انتگرالها بستگی به شرایط اولیه و نهایی حرکت داشته و ممکن است در مسائل دیگر با شرایط این مسئله متفاوت باشد. مثلاً شاید بهتر باشد انتگرال‌گیری را بجـای زمان $t = 0$ در زمان t_1 آغاز کنیم.

تذکر: یکی از رایج‌ترین اشتباهاتی که دانشجویان انجام می‌دهند، استفاده از معادلات فوق در مسائلی است که شتاب متغیر دارند و این معادلات در بازه آنها درست نمی‌باشد. زیرا فقط به ازای شتاب ثابت انتگرال‌گیری شده‌اند.

(b) شتاب به عنوان تابعی از زمان، $a = f(t)$: تابع مزبور را در معادله ۲-۲ قرار داده و بنابراین، $f(t) = dv/dt$. با ضرب در dt، متغیرها از هم جدا و انتگرال‌گیری ممکن می‌گردد. بنابراین:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t f(t)dt \qquad \text{یا} \qquad v = v_0 + \int_0^t f(t)dt$$

برای تعیین جابجایی s، از رابطه فوق که v را به صورت تابعی از t می‌دهد، از معادله ۱-۲ استفاده نموده و پس از انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t v dt \qquad \text{یا} \qquad s = s_0 + \int_0^t v dt$$

اگر از انتگرال‌گیری نامعین استفاده شود، ثابتهای انتگرال‌گیری از شرایط انتهایی بدست آمده و نتایج حاصله، با نتایج ناشی از انتگرال‌گیری معین یکسان خواهند بود.

در صورت نیاز، می‌توان جابجایی s را مستقیماً از حل معادله دیفرانسیل درجه دوم $\ddot{s} = f(t)$ بدست آورد که از قرار دادن $f(t)$ در معادله دوم ۲-۲ حاصل می‌گردد.

(c) شتاب به عنوان تابعی از سرعت، $a = f(v)$: با قرار دادن تابع در اولین معادله ۲-۲ خواهیم داشت: $f(v) = dv/dt$. با جداسازی متغیرها و انتگرال‌گیری از آن نتیجه می‌شود:

$$t = \int_0^t dt = \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{f(v)}$$

نتیجه بالا t را بر حسب v می‌دهد. سپس لازم است v را بر حسب زمان مشخص نموده و با استفاده از معادله ۱-۲ و انتگرال‌گیری از آن، جابجایی s بر حسب t بدست آید.

همچنین، تابع $a = f(v)$ را می‌توان در معادله ۳-۲ قرار داد. یعنی $v dv = f(v) ds$ گردد. حال متغیرها را از هم جدا کرده و معادله به شکل زیر انتگرال‌گیری شود:

$$\int_{v_0}^{v} \frac{v dv}{f(v)} = \int_{s_0}^{s} ds \qquad \text{یا} \qquad s = s_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{v dv}{f(v)}$$

توجه کنید که این معادله s را بر حسب v می‌دهد که ارتباطی با t ندارد.

(d) شتاب به عنوان تابعی از جابجایی، $a = f(s)$: با قرار دادن تابع در معادله ۳-۲ و انتگرال‌گیری از آن خواهیم داشت:

$$\int_{v_0}^{v} v dv = \int_{s_0}^{s} f(s)ds \qquad \text{یا} \qquad v^2 = v_0^2 + 2\int_{s_0}^{s} f(s)ds$$

سپس v را به صورت تابعی از s ، $v=g(s)$ بدست می‌آوریم. اکنـون می‌توانیـم ds/dt را بـه جـای v قـرار دهیـم. متغیرها را جدا سازیم و به صورت زیر انتگرال بگیریم.

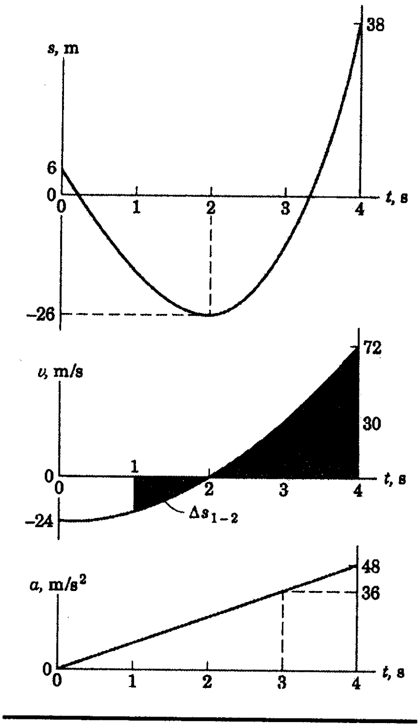
$$\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{g(s)}=\int_{0}^{t}dt \qquad \text{یا} \qquad t=\int_{s_0}^{s}\frac{ds}{g(s)}$$

که t بر حسب s بدست می‌آید. سپس می‌توانیم s را بر حسب تابعی از t بیان کنیم.

درهر یک از حالات فوق، که شتاب به صورت یک تابع تغییر می‌نماید، امکان حل معادله با انتگرال‌گیـری مسـتقیم، بستگی به نوع تابع مزبور دارد. در مواردی که انتگرال‌گیری مستقیم مشکل باشـد، می‌تـوان از انتـگرال‌گیـری بـه روشـهای ترسیمی، عددی و یا کامپیوتری استفاده نمود.

مسئله نمونه ۱-۲

جابجایی ذره‌ای که محدود به حرکت در یک خط مستقیم است، توسط رابطه $s = ۲t^۳ - ۲۴t + ۶$ داده شده که در آن s بر حسب متر از نقطه مرجع مناسبی اندازه‌گیری شده و t بر حسب ثانیه می‌باشد. مطلوب است: (a) زمان لازم که ذره از شرایط اولیه $t = ۰$ برای رسیدن به سرعت ۷۲ m/s نیاز دارد. (b) شتاب ذره هنگامیکه $v = ۳۰$ m/s و (c) جابجایی خالص ذره در فاصله زمانی $t = ۱$ s تا $t = ٤$ s.



حل: سرعت و شتاب توسط مشتق‌گیری متوالی از s نسبت به زمان بدست می‌آیند. بنابراین:

$$[v = \dot{s}] \qquad v = 6t^2 - 24 \ \text{m/s}$$

$$[a = \dot{v}] \qquad a = 12t \ \text{m/s}^2$$

(a) با قرار دادن $v = ۷۲$ m/s در عبارت v یعنی $۷۲ = ٦t^۲ - ۲٤$، از آن $t = \pm ٤$ s بدست می‌آید. ریشه منفی معادله بیانگر جواب ریاضی t قبل از شروع به حرکت بوده و فاقد مفهوم فیزیکی می‌باشد. بنابراین جواب مطلوب عبارت است از:

جواب: $t = 4$ s

(b) با قرار دادن $v = ۳۰$ m/s در عبارت v، یعنی $۳۰ = ٦t^۲ - ۲٤$، ریشه مثبت آن $t = ۳$ s بدست آمده و شتاب متناظر با آن چنین است:

جواب: $a = 12\,(3) = 36 \ \text{m/s}^2$

(c) جابجایی خالص در طی فاصله مذکور برابر است با:

$$\Delta s = s_4 - s_1$$

یا $$\Delta s = [2(4^3) - 24(4) + 6] - [2(1^3) - 24(1) + 6] = 54 \ \text{m}$$

که نمایانگر جابجایی خالص ذره در امتداد محور s از موقعیت متناظر با $t = ۱$ s تا موقعیت $t = ٤$ s می‌باشد.

برای کمک به تجسم حرکت، مطابق شکل، مقادیر s، v و a بر حسب زمان رسم شده‌اند. چون سطح زیر منحنی v-t جابجایی را نشان می‌دهد، ملاحظه می‌شود که جابجایی خالص از $t = ۱$ s تا $t = ٤$ s برابر است با سطح مثبت $\Delta s_{2\text{-}4}$ منهای سطح منفی $\Delta s_{1\text{-}2}$.

نکات مفید

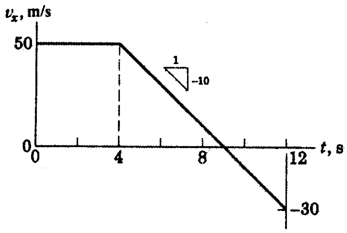
❶ وقتی جذر می‌گیرید، مواظب انتخاب صحیح علامت باشید. هنگامیکه تنها یک جواب خواسته می‌شود، همیشه ریشه مثبت مد نظر نیست.

❷ به تفاوت s ایتالیک برای نشان دادن جابجایی و s معمولی برای نشان دادن واحد ثانیه دقت کامل داشته باشید.

❸ در منحنی دقت داشته باشید که مقدار v ، شیب منحنی s-t ($\dot{s}$) و مقدار a شیب منحنی v-t ($\dot{v}$) می‌باشد.

پیشنهاد: از $v\,dt$ در هر دو فاصله زمانی انتگرال‌گیری و جواب را با Δs مقایسه کنید. نشان دهید که کل مسافت طی شده در فاصله زمانی t = ۱ s تا t = ٤ s برابر ۷٤ m است.

مسئله نمونه ۲-۲



❶ ذره‌ای در t = ۰ از مبدا مختصات با سرعت اولیه v_x = ۵۰ m/s در امتداد محور x شروع به حرکت می‌کند. در ٤ ثانیه اول حرکت، ذره بدون شتاب است و بعد از آن توسط یک نیروی کند کننده شتابی ثابت برابر a_x = −۱۰ m/s^2 پیدا می‌کند. سرعت و جابجایی x ذره را در زمانهای t = ۸ s و t = ۱۲ s پیدا کرده و ماکزیمم جابجایی مثبت x که ذره به آن رسیده است را معلوم کنید.

حل: سرعت ذره پس از t = ٤ s به صورت زیر بدست می‌آید:

❷
$$\left[\int dv = \int a\,dt\right] \qquad \int_{50}^{v_x} dv_x = -10\int_4^t dt \;,\quad v_x = 90 - 10t \;\; \text{m/s}$$

که در شکل رسم شده است. در زمانهای ذکر شده، سرعت ذره عبارت است از:

جواب $t = 8$ s و $v_x = 90 - 10\,(8) = 10$ m/s

$t = 12$ s و $v_x = 90 - 10\,(12) = -30$ m/s

مختصه x ذره در هر زمان بیشتر از ٤ ثانیه، برابر است با مسافت پیموده شده در طی ٤ ثانیه اول بعلاوه مسافت طی شده پس از ایجاد ناپیوستگی در شتاب. بنابراین:

$$\left[\int ds = \int v\,dt\right] \qquad x = 50(4) + \int_4^t (90 - 10t)\,dt = -5t^2 + 90t - 80 \;\; \text{m}$$

برای دو زمان مشخص داریم:

جواب $t = 8$ s و $x = -5\,(8^2) + 90\,(8) - 80 = 320$ m

$t = 12$ s و $x = -5\,(12^2) + 90\,(12) - 80 = 280$ m

جابجایی x در t =۱۲ s کمتر از آن در t = ۸ s است. زیرا پس از t = ۹ s حرکت در جهت منفی محور x انجام می‌گیرد. در اینصورت ماکزیمم جابجایی مثبت x ، مقدار x در t = ۹ s است.

جواب $x_{max} = -\,5\,(9^2) + 90\,(9) - 80 = 325$ m

❸ مشاهده می‌شود که این جابجایی‌ها، مساحت خالص مثبت زیر منحنی v-t تا لحظه مورد نظر t هستند.

نکات مفید

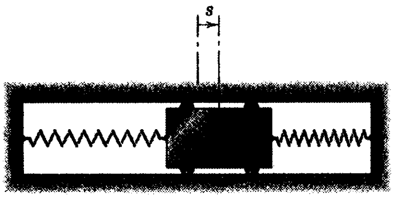
❶ یاد بگیرید که نسبت به نمادها انعطاف پذیر باشید. بکار بردن x به عنوان جابجایی بجای s نیز درست است.

❷ دقت کنید که انتگرال گیری تا زمان کل t انجام شده و سپس مقادیر خاص جایگزین شده‌اند.

❸ نشان دهید که مسافت کل طی شده توسط ذره در مدت ۱۲ ثانیه برابر ۳۷۰ ft می‌باشد.

مسئله نمونه ۳-۲

لغزنده‌ای بین دو فنر در شیار راهنمای افقی، اصطکاک ناچیز حرکت کرده و در لحظه $t = ۰$ که به نیمه راه می‌رسد، $s = ۰$ بوده و سرعت آن $v_۰$ در امتداد s می‌باشد. دو فنر با هم نیروی کند شونده‌ای بر لغزنده وارد می‌کنند که به آن شتابی متناسب با جابجایی، ولی در جهت مخالف، طبق رابطه $a = -k^۲s$ می‌دهد که در آن k عددی ثابت است (ثابت مزبور به صورت اختیاری مجذور گشته تا روابطی که بدست می‌آیند به شکل مناسب‌تری بیان گردند). جابجایی s و سرعت v را بر حسب تابعی از زمان t بیان کنید.



حل I . از آنجا که شتاب بر حسب جابجایی مشخص شده است، از رابطه دیفرانسیلی $v dv = a ds$ ، می‌توان انتگرال گرفت. بنابراین:

❶ $$\int v dv = \int -k^2 s ds + C_1 \text{(ثابت)} \qquad \text{یا} \qquad \frac{v^2}{2} = -\frac{k^2 s^2}{2} + C_1$$

موقعی که $s = 0$ و $v = v_0$ است، $C_1 = v_0^2/2$. در نتیجه:

$$v = +\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}$$

هنگامیکه v مثبت است، علامت رادیکال مثبت در نظر گرفته می‌شود (در جهت مثبت s). با قرار دادن $v = ds/dt$ می‌توان از عبارت فوق انتگرال گرفت. بنابراین:

❷ $$\int \frac{ds}{\sqrt{v_0^2 - k^2 s^2}} = \int dt + C_2 \text{(ثابت)} \qquad \text{یا} \qquad \frac{1}{k}\sin^{-1}\frac{ks}{v_0} = t + C_2$$

از آنجا که در $t = ۰$ ، $s = ۰$ می‌باشد، ثابت انتگرال $C_۱ = ۰$ خواهد بود و می‌توان s را بر حسب t بیان نمود.

جواب $$s = \frac{v_0}{k}\sin kt$$

سرعت از عبارت $v = \dot{s}$ بدست می‌آید.

جواب $$v = v_0 \cos kt$$

حل II . از آنجا که $a = \ddot{s}$ می‌باشد، رابطه داده شده را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\ddot{s} + k^2 s = 0$$

که این یک معادله دیفرانسیلی خطی درجه دوم بوده و جواب آن شناخته شده و برابر است با:

$$s = A\sin Kt + B\cos Kt$$

که در آن A، B و K اعداد ثابتی هستند. این عبارت هنگامی در معادله دیفرانسیل صادق است که $K=k$ باشد. سرعت $\upsilon = \dot{s}$ است. بنابراین:

$$\upsilon = Ak\cos kt - Bk\sin kt$$

شرط اولیه $\upsilon=\upsilon_0$ موقعی که $t=0$ است نتیجه می‌دهد که $A=\upsilon_0/k$ و از شرط $s=0$ در $t=0$ بر می‌آید که $B=0$ باشد. در نتیجه جوابها به صورت زیر است:

❸ جواب $$s=\frac{\upsilon_0}{k}\sin kt \quad \text{و} \quad \upsilon=\upsilon_0\cos kt$$

نکات مفید

❶ *در اینجا از انتگرال‌گیری نامعین استفاده شده و سپس ثابتهای انتگرال‌گیری را بدست آوردیم. برای تمرین، نتایج را از دو انتگرال‌گیری معین با حدود مناسب بدست آورید.*

❷ *در اینجا مانند مورد بالا انتگرال معین را امتحان کنید.*

❸ *این حرکت، حرکت هارمونیک ساده نامیده می‌شود و مشخص کننده تمام نوساناتی است که نیروی بازگرداننده و در نتیجه شتاب، متناسب با جابجایی و مخالف جهت آن می‌باشد.*

مسئله نمونه ۴-۲

❶ موتورهای یک کشتی بارکش که با سرعت ۸ گره دریایی در حرکت است ناگهان از کار می‌افتند. اگر ۱۰ دقیقه طول بکشد تا سرعت کشتی به ٤ knots کاهش یابد، جابجایی s کشتی بر حسب مایل دریایی و سرعت آن بر حسب گرهٔ دریایی را در این فاصله زمانی بر حسب زمان تعیین و منحنی آن را رسم نمایید. شتاب کشتی کند شونده و متناسب با مجذور سرعت می‌باشد، یعنی $a=-k\upsilon^2$.

حل: سرعت و زمان داده شده است؛ در نتیجه می‌توانیم عبارت شتاب را مستقیماً در رابطه اصلی $a=d\upsilon/dt$ قرار داده و انتگرال بگیریم. بنابراین:

$$-k\upsilon^2=\frac{d\upsilon}{dt} \qquad \frac{d\upsilon}{\upsilon^2}=-kdt \qquad \int_8^{\upsilon}\frac{d\upsilon}{\upsilon^2}=-k\int_0^t dt$$

❷ $$-\frac{1}{\upsilon}+\frac{1}{8}=-kt \qquad \upsilon=\frac{8}{1+8kt}$$

حال با قرار دادن مقادیر حدی $\upsilon=4$ knots و $t=\frac{10}{60}=\frac{1}{6}$ ساعت، خواهیم داشت:

جواب $$4=\frac{8}{1+8k(1/6)} \qquad k=\frac{3}{4}\ \text{mi}^{-1} \qquad \upsilon=\frac{8}{1+6t}$$

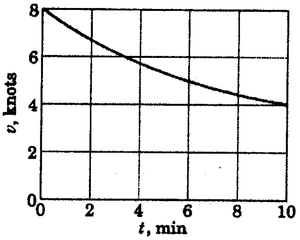
بنابراین سرعت بر حسب زمان مطابق شکل رسم می‌گردد.

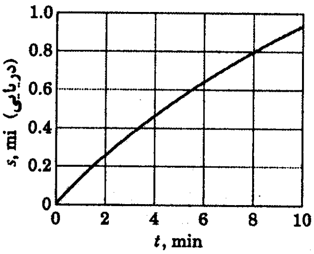
جابجایی را با قرار دادن عبارت υ در تعریف آن یعنی $\upsilon=ds/dt$ و انتگرال‌گیری از آن بدست می‌آوریم. پس:

جواب $\frac{8}{1+6t}=\frac{ds}{dt}$, $\int_0^t \frac{8dt}{1+6t}=\int_0^s ds$, $s=\frac{4}{3}\ln(1+6t)$

جابجایی s همچنین بر حسب زمان t مطابق شکل رسم گردیده و دیده می‌شود که کشتی در فاصله زمانی ۱۰ دقیقه مسافت ذیل را پیموده است.

$$s=\frac{4}{3}\ln\left(1+\frac{6}{6}\right)=\frac{4}{3}\ln 2=0.924 \text{ mi (دریایی)}$$



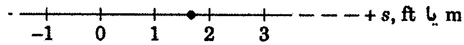


نکات مفید

1. *یادآوری می‌شود که یک گره دریایی، سرعتی برابر با یک مایل دریایی (۱۸۵۲ m) در ساعت است. مستقیماً با آحاد مایل دریایی و ساعت کار کنید.*
2. *انتگرال‌گیری را تا مقدار سرعت کلی v و زمان کل t انجام می‌دهیم تا تغییرات v را بر حسب t بدست آوریم.*

مسائل

مسائل ۱-۲ تا ۷-۲ مربوط به حرکت ذره‌ای است که مطابق شکل زیر در روی محور s حرکت می‌کند.



شکل مسائل ۱-۲ تا ۷-۲

مسائل مقدماتی

۱-۲ سرعت ذره‌ای توسط رابطه $v = 20t^2 - 100t + 50$ داده شده که در آن v بر حسب متر بر ثانیه و t بر حسب ثانیه می‌باشد. سرعت v و شتاب a را بر حسب زمان برای ٦ ثانیه اول حرکت رسم کنید و سرعت را هنگامی که a صفر است معین کنید.

جواب $v = -75$ m/s

۲-۲ جابجایی ذره‌ای توسط رابطه $s = 2t^3 - 30t^2 + 100t - 50$ داده شده است که در آن s بر حسب متر و t بر حسب ثانیه می‌باشد. منحنی‌های جابجایی، سرعت و شتاب ذره را بر حسب زمان برای ۱۲ ثانیه اول حرکت رسم نمایید. همچنین معین نمایید در چه زمانی سرعت صفر می‌گردد.

۳-۲ سرعت ذره‌ای که روی محور s حرکت می‌کند توسط رابطه $v = 2 + 5t^{3/2}$ داده شده است که در آن t بر حسب ثانیه، v بر حسب متر بر ثانیه می‌باشد. معین کنید جابجایی s ، سرعت v و شتاب a را وقتی که $t = 4$ s باشد. ذره در زمان $t = 0$ در موقعیت $s = 0$ می‌باشد.

جواب $s = 72$ m ، $v = 42$ m/s ، $a = 15$ m/s^2

٤-۲ سرعت ذره‌ای در طول محور s توسط رابطه $v = 5s^{3/2}$ داده شده که در آن s بر حسب میلی‌متر و v بر حسب میلی‌متر بر ثانیه است. موقعی که s در ۲ میلی‌متری باشد، شتاب ذره را معین کنید.

۵-۲ موقعیت ذره‌ای بر حسب میلی‌متر توسط رابطه $s = 27 - 12t + t^2$ داده شده که در آن t بر حسب ثانیه است. منحنی‌های s-t و v-t را در ۹ ثانیه اول رسم نمایید. جابجایی Δs را در آن مدت زمان و همچنین جابجایی کل D را در این مدت معین کنید. توسط رابطه s-t چه نتیجه‌ای می‌توانید در رابطه با شتاب بگیرید.

جواب $\Delta s = -27$ mm ، $D = 45$ mm ، $a =$ ثابت

٦-۲ ذره‌ای در حرکت مستقیم الخط دارای سرعت $v = 400 - 16t^2$ می‌باشد که در آن v بر حسب mm/s و t بر حسب ثانیه می‌باشد. مطلوب است محاسبه جابجایی خالص Δs و کل مسافت پیموده شده ذره در فاصله ٦ ثانیه اولیه حرکت.

۷-۲ شتاب ذره‌ای توسط رابطه $a = 4t - 30$ داده شده است که در آن a بر حسب متر بر مجذور ثانیه می‌باشد. سرعت و جابجایی را به صورت تابعی از زمان معین کنید. در $t = 0$ جابجایی اولیه $s_0 = -5$ m و سرعت اولیه $v_0 = 3$ m/s می‌باشد.

جواب $v = 3 - 30t + 2t^2$ m/s

$$s = -5 + 3t - 15t^2 + \frac{2}{3}t^3 \text{ m}$$

۸-۲ راکتی از حالت سکون به طور مستقیم به سمت بالا پرتاب می‌شود. اگر راکت چنان طراحی شده باشد که شتاب ثابت $1.5g$ را حفظ کند، زمان t لازم برای رسیدن آن به ارتفاع ۳۰ km چقدر است و سرعت در این موقعیت را بدست آورید.

۹-۲ اتومبیلی که با سرعت ۸۰ km/h در حرکت است برای توقف کامل مسافت ۳۰ m را طی می‌کند. اگر سرعت اولیه‌اش ۱۱۰ km/h باشد، با همین شتاب ثابت چه مسافتی را طی خواهد کرد تا اینکه کاملاً متوقف گردد؟

جواب $s = 56.7$ m

۲-۱۰ مطلوب است شتاب ثابت a بر حسب g که پرتاب کننده، یک ناو هواپیمابر باید ایجاد کند تا سرعت پرتاب ۳۰۰ km/h را در فاصله ۱۰۰ m تولید کند. فرض کنید ناو در حال سکون باشد.

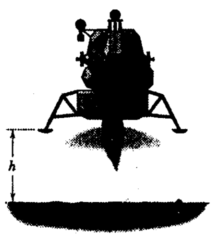
۲-۱۱ خلبان یک هواپیمای جت، قبل از رها کردن ترمزها در حالیکه هواپیما روی باند فرودگاه در حال توقف است، موتورها را به توان ماکزیمم می‌رساند. نیروی رانش ثابت می‌ماند و هواپیما با شتاب تقریباً ثابت $0/4g$ شروع به حرکت می‌کند. اگر سرعت هواپیما در لحظه ترک باند ۲۰۰km/h باشد، مطلوبست محاسبه فاصله s و زمان t از شروع حرکت تا ترک باند فرودگاه.

جواب $s = ۳۹۳$ m ، $t = ۱۴/۱۶$ s

۲-۱۲ یک هواپیمای جت که سرعت فرود آن ۲۰۰km/h است، باید حداکثر با طی مسافت ۶۰۰m، سرعتش را به ۳۰km/h کاهش دهد. شتاب متوسط a هواپیما را در حین ترمزگیری حساب کنید.

۲-۱۳ در مراحل نهایی فرود در ماه، مدول ماه تحت تاثیر نیروی رانش معکوس موتورش تا ارتفاع $h = ۵$ m پایین می‌آید؛ در حالیکه سرعتش در این ارتفاع ۲ m/s می‌باشد. اگر در این نقطه ناگهان موتور فرود از کار بیفتد، سرعت برخورد پایه‌های مدول با سطح ماه را حساب کنید. شتاب جاذبه ماه $\frac{۱}{۶}$ شتاب جاذبه زمین می‌باشد.

جواب $v = ۴/۵۱$ m/s



شکل مسئله ۲-۱۳

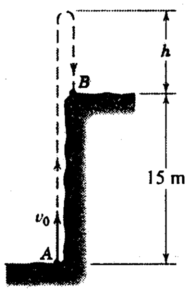
۲-۱۴ پرتابه‌ای با سرعت اولیه ۲۰۰m/s به صورت قائم به طرف بالا شلیک می‌شود. حداکثر ارتفاعی که پرتابه به آن می‌رسد چقدر است؟ چه زمانی طول می‌کشد تا دوباره به زمین برگردد؟ از مقاومت هوا صرفنظر نموده، شتاب ثقل را برابر ۹/۸۱ m/s^2 ثابت فرض کنید.

مسائل ویژه

۲-۱۵ از پایین صخره‌ای به ارتفاع ۱۵ m، از نقطه A توپی با سرعت ۲۵ m/s به صورت قائم به طرف بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع h که توپ از لبه صخره به طرف بالا صعود می‌کند را تعیین کرده و زمان t که توپ از لحظه پرتاب تا B که به بالای صخره برخورد می‌کند را حساب کنید. همچنین سرعت برخورد v_B را تعیین نمایید. از مقاومت هوا و حرکت جزئی افقی توپ صرفنظر کنید.

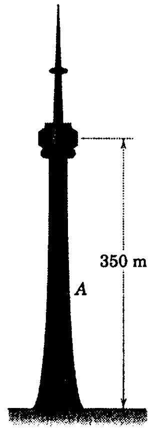
جواب $h = ۱۶/۸۶$ m ، $t = ۴/۴۰$ s

$v_B = ۱۸/۱۹$ m/s به طرف پایین



شکل مسئله ۲-۱۵

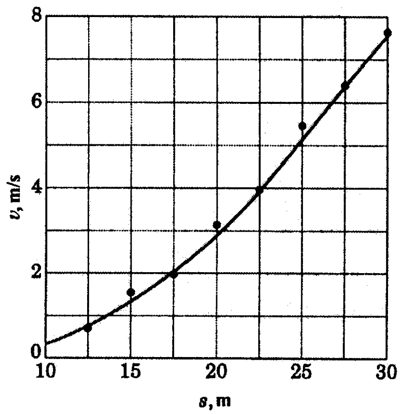
۲-۱۶ آسانسور اصلی A از برج CN در شهر تورنتو حدود ۳۵۰ متر بالا می‌رود که بیشترین فاصله مسیر را با سرعت ثابت ۲۲ km/h می‌پیماید. با فرض اینکه حداکثر و حداقل شتاب $\frac{۱}{۴}g$ باشد، مطلوبست زمان t که آسانسور در راه است.



شکل مسئله ۲-۱۶

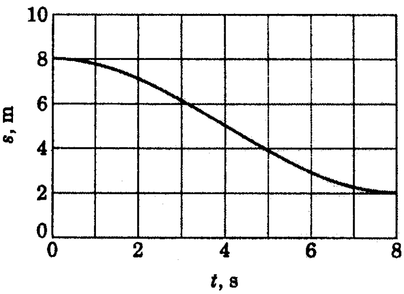
۲-۱۷ نتایج آزمایشی برای حرکت یک ذره روی خط راست، مقادیر اندازه‌گیری شده سرعت v بر حسب مقادیر مختلف s را می‌دهد. مطابق شکل، منحنی ملایمی از میان نقاط رسم شده است. شتاب ذره را موقعی که $s = ۲۰\ \text{m}$ است، تعیین کنید.

جواب $a = ۱/۲\ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۲-۱۷

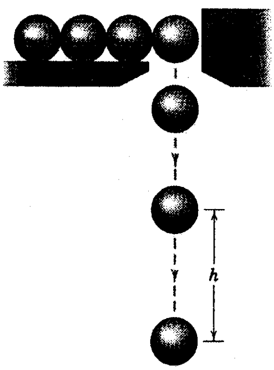
۲-۱۸ شکل نشان داده شده، منحنی جابجایی ـ زمان را برای حرکت مستقیم الخط در بازه زمانی ۸ ثانیه نشان می‌دهد. سرعت متوسط v_{av} را در این بازه زمانی تعیین نموده، با دقت مورد قبولی سرعت لحظه‌ای v را در $t = ٤\ \text{s}$ پیدا کنید.



شکل مسئله ۲-۱۸

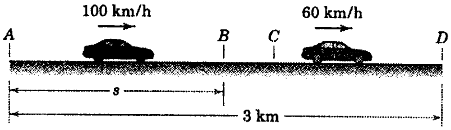
۲-۱۹ گوی‌های فولادی کوچکی از حالت سکون از روزنهٔ A با میزان ثابت دو گوی بر ثانیه سقوط می‌کنند. فاصله قائم h بین دو گوی متوالی را در لحظه‌ای که گوی پایین‌تر مسافت ۳ متر را طی کرده، پیدا کنید. از مقاومت هوا صرفنظر کنید.

جواب $h = ۲/٦۱\ \text{m}$



شکل مسئله ۲-۱۹

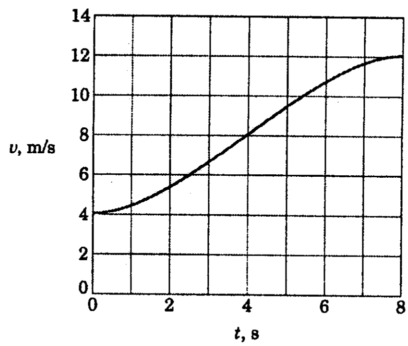
۲-۲۰ در عبور از مسیر ۳ کیلومتری بین نقاط A و D، یک اتومبیل فاصله A تا B را با سرعت ۱۰۰km/h در مدت t ثانیه و فاصله C تا D را با سرعت ۶۰km/h طی همان مدت t ثانیه طی می‌کند. اگر برای کاهش سرعت از B تا C اتومبیل به مدت 4s با شتاب کاهنده ترمز کند، مطلوبست محاسبه t و مسافت s بین A و B.



شکل مسئله ۲-۲۰

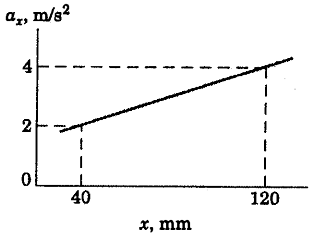
۲-۲۱ در یک بازه زمانی ۸ ثانیه‌ای، سرعت یک ذره که روی یک خط راست حرکت می‌کند. مطابق شکل بر حسب زمان تغییر می‌کند. با دقت قابل قبولی مقدار Δa، افزایش شتاب در $t = ٤$ s با شتاب متوسط در کل بازه را معین کنید. جابجایی Δs در همین بازه چقدر می‌باشد؟

جواب $\Delta a = ٠/٥٠\ m/s^2$ ، $\Delta s = ٦٤$ m



شکل مسئله ۲-۲۱

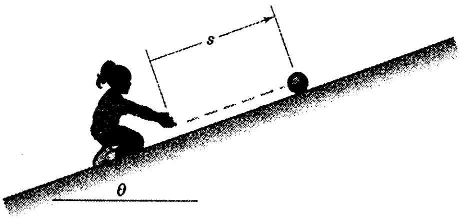
۲-۲۲ شتاب a_x (بر حسب m/s^2) ذره‌ای مطابق منحنی شکل، در یک بازه زمانی از حرکت خود به طور خطی با x (بر حسب میلی‌متر)، افزایش می‌یابد. اگر سرعت ذره در $x = ٤٠$ mm برابر ٠/٤ m/s باشد، سرعت آن را در $x = ١٢٠$ mm معین کنید.



شکل مسئله ۲-۲۲

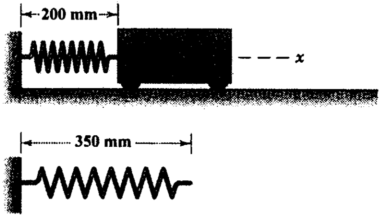
۲-۲۳ دختر بچه‌ای، توپی را در راستای یک سطح شیبدار به سوی بالا غلتانده و منتظر می‌ماند تا توپ به سوی او برگردد. با توجه به زاویه θ و توپ مورد نظر، شتاب توپ در امتداد سطح شیبدار برابر با مقدار ثابت $٠/٢٥g$ به سمت پایین می‌باشد. اگر توپ با سرعت ٤ m/s رها شده باشد، فاصله پیموده شده s تا بالای سطح شیبدار قبل از تغییر جهتش را تعیین کرده و زمان کل t لازم برای بازگشت توپ به دست دختر بچه را حساب کنید.

جواب $s = ٣/٢٦$ m ، $t = ٣/٢٦$ s



شکل مسئله ۲-۲۳

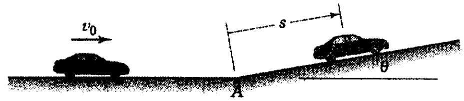
۲-۲٤ فنری به طول ٣٥٠ mm به یک طول ٢٠٠ mm فشرده شده است که در آنجا از حال سکون رها شده و به بلوک لغزنده A شتاب می‌دهد. اگر شتاب اولیه بلوک ١٣٠ m/s^2 باشد و سپس به طور خطی با جابجایی در جهت x کاهش یابد و وقتی به حالت اولیه فنر یعنی طول ٣٥٠ mm می‌رسد، شتابش صفر گردد؛ مطلوبست زمان t تا بلوک (الف) ٧٥ mm و (ب) ١٥٠ mm را بپیماید.



شکل مسئله ۲-۲۴

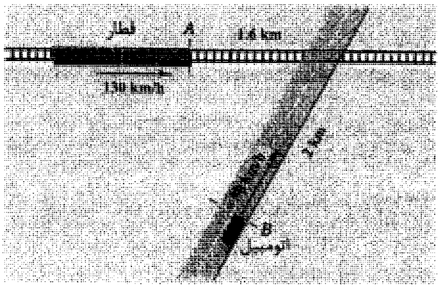
۲-۲۵ اتومبیلی بـا سـرعت ثـابت $v_0 = ۱۰۰$ km/h در بخش مسطح جاده در حال عبور است. موقع رسیدن به سـطح شیبدار ٦ درصد ($\tan\theta = \frac{۶}{۱۰۰}$)، راننده سرعت خـود را تغییـر نداده و در نتیجه خودرو با شتاب کاهنده و ثـابت $g\ \sin\theta$ بـه حرکت خود ادامــه می‌دهـد. تعییـن کنیـد سـرعت اتومبیـل را (الف) ۱۰ ثانیه پـس از عبـور از نقطـه A و (ب) هنگامی کـه $s = ۱۰۰$ m است.

جواب (ب) $v = ۲۵/٦$ m/s ، (الف) $v = ۲۱/۹$ m/s



شکل مسئله ۲-۲۵

۲-۲٦ قطاری که با سرعت ۱۳۰ km/h حرکت می‌کند، در نقطه A ترمز کرده، با شتاب ثابت از سرعت خـود می‌کـاهد به طریقی که در نقطه‌ای به فاصله ۰/۸ km از نقطه A سـرعتش بـه ۹٦ km/h می‌رسـد. اتومبیلـی بـــا ســرعت ۸۰ km/h در لحظه‌ای که قطار بـــه A می‌رسـد، از نقطـه B عبـور می‌نمـاید. راننده اتومبیل جهت سبقت گرفتن از قطار و گذشتن از تقاطع، پای خود را روی پدال گاز می‌فشارد. شتاب ثابت اتومبیـل a را طوری محاسبه کنید کـه اتومبیل ٤ s قبـل از قطـار بـه تقـاطع برسد. همچنین سرعت اتومبیل را در محل تقاطع حساب کنید.



شکل مسئله ۲-۲۶

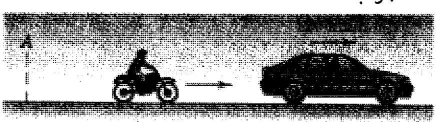
۲-۲۷ ذره‌ای در راستای محور x با شتاب ثابت حرکت می‌کنـد. در هنـگام $t = ۰$ ، $x = ٤$ m و $\dot{x} = ۳$ m/s می‌باشـد. همچنین موقعی کـه $t = ٤$ s ، مقـدار جابجـایی x بـه حداکثـر رسیده است. x_{max} و مقـدار x را در زمـان $t = ۱۲$ s مشـخص کنید. منحنی x را بر حسب t رسم کنید.

جواب $x_{max} = ۱۰$ m ، $x_{۱۲} = -۱٤$ m

۲-۲۸ یک راکت یک طبقه به حالت عمودی از حـالت سکون پرتاب گشته و نیروی رانش طوری برنامه ریزی شده که راکت را با شتاب ثابت ٦ m/s^2 به طرف جلو حرکت دهد. اگر سوخت راکت ۲۰ ثانیه پس از پرتــاب قطـع گردد، مطلوبسـت محاسبه سرعت ماکزیمم v_m و ماکزیمم ارتفاع h که راکـت بـه آن دست می‌یابد.

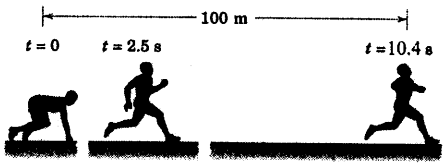
۲-۲۹ یـک پلیـس موتـور سـوار راهنمـایی از حـالت سکون از نقطه A ، ۲ ثانیه پس از اینکه یک اتومبیل از آن نقطه عبور کرد، شروع به حرکت می‌کند. سـرعت ثـابت اتومبیـل در لحظه عبور از A برابر ۱۲۰ km/h می‌باشد. اگر پلیس با مـیزان ٦ m/s^2 شتاب بگیرد تا به حداکـثر سـرعت مجـاز ۱۵۰ km/h برسد و این سرعت را حفظ کند، در چه فاصله s از نقطـه A، پلیس اتومبیل را خواهد گرفت.

جواب $s = ۹۱۲$ m



شکل مسئله ۲-۲۹

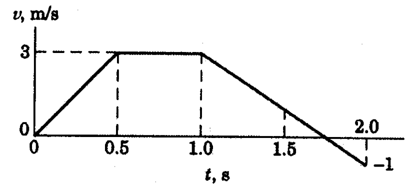
۲-۳۰ دونده‌ای ظرف مدت ۲/۵ ثانیه از حالت سکون با شتاب ثابت به حداکثر سرعت v_{max} می‌رسد. سپس این سرعت را حفظ کرده و مسافت ۱۰۰ متر را در مدت ۱۰/۴۰ s به پایان می‌رساند. ماکزیمم سرعت v_{max} او را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲-۳۰

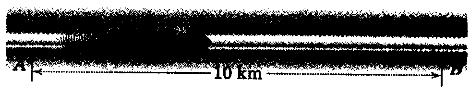
۲-۳۱ یک ذره در $x = -۲$ m از حالت سکون در جهت x شروع به حرکت نموده، تغییرات سرعتش مطابق شکل می‌باشد. نمودار شتاب و جابجایی متناظر را برای ۲ ثانیه رسم نمایید. زمان t که ذره از مبدا می‌گذرد را نیز به دست آورید.

جواب $t = ۰/۹۱۷$ s



شکل مسئله ۲-۳۱

۲-۳۲ بین دو ایستگاه A و B به فاصله ۱۰ km از یکدیگر، یک تونل انتقال سریع خالی از هوا به عنوان طرحی برای آینده طراحی شده و قرار است کپسول حمل و نقل مناسبی جهت استفاده در این تونل طراحی گردد. اگر حداکثر شتابهای تند شونده و کند شونده g ۰/۶ و سرعت حدی کپسول ۴۰۰ km/h باشد، حداقل زمان طی کردن تونل توسط کپسول چقدر است؟



شکل مسئله ۲-۳۲

۲-۳۳ نیروی کند شونده به جسمی که در امتداد مستقیم حرکت می‌کند، وارد می‌شود. در طی مدتی از حرکت، سرعت v جسم با افزایش جابجایی s مطابق رابطه $v^2 = k/s$ کاهش می‌یابد که در آن k عدد ثابتی است. اگر جسم با سرعت ۵۰ mm/s به طرف جلو در حرکت باشد و در لحظه $t = ۰$ موقعیت جسم در ۲۲۵ mm باشد، سرعت v را در $t = ۳$ s تعیین کنید.

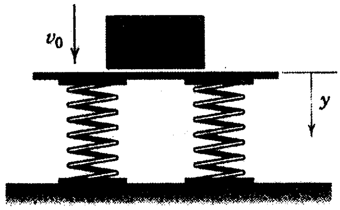
جواب $v = ۳۹/۷$ mm/s

۲-۳۴ ذره شماره ۱ تحت شتاب $a = -kv$ و ذره شماره ۲ تحت شتاب $a = -kt$ و ذره شماره ۳ تحت شتاب $a = -ks$ قرار گرفته‌اند. هر سه ذره حرکت خود را از مبدا مختصات در $s = ۰$ با سرعت اولیه $v_0 = ۱۰$ m/s در زمان $t = ۰$ شروع می‌کندو مقدار k برای هر سه آنها مساوی ۰/۱ است (توجه کنید که واحد k مورد به مورد فرق می‌کند). موقعیت، سرعت و شتاب هر ذره را بر حسب زمان در بازه $۰ \le t \le ۱۰$ s رسم کنید.

۲-۳۵ شتاب اتومبیلی که از حالت سکون به حرکت در می‌آید، ٦ m/s^2 می‌باشد که به طور خطی نسبت به زمان کاهش می‌یابد؛ به نحوی که در مدت ۱۰ ثانیه به صفر می‌رسد که پس از آن اتومبیل با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه می‌دهد. زمان t مورد نیاز برای طی ٤۰۰ m توسط اتومبیل از شروع حرکت را معین کنید.

جواب $t = ۱٦/٦۷$ s

۲-۳٦ جسمی مطابق شکل با سرعت v_0 به سکویی که روی فنرهایی نصب شده برخورد کرده، همراه سکو به طرف پایین حرکت می‌کند. شتاب جسم بعد از برخورد از رابطه $a = g - cy$ بدست می‌آید که در آن c مقدار ثابت و y از موقعیت ابتدایی سکو اندازه‌گیری شده است. اگر ماکزیمم فشردگی فنرها y_m باشد، مقدار c را بدست آورید.

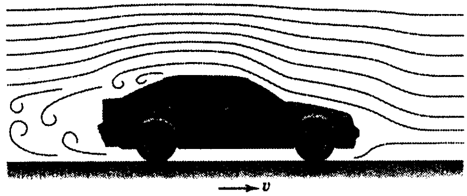


شکل مسئله ۳۶-۲

۳۷-۲ دریاچه‌ای خاص، به عنوان محل فرود هواپیمای جت بزرگ در نظر گرفته شده است. سرعت تماس جت با آب در زمان فرود بایستی از ۱٦۰ km/h در فاصله ٤۰۰ m به ۳۰ km/h کاهش یابد. اگر شتاب کند شونده متناسب با مجذور سرعت جت در آب، $a = -Kv^{۲}$ باشد؛ مطلوبست محاسبه پارامتر طراحی K که وابسته به اندازه و شکل پره‌های پایه فرود است (که آب را می‌شکافد). همچنین زمان t صرف شده در طی این مسافت را حساب کنید.

جواب $K = ٤/١٨(١٠^{-٣})\ \text{m}^{-1}$ ، $t = ۲۳/۳\ \text{s}$

۳۸-۲ مقاومت آیرودینامیکی اتومبیلی در مقابل حرکت تقریباً با مجذور سرعت متناسب است. بعلاوه مقاومت اصطکاکی نیز ثابت است بطوریکه شتاب اتومبیل را در حال خلاصی می‌توان به صورت $a = C_۱ - C_۲v^{۲}$ نشان داد که در آن $C_۱$ و $C_۲$ ثابتهایی هستند که به ساختمان مکانیکی اتومبیل بستگی دارند. اگر سرعت اولیه اتومبیل در حالی که موتور خاموش است $v_۰$ و فاصله حرکت در خلاصی برای توقف اتومبیل D باشد، رابطه برای D به دست آورید.

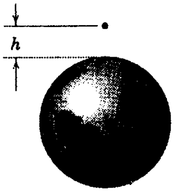


شکل مسئله ۳۸-۲

۳۹-۲ مطلوبست محاسبه سرعت برخورد جسمی که از حالت سکون از ارتفاع $h = ۸۰۰\ \text{km}$ به سطح زمین برخورد می‌کند. (الف) شتاب ثقل زمین را ثابت و برابر $g_۰ = ۹/۸۱\ \text{m/s}^2$ فرض کنید. (ب) شتاب ثقل زمین با ارتفاع متغیر باشد (به قسمت ۵-۱ مراجعه گردد). از مقاومت هوا صرف نظر کنید.

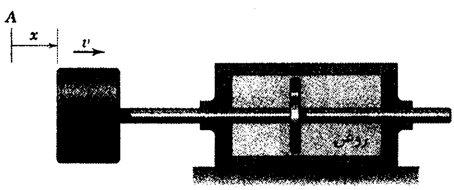
جواب (الف) $v = ۳۹٦۰\ \text{m/s}$

(ب) $v = ۳۷۳۰\ \text{m/s}$



شکل مسئله ۳۹-۲

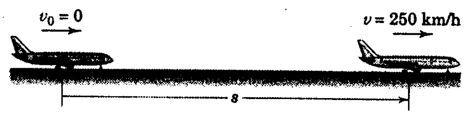
۴۰-۲ حرکت افقی پیستون و محور بوسیله مقاومت دیسک متصل به آن که درون ظرف روغن حرکت می‌کند، کنترل می‌شود. اگر سرعت پیستون در موقعیت A، جایی که $x = ۰$ و $t = ۰$ می‌باشد، برابر $v_۰$ باشد و شتاب کند شونده متناسب با v باشد بطوریکه $a = -kv$ باشد، عبارتهایی برای سرعت v و موقعیت مکانی x بر حسب زمان t بدست آورید. همچنین v را بر حسب x بیان کنید.



شکل مسئله ۴۰-۲

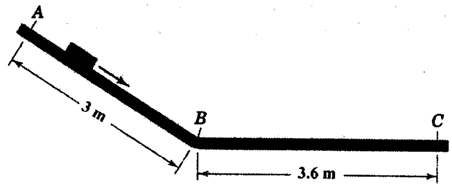
۲-٤۱ هواپیمایی در مسیر برخاستن از زمین، از حالت سکون با شتاب $a = a_\circ - kv^۲$ شروع به حرکت می‌نماید که در آن $a_\circ$ شتاب ثابت ناشی از رانش موتور و $kv^۲$ شتاب کاهنده ناشی از نیروی مقاومت آیرودینامیکی است. اگر $a_\circ = ۲\ \mathrm{m/s^2}$ و $k = ۰/۰۰۰۰٤\ \mathrm{m^{-1}}$ و سرعت v بر حسب متر بر ثانیه باشد، طول باند پرواز را چنان تعیین کنید که هواپیما به سرعت لازم صفر یعنی ۲۵۰ km/h برسد. اگر نیروی مقاومت (الف) به حساب نیاید (ب) به حساب بیاید.

جواب (الف) $s = ۱۲۰٦$ m ، (ب) $s = ۱۲٦۸$ m



شکل مسئله ۲-۴۱

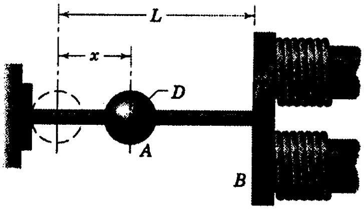
۲-٤۲ بسته‌ای با سرعت ۱/۲ m/s از نقطه A فاصله ۳ m را با شتاب $۰/۳g$ تا نقطه B پایین می‌آید. اگر بسته در نقطه C به سکون برسد، مطلوبست شتاب ثابت a که بسته از B تا C دارد. همچنین محاسبه زمان لازم که بسته از A تا C طی می‌کند.



شکل مسئله ۲-۴۲

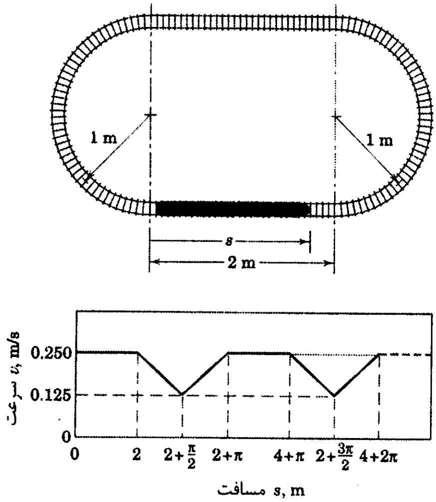
۲-٤۳ گلوله فولادی A به قطر D آزادانه روی میله افقی لغزیده و جذب آهنربای مغناطیسی می‌شود. نیروی جاذبه مزبور از قانون عکس مجذور فاصله تبعیت کرده و لذا شتاب حاصله گلوله $a = K/(L-x)^۲$ می‌باشد که در آن K معیاری از قدرت میدان مغناطیسی است. اگر گلوله از حالت سکون در $x = ۰$ رها شود، سرعت v برخورد آن با آهنربا را حساب کنید.

جواب $v = ۲\sqrt{\dfrac{K(L-D/۲)}{LD}}$



شکل مسئله ۲-۴۳

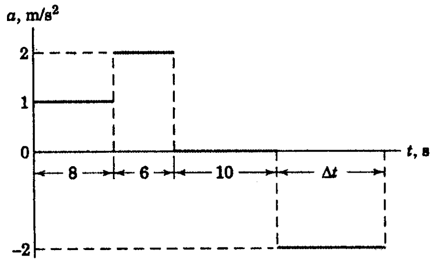
۲-٤٤ سیستم کنترل الکترونیکی یک ترن مدل، طوری برنامه ریزی شده که سرعت آن مطابق شکل با موقعیت تغییر می‌کند. زمان یک دور گردش ترن را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲-۴۴

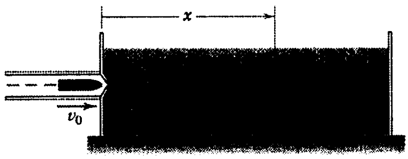
۲-٤٥ یک ترن زیر زمینی فاصله دو ایستگاه را با شتابی مطابق شکل زیر طی می‌کند. معین کنید مدت زمان Δt که در این مدت ترن ترمز گرفته و با شتاب کند شونده ۲ m/s² متوقف می‌گردد و فاصله s بین دو ایستگاه را نیز بدست آورید.

جواب $\Delta t = ۱۰$ s ، $s = ٤۱٦$ m



شکل مسئله ۴۵-۲

۴۶-۲ یک پرتابه آزمایشی، در راستای افق بـا سرعت υ_0 به درون سیالی ویسکوز شلیک می‌شود. نیروی کند شـونده با مجذور سرعت متناسب است، بطوریکه شـتاب بـه صورت $a=-k\upsilon^2$ در می‌آید. عباراتی برای فاصله D پیمـوده شـده در مایع و زمان t متناظر آن، برای کاهش سـرعت تـا $\frac{\upsilon_0}{2}$ بدسـت آورید. از حرکت عمودی صرفنظر شود.

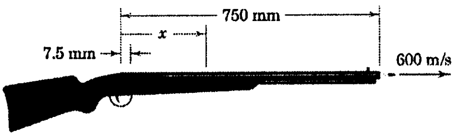


شکل مسئله ۴۶-۲

۴۷-۲ پرتابه‌ای به طور افقی به داخل محیطی مقاوم بـا سرعت υ_0 شلیک می‌شود. شتاب مقاوم از رابطـه $c\upsilon^n$ کـه در آن c و n ثابتهایی هستند و υ سرعت پرتابه دورن محیط است، بدست می‌آید. عبارتی برای سرعت پرتابـه بـر حسـب t زمـان نفوذ در محیط مقاوم بدست آورید.

جواب $\upsilon=\left[\upsilon_0^{1-n}+c(n-1)t\right]^{1/(1-n)}$

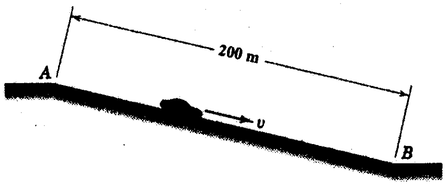
۴۸-۲ فشار گاز پشت فشنگ در تفنگ با تقریب خوبی به صورت خطی متناسب است با عکس مسافتی که فشـنگ در لولـه تفنگ طـی می‌کنـد. لـذا شـتاب فشـنگ را می‌تـوان بـه صورت $a=\frac{k}{x}$ نوشت که در آن k ثابت می‌باشد. اگر فشنگ از حـالت سـکون در $x=۷/۵\text{mm}$ شـروع بـه حرکـت نمـوده و سـرعت خـروج آن از دهانـه لولـه بـه طـول ۷۵۰mm برابـر ۶۰۰ m/s باشـد، شـتاب فشـنگ را در نیمـه طـول لولـه $x=۳۷۵\text{ mm}$ تعیین کنید.



شکل مسئله ۴۸-۲

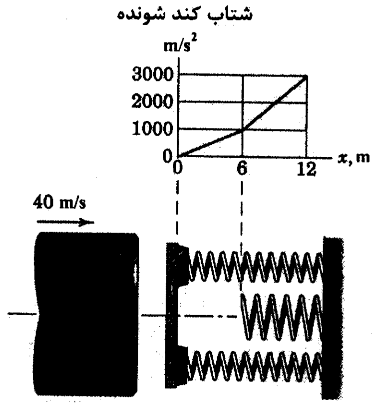
۴۹-۲ راننده یک اتومبیل که در ابتدا به حـالت سـکون در بالای یک سراشیبی در نقطه A قرار دارد، ترمز خـود را آزاد کرده و با دنده خلاص بـا شـتاب $a=۰/۹۸۱-۰/۰۱۳\upsilon^2$ بـه سوی پایین حرکت می‌کند. سرعت υ بر حسـب متـر بـر ثانیـه است. سرعت υ_B اتومبیل را در نقطه B انتهای سراشیبی بدست آورید.

جواب $\upsilon_B=۸/۶۶\text{ m/s}$



شکل مسئله ۴۹-۲

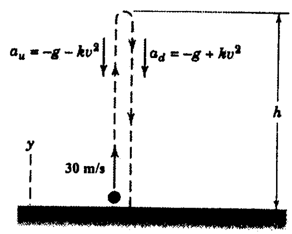
۲-۵۰ سپر ضربه‌گیری متشکل از سه فنر جهت متوقف کردن حرکت افقی جرم بزرگی که با سرعت ۴۰ m/s به سپر برخورد می‌کند، به کار می‌رود. دو فنر کناری به جرم مزبور شتاب کند شونده‌ای می‌دهند که متناسب با تغییر طول فنر است. چنانچه فشردگی از ۰/۵ m تجاوز نماید، فنر وسطی مطابق شکل باعث افزایش نرخ کند شوندگی حرکت خواهد شد. حداکثر فشردگی x در فنرهای کناری را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲-۵۰

۲-۵۱ موقعی که اثر مقاومت آیرودینامیکی نیز محسوب گردد، شتاب عمودی یک توپ بیسبال که به طرف بالا پرتاب می‌شود، $a_u = -g - kv^2$ می‌باشد و مادامیکه به طرف پایین می‌آید $a_d = -g + kv^2$ می‌باشد که در آن k عدد مثبت ثابت و v سرعت بر حسب m/s است. اگر توپ با سرعت اولیه ۳۰ m/s از سطح زمین به طرف بالا پرتاب شود، ماکزیمم ارتفاع توپ h و سرعت برخورد آن با زمین، v_f را بیابید. k را برابر ۰/۰۰۶ m^{-1} و g را ثابت فرض کنید.

جواب $h =$ ۳۶/۵ m و $v_f =$ ۲۴/۱ m/s

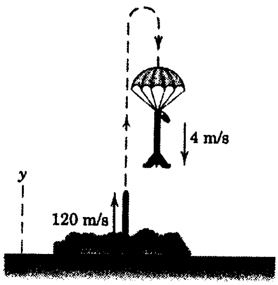


شکل مسئله ۲-۵۱

۲-۵۲ برای توپ بیسبال مسئله ۲-۵۱ که با سرعت ۳۰ m/s به طرف بالا پرتاب شده است، مطوبست تعیین t_u، زمان حرکت توپ از سطح زمین تا نقطه اوج و t_d، زمان حرکت توپ از نقطه اوج تا سطح زمین.

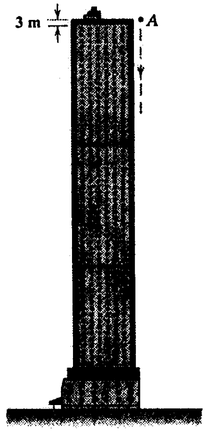
۲-۵۳ سرعت احتراق سوخت یک مدل راکت بقدری سریع است که سرعت راکت را موقعی که هنوز به نظر می‌رسد از سطح زمین جدا نشده به ۱۲۰ m/s می‌رساند. سپس راکت از سطح زمین با این سرعت اولیه به طرف بالا پرتاب می‌گردد. با توجه به مقاومت آیرودینامیکی، در حین این حرکت شتاب در جهت y برابر $a_y = -g -$ ۰/۰۰۰۵v^2 می‌باشد که در آن واحدها بر حسب متر و ثانیه است. در نقطه اوج ناگهان چتری از دهانه راکت باز شده و سرعت راکت را سریعاً به مقدار ثابت ۴ m/s به طرف پایین می‌رساند. زمان پرواز راکت را حساب کنید.

جواب $t =$ ۱۴۷/۷ s



شکل مسئله ۲-۵۳

۲-۵۴ طبقات یک ساختمان بلند، هر یک دارای ارتفاع ۳ متری می‌باشند. توپ A از بام ساختمان در موقعیت نشان داده شده، رها می‌گردد. زمانهایی را حساب کنید که توپ، ارتفاع طبقات ۳ متری اول، دهم و صدم (از بالا به پایین) را طی نماید. از نیروی مقاومت آیرودینامیکی صرفنظر شود.



شکل مسئله ۲-۵۴

۲-۵۵ مسئله ۲-٥٤ را تکرار نمایید. با این تفـاوت کـه اثرات نیروی مقاومت آیرودینامیکی نیز به حساب آیند. نـیروی مقاومت آیرودینامیکی باعث ایجاد مولفـه شـتاب $۰/۰۱٦v^۲$ بـر حسب m/s^2 در جهت خلاف بردار سرعت می‌گردد کـه در آن v بر حسب m/s می‌باشد.

جواب $t_۱ =$ ۰/۷۸۸ s ، $t_{۱۰} =$ ۰/۱۵٦۷ s

$t_{۱۰۰} =$ ۰/۱۲۱۲ s

۲-٥٦ ◀ شتاب قائم راکتـی بـا سـوخت جـامد تـوسط رابطه $a = ke^{-bt} - cv - g$ داده شـده کـه در آن k، b و c ثابت بوده، v سرعت قائم راکت و g شتاب ثقل می‌باشد که در پرواز داخل جو زمین ثابت فرض می‌شود. عبـارت اول نمـایی بالا، نمایانگر اثر نیروی رانشی اسـت کـه بـه مـوازات مصـرف سوخت مستهلک می‌گردد. عبارت دوم نمایانگر کاهش شـتاب به علت مقاومت هوا است. رابطه‌ای پیدا کنید که سرعت قـائم راکت را در t ثانیه پس از شلیک بیان کند.

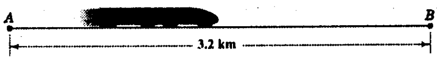
جواب $v = \dfrac{g}{c}\left(e^{-ct} - ۱\right) + \dfrac{k}{c-b}\left(e^{-bt} - e^{-ct}\right)$

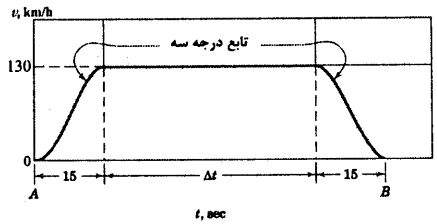
۲-۵۷ ◀ ذره‌ای در حرکت مستقیم الخط تحت تاثیر دو نیرو می‌باشد. یکی نیروی شتاب دهنـده کـه بـا زمـان افزایـش می‌یابد و دیگری نـیروی بـازدارنده اسـت کـه بـا جابجـایی x مستقیما افزایش می‌یابد. شتاب منتجه برابر با $a = Kt - k^۲x$ می‌باشد که در آن K و k هر دو ضریب ثابت و مثبت هستند و x و $\dot{x}$ در زمان $t = ۰$ برابـر صفـر می‌باشـند. x را بـه صـورت تابعی از t تعیین کنید.

جواب $x = \dfrac{K}{k^۳}(kt - \sin kt)$

۲-۵۸ ◀ در طراحی یک سیستم انتقال سـریع مسـافر، هنگامیکـه قطـار بیـن دو ایسـتگاه A و B بـه فاصلـه ۳/۲ km حرکت می‌کند، سرعت قطار مطابق شکل با زمان تغییر می‌کنـد. شیب منحنی‌های درجه سه (که به صورت $a + bt + ct^۲ + dt^۳$ می‌باشد) در دو انتها صفـر می‌باشـد، زمـان حرکـت t بیـن دو ایستگاه را مشخص نموده، شتاب ماکزیمم را نیز بدست آورید.

جواب $t =$ ۱۰۳/٦ s ، $a_{max} =$ ۳/٦۱ m/s^2





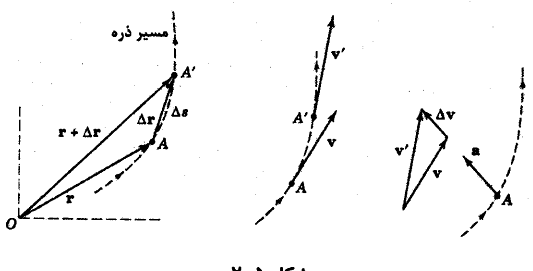
شکل مسئله ۲-۵۸

۲-۳ حرکت منحنی الخط در صفحه

اکنون حرکت ذره را در امتداد یک مسیر منحنی که در یک صفحه قرار دارد، تشریح می‌نماییم. ملاحظه می‌شود این حرکت حالت خاصی از حرکت کلی تشریح شده در بخش ۲-۱ است که در شکل ۲-۱ نشان داده شد. اگر صفحه حرکت را صفحه x-y در نظر بگیریم، در شکل ۲-۱ مختصات z و ϕ هر دو صفرند و R با r یکی می‌شود. همانطور که قبلاً ذکر شد، اکثر حرکات نقاط یا ذراتی را که در مهندسی با آنها مواجه هستیم، می‌توان به صورت حرکت در صفحه نشان داد.

قبل از تشریح حرکت منحنی الخط در دستگاههای مختصات مشخص، ابتدا آنرا به کمک تحلیل برداری توصیف می‌نماییم که نتایج آن به سیستمهای مختصات خاص بستگی ندارد. آنچه در این بخش نتیجه می‌گیریم یکی از اصلی‌ترین عملیات دینامیک، یعنی *مشتق زمانی یک بردار*، است. بخش بزرگی از مبحث دینامیک، مستقیماً وابسته به میزان تغییرات کمیتهای برداری نسبت به زمان است. به شما توصیه می‌شود که این مبحث را کاملاً فرا گیرید، زیرا در موارد متعددی باز از آن استفاده خواهید کرد.

اکنون حرکت پیوسته یک ذره را در امتداد یک منحنی در صفحه مطابق شکل ملاحظه نمایید. در زمان t ذره در موقعیت A قرار گرفته که توسط بردار موقعیت $\mathbf{r}$ که از مبدا ثابت مناسبی مانند O اندازه گیری شده، مشخص می‌گردد. اگر در زمان t، هم اندازه و هم جهت $\mathbf{r}$ معلوم باشد در این صورت موقعیت ذره کاملاً مشخص می‌گردد. در زمان $t + \Delta t$، ذره در A' بوسیله بردار موقعیت $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ مشخص می‌شود. البته توجه داریم که این ترکیب جمع برداریست، نه اسکالر. *جابجایی* ذره در مدت زمان Δt بردار $\Delta\mathbf{r}$ می‌باشد که تغییر برداری موقعیت بوده و مستقل از انتخاب مبدا می‌باشد. اگر مبدا مختصات نقطه دیگری بود، بردار موقعیت $\mathbf{r}$ تغییر می‌کرد، ولی $\Delta\mathbf{r}$ بدون تغییر می‌ماند. مسافت واقعی پیموده شده در طی حرکت ذره روی مسیر از A به A'، طول اسکالر Δs است که در امتداد مسیر اندازه گیری می‌شود. از اینرو بین جابجایی برداری $\Delta\mathbf{r}$ و مسافت اسکالر Δs تمایز قائل می‌شویم.



شکل ۲-۵

سرعت

سرعت متوسط ذره بین A و A' توسط رابطه $\mathbf{v}_{av} = \Delta\mathbf{r} / \Delta t$ تعریف می‌گردد که برداریست هم جهت بردار $\Delta\mathbf{r}$ و اندازه‌اش مساوی اندازه $\Delta\mathbf{r}$ تقسیم بر Δt است. اندازه سرعت متوسط ذره بین A و A' خارج قسمت اسکالر $\Delta s/\Delta t$ است. واضح است که مقدار بردار سرعت متوسط و اندازه سرعت متوسط وقتی Δt کوچک شده و A و A' به هم نزدیک شوند، یکی می‌شوند.

وقتی فاصله زمانی به صفر میل کند، سرعت *لحظه‌ای* $\mathbf{v}$ ذره به صورت مقدار حدی سرعت متوسط تعریف می‌شــود. پس:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

ملاحظه می‌شود وقتی Δt به سمت صفر میل می‌کند، امتداد $\Delta \mathbf{r}$ به سمت مماس بر منحنــی مسیر میـل نموده و در نتیجه سرعت $\mathbf{v}$ همواره برداریست مماس بر مسیر.

اکنون تعریف اساسی مشتق کمیت اسکالر را تعمیم داده تا کمیت برداری را نیز شامل گردد و می‌نویسیم.

$$\boxed{\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}} \qquad (۲-٤)$$

مشتق یک بردار، خود برداریست که دارای اندازه و راستا می‌باشد. اندازه $\mathbf{v}$ ، *تندی* (اندازه سرعت) نامیده می‌شود و اسکالری به صورت زیر دارد.

$$\upsilon = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt} = \dot{s}$$

در اینجـا، بـر تفـاوت بیـن *انـدازه مشـتق* و *مشـتق انـدازه* تـاکید می‌کنیـم. انـدازه مشـتق را می‌تـوان بـه صــورت $|d\mathbf{r}/dt| = |\dot{\mathbf{r}}| = \dot{s} = |\mathbf{v}| = \upsilon$ نوشت که معرف اندازه سرعت یا تندی ذره می‌باشد. از طرف دیگر، مشــتق انـدازه بـه صـورت $d|\mathbf{r}|/dt = dr/dt = \dot{r}$ نوشته شده و میزان تغییرات طول موقعیت $\mathbf{r}$ را معرفی می‌نماید. بنابراین این دو مشتق دارای دو معنی کاملاً متفاوت بوده و بایستی دقیقاً فرق بین آنها را در تفکر و نمادگذاری تمیز دهیم. به این دلیـل و دلایـل دیـگر بـه شـما توصیه می‌شود که با بکارگیری نمادهای مناسب در نوشته‌های خود، کمیتهای برداری و اسکالر را از یکدیگر تفکیک نمایید. برای سادگی، کشیدن خطی در زیر حروف مانند $\underline{\upsilon}$ توصیه می‌شود. گاهی از سـایر نمـادهای دستی مانند $\bar{\upsilon}$ ، $\underset{\sim}{\upsilon}$ و $\hat{\upsilon}$ نیز استفاده می‌شود.

پس از تعریف سرعت به عنوان یک بردار، به شکل ۵-۲ برمی‌گردیم و سرعت ذره در A را بوسیله بردار ممـاس $\mathbf{v}$ و سرعت ذره در A' را توسط بردار مماس $\mathbf{v}'$ نمایش می‌دهیم. واضح است که در مدت زمان Δt بردار سرعت تغییر می‌نماید. سرعت $\mathbf{v}$ در A بعلاوه (برداری) تغییر $\Delta \mathbf{v}$ باید برابر با سرعت در نقطه A' باشد، بنابراین می‌توانیم بنویسیم $\mathbf{v}' - \mathbf{v} = \Delta \mathbf{v}$. بـا بررسی ترسیمه بردارها در می‌یابیم $\Delta \mathbf{v}$ بـه تغییـرات انـدازه (طـول) $\mathbf{v}$ و نـیز تغییـر جـهت $\mathbf{v}$ بسـتگی دارد. ایـن دو تغییـر مشخصه‌های اساسی مشتق یک بردار می‌باشد.

شتاب

شتاب متوسط یک ذره بین A و A' برابر $\Delta \mathbf{v}/\Delta t$ است که جهتش در امتداد $\Delta \mathbf{v}$ می‌باشد. اندازه شتاب متوسط نیز برابر با اندازه $\Delta \mathbf{v}$ تقسیم بر Δt است. وقتی که فاصله زمانی به سمت صفر میل نماید، *شتاب لحظه‌ای* $\mathbf{a}$ یک ذره به صورت مقـدار حدی شتاب میانگین تعریف می‌گردد. پس:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

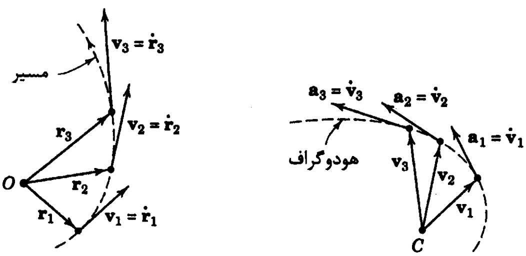
بنابر تعریف مشتق می‌نویسیم:

$$\boxed{\mathbf{a}=\frac{d\mathbf{v}}{dt}=\dot{\mathbf{v}}} \qquad (۲-۵)$$

هنگامیکه فاصله زمانی Δt کوچک شده و به صفر نزدیک می‌گردد، جهت تغییر $\Delta \mathbf{v}$ بـه تغییر دیفرانسیلی $d\mathbf{v}$ میل می‌کند و در نتیجه به $\mathbf{a}$ می‌رسیم. پس شتاب $\mathbf{a}$ ، مشمول اثر تغییر اندازه $\mathbf{v}$ و تغییر جهت $\mathbf{v}$ می‌گردد. بطور کلی واضح است که جهت شتاب یک ذره در حرکت منحنی الخط نه مماس بر مسیر است نه عمود بر آن. اما به هر حال مشاهده می‌کنیم که شتاب، مولفه‌ای عمود بر مسیر و به سوی مرکز انحنا دارد.

تجسم حرکت

راه دیگر تجسم شتاب در شکل ٦-۲ نشان داده شده که در آن بردار موقعیت سه نقطه دلخواه بر روی مسیر حرکت ذره رسم گردیده است. به ازای هر یک از این بردارهای موقعیت، یک بردار سرعت مماس بر مسیر ذره موجود می‌باشد که با رابطه $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$ بیان می‌گردد. حال اگر از نقطه دلخواهی مانند C، این بردارهای سرعت رسم شوند، منحنی خاصی حـاصل می‌گردد که آنرا *هودوگراف* (hodograph) می‌نامند. مشتق بردارهای سرعت، بردارهای شتاب می‌باشند $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}$ که مماس بر منحنی هودوگراف هستند. بنابراین ملاحظه می‌شود که رابطه شتاب با سرعت، همان رابطه‌ای اسـت کـه سـرعت بـا بـردار موقعیت داشت.



شکل (۶-۲)

بیان هندسی مشتق بردار موقعیت $\mathbf{r}$ و بردار سرعت $\mathbf{v}$ در شکل ۵-۲ می‌تواند برای بدست آوردن بردار دیگری نسبت به زمان یا نسبت به هر متغیر اسکالر دیگر مورد استفاده قرار گیرد. با معرفی مشتق یک بردار در تعریف سرعت و شتاب، در اینجا لازم است به قوانینی اشاره نمود که تحت آنها، مشتق گیری از بردارها انجام می‌گیرد. این قوانین، همان قوانین مشـتق گیری از کمیتهای اسکالر می‌باشد. مگر در مورد ضرب برداریکه ترتیب جمله‌ها را باید حفظ کرد. این قوانین در بخش C-7 از پیوست C آمده است و اکنون مرور آنها توصیه می‌شوند.

برای بیان حرکت منحنی الخط در صفحه، سه دستگاه مختصات مختلف وجود دارد. مختصات کارتزین، مختصـات عمودی و مماسی و مختصات قطبی. مهمترین درسی که از بررسی این سه دستگاه مختصات بایستی آموخته شود این است

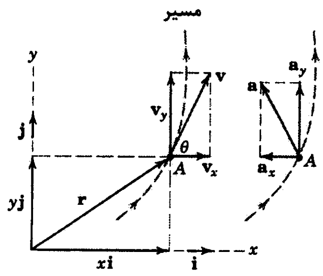
که در هر مسئله باید دستگاه مختصات مناسب را انتخاب نمود. این انتخاب معمولاً با توجه به نحوه ایجاد حرکت و یا نوع اطلاعات داده شده در مسئله تعیین می‌شود. اکنون هر یک از سه دستگاه مختصات، ارائه شده و بررسی می‌گردند.

۲-۴ مختصات کارتزین (x-y)

این دستگاه مختصات به ویژه در مواقعی که مولفه‌های x و y شتاب مستقلاً ایجاد یا تعیین شده باشند، مفید واقع می‌گردد. در این صورت حرکت منحنی الخط حاصله با ترکیب برداری مولفه‌های x و y بردار مکان، سرعت و شتاب تشریح می‌گردد.

نمایش برداری

مسیر حرکت ذره از شکل ۵-۲ مجدداً در شکل ۷-۲ همراه با محورهای x و y نشان داده شده است. بردار موقعیت $\mathbf{r}$، سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ ذره، همانطور که در بخش ۳-۲ توصیف شد به همراه مولفه‌های x و y آنها در شکل ۷-۲ نمایش داده شده است. به کمک بردارهای یکه $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ می‌توان بردارهای $\mathbf{r}$، $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را بر حسب مولفه‌های x و y بدست آورد. بنابراین:



شکل (۷-۲)

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \\ \mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} &= \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} \\ \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}} &= \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} \end{aligned}} \qquad (۲-۶)$$

ملاحظه می‌شود که به علت اینکه $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ هم مقدار و هم امتدادشان نسبت به زمان ثابت می‌باشد، مشتق آنها صفر می‌گردد. اندازه‌های اسکالر مولفه‌های $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ عبارتند از $\upsilon_x = \dot{x}, \upsilon_y = \dot{y}$ و $a_x = \dot{\upsilon}_x = \ddot{x}, a_y = \dot{\upsilon}_y = \ddot{y}$ (همانطور که در شکل ۷-۲ دیده می‌شود، a_x در جهت منفی x می‌باشد، یعنی که $\ddot{x}$ عددی منفی است).

چنانکه قبلاً مشاهده شد، همواره امتداد سرعت مماس بر مسیر بوده و در شکل واضح است که

$$\upsilon^2 = \upsilon_x^2 + \upsilon_y^2 \,, \upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2} \,, \tan\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}$$

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 \,, a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

اگر θ زاویه بین محور x و $\mathbf{v}$ در جهت پادساعتگرد اندازه گیری شود، می‌توان همچنین نشان داد که $dy/dx = \tan\theta = \upsilon_y/\upsilon_x$.

اگر مختصات x و y هر کدام بطور مستقل بر حسب زمان معلوم باشند، $x = f_1(t)$ و $x = f_2(t)$، در این صورت به ازای هر مقدار از زمان می‌توان آنها را ترکیب کرده و $\mathbf{r}$ را بدست آورد. به همین ترتیب مشتقهای اول آنها $\dot{x}$، $\dot{y}$ و $\mathbf{v}$ را می‌دهد و از ترکیب مشتقهای دوم آنها یعنی $\ddot{x}, \ddot{y}$ و $\mathbf{a}$ نتیجه می‌گردد. یا بالعکس اگر مولفه‌های شتاب a_x و a_y بر حسب

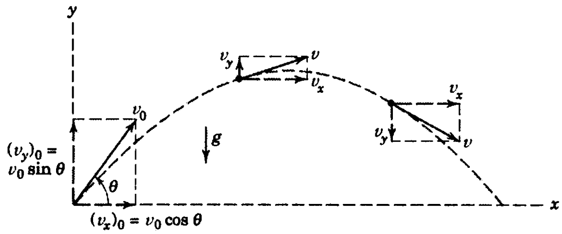
زمان مشخص باشند، با انتگرال‌گیری، هر بار، جداگانه نسبت به زمان، بار اول v_x و v_y و بار دوم $x = f_1(t)$ و $y = f_2(t)$ نتیجه می‌گردد. با حذف زمان t بین مولفه‌های $x(t)$ و $y(t)$، معادله مسیر یعنی $y = f(x)$ نتیجه خواهد شد.

از بحثی که گذشت چنین بر می‌آید که بیان حرکت از طریق مختصات کارتزین، صرفاً عبارت از ترکیب مختصات دو حرکت مستقیم الخط همزمان در دو امتداد x و y است.

حرکت پرتابه‌ها

یکی از مهمترین کاربردهای تئوری سینماتیک دو بعدی مسئله حرکت پرتابه‌ها می‌باشد که برای طرح اولیه موضوع از مقاومت نیروهای آیرودینامیکی و تغییرات R زمین و چرخش آن صرفنظر کرده و فرض می‌کنیم که ارتفاع حرکت پرتابه‌ها از سطح زمین به قدری است که شتاب ثقل را می‌توان ثابت در نظر گرفت. با این فرضیات تحلیل حرکت جسم در مختصات کارتزین مفید خواهد بود. با در نظر گرفتن محورهای شکل ۸-۲ مولفه‌های شتاب عبارتند از:

$$a_x = 0 \qquad a_y = -g$$



شکل ۸-۲

با انتگرال‌گیری از شتابهای بالا طبق نتایجی که از بخش۲a-۲ برای شتاب ثابت داشتیم، نتیجه می‌گیریم:

$$v_x = (v_x)_0 \quad , \quad v_y = (v_y)_0 - gt$$

$$x = x_0 + (v_x)_0 t \quad , \quad y = y_0 + (v_y)_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$v_y^2 = (v_y)_0^2 - 2g(y - y_0)$$

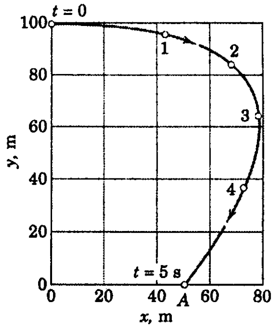
در عبارت بالا اندیس صفر نشان دهنده شرایط اولیه است که معمولاً در موقعیت پرتاب داده می‌شود. برای حالت نشان داده شده $x_0 = y_0 = 0$ است. توجه داشته باشید که مقدار g مقدار مثبتی در نظر گرفته شده است.

می‌توان مشاهده کرد که در شرایط خاص، این مسئله حرکات x و y مستقل از یکدیگر می‌باشند. با حذف زمان t بین معادلات جابجایی x و y، مسیر حرکت مطابق شکل یک سهمی خواهد بود (به مسئله نمونه ۶-۲ مراجعه شود). اگر نیروی مقاومت هوا که متناسب با مجذور سرعت (برای مثال) است را نیز در نظر می‌گرفتیم و سپس حرکات x و y را بدست آورده و ترکیب می‌کردیم، مسیر حرکت، دیگر سهمی نمی‌شد.

هنگامیکه حرکت دقیق پرتابه مورد نظر است و همچنین موقعی که سرعت و ارتفاع حرکت از سطح زمین خیلی زیاد است، شکل پرتابه، تغییرات g با ارتفاع و تغییرات چگالی هوا با ارتفاع و همچنین دوران زمین همگی باید در نظر گرفته شوند. این عوامل معادلات حرکت را به طور قابل ملاحظه‌ای پیچیده نموده و معمولاً انتگرال گیری از معادلات شتاب به صورت عددی الزامی است.

مسئله نمونه ۵-۲

حرکت منحنی الخط ذره‌ای توسط $v_x = 50 - 16t$ و $y = 100 - 4t^2$ تعریف شده که در آن v_x بر حسب متر بر ثانیه، y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه می‌باشد. همچنین می‌دانیم که در $t = 0$، $x = 0$ می‌باشد. منحنی مسیر ذره را رسم نموده و موقعی که موقعیت $y = 0$ می‌رسد، سرعت و شتاب را تعیین کنید.



حل: مختصات x بوسیله انتگرال‌گیری از عبارت v_x و مولفه x شتاب با مشتق‌گیری از v_x بدست می‌آید. پس:

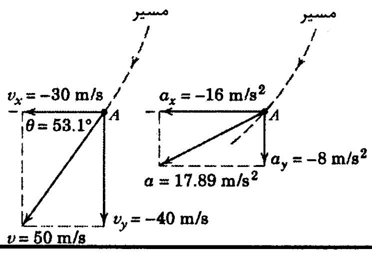
$$\left[\int dx = \int v_x dt\right] \qquad \int_0^x dx = \int_0^t (50 - 16t)dt \qquad x = 50t - 8t^2 \ \text{m}$$

$$[a_x = \dot{v}_x] \qquad a_x = \frac{d}{dt}(50 - 16t) \qquad a_x = -16 \ \text{m/s}^2$$

مولفه‌های سرعت و شتاب عبارتند از:

$$[v_y = \dot{y}] \qquad v_y = \frac{d}{dt}(100 - 4t^2) \qquad v_y = -8t \ \text{m/s}$$

$$[a_y = \dot{v}_y] \qquad a_y = \frac{d}{dt}(-8t) \qquad a_y = -8 \ \text{m/s}^2$$



اکنون مقادیر متناظر x و y را برای مقادیر مختلف t محاسبه و x را بر حسب y رسم می‌کنیم تا مسیری که در شکل نشان داده شده، بدست آید.

موقعی که $y = 0$ باشد، $100 - 4t^2 = 0$ می‌گردد و نتیجه می‌گردد: $t = 5$ s.

برای این مقدار از زمان داریم:

$$v_x = 50 - 16(5) = -30 \ \text{m/s}$$
$$v_y = -8(5) = -40 \ \text{m/s}$$
$$v = \sqrt{(-30)^2 + (-40)^2} = 50 \ \text{m/s}$$
$$a = \sqrt{(-16)^2 + (-8)^2} = 17.89 \ \text{m/s}^2$$

مولفه‌های سرعت و شتاب و برآیند آنها برای نقطه A در نمودارهای جداگانه رسم شده‌اند که در آن $y = 0$ است.

بنابراین برای این وضعیت می‌توان نوشت:

جواب $\qquad \mathbf{v} = -30\mathbf{i} - 40\mathbf{j} \ \text{m/s}$

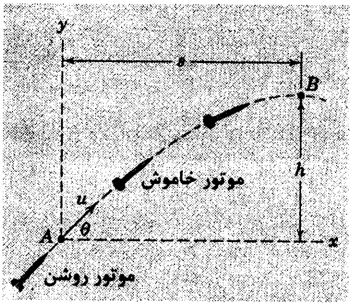
جواب $\qquad \mathbf{a} = -16\mathbf{i} - 8\mathbf{j} \ \text{m/s}^2$

نکته مفید

مشاهده می‌شود که بردار سرعت، مماس بر مسیر است و باید همینطور باشد. اما بردار شتاب مماس بر مسیر نمی‌باشد. به خصوص توجه دارید که شتاب، مولفه‌ای به سوی داخل انحنای مسیر دارد. از شکل ۵-۲ نتیجه گرفتیم که هیچگاه شتاب مولفه‌ای در جهت خارج از انحنای مسیر ندارد.

مسئله نمونه ۶-۲

راکتی پس از اتمام سوختش به نقطه A رسیده و سرعتش در این نقطه برابر u و با زاویه θ نسبت به افق می‌باشد. آنگاه پس از پیمودن مسافت افقی s به طرف بالا به پرواز خود ادامه داده و در نقطه B به بالاترین افزایش ارتفاع خود h می‌رسد. روابطی برای h، s و زمان t پرواز A به B بدست آورده و معادله مسیر را تعیین کنید. برای مسافت مورد نظر، فرض کنید زمین مسطح بوده و شتاب ثقل ثابت می‌باشد. همچنین از هرگونه مقاومت جوی صرفنظر کنید.



حل. چون تمام مولفه‌های حرکت بر حسب مختصات افقی و عمودی هستند، مختصات کارتزین x-y مورد استفاده قرار می‌گیرد. با صرفنظر کردن از مقاومت جو، $a_x = 0$ و $a_y = -g$ و نتیجه حرکت ترکیب دو حرکت مستقیم الخط با شتابهای ثابت می‌باشد. بنابراین: ❶

$$[dx = \upsilon_x\, dt] \qquad x = \int_0^t u\cos\theta\, dt \qquad x = ut\cos\theta$$

$$[d\upsilon_y = a_y\, dt] \qquad \int_{u\sin\theta}^{\upsilon_y} d\upsilon_y = \int_0^t (-g)dt \qquad \upsilon_y = u\sin\theta - gt$$

$$[dy = \upsilon_y\, dt] \qquad y = \int_0^t (u\sin\theta - gt)dt \qquad y = ut\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2$$

موقعیت B وقتی است که $\upsilon_y = 0$ می‌باشد، پس $u\sin\theta - gt = 0$ یا

جواب $$t = \frac{u\sin\theta}{g}$$

ماکزیمم افزایش ارتفاع، از طریق جایگذاری مقدار t در رابطه y بدست می‌آید.

جواب $$h = u\left(\frac{u\sin\theta}{g}\right)\sin\theta - \frac{1}{2}g\left(\frac{u\sin\theta}{g}\right)^2 \qquad h = \frac{u^2\sin^2\theta}{2g}$$

مسافت افقی پیموده شده عبارت است از:

❷ جواب $$s = u\left(\frac{u\sin\theta}{g}\right)\cos\theta \qquad s = \left(\frac{u^2\sin 2\theta}{2g}\right)$$

و آشکار است که s به ازای $\theta = 45°$ ماکزیمم است. معادله حرکت توسط حذف t بین عبارات x و y بدست می‌آید، یعنی:

جواب

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2}\sec^2\theta$$

❸ این معادله یک سهمی قائم مطابق شکل را نشان می‌دهد.

نکات مفید

❶ *توجه کنید که این مسئله فقط با صرفنظر کردن از مقاومت جوی توصیف گردیده است.*

❷ *توجه داریم که برد و زمان کل پرواز این پرتابه شلیک شده از بالای سطح افق، دو برابر مقدارهای مربوط به s و t داده شده‌اند.*

❸ *اگر مقاومت جو نیز وجود داشت، وابستگی شتاب به سرعت می‌بایست قبل از انتگرال گیری از معادله‌ها مشخص گردد که در این صورت مسئله بسیار مشکل‌تر می‌شد.*

مسائل

(در مسائل زیر که حرکت پرتابه در هوا مطرح است از مقاومت هوا صرفنظر کنید. مگر اینکه خلاف آن ذکر گردد و از مقادیر g = ۹/۸۱ m/s^2 یا g = ۳۲/۲ ft/sec^2 استفاده شود)

مسائل مقدماتی

۲-۵۹ بردار موقعیت ذره‌ای که در صفحه x-y حرکت می‌کند در لحظه t = ۳/۶۰ s برابر ۲/۷۶**i** − ۳/۲۸**j** m می‌باشد. در لحظه t = ۳/۶۲ s بردار موقعیت آن به صورت ۲/۷۹**i** − ۳/۳۳**j** m در می‌آید. مقدار سرعت متوسط آنرا بین این دو لحظه و همچنین زاویه θ را که این سرعت با محور x می‌سازد، به دست آورید.

جواب υ = ۲/۹۲ m/s و θ = −۵۹/۰°

۲-۶۰ سرعت ذره‌ای که در صفحه x-y حرکت می‌کند در لحظه t = ۶ s توسط رابطه ۴**i** +۵**j** m/s داده شده و در t = ۶/۱ s این سرعت به صورت ۴/۳**i**+۵/۴**j** m/s در می‌آید. مقدار a، شتاب متوسط ذره را طی بازه زمانی ۰/۱ s حساب کرده، زاویه θ را که این شتاب با محور x می‌سازد نیز بدست آورید.

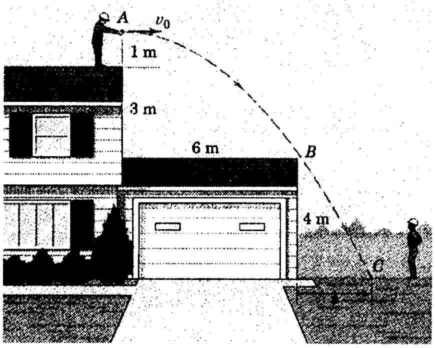
۲-۶۱ سرعت ذره‌ای که در صفحه x-y حرکت می‌کند در لحظه t = ۳/۶۵ s توسط رابطه ۶/۱۲**i** + ۳/۲۴**j** m/s داده شده است. شتاب متوسط این ذره در مدت ۰/۰۲ s بعد توسط رابطه ۴**i** + ۶**j** m/s^2 مشخص شده است. مطلوب است بردار سرعت ذره در لحظه t = ۳/۶۷ s و همچنین زاویه θ بین بردار شتاب متوسط و بردار سرعت در t = ۳/۶۷ s.

جواب **v** = ۶/۲۰**i** + ۳/۳۶**j** m/s و θ = ۲۷/۹°

۲-۶۲ ذره‌ای در حرکت منحنی الخط است و مختصات آن بر حسب میلی‌متر با روابط $x = ۲t^۲ - ۴t$ و $y = ۳t^۲ - \frac{۱}{۳}t^۳$ مشخص شده است که با زمان t بر حسب ثانیه تغییر می‌کند. مقدار سرعت **v** و شتاب **a** و زوایایی که بردارشان در t = ۲ s با محور x می‌سازد، چقدر است؟

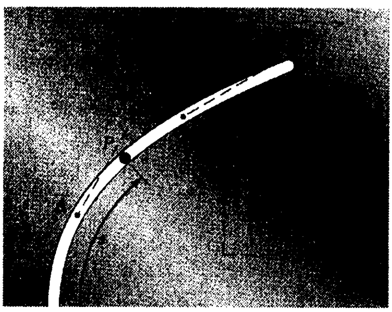
۲-۶۳ قطعه ابزار کوچکی توسط سقف‌کار از روی بام برای همکارش روی زمین پرتاب می‌گردد. حداقل سرعت افقی لازم، $\upsilon_۰$ چقدر باشد تا قطعه ابزار مماس بر لبه B از روی آن بگذرد؟ همچنین محل برخورد قطعه را که با فاصله s در شکل مشخص شده، بدست آورید.

جواب $\upsilon_۰$ = ۶/۶۴ m/s و s = ۲/۴۹ m



شکل مسئله ۶۳-۲

۲-۶۴ ذره P در امتداد شیار منحنی که بخشی از آن در شکل نشان داده شده است، حرکت می‌کند. مسافت طی شده در امتداد شیار بر حسب متر با رابطه $s = t^۲/۴$ داده شده که در آن t بر حسب ثانیه است. ذره در t = ۲/۰۰ s در موقعیت A و در t = ۲/۲۰ s در موقعیت B قرار دارد. شتاب متوسط a_{av} ذره P را بین موقعیتهای A و B بدست آورید. همچنین شتاب را به صورت بردار $\mathbf{a}_{av}$ با استفاده از بردارهای یکه **i** و **j** نشان دهید.



شکل مسئله ۶۴-۲

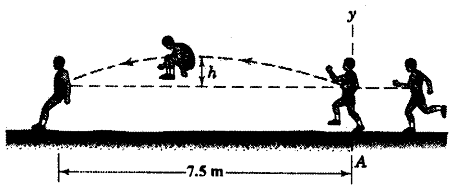
۲-٦۵ مختصات y ذره‌ای در حرکت منحنی الخط توسط بردار $y = ٤t^{۳} - ۳t$ داده شده که در آن y بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. همچنین ذره در راستای محور x شتابی به صورت $a_x = ۱۲t\ \text{m/s}^2$ دارد. اگر سرعت ذره در راستای محور x در لحظه $t = ۰$ برابر ٤ m/s باشد، مقادیر سرعت، $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ ذره را در لحظه $t = ۱\ \text{s}$ حساب کنید. $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را نیز در حل‌تان بسازید.

جواب $\quad v = ۱۳/٤۵\ \text{m/s}$ و $a = ۲٦/۸\ \text{m/s}^2$

۲-٦٦ بردار موقعیت نقطه‌ای که در صفحه x-y حرکت می‌کند با رابطه $\mathbf{r} = \left(\frac{۲}{۳}t^{۳} - \frac{۳}{۲}t^{۲}\right)\mathbf{i} + \frac{t^{۴}}{۱۲}\mathbf{j}$ داده شده است که در آن $\mathbf{r}$ بر حسب متر و t بر حسب ثانیه می‌باشد. زاویه بین سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ را هنگامیکه (الف) $t = ۲\ \text{s}$ و (ب) $t = ۳\ \text{s}$ است، حساب کنید.

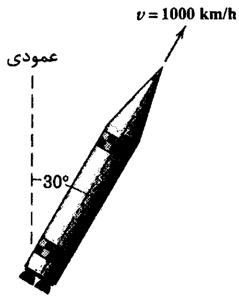
۲-٦۷ یک قهرمان پرش طول، با سرعت افقی ۱۰ m/s به نقطه پرش A نزدیک می‌شود. مولفه عمودی v_y سرعت مرکز ثقل او در لحظه آغاز پرش نشان داده شده در شکل را معین کنید. همچنین مقدار h، خیز عمودی مرکز ثقل او چقدر است؟

جواب $\quad v_y = ۳/٦۸\ \text{m/s}$ و $h = ۰/٦۹۰\ \text{m}$



شکل مسئله ۶۷-۲

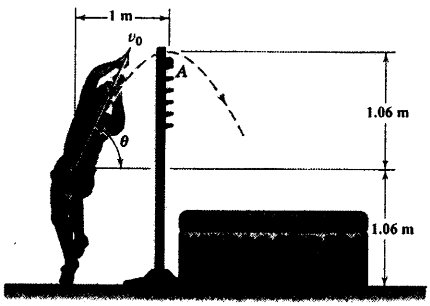
۲-٦۸ سوخت موشکی در موقعیت نشان داده شده تمام شده و بدون سوخت در بالای جو به حرکت خود ادامه می‌دهد. اگر سرعت موشک در این موقعیت ۱۰۰۰ km/h باشد، حداکثر ارتفاعی را که در زمان t متناظر برای رسیدن به این ارتفاع می‌پیماید، حساب کنید. شتاب ثقل در مدت پرواز $۹/۳۹\ \text{m/s}^2$ می‌باشد.



شکل مسئله ۶۸-۲

۲-٦۹ مرکز جرم G یک ورزشکار پرش ارتفاع، مسیر نشان داده شده در شکل زیر را طی می‌کند. مولفه $v_۰$، سرعت پرش در صفحه قائم و زاویه θ را چنان بیابید که مسیر پرش، درست از روی مانع A بگذرد (بطور کلی آیا مرکز جرم G ورزشکار در حین یک پرش موفق، باید درست از روی مانع بگذرد؟).

جواب $\quad v_۰ = ۵/۰٤\ \text{m/s}$ و $\theta = ٦٤/۷^\circ$

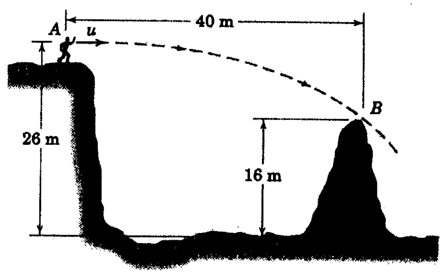


شکل مسئله ۶۹-۲

۲-۷۰ ذره‌ای در صفحه x-y حرکت نموده و مولفه y سرعت آن با رابطه $v_y = 8t$ مشخص شده است که در آن سرعت بر حسب متر بر ثانیه و زمان بر حسب ثانیه است. شتاب ذره در امتداد x بر حسب متر بر مجذور ثانیه توسط رابطه $a_x = 4t$ بیان گردیده در حالیکه t بر حسب ثانیه می‌باشد. هنگامیکه $t = 0$ است، $y = 2$ m ، $x = 0$ و $v_x = 0$ می‌باشند. مسیر حرکت ذره را پیدا کرده و مقدار سرعت $\mathbf{v}$ ذره را در موقعیتی که مختصه x آن به ۱۸ m می‌رسد، بیابید.

۲-۷۱ حداقل سرعت افقی u یک قطعه سنگ که پسربچه‌ای آنرا از نقطه A پرتاب می‌کند، چقدر بایستی باشد تا سنگ درست از روی مانع B عبور کند؟

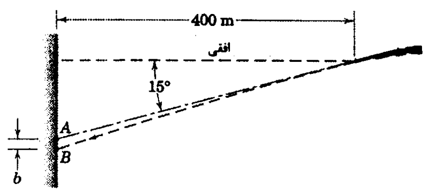
جواب $u = ۲۸/۰$ m/s



شکل مسئله ۲-۷۱

مسائل ویژه

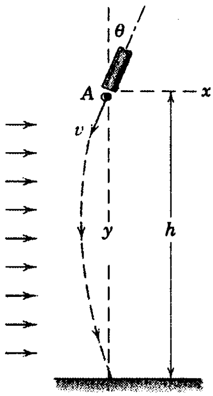
۲-۷۲ تفنگ، نقطه A را نشانه گرفته و به طرف آن مطابق شکل شلیک می‌کند. فاصله b بین نقطه A و نقطه B که گلوله به آن اصابت کرده را محاسبه کنید. سرعت شلیک ۸۰۰ m/s می‌باشد.



شکل مسئله ۲-۷۲

۲-۷۳ ذره‌ای مطابق شکل با سرعت v و زاویه θ نسبت به محور y از داخل یک لوله مطابق شکل پرتاب می‌گردد. باد شدید افقی، به ذره شتاب ثابتی به اندازه a و در جهت x می‌دهد. مطلوبست ارتفاع h ، اگر برخورد ذره با زمین درست در زیر محل پرتاب صورت گیرد. شتاب ذره در جهت y را می‌توان ثابت و برابر با g در نظر گرفت.

جواب $h = \frac{2v^2}{a}\sin\theta\left(\cos\theta + \frac{g}{a}\sin\theta\right)$

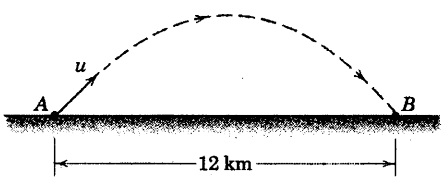


شکل مسئله ۲-۷۳

۲-۷۴ ثابت کنید برای سرعت اولیه v_0 در حرکت پرتابی، وقتی زاویه پرتاب $\theta = 45°$ باشد، برد R ماکزیمم خواهد شد. همچنین برد ماکزیمم را مشخص نمایید (توجه کنید که این نتیجه وقتی مقاومت آیرودینامیکی در محاسبه اضافه گردد، یکسان نخواهد بود).

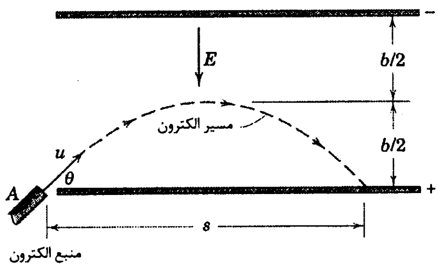
۲-۷۵ مطلوب است محاسبه حداقل سرعت خروج u پرتابه‌ای که باید شلیک شود تا فاصله ۱۲ km بین نقطه A و هدف B را بپیماید.

جواب $u = ۳۴۳$ m/s



شکل مسئله ۲-۷۵

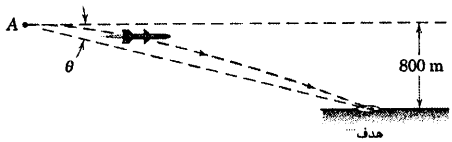
۷۶-۲ الکترونهایی با سرعت u و زاویه θ مطابق شکل از نقطه A به فضای بین صفحات شارژ شده منتشر می‌گردند. میدان الکتریکی بین صفحات در جهت E می‌باشد که باعث دفع الکترونهایی می‌شود که به صفحه بالایی نزدیک می‌شوند. میدان باعث یک شتاب در جهت E به اندازه eE/m بر روی الکترونها می‌شود که در آن e بار الکترون و m جرم آن می‌باشد. نیروی میدان E را طوری تعیین کنید که الکترونها بتوانند از وسط صفحات عبور کنند. همچنین مقدار s را نیز بدست آورید.



شکل مسئله ۷۶-۲

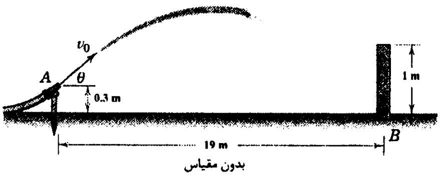
۷۷-۲ راکتی در نقطه A با سرعت افقی ۱۰۰۰ km/h در ارتفاع ۸۰۰ m از یک هواپیمای شکاری رها می‌گردد. اگر نیروی رانش راکت به حالت افقی باقی مانده و شتاب افقی $۰/۵g$ را برای آن تامین نماید، زاویه دید θ نسبت به امتداد افق را چنان حساب کنید که راکت به هدف اصابت کند.

جواب $\theta = ۱۱/٤٦°$



شکل مسئله ۷۷-۲

۷۸-۲ آب خروجی از شیلنگ دارای سرعت $v_۰ = ۱٤$ m/s و زاویه $\theta = ٤۰°$ می‌باشد. محل فرود آمدن آب را نسبت به نقطه B پای دیوار، حساب کنید. از اثرات ضخامت دیوار صرفنظر کنید.

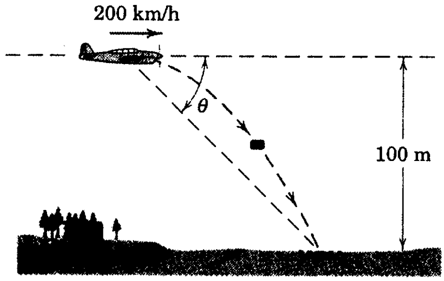


شکل مسئله ۷۸-۲

۷۹-۲ در مسئله ۷۸-۲ اگر سرعت خروجی آب $v_۰ = ۱٤$ m/s باشد، تحت چه زاویه θ آب بایستی خارج گردد تا مماس بر لبه دیواره، از آن عبور کرده و در نزدیکترین محل به آن فرود آید؟ از اثرات ضخامت دیواره و مقاومت هوا صرفنظر کنید. آب خروجی در کجا فرود می‌آید؟

جواب طرف راست B، ۰/۸۳۵ m و $\theta = ۵۰/۷°$

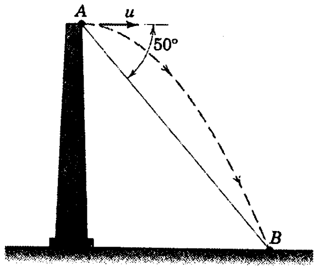
۸۰-۲ خلبان یک هواپیما که یک بسته پستی را به مقصد دور افتاده‌ای حمل می‌کند، می‌خواهد در حال حرکت بسته مزبور را در لحظه مناسب رها کند تا به داخل سبد پستی A بیفتد. در لحظه رها کردن بسته، زاویه دید خلبان (نسبت به هدف) با خط افق چقدر باید باشد؟ هواپیما با سرعت ۲۰۰ km/h در ارتفاع ۱۰۰ متری به صورت افقی پرواز می‌کند.



شکل مسئله ۸۰-۲

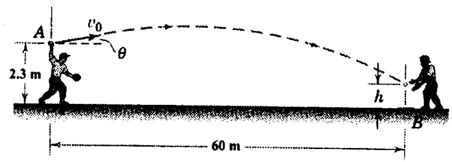
۲-۸۱ قطعه سنگی از بالای برجی از نقطه A به صورت افقی پرتاب شده و ۳/۵ ثانیه بعد در نقطه B به زمین برخورد می‌کند. خط AB با افق زاویه °۵۰ را می‌سازد. مقدار سرعت اولیه u سنگ را محاسبه کنید.

جواب $u = ۱۴/۴۱$ m/s



شکل مسئله ۸۱-۲

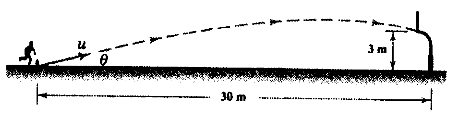
۲-۸۲ یک بازیکن بیسبال، دو مسیر متفاوت را برای پرتاب توپ به هدف، از موقعیت نشان داده شده، آزمایش می‌کند: (الف) $\upsilon_0 = ۴۲$ m/s با $\theta = ۸°$ و (ب) $\upsilon_0 = ۳۶$ m/s با $\theta = ۱۲°$. برای هر دو حالت، زمان t لازم برای رسیدن توپ به هدف و ارتفاع h توپ در لحظه رسیدن به هدف را تعیین کنید.



شکل مسئله ۸۲-۲

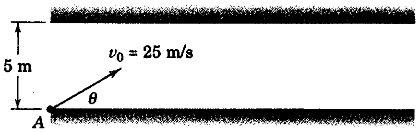
۲-۸۳ یک بازیکن فوتبال قصد دارد توپ را از فاصله ۳۰ متری، گل کند. اگر او سرعتی برابر ۳۰ m/s به توپ بدهد، حداقل زاویه θ را چنان تعیین کنید که توپ از تیرک عرضی دروازه عبور کند (راهنمایی: فرض کنید $m = \tan\theta$ است).

جواب $\theta = ۱۴/۹۱°$



شکل مسئله ۸۳-۲

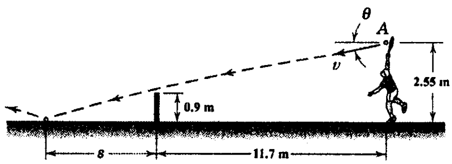
۲-۸۴ پرتابه‌ای با سرعت $\upsilon_0 = ۲۵$ m/s از کف یک راهرو با ارتفاع ۵ m مطابق شکل شلیک می‌شود. حداکثر برد R و زاویه θ متناظر را طوری تعیین کنید تا پرتابه بدون تماس با سقف، راهرو را طی کند.



شکل مسئله ۸۴-۲

۲-۸۵ اگر تنیس بازی، توپ را به طور افقی سرویس کند ($\theta = ۰$)، سرعت υ را طوری تعیین کنید که مرکز توپ از ۱۵۰ mm بالای تور ۰/۹ متری عبور نماید. همچنین فاصله s از مانع تا محل برخورد توپ روی زمین بازی را حساب کنید. از مقاومت هوا و اثر چرخش توپ صرفنظر کنید.

جواب $\upsilon = ۲۱/۲$ m/s و $s = ۳/۵۵$ m

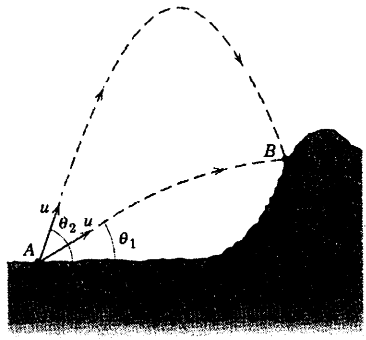


شکل مسئله ۸۵-۲

۲-۸۶ اگر تنیس‌باز مسئله ۸۵-۲ توپ را با سرعت υ برابر ۱۳۰ km/h تحت زاویه $\theta = ۵°$ سرویس کند، فاصله عمودی h از مرکز توپ تا مانع را حساب کنید. همچنین فاصله s از مانع تا جایی که توپ به زمین بازی برخورد می‌کند را محاسبه کنید. از مقاومت هوا و اثر حرکت چرخشی توپ صرفنظر کنید.

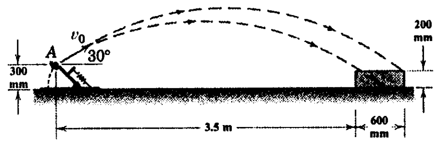
۲-۸۷ سرعت خروج گلوله از دهانه یک تفنگ دورزن که در نقطه A قرار دارد، $u = ۴۰۰$ m/s می‌باشد. دو مقدار زاویه θ را که به گلوله این امکان را خواهد داد که به هدف B روی کوه اصابت کند، معین کنید.

جواب $\theta_۱ = ۲۶/۱°$ و $\theta_۲ = ۸۰/۶°$



شکل مسئله ۸۷-۲

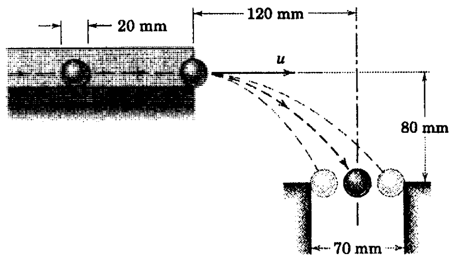
۸۸-۲ تیمی از دانشجویان مهندسی در حال طراحی یک فلاخن برای پرتاب یک توپ کوچک از نقطه A به داخل جعبه هستند. اگر زاویه بردار سرعت اولیه با امتداد افق ۳۰° معلوم باشد، محدوده سرعت پرتاب v_0 را چنان تعیین کنید که توپ به داخل جعبه بیفتد.



شکل مسئله ۸۸-۲

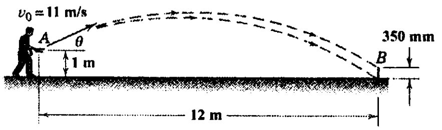
۸۹-۲ مطابق شکل، ساچمه‌ها با سرعتی به اندازه u از درون مجرای افقی خارج شده، داخل حفره‌ای به قطر ۷۰ mm می‌افتند. محدوده u را چنان تعیین کنید که ساچمه‌ها حتماً داخل حفره شوند. برای نشان دادن شرایط حدی از موقعیت‌های خط‌چین استفاده کنید.

جواب $u_{min} = ۰/۷۴۴$ m/s و $u_{max} = ۱/۱۳۵$ m/s



شکل مسئله ۸۹-۲

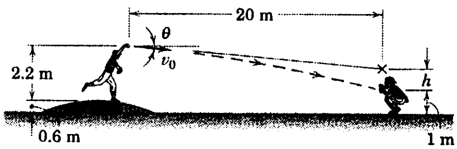
۹۰-۲ یک بازیکن پرتاب نعل اسب، نعل را در موقعیت A با سرعت اولیه $v_0 = ۱۱$ m/s پرتاب می‌کند. محدوده زاویه پرتاب θ را چنان تعیین کنید که نعل اسب به مانع عمودی ۳۵۰ mm برخورد کند.



شکل مسئله ۹۰-۲

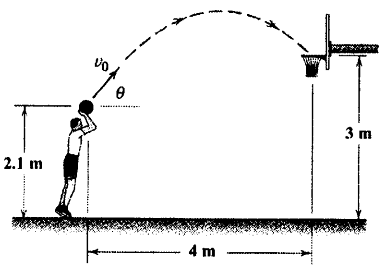
۹۱-۲ مطلوبست موقعیت h نقطه‌ای که پرتاب کننده، توپ بیسبال را در آن امتداد بایستی پرتاب کند تا توپ در دستکش مخصوص گیرنده توپ قرار گیرد. توپ با سرعت ۴۰ m/s پرتاب می‌شود.

جواب $h = ۱/۲۲۷$ m



شکل مسئله ۹۱-۲

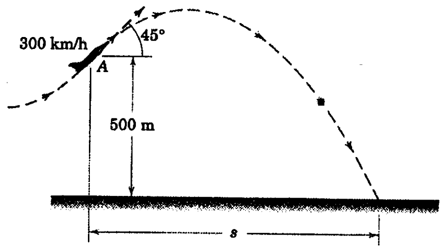
۹۲-۲ بسکتبالیست نشان داده شده در شکل، تحت زاویه $\theta = ۵۰°$ قصد پرتاب توپ را دارد. با چه سرعت v_0 توپ بایستی پرتاب گردد تا باعث شود توپ از وسط حلقه عبور نماید؟



شکل مسئله ۹۲-۲

۲-۹۳ ◀ خلبان هواپیمایی که با سرعت ۳۰۰ km/h و زاویه ۴۵° در حال صعود است، بسته‌ای را در موقعیت A رها می‌کند. مسافت افقی s و زمان t را از نقطه رها شدن تا نقطه اصابت بسته به زمین، محاسبه کنید.

جواب $s = ۱/۰۴۶\ \text{km}$ و $t = ۱۷/۷۵\ \text{s}$



شکل مسئله ۹۳-۲

۲-۹۴ ◀ در یک آزمایش سیالاتی، گلوله‌ای در زمان $t = ۰$ به داخل سیال شلیک می‌شود. سرعت اولیه $\upsilon_۰$ و زاویه شلیک نسبت به افق θ می‌باشد. شتاب ناشی از مقاومت سیال روی گلوله با عبارت $\mathbf{a}_D = -k\mathbf{v}$ بیان می‌گردد که در آن k عدد ثابت و $\mathbf{v}$ سرعت گلوله در سیال است. مولفه‌های x و y را برای سرعت و جابجایی گلوله به صورت تابعی از زمان تعیین کنید. سرعت نهایی گلوله چه خواهد بود؟ شتاب ناشی از ثقل را نیز در نظر بگیرید.

جواب $\upsilon_x = (\upsilon_۰\cos\theta)e^{-kt}\ ,\ x = \frac{\upsilon_۰\cos\theta}{k}\left(۱ - e^{-kt}\right)$

$$\upsilon_y = \left(\upsilon_۰\sin\theta + \frac{g}{k}\right)e^{-kt} - \frac{g}{k}$$

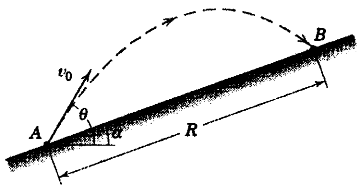
$$y = \frac{۱}{k}\left(\upsilon_۰\sin\theta + \frac{g}{k}\right)\left(۱ - e^{-kt}\right) - \frac{g}{k}t$$

$$\upsilon_x \to ۰\ ,\ \upsilon_y \to -\frac{g}{k}$$

شکل مسئله ۹۴-۲

۲-۹۵ ◀ پرتابه‌ای با سرعت $\upsilon_۰$ از نقطه A شلیک می‌شود. زاویه شلیک θ را طوری تعیین کنید که برد R روی سطح شیبدار با زاویه α ($۰° \le \alpha \le ۹۰°$)، ماکزیمم گردد. نتایج را برای ۴۵°، ۳۰° و $\alpha = ۰$ ارزیابی کنید.

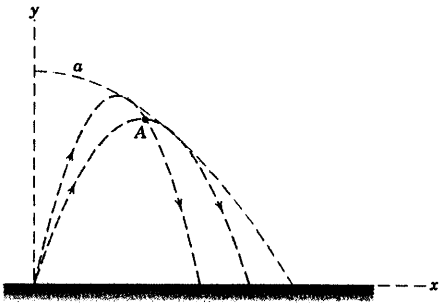
جواب $\theta = \frac{۹۰° + \alpha}{۲}$ و $\theta = ۴۵°، ۶۰°، ۶۷/۵°$



شکل مسئله ۹۵-۲

۲-۹۶ ◀ مطلوبست معادله a، پوش مسیرهای سهمی شکل پرتابه‌ای که با سرعت اولیه یکسان u در زوایای مختلف شلیک گردد (راهنمایی: در معادله مسیر مقدار $m = \tan\theta$ قرار داده که در آن θ، زاویه پرتاب می‌باشد. دو ریشه $m_۱$ و $m_۲$ از معادله درجه دوم حاصله، دو زاویه پرتاب را برای دو مسیر نشان داده شده در اختیار خواهند گذاشت که هر دو مسیر از نقطه A می‌گذرند. هنگامیکه این دو ریشه به سوی هم میل کنند، نقطه A به سمت پوش میل خواهد نمود). از مقاومت هوا صرفنظر نموده، g را ثابت فرض کنید.

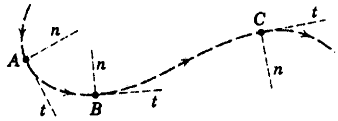
جواب $y = \frac{u^۲}{۲g} - \frac{gx^۲}{۲u^۲}$



شکل مسئله ۹۶-۲

۲-۵ مختصات عمودی و مماسی (n-t)

همانطور که در بخش ۱-۲ ذکر شد، یکی از متعارف‌ترین روشهای تشریح حرکت منحنی الخط، استفاده از متغیرهای مسیر است که در امتدادهای مماس t و عمود n بر مسیر ذره اندازه گرفته می‌شود. این مختصات توصیفی طبیعی از حرکت منحنی الخط را ارائه داده و غالباً مناسبترین دستگاه مختصاتی است که مورد استفاده قرار می‌گیرد. همانطور که در شکل ۹-۲ مشاهده می‌شود، مختصات n و t در امتداد مسیر حرکت با ذره از A به B و به C پیش رفته است. جهت مثبت n در تمام وضعیتها همیشه به طرف مرکز انحنای مسیر می‌باشد. همانطور که در شکل ۹-۲ مشاهده می‌گردد، اگر جهت انحنا تغییر کند، جهت مثبت n از یک سوی منحنی به سوی دیگر آن منتقل می‌گردد.



شکل ۹-۲

سرعت و شتاب

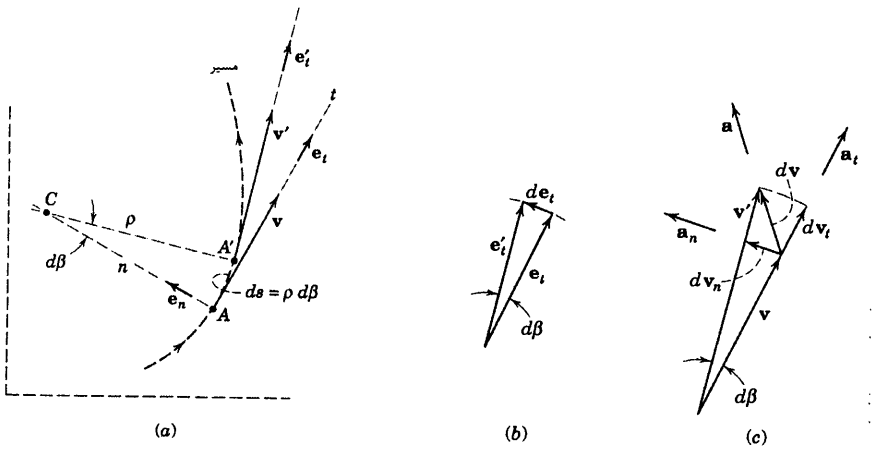
اکنون، مختصات n و t را برای تشریح سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ که در بخش ۳-۲ برای حرکت منحنی الخط یک ذره تعریف شدند، مورد استفاده قرار خواهیم داد. برای این منظور، بردارهای یکه $\mathbf{e}_n$ در امتداد n و $\mathbf{e}_t$ در امتداد t را، همانند شکل ۱۰a-۲ برای موقعیت ذره در نقطه A از مسیرش تعریف می‌کنیم. در طول نمو دیفرانسیلی زمان dt، ذره فاصله دیفرانسیلی ds را در امتداد منحنی از A به A' طی می‌کند. با در نظر گرفتن شعاع انحنای مسیر در این موقعیت که با ρ مشخص می‌نماییم، می‌بینیم که $ds = \rho\, d\beta$ می‌گردد که در آن β بر حسب رادیان است. ملاحظه می‌کنیم که لازم نیست تغییرات دیفرانسیل ρ بین A و A' را در نظر بگیریم. زیرا جمله‌ای از مرتبه بالاتر پیدا خواهد کرد که در حد حذف می‌گردد. بنابراین، اندازه سرعت به صورت $\upsilon = \frac{ds}{dt} = \rho \frac{d\beta}{dt}$ نوشته شده و برای سرعت به صورت برداری می‌توان نوشت:

$$\boxed{\mathbf{v} = \upsilon\, \mathbf{e}_t = \rho \dot{\beta}\, \mathbf{e}_t} \qquad (۲-۷)$$

شتاب $\mathbf{a}$ ذره، در بخش ۳-۲ به صورت $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ تعریف شد و از شکل ۵-۲ مشاهده کردیم که شتاب، منعکس کننده تغییرات اندازه و نیز تغییرات امتداد $\mathbf{v}$ می‌باشد. حال از رابطه ۷-۲ و با استفاده از قوانین معمول مشتق ضرب یک اسکالر در یک بردار* از $\mathbf{v}$ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(\upsilon\, \mathbf{e}_t)}{dt} = \upsilon\, \dot{\mathbf{e}}_t + \dot{\upsilon}\, \mathbf{e}_t \qquad (۲-۸)$$

* به قسمت C-۷ از پیوست C مراجعه نمایید



شکل ۱۰-۲

که در آن بردار یکه $\mathbf{e}_t$ دارای مشتق می‌باشد زیرا امتداد آن تغییر می‌کند. برای پیدا کردن $\dot{\mathbf{e}}_t$، تغییرات $\mathbf{e}_t$ را طـی یـک نمو دیفرانسیلی از یک حرکت وقتی ذره از A به A' مطابق شکل ۲-۱۰a حرکت می‌کند، تحلیل می‌کنیم. مطـابق شـکل (b) وقتی $\mathbf{e}_t$ به $\mathbf{e}'_t$ تغییر می‌یابد، اختلاف برداری $d\mathbf{e}_t$ پدیدار می‌گردد. بردار $d\mathbf{e}_t$ در حد، اندازه‌ای برابر طول قوس $|\mathbf{e}_t|\, d\beta = d\beta$ دارد که از چرخیدن بردار یکه $\mathbf{e}_t$ به اندازه $d\beta$، بر حسب رادیان حاصل می‌شود. امتداد $d\mathbf{e}_t$ توسط $\mathbf{e}_n$ بیان می‌گردد. بنـابراین می‌توانیم بنویسیم $d\mathbf{e}_t = \mathbf{e}_n\, d\beta$. از تقسیم آن بر $d\beta$ خواهیم داشت:

$$\frac{d\mathbf{e}_t}{d\beta} = \mathbf{e}_n$$

یا از تقسیم آن بر dt، $d\mathbf{e}_t/dt = (d\beta/dt)\mathbf{e}_n$ بدست می‌آید که به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\dot{\mathbf{e}}_t = \dot{\beta}\,\mathbf{e}_n} \qquad (۲-۹)$$

با قرار دادن معادله ۹-۲ و $\dot{\beta}$ از رابطه $\upsilon = \rho\dot{\beta}$، معادله ۸-۲ یعنی شتاب به صورت زیر در می‌آید.

$$\boxed{\mathbf{a} = \frac{\upsilon^2}{\rho}\mathbf{e}_n + \dot{\upsilon}\,\mathbf{e}_t} \qquad (۲-۱۰)$$

که در آن:

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{\rho} = \rho\dot{\beta}^2 = \upsilon\dot{\beta}$$

$$a_t = \dot{\upsilon} = \ddot{s}$$

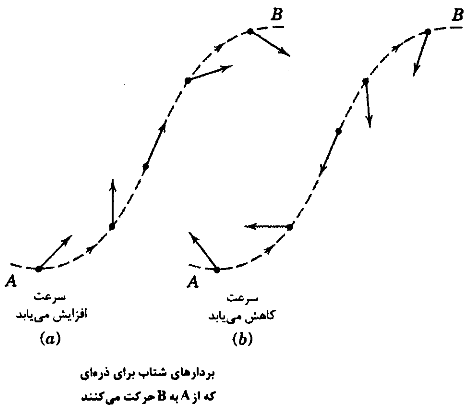
$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

همچنین می‌توان ملاحظه کرد که $a_t = \dot{\upsilon} = \dfrac{d(\rho\dot{\beta})}{dt} = \rho\ddot{\beta} + \dot{\rho}\dot{\beta}$. اما این رابطه کاربرد زیـادی نـدارد، زیـرا بنـدرت محاسبه $\dot{\rho}$ لازم می‌شود.

نمایش هندسی

هنگامی از معادله ۱۰-۲ می‌توان درک کاملی داشت که نتایج هندسی تغییرات فیزیکی تشریح شده و به وضوح قابل ملاحظه باشند. شکل ۱۰c-۲ بردار سرعت $\mathbf{v}$ را در موقعی که ذره در A و بردار سرعت $\mathbf{v}$ را موقعی که ذره در A' است نشان می‌دهد. $d\mathbf{v}$ ، تغییرات برداری سرعت است و امتداد شــتاب $\mathbf{a}$ را مشــخص می‌نمــاید. مولفــه n از $d\mathbf{v}$ توسـط $d\mathbf{v}_n$ مشـخص می‌شود و اندازه‌اش در حد برابر با طول قوسی است که توسط چرخیدن بردار $\mathbf{v}$ به عنوان یـک شـعاع بـه انـدازه زاویـه $d\beta$ بدست می‌آید. بنابراین، $|d\mathbf{v}_n| = \upsilon\, d\beta$ و مولفه شتاب عمودی مانند قبل برابر $a_n = \dfrac{|d\mathbf{v}_n|}{dt} = \upsilon\dfrac{d\beta}{dt} = \upsilon\dot{\beta}$ می‌گردد. مولفه t از $d\mathbf{v}$ با $d\mathbf{v}_t$ مشخص می‌گردد و اندازه‌اش برابر تغییرات اندازه سرعت، یعنی $d\upsilon$ می‌باشد. بنابراین مولفه t شتاب همچون قبل برابر $a_t = d\upsilon/dt = \dot{\upsilon} = \ddot{s}$ است. بردارهای شتاب ناشی از تغییرات برداری متناظر سرعت در شکل ۱۰c-۲ نشـان داده شـده است.

این نکته دارای اهمیت زیادی است که مولفه عمودی شتاب یعنی a_n *همیشه به طـرف مرکـز انحنـای مسـیر* یعنـی C متوجه است. از طرف دیگر، مولفه مماسی شتاب در صورتی در امتداد مثبت t می‌باشد که مقدار سرعت υ افزایش یافته و در صورتی در امتداد منفی t است که مقدار سرعت کاهش یابد.

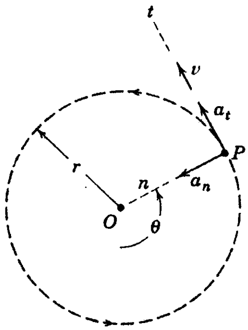


شکل ۱۱-۲

در شکل ۱۱-۲، شمائی از تغییرات بردار شتاب برای ذره‌ای که از A بـه B حرکـت می‌کنـد در حـالی کـه (a) انـدازه سرعت افزایش می‌یابد و (b) اندازه سرعت کاهش می‌یابد، نمایش داده شده است. در قســمتی از منحنی کـه تغییـر انحنـا داریم، شتاب عمودی یعنی υ^2/ρ صفر می‌گردد، زیرا ρ بینهایت شده است.

حرکت دایره‌ای

حرکت دایره‌ای حالت خاصی از حرکت منحنی الخط در صفحه است که در آن شعاع انحنای ρ ثابت بوده و برابر شعاع r دایره حرکت می‌باشد و زاویــه θ جای زاویه β را می‌گیرد که نسبت به یک مرجع شعاعی مناسب OP، مانند شکل ۱۲-۲ اندازه‌گیری می‌شود. مولفه‌های سرعت و شتاب عبارت خواهند بود از:

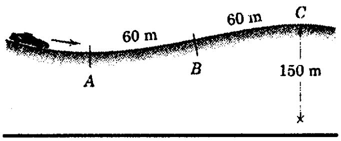


شکل ۱۲-۲

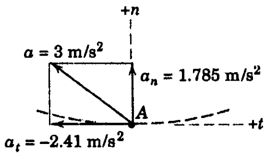
$$\boxed{\begin{aligned} v &= r\dot{\theta} \\ a_n &= v^2/r = r\dot{\theta}^2 = v\dot{\theta} \\ a_t &= \dot{v} = r\ddot{\theta} \end{aligned}} \qquad (۲-۱۱)$$

در دینامیک از معادله‌های ۱۰-۲ و ۱۱-۲ مکرراً استفاده می‌شود، بنابراین باید تسلط بر رابطه‌ها و اصول حاکم بر آنها کاملاً درک گردد.

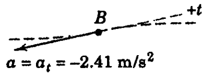
مسئله نمونه ۷-۲



راننده یک اتومبیل در هنگام رسیدن به جاده ناهموار، ترمز گرفته و با شتاب کند شونده‌ای به حرکت ادامه می‌دهد. سرعتش در فرو رفتگی A برابر ۱۰۰ km/h و در برآمدگی C برابر ۵۰ km/h می‌باشد و در این فاصله ۱۲۰ m را از نقطه A روی جاده طی می‌کند. اگر شتاب کل وارد بر سرنشینان ۳ m/s^2 در نقطه A بوده و اگر شعاع انحنا در نقطه برآمدگی C برابر ۱۵۰ m باشد، (a) شعاع انحنای ρ را در نقطه A، (b) شتاب در نقطه عطف B و (c) شتاب کل در C را محاسبه کنید.

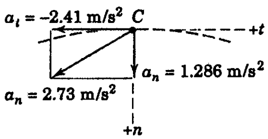


حل: ابعاد اتومبیل در مقایسه با مسیر کوچک بوده، بنابراین اتومبیل را می‌توان به صورت یک ذره در نظر گرفت. سرعتها عبارتند از:



$$v_A = \left(100\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)\left(\frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}}\right)\left(1000\frac{\text{m}}{\text{km}}\right) = 27.8 \text{ m/s}$$

$$v_C = 50\frac{1000}{3600} = 13.89 \text{ m/s}$$



حال شتاب ثابت کند شونده روی مسیر را پیدا می‌کنیم.

$$\left[\int v\,dv = \int a_t\,ds\right] \qquad \int_{v_A}^{v_C} v\,dv = a_t\int_0^s ds$$

$$a_t = \frac{1}{2s}\left(v_C^2 - v_A^2\right) = \frac{(13.89)^2 - (27.8)^2}{2(120)} = -2.41 \text{ m/s}^2$$

(a) شرایط در A. با داشتن شتاب کل و تعیین a_t، به راحتی می‌توان a_n و در نتیجه ρ را حساب کرد.

$$\left[a^2 = a_n^2 + a_t^2\right] \qquad a_n^2 = 3^2 - (2.41)^2 = 3.19 \ , \ \ a_n = 1.785 \text{ m/s}^2$$

جواب
$$\left[a_n = \frac{v^2}{\rho}\right] \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{(27.8)^2}{1.785} = 432 \text{ m}$$

(b) شرایط در B. چون شعاع انحنا در نقطه عطف منحنی بینهایت است، در نتیجه $a_n = 0$ و:

جواب
$$a = a_t = -2.41 \text{ m/s}^2$$

(c) شرایط در C. شتاب عمودی و شتاب کل به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\left[a_n = v^2/\rho\right] \qquad a_n = (13.89)^2/150 = 1.286 \text{ m/s}^2$$

توسط بردارهای یکه $\mathbf{e}_n$ و $\mathbf{e}_t$، بردار شتاب به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$\mathbf{a} = 1.286\,\mathbf{e}_n - 2.41\,\mathbf{e}_t \text{ m/s}^2$$

که در آن اندازه شتاب $\mathbf{a}$ برابر است با:

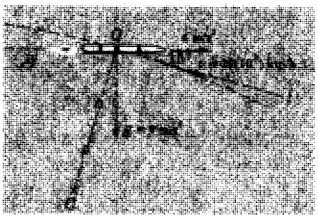
جواب
$$\left[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\right] \qquad a = \sqrt{(1.286)^2 + (-2.41)^2} = 2.73 \text{ m/s}^2$$

برای وضوح، بردارهای شتاب که نمایش دهنده شرایط در هر یک از سه نقطه می‌باشد در شکل نشان داده شده‌اند.

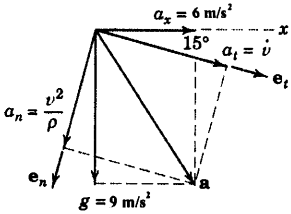
نکته مفید

❶ *در واقع شعاع انحنای جاده با شعاع انحنای مسیر مرکز جرم سرنشینان حدود یک متر تفاوت دارد ولی از این اختلاف ناچیز صرفنظر کرده‌ایم.*

مسئله نمونه ۸-۲



راکتی خاص با موتور روشن در اثنای حرکت در ارتفاع زیاد چنان پرواز می‌کند که محور طولی‌اش همواره افقی باقی می‌ماند. نیروی رانش راکت به آن شتاب افقی $6\ m/s^2$ را داده و شتاب ناشی از جاذبه در آن ارتفاع برابر $g = 9\ m/s^2$ می‌باشد. در لحظه‌ای که نشان داده شده است، سرعت راکت $20(10^3)\ km/h$ در امتداد $15°$ نسبت به مسیر آن می‌باشد. در این وضعیت (a) شعاع انحنای مسیر پرواز، (b) میزان افزایش مقدار سرعت v، (c) میزان تغییر زاویه‌ای $\dot{\beta}$ خط شعاعی متصل از G به مرکز انحنای C و (d) عبارت برداری برای شتاب کل **a** راکت، را تعیین کنید.



❶ **حل:** شعاع انحنا در مولفه عمودی شتاب خود را نشان می‌دهد، بنابراین از مولفه‌های n و t به منظور بیان حرکت G استفاده خواهد شد. مولفه‌های n و t شتاب از تجزیه مولفه‌های افقی و قائم شتاب داده شده بر روی محورهای n و t حاصل می‌گردد و از شکل مشاهده می‌شود که برابرند با:

$$a_n = 9\cos 15° - 6\sin 15° = 7.14\ \ m/s^2$$
$$a_t = 9\sin 15° + 6\cos 15° = 8.12\ \ m/s^2$$

(a) اکنون می‌توانیم شعاع انحنا را محاسبه نماییم.

❷ جواب $$\left[a_n = v^2/\rho\right] \qquad \rho = \frac{v^2}{a_n} = \frac{\left[20(10^3)/3.6\right]^2}{7.14} = 4.32\left(10^6\right)\ m$$

(b) میزان افزایش v همان مولفه t شتاب است

جواب $$\left[\dot{v} = a_t\right] \qquad \dot{v} = 8.12\ \ m/s^2$$

(c) میزان زاویه‌ای $\dot{\beta}$ خط GC به v و ρ بستگی دارد و بدست می‌آید.

جواب $$\left[v = \rho\dot{\beta}\right] \qquad \dot{\beta} = \frac{v}{\rho} = \frac{20(10^3)/3.6}{4.32(10^6)} = 12.85\left(10^{-4}\right)\ rad/s$$

(d) با استفاده از بردارهای یکه $\mathbf{e}_n$ و $\mathbf{e}_t$ به ترتیب برای امتدادهای n و t، شتاب کل برابر می‌شود با:

جواب $$\mathbf{a} = 7.14\ \mathbf{e}_n + 8.12\ \mathbf{e}_t\ \ ft/sec^2$$

نکات مفید

❶ *به جای این کار، می‌توانستیم شتاب برآیند را بدست آورده و سپس آن را به دو مولفه t و n تجزیه کنیم.*

❷ *برای تبدیل km/h به m/s، آن را در $\frac{1000\ m/km}{3600\ s/h}$ ضرب کرده یا بر ۳/۶ تقسیم می‌نماییم.*

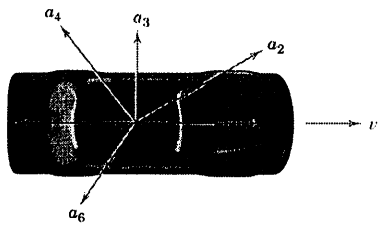
مسائل

مسائل مقدماتی

۲-۹۷ ذره‌ای روی یک مسیر دایره‌ای شکل به شعاع ۰/٤ m حرکت می‌نماید. اندازه شتاب a ذره را بدست آورید، اگر: (الف) سرعتش ثابت و برابر ۰/٦ m/s و (ب) سرعتش ۰/٦ m/s ولی با میزان ۱/۲ m/s در هر ثانیه افزایش یابد.

جواب a = ۰/۹ m/s^2 و (ب) a = ۱/٥ m/s^2

۲-۹۸ شش بردار شتاب مطابق شکل بر اتومبیلی که بردار سرعتش مستقیم و به طرف جلو می‌باشد، اثر می‌کنند. هر کدام از شتابها را بر اساس حرکت لحظه‌ای اتومبیل توصیف نمایید.

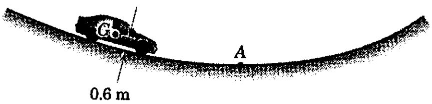


شکل ۹۸-۲

۲-۹۹ اتومبیلی در مسیر دایره‌ای به شعاع ۲٤۰ m در حال چرخش است. اگر مقدار شتاب کل آن در لحظه‌ای که سرعتش ۷٥ km/h است، ۳ m/s^2 باشد؛ میزان تغییرات مقدار سرعت را بدست آورید.

جواب a_t = ± ۲/۳۹ m/s^2

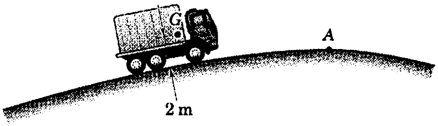
۲-۱۰۰ اتومبیلی با سرعت ثابتی از نقطه A در سرازیری جاده‌ای مطابق شکل عبور می‌کند و شتاب مرکز ثقل آن ۰/٥g می‌گردد. اگر شعاع انحنای جاده در A برابر ۱۰۰m و فاصله کف جاده تا مرکز ثقل G اتومبیل ۰/٦ m باشد، سرعت v اتومبیل را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۰۰-۲

۲-۱۰۱ هنگامیکه کامیون از نقطه A بلندی یک جاده با سرعت ثابت عبور می‌کند، راننده آن دارای شتاب ۰/٤ g می‌باشد. شعاع انحنای جاده در A، ۹۸ m و G مرکز جرم راننده (یک ذره در نظر گرفته شود) ۲ m بالاتر از سطح جاده می‌باشد. سرعت v کامیون را پیدا کنید.

جواب v = ۷۱/۳ km/h



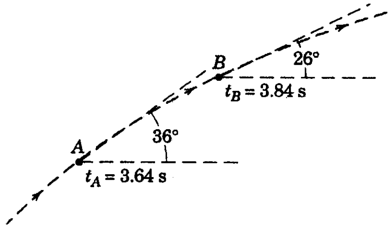
شکل مسئله ۱۰۱-۲

۲-۱۰۲ کشتی که با سرعت یکنواخت ۲۰ گره (۱ گره = ۱/۸٥۲ km/h) در حرکت است، جهت خود را با دور زدن پادساعتگرد به طرف بندر تغییر می‌دهد. اگر در مدت ٦۰ ثانیه، °۹۰ چرخش نماید؛ مطلوبست محاسبه مقدار شتاب **a** کشتی در هنگام دور زدن.

۲-۱۰۳ ترنی با سرعت ۱۰۰ km/h وارد ناحیه منحنی شکل مسیر افقی خود می‌گردد و سپس با شتاب کند شونده، در مدت ۱۲ ثانیه مقدار سرعت خود را به ٥۰ km/h می‌رساند. شتاب‌سنجی که در داخل ترن نصب شده، شتاب افقی ۲ m/s^2 را در لحظه‌ای که ترن ٦ ثانیه در مسیر منحنی حرکت کرده است، ثبت می‌کند. شعاع انحنای ρ مسیر را در این لحظه حساب کنید.

جواب ρ = ۲٦٦ m

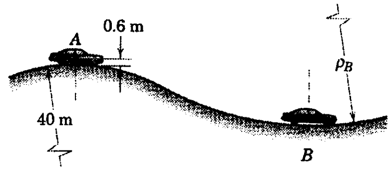
۲-۱۰۴ ذره‌ای مطابق شکل در امتداد منحنی الخط حرکت می‌کند. اگر سرعت ذره در نقطه A و زمان t_A برابر ۱۲ m/s و در نقطه B و زمان t_B برابر ۱۳/۵ m/s باشد، متوسط مقدار شتاب ذره را بین دو نقطه A و B در امتدادهای عمود و مماس بر مسیر حساب کنید.



شکل مسئله ۲-۱۰۴

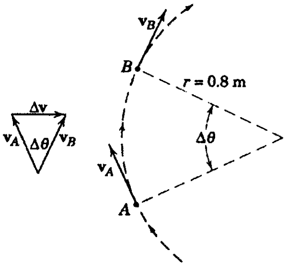
۲-۱۰۵ مقدار سرعت یک اتومبیل به طور یکنواخت نسبت به زمان از ۵۰ km/h در نقطه A به ۱۰۰km/h در نقطه B در مدت زمان ۱۰ ثانیه می‌رسد. شعاع انحنا در بلندی A برابر ۴۰ m است. اگر مقدار شتاب کل مرکز جرم اتومبیل در B همان باشد که در A است، شعاع انحنای ρ_B در گودی B جاده را بدست آورید. مرکز جرم اتومبیل ۰/٦ m بالاتر از سطح جاده است.

جواب ρ_B = ۱٦۳/۰ m



شکل مسئله ۲-۱۰۵

۲-۱۰٦ ذره‌ای با سرعت ثابت ۲ m/s بر روی مسیر مدوری به شعاع ۰/۸ m حرکت می‌کند. در طی حرکت از A به B، سرعت ذره به اندازه $\Delta \mathbf{v}$ تغییر برداری پیدا می‌کند. مقدار $\Delta \mathbf{v}$ را بر حسب v و $\Delta\theta$ بیان نموده و آنرا بر فاصله زمانی Δt بین A و B تقسیم نمایید تا مقدار شتاب متوسط ذره در سه حالت (الف) $\Delta\theta = ۳۰°$، (ب) $\Delta\theta = ۱۵°$ و (ج) $\Delta\theta = ۵°$ بدست آید. درصد اختلاف نتایج حاصله را با شتاب لحظه‌ای ذره تعیین کنید.



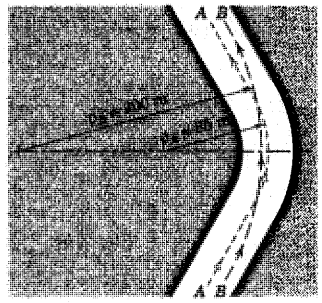
شکل مسئله ۲-۱۰٦

مسائل ویژه

۲-۱۰۷ ماهواره‌ای با سرعت ثابت v یک مدار دایره‌ای را در ارتفاع ۳۲۰ km بالای سطح زمین می‌پیماید. با علم به اینکه شتاب ماهواره همان شتاب جاذبه در آن ارتفاع می‌باشد، سرعت v را بدست آورید (توجه: در صورت نیاز، بخش ۵-۱ را مرور نموده و از g متوسط و شعاع متوسط زمین استفاده کنید. همچنین توجه داشته باشید که v مقدار سرعت ماهواره نسبت به مرکز زمین می‌باشد).

جواب v = ۲۷/۸(۱۰ ^{۳}) km/h

۲-۱۰۸ در شکل زیر دو مسیر ممکن برای پیمودن یک پیچ بدون شیب جانبی، در قسمتی از یک پیست اتومبیل‌رانی که به صورت افقی است، نشان داده شده است. مسیر AA خط میانی جاده را دنبال می‌کند و دارای شعاع انحنا ρ_A = ۸۵ m است در صورتیکه مسیر BB از پهنای جاده جهت افزایش شعاع انحنای به ρ_B = ۲۰۰ m بهره می‌گیرد. اگر رانندگان سرعتهای خود را برای پیمودن دو مسیر منحنی چنان محدود نمایند که شتابهای جانبی آنها از g ۰/۸ تجاوز ننماید، حداکثر مقدار سرعت در هر یک از دو مسیر را تعیین کنید.



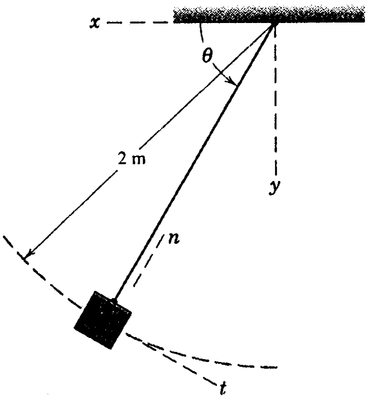
شکل مسئله ۱۰۸-۲

۱۰۹-۲ فرض کنید که محور قطبی کره زمین در فضا ثابت است. شتاب a نقطه P را در عرض جغرافیایی ۴۰° شمالی حساب کنید. قطر متوسط زمین ۱۲۷۴۲ km و سرعت زاویه‌ای آن $۰/۷۲۹(۱۰^{-۴})$ rad/s است.

جواب $a = ۰/۰۲۵۹ \text{ m/s}^2$

شکل مسئله ۱۰۹-۲

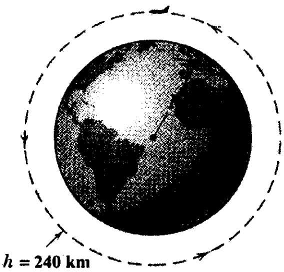
۱۱۰-۲ عبارت برداری مربوط به شتاب **a** مرکز جرم G آونگ ساده را در مختصات n-t و مختصات x-y هنگامی بنویسید که $\theta = ۶۰^\circ$، $\dot{\theta} = ۲ \text{ rad/s}$ و $\ddot{\theta} = ۲/۴۵ \text{ rad/s}^2$ باشد.



شکل مسئله ۱۱۰-۲

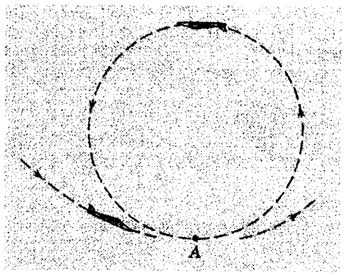
۱۱۱-۲ یک شاتل فضایی که روی مداری دایره‌ای شکل در ارتفاع $h = ۲۴۰$ km بالای سطح زمین حرکت می‌کند، باید سرعتی برابر ۲۷۹۹۵ km/h داشته باشد. شتاب جاذبه را در این ارتفاع تعیین کنید. شعاع متوسط زمین ۶۳۷۱ km می‌باشد (جواب بدست آمده را با مقدار g که از قانون جاذبه $g = g_\circ\left(\dfrac{R}{R+h}\right)^۲$، که در آن $g_\circ = ۹/۸۲۱ \text{ m/s}^2$ از جدول D-۲ پیوست D بدست می‌آید، مقایسه کنید).

جواب $a_n = g = ۹/۱۲ \text{ m/s}^2$



شکل مسئله ۱۱۱-۲

۲-۱۱۲ شتاب کل هواپیمایی که مسیر حلقه‌ای عمودی را طی می‌کند در پایین‌ترین نقطه یعنی A برابر $۳g$ می‌باشد. اگر سرعت هواپیما ۸۰۰ km/h بوده و با میزان ۲۰ km/h در هر ثانیه افزایش یابد، شعاع انحنای ρ را در نقطه A مسیر محاسبه کنید.

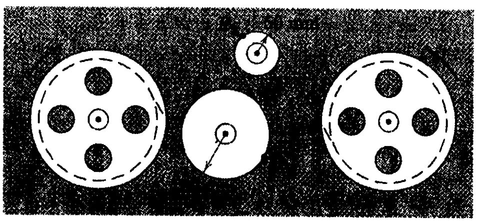


شکل مسئله ۲-۱۱۲

۲-۱۱۳ نوار مغناطیسی از قرقره A به قرقره B انتقال یافته و در میانه، از روی چرخ‌های آزادگرد C و D می‌گذرد. در لحظه‌ای خاص، نقطه P_1 نوار در تماس با چرخ C و نقطه P_2 آن در تماس با چرخ D می‌باشد. اگر در این لحظه، مولفه عمودی شتاب P_1 برابر ۴۰ m/s^2 و مولفه مماسی شتاب P_2 برابر ۳۰ m/s^2 باشد، سرعت متناظر v و مقدار شتاب کل P_1 و مقدار شتاب کل P_2 را حساب کنید.

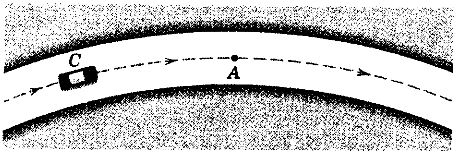
جواب v = ۲ m/s

a_1 = ۵۰ m/s^2 و a_2 = ۸۵/۴ m/s^2



شکل مسئله ۲-۱۱۳

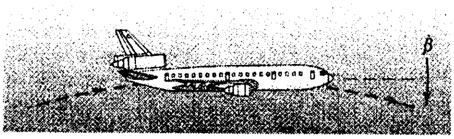
۲-۱۱۴ اتومبیل C هنگامیکه مسیر منحنی نشان داده شده در شکل را دور می‌زند، سرعت خود را با میزان ۱/۵ m/s^2 افزایش می‌دهد. اگر اندازه شتاب کل اتومبیل در نقطه A که شعاع انحنای ۲۰۰ m است، برابر ۲/۵ m/s^2 باشد، اندازه سرعت v اتومبیل را در این نقطه حساب کنید.



شکل مسئله ۲-۱۱۴

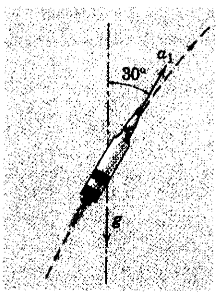
۲-۱۱۵ جهت ایجاد شرایط «بی وزنی» در داخل کابین، یک هواپیمای جت مسافربری با سرعت ۸۰۰km/h یک مسیر منحنی را در صفحه قائم طی می‌کند. خلبان هواپیما بایستی با چه میزان $\dot{\beta}$ (بر حسب درجه بر ثانیه) خط سیرش را افت دهد تا شرایط مطلوب فراهم آید؟ مانور در ارتفاع متوسط ۸ km انجام می‌شود و در این ارتفاع شتاب ثقل را می‌توان ۹/۷۹ m/s^2 فرض نمود.

جواب $\dot{\beta}$ = ۲/۵۲ deg/s



شکل مسئله ۲-۱۱۵

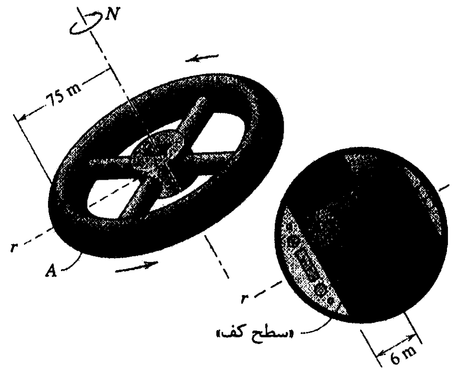
۲-۱۱۶ موشکی که در ماوراء جو در ارتفاع ۵۰۰km حرکت می‌کند، تحت اثر نیروی ثقل در غیاب سایر نیروها با شتاب سقوط آزاد g = ۸/۴۳ m/s^2 حرکت می‌کند. به علت نیروی رانشی وارده، موشک دارای مولفه شتاب اضافی دیگر a_1 برابر ۸/۸ m/s^2 مماس بر مسیر نیز می‌باشد که در لحظه مورد نظر با امتداد قائم زاویه °۳۰ می‌سازد. اگر سرعت v موشک در این لحظه ۳۰۰۰۰km/h باشد، شعاع انحنای ρ مسیر و میزان تغییرات v را نسبت به زمان محاسبه نمایید.



شکل مسئله ۲-۱۱۶

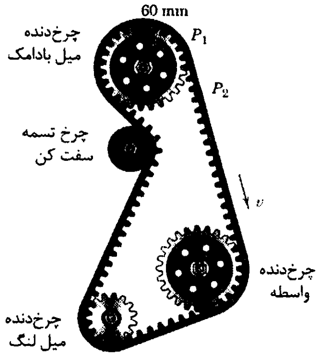
۲-۱۱۷ طرح ابتدای یک ایستگاه فضایی که قرار است در یک مدار دایره‌ای حول زمین چرخش کند، از یک حلقه (تیوبی شکل) با سطح مقطع دایره‌ای که در شکل آمده است، تشکیل می‌گردد. محل زندگی ساکنین ایستگاه در داخل تیوب در مقطع A نشان داده شده که در آن «سطح کف» تا مرکز مقطع، ٦ متر فاصله دارد. سرعت دورانی لازم N بر حسب دور بر دقیقه را طوری تعیین کنید تا شتاب استاندارد سطح زمین ($۹/۸۱\ m/s^2$) در آن ایجاد گردد. توجه کنید اگر بخواهید میزان جاذبه را حس نکنید بایستی درون فضاپیمایی که دوران نمی‌کند و حول زمین می‌چرخد، قرار گیرید.

جواب $N = ۳/۳۲$ rev/min



شکل مسئله ۲-۱۱۷

۲-۱۱۸ سیستم حرکت میل بادامک یک موتور چهار سیلندر اتومبیلی در شکل مشاهده می‌گردد. هنگام شتاب گیری موتور، سرعت v تسمه به طور یکنواخت از ۳ m/s به ٦ m/s در مدت ۲ ثانیه افزایش می‌یابد. مقدار شتاب نقاط $P_۱$ و $P_۲$ را در وسط این بازه زمانی حساب کنید.

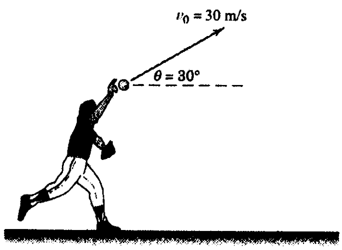


شکل مسئله ۲-۱۱۸

۲-۱۱۹ بردار موقعیت ذره‌ای که در صفحه x-y حرکت می‌کند توسط رابطه $\mathbf{r} = \frac{۳}{۲}t^{۲}\mathbf{i} + \frac{۲}{۳}t^{۳}\mathbf{j}$ داده شده که در آن $\mathbf{r}$ بر حسب اینچ و t بر حسب ثانیه می‌باشد. ρ شعاع انحنای مسیر را برای موقعیتی از ذره که $t = ۲$ sec است، حساب کنید. سرعت $\mathbf{v}$ و انحنای مسیر را نیز برای این لحظه مشخص نمایید.

جواب $\rho = ٤۱/۷$ in

۲-۱۲۰ یک بازیکن بیسبال، توپی را تحت شرایط اولیه مطابق شکل پرتاب می‌نماید. شعاع انحنای مسیر را در حالات زیر بدست آورید. (الف) درست پس از پرتاب و (ب) در نقطه اوج. برای هر حالت، میزان تغییرات سرعت را نسبت به زمان محاسبه کنید.



شکل مسئله ۲-۱۲۰

۲-۱۲۱ برای توپ بیسبال مسئله ۱۲۰-۲، شعاع انحنای مسیر و میزان تغییرات سرعت را نسبت بـه زمـان در زمانـهای $t=$ ۱ s و $t=$ ۲/۵ s بدست آورید. در حالی کـه $t=$ ۰ زمـانی است که بازیکن توپ را رها می‌کند.

جواب (الف) ρ = ۷۳/۰ m و $\dot{v}$ = −۱/۹۲۲ $\mathrm{m/s^2}$

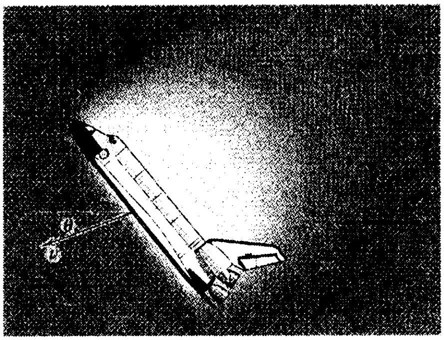
(ب) ρ = ۸۳/۱ m و $\dot{v}$ = ۳/۳۸ $\mathrm{m/s^2}$

۲-۱۲۲ گلوله‌ای تحت زاویـه °۳۰ نسـبت بـه افـق بـا سرعت ٤٦۰ m/s شلیک می‌گردد. شـعاع انحنـای ρ مسـیر، در موقعیتی که گلوله ۱۰ ثانیه پس از شـلیک پیـدا کـرده، بدسـت آورید. از مقاومت هوا صرفنظر کـرده و نـیروی جاذبـه را تنـها نیرویی که به جسم وارد می‌شـود، در نظـر بگیریـد. در نتیجـه شتاب گلوله g خواهد بود.

۲-۱۲۳ مدول قابل کنترل یک ماهواره در مداری حـول ماه در ارتفاع ۲۰۰ km از سطح ماه در حال چرخش اسـت. از جدول D-۲ پیوست D برای هرگونه اطلاعـاتی در مـورد مـاه استفاده کرده، مقدار سرعت مداری **v** مدول را نسـبت بـه مـاه حساب کنید.

جواب v = ۵۷۲۰ km/h

۲-۱۲٤ در نقطه خـاصی کـه شـاتل فضـایی وارد جـو زمین مـی‌گردد، دارای دو مولفـه شـتاب می‌باشـد. مولفـه اول، شتاب ثقل زمین است که در این ارتفاع برابـر g = ۹/٦٦ $\mathrm{m/s^2}$ می‌باشـد. دومیـن مولفـه، ناشـی از مقـاومت جـو بـوده، برابـر ۱۲/۹۰ $\mathrm{m/s^2}$ و مخالف جهت سرعت می‌باشد. شاتل در ارتفاع ٤۸/۲ km سـرعت مـداری خـود را از ۲۸۳۰۰ km/h بـه ۱٥٤٥۰ km/h در جهت θ = °۱/٥۰ کاهش داده اسـت. شـعاع انحنا و میزان تغییرات سرعت شاتل را در این لحظـه محاسـبه نمایید.



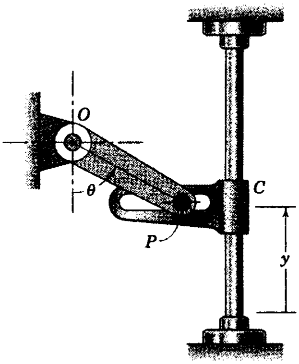
شکل مسئله ۱۲٤-۲

۲-۱۲۵ پین P از لنگ PO در شـیار بـازوی راهنمـای افقی C درگیر شده، حرکت آن را بر روی میله ثـابت عمـودی کنترل می‌کند. سرعت $\dot{y}$ و شتاب $\ddot{y}$ بازوی راهنمـای C را بـه ازای مقـــدار زاویـــه معلـــوم θ تعییـــن کنیـــد اگر:

(الف) $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$ و (ب) $\dot{\theta} = 0$, $\ddot{\theta} = \alpha$

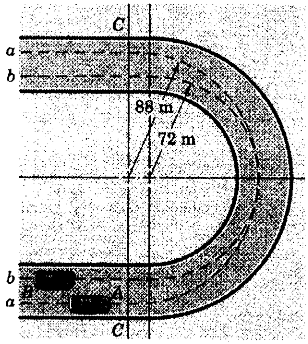
جواب (الف) $\dot{y} = r\omega\sin\theta$, $\ddot{y} = r\omega^2\cos\theta$

(ب) $\dot{y} = 0$, $\ddot{y} = r\alpha\sin\theta$



شکل مسئله ۱۲۵-۲

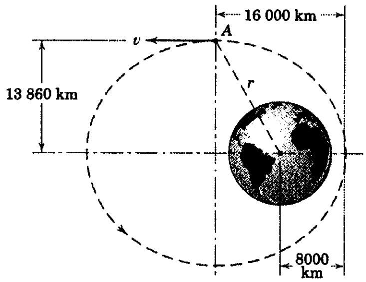
۲-۱۲٦ هنگامیکه اتومبیل مسابقه B مسیر b-b را طـی می‌کند، اتومبیـل مسـابقه A مسـیر a-a را مـی‌پیمـاید. اگر هـر اتومبیل دارای سرعت ثابت و محدود بوده، به طوری که شتاب عمودی متناظر ۰/۸ g باشد، زمانهای t_A و t_B را که هر اتومبیـل مسیر محدود شده به خط C - C را طی می‌کند، حساب کنید.



شکل مسئله ۱۲۶-۲

۱۲۷-۲ ماهواره‌ای یک مدار استوایی بیضی شکل را حول زمین طی می‌کندو هنگامیکه از نقطه A می‌گذرد، سرعتش ۱۷۹۷۰ km/h است. شتاب مطلق ثقل در سطح زمین ۹/۸۲۱ m/s^2 و شعاع آن ۶۳۷۱ km می‌باشد. شعاع انحنای ρ مدار را در A تعیین کنید.

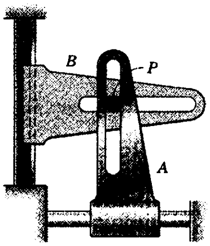
جواب ρ = ۱۸۴۸۰ km



شکل مسئله ۱۲۷-۲

۱۲۸-۲ ◀ پین P مقید است در شکاف دو بازوی عمود بر هم حرکت نماید. در موقعیت نشان داده شده، بازوی A دارای سرعت ۰/۲ m/s به سمت راست می‌باشد که در هر ثانیه ۰/۷۵ m/s کاهش می‌یابد. در حالیکه بازوی B دارای سرعت ۰/۱۵ m/s به طرف پایین است که در هر ثانیه ۰/۵ m/s از مقدارش کاسته می‌شود. شعاع انحنای ρ مربوط به مسیر P را در این لحظه معین کنید. آیا می‌توان میزان تغییرات ρ نسبت به زمان را نیز بدست آورد؟

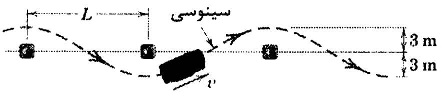
جواب ρ = ۱/۲۵ m



شکل مسئله ۱۲۸-۲

۱۲۹-۲ ◀ در یک آزمایش کنترل حرکت، اتومبیلی مسیری مارپیچ را مطابق شکل می‌پیماید. فرض می‌شود که مسیر اتومبیل سینوسی و ماکزیمم شتاب عرضی (عمودی) ۰/۷ g باشد. اگر آزمایش کنندگان بخواهند مسیر مارپیچی را طوری طراحی نمایند که سرعت ماکزیمم ۸۰ km/h گردد، فاصله L بین موانع مورد استفاده چقدر باید باشد؟

جواب L = ٤٦/١ m



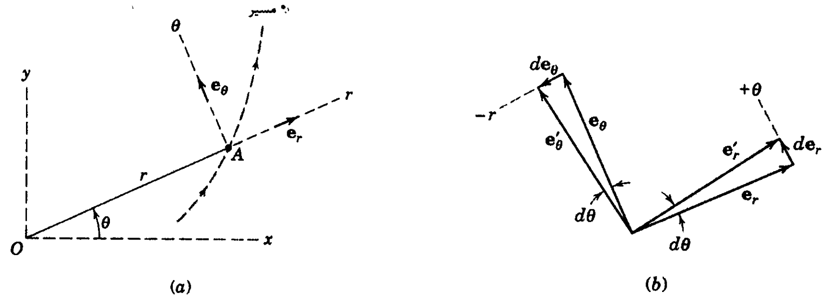
شکل مسئله ۱۲۹-۲

۱۳۰-۲ ◀ ذره‌ای از حالت سکون از مبدا مختصات و در امتداد شاخه مثبت منحنی $y = ۲x^{\frac{۳}{۲}}$ شروع به حرکت می‌نماید، به طوریکه مسافت s که از مبدا مختصات و در امتداد منحنی اندازه گیری می‌شود، طبق رابطه $s = ۲t^{۳}$ با زمان تغییر می‌کند. در این روابط x و y و s بر حسب میلیمتر و t بر حسب ثانیه است. مقدار شتاب کل ذره را در لحظه t = ۱ s پیدا کنید (برای پیدا کردن عبارتی برای ρ به بخش ۱۰-C از پیوست C مراجعه کنید).

جواب a = ۱۲/۱۷ mm/s^2

۶-۲ مختصات قطبی $(r\text{-}\theta)$

اکنون توصیف سوم حرکت منحنی الخط در صفحه را در نظر می‌گیریم که مختصات قطبی نامیده می‌شود که در آن موقعیت ذره توسط فاصله شعاعی r از قطبی ثابت و همچنین توسط زاویه θ خط شعاعی مشخص می‌گردد. مختصات قطبی به ویژه وقتی مورد استفاده واقع می‌شود که فاصله شعاعی و موقعیت زاویه‌ای حرکت به طور مقید، کنترل گردد یا هنگامی که فاصله شعاعی و موقعیت زاویه‌ای به طور غیر مقید، اندازه گیری شود.



شکل (۱۳-۲)

شکل ۱۳a-۲ مختصات قطبی r و θ را نشان می‌دهد که حرکت ذره‌ای را روی مسیری منحنی مشخص می‌کند. یک خط ثابت اختیاری مانند محور x به عنوان مرجع ثابت اندازه گیری θ مورد استفاده قرار می‌گیرد. بردارهای یکه $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ به ترتیب در امتداد مثبت محورهای r و θ مشخص می‌شوند. موقعیت بردار $\mathbf{r}$ ذره در A دارای اندازه‌ای برابر فاصله شعاعی r بوده و جهتش توسط بردار یکه $\mathbf{e}_r$ مشخص می‌گردد. بنابراین موقعیت ذره A را به صورت برداری زیر بیان می‌کنیم:

$$\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$$

مشتق زمانی بردارهای یکه

با مشتق گیری از این رابطه نسبت به زمان $\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}$ و $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}$ بدست می‌آید، به عباراتی برای مشتقهای زمانی $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ نیاز خواهیم داشت. $\dot{\mathbf{e}}_r$ و $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ را دقیقاً به همان روشی بدست می‌آوریم که $\dot{\mathbf{e}}_t$ را در بخش قبل بدست آوردیم. در مدت زمان dt امتداد محورها به اندازه زاویه $d\theta$ چرخیده و در نتیجه بردارهای یکه نیز به همان مقدار دوران می‌کنند یعنی $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ مطابق شکل به $\mathbf{e}'_r$ و $\mathbf{e}'_\theta$ تبدیل می‌شوند. متذکر می‌شویم که تغییرات بردار $d\mathbf{e}_r$ در جهت مثبت θ بوده و $d\mathbf{e}_\theta$ در جهت منفی r می‌باشد. چون اندازه آنها در حد برابر با بردار یکه، یعنی شعاع ضربدر زاویه $d\theta$ بر حسب رادیان می‌باشد، می‌توانیم همه آنها را به صورت $d\mathbf{e}_r=\mathbf{e}_\theta\,d\theta$ و $d\mathbf{e}_\theta=-\mathbf{e}_r\,d\theta$ بنویسیم.اگر این روابط را بر $d\theta$ تقسیم کنیم، داریم:

$$\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}=\mathbf{e}_\theta \quad , \quad \frac{d\mathbf{e}_\theta}{d\theta}=-\mathbf{e}_r$$

یا اگر آنها را بر dt تقسیم کنیم، داریم: $d\,\mathbf{e}_r/dt=(d\theta/dt)\mathbf{e}_\theta \;,\; d\,\mathbf{e}_\theta/dt=-(d\theta/dt)\mathbf{e}_r$

$$\boxed{\dot{\mathbf{e}}_r=\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta \quad , \quad \dot{\mathbf{e}}_\theta=-\dot{\theta}\,\mathbf{e}_r} \qquad (۱۲-۲)$$

سرعت

اکنون آماده‌ایم که از $\mathbf{r} = r\,\mathbf{e}_r$ نسبت به زمان مشتق بگیریم. با استفاده از قانون مشتق گیری از ضرب یک اسکالر در یک بردار داریم:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r$$

با جایگزینی $\dot{\mathbf{e}}_r$ از رابطه ۱۲-۲، عبارت بردار سرعت می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta} \qquad (۲-۱۳)$$

که در آن:

$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}$$

مولفه r سرعت $\mathbf{v}$ ناشی از تغییر مقدار $\mathbf{r}$ بوده و مولفه θ سرعت $\mathbf{v}$ ناشی از دوران $\mathbf{r}$ می‌باشد.

شتاب

اکنون برای بدست آوردن شتاب از عبارت سرعت $\mathbf{v}$ مشتق می‌گیریم، $\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}}$. توجه داشته باشید که مشتق $r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta$ شامل سه جمله می‌باشد که هر سه متغیر هستند. بنابراین:

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \left(\ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r\right) + \left(\dot{r}\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\,\dot{\mathbf{e}}_\theta\right)$$

با قرار دادن $\dot{\mathbf{e}}_r$ و $\dot{\mathbf{e}}_\theta$ از رابطه ۱۲-۲ و فاکتورگیری نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta} \qquad (۲-۱٤)$$

که در آن

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}$$

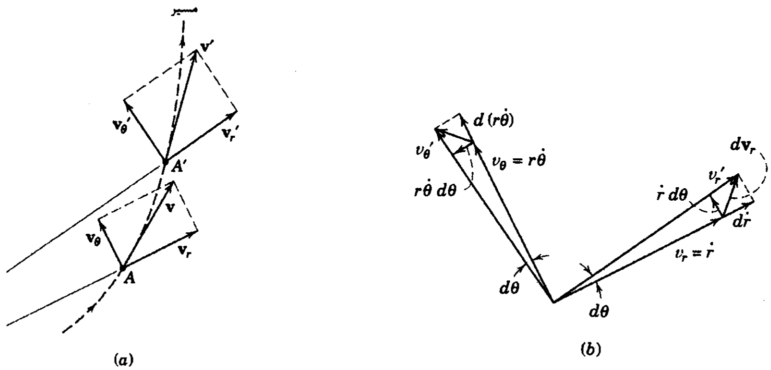
می‌توان شِق دیگر مولفه θ را به صورت زیر نشان داد.

$$a_\theta = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right)$$

که به آسانی با مشتق گیری به اثبات می‌رسد. این شکل برای a_θ در فصول بعدی مورد استفاده قرار خواهد گرفت که با مومنتم زاویه‌ای ذرات سروکار داریم.

نمایش هندسی

ارزش جمله‌های رابطه ١٤-٢ تنها وقتی قابل درک است که تغییرات فیزیکی و هندسی هر یک از عبارات به خوبی قابل رویت باشند. برای این منظور، شکل ١٤a-٢ بردارهای سرعت و مولفه‌های r و θ آنها را در دو موقعیت A و A' بعد از یک حرکت جزئی نشان می‌دهد. هر یک از این مولفه‌ها دارای تغییرات اندازه و تغییرات جهت هستند که در شکل ١٤b-٢ نشان داده شده‌اند. در این شکل تغییرات زیر مشاهده می‌شود.



شکل ۱۴-۲

(a) تغییرات اندازه $\mathbf{v}_r$: این تغییر، فقط ناشی از افزایش طول v_r یا $dv_r = d\dot r$ است و شتاب ناشی از آن $d\dot r/dt = \ddot r$ در جهت مثبت r می‌باشد.

(b) تغییر جهت $\mathbf{v}_r$: اندازه این تغییر از روی شکل برابر $v_r d\theta = \dot r d\theta$ می‌باشد و شتاب ناشی از آن $\dot r d\theta/dt = \dot r\dot\theta$ در جهت مثبت θ می‌باشد.

(c) تغییر اندازه $\mathbf{v}_\theta$: این جمله از تغییر طول $\mathbf{v}_\theta$ یا $d(r\dot\theta)$ ناشی می‌گردد و شتاب ناشی از آن $d(r\dot\theta)/dt = r\ddot\theta + \dot r\dot\theta$ در جهت مثبت θ می‌باشد.

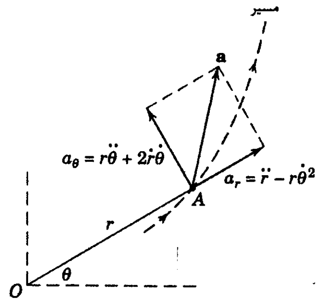
(d) تغییر در جهت $\mathbf{v}_\theta$: اندازه این تغییر $v_\theta d\theta = r\dot\theta d\theta$ می‌باشد و شتاب ناشی از این جمله $r\dot\theta(d\theta/dt) = r\dot\theta^2$ در جهت منفی r خواهد بود.

با مرتب کردن جملات $a_r = \ddot r - r\dot\theta^2$ و $a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta$ که قبلاً بدست آمد، حاصل می‌گردد. ملاحظه می‌کنیم جمله $\ddot r$ ، در صورتیکه θ تغییر نکند، شتاب ذره در امتداد شعاع است. واگر r مانند حرکت دایره‌ای ثابت باشد، جمله $-r\dot\theta^2$ مولفه عمودی شتاب است. اگر r ثابت باشد، جمله $r\ddot\theta$ شتاب مماسی ذره است. اما اگر r متغیر باشد، این جمله تنها قسمتی از شتاب ناشی از تغییر در اندازه $\mathbf{v}_\theta$ می‌باشد. بالاخره، جمله $2\dot r\dot\theta$ ناشی از دو اثر است. اثر اول از تغییر اندازه v_θ یعنی $d(r\dot\theta)$ بدست می‌آید که ناشی از تغییر r است و اثر دوم از تغییر امتداد $\mathbf{v}_r$ ناشی می‌شود. بنابراین جمله $2\dot r\dot\theta$ ترکیبی از تغییرات را نشان می‌دهد و مانند بقیه جملات شتاب به آسانی قابل درک نیست.

باید به اختلاف بین تغییر بردار $d\mathbf{v}_r$ در $\mathbf{v}_r$ و تغییر dv_r در اندازه v_r به دقت توجه داشت. به همین شکل، تغییر بردار $d\mathbf{v}_\theta$ همانند تغییر dv_θ در اندازه v_θ نیست. موقعی که این تغییرات را بر dt تقسیم نماییم تا عباراتی برای مشتق‌ها بدست

آوریم، به وضوح می‌بینیم که اندازه مشتق $|d\mathbf{v}_r/dt|$ و مشتق اندازه dv_r/dt یکسان نیستند. همچنین دقت داشته باشید که a_r برابر $\dot{v}_r$ و a_θ برابر $\dot{v}_\theta$ نمی‌باشد.

شتاب کل $\mathbf{a}$ و مولفه‌های آن در شکل ۱۵-۲ نشان داده شده‌اند. اگر $\mathbf{a}$ مولفه‌ای عمود بر مسیر داشته باشد، از تحلیل مولفه‌های n و t در بخش ۵-۲ می‌دانیم که جهت مولفه‌های n *بایستی* به سوی مرکز انحناء مسیر باشد.



شکل ۱۵-۲

حرکت دایره‌ای

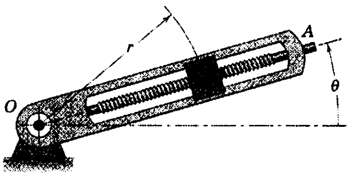
برای حرکت در یک مسیر دایره‌ای با شعاع ثابت r، مولفه‌های معادلات ۱۳-۲ و ۱٤-۲ به صورت ساده زیر در می‌آیند.

$$v_r = 0 \qquad v_\theta = r\dot{\theta}$$
$$a_r = -r\dot{\theta}^2 \qquad a_\theta = r\ddot{\theta}$$

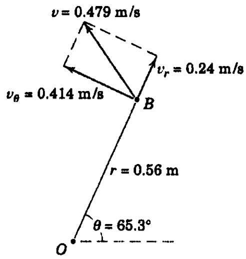
این توصیف همان است که برای مولفه‌های n و t بدست آوردیم که در آن جهت‌های θ و t بر هم منطبق اما جهت مثبت r در جهت منفی n می‌باشد. بنابراین، برای حرکت دایره‌ای به مرکزیت مبدا مختصات قطبی داریم: $a_r = -a_n$.

روابط اسکالر a_r و a_θ را نیز می‌توان با مشتق‌گیری مستقیم از روابط $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ بدست آورد که نتیجه، $a_x = \ddot{x}$ و $a_y = \ddot{y}$ خواهد شد. سپس هر یک از این مولفه‌های کارتزین شتاب را به مولفه‌های r و θ تجزیه نموده که بعد از ترکیب، منجر به عبارات معادله ١٤-۲ خواهد شد.

مسئله نمونه ۹-۲



دوران بازوی شیاردار شعاعی توسط رابطه $\theta = ۰/۲t + ۰/۰۲t^{۳}$ مشخص شده است که در آن θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه می‌باشد. به طور همزمان پیچ قدرت لغزنده B را به بازو درگیر نموده و فاصله آن را از O طبق رابطه $r = ۰/۲ + ۰/۰٤t^{۲}$ کنترل می‌نماید که در آن r بر حسب متر و t بر حسب ثانیه می‌باشد. مقادیر سرعت و شتاب لغزنده را در $t = ۳$ s محاسبه کنید.



حل: ابتدا مختصات و مشتق‌های جملات مربوط به روابط سرعت و شتاب که در مختصات قطبی تعریف شدند را بدست آورده و برای $t = ۳$ s آنها را محاسبه می‌کنیم.

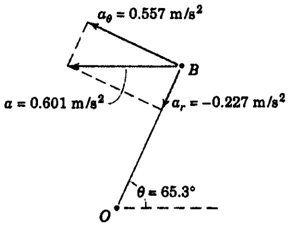
$$r = 0.2 + 0.04\,t^2 \qquad r_3 = 0.2 + 0.04\,(3^2) = 0.56\ \text{m}$$

$$\dot r = 0.08\,t \qquad \dot r_3 = 0.08\,(3) = 0.24\ \text{m/s}$$

$$\ddot r = 0.08 \qquad \ddot r_3 = 0.08\ \text{m/s}^2$$

$$\theta = 0.2\,t + 0.02\,t^3 \qquad \theta_3 = 0.2\,(3) + 0.02\,(3^3) = 1.14\ \text{rad}$$

یا $\theta_3 = 1.14\,(180/\pi) = 65.3°$



$$\dot\theta = 0.2 + 0.06\,t^2 \qquad \dot\theta_3 = 0.2 + 0.06\,(3^2) = 0.74\ \text{rad/s}$$

$$\ddot\theta = 0.12\,t \qquad \ddot\theta_3 = 0.12\,(3) = 0.36\ \text{rad/s}^2$$

مولفه‌های سرعت از رابطه ۱۳-۲ در زمان $t = ۳$ s برابرند با:

$$[\upsilon_r = \dot r] \qquad \upsilon_r = 0.24\ \text{m/s}$$

$$[\upsilon_\theta = r\dot\theta] \qquad \upsilon_\theta = 0.56\,(0.74) = 0.414\ \text{m/s}$$

جواب $$\left[\upsilon = \sqrt{\upsilon_r^2 + \upsilon_\theta^2}\right] \qquad \upsilon = \sqrt{(0.24)^2 + (0.414)^2} = 0.479\ \text{m/s}$$

بردار سرعت و مولفه‌های آن در موقعیت مورد نظر بازو در شکل نشان داده شده‌اند. مقدار شتاب و مولفه‌های آن با
تفاده از رابطه ۱٤-۲ در $t = ۳$ s برابر با:

$$[a_r = \ddot r - r\dot\theta^2] \qquad a_r = 0.08 - 0.56\,(0.74)^2 = -0.227\ \text{m/s}^2$$

$$[a_\theta = r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta] \qquad a_\theta = 0.56\,(0.36) + 2\,(0.24)(0.74) = 0.557\ \text{m/s}^2$$

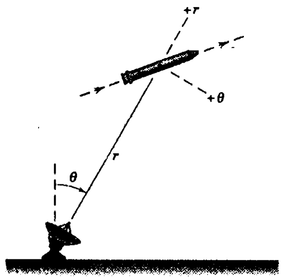
جواب $$\left[a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2}\right] \qquad a = \sqrt{(-0.227)^2 + (0.557)^2} = 0.601\ \text{m/s}^2$$

بردار شتاب و مولفه‌های آن برای موقعیت °۶۵/۳ بازو در شکل نشان داده شده‌اند.

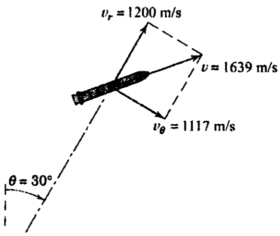
نکته مفید

دیده می‌شود که این مسئله، نمونه‌ای از حرکت مقید می‌باشد که در آن مرکز B لغزنده به طور مکانیکی توسط چرخش بازوی شیاردار و درگیری پیچ دورانی مقید گشته است.

مسئله نمونه ۱۰-۲



یک رادار در صفحه عمودی، مسیر راکتی را که با موتور خاموش بالای جو در حال حرکت است، ردیابی می‌کند. موقعی که $\theta = ۳۰°$ است، داده‌های ردیابی عبارتند از: $r = ۸(۱۰^{۴})$ m و $\dot{r} = ۱۲۰۰$ m/s و $\dot{\theta} = ۰/۸۰$ deg/s. شتاب راکت فقط ناشی از نیروی جاذبه بوده و در آن ارتفاع خاص برابر ۹/۲۰ m/s^2 عمودی و به طرف پایین می‌باشد. در این شرایط سرعت v راکت و مقادیر $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ را حساب کنید.

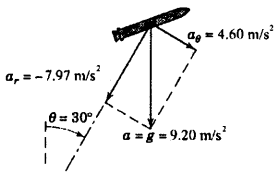


حل: از معادله ۱۳-۲ مولفه‌های سرعت برابرند با:

$$[v_r = \dot{r}] \qquad v_r = 1200 \text{ m/s}$$

$$[v_\theta = r\dot{\theta}] \qquad v_\theta = 8(10^4)(0.80)\left(\frac{\pi}{180}\right) = 1117 \text{ m/s}$$

$$\left[v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2}\right] \qquad v = \sqrt{(1200)^2 + (1117)^2} = 1639 \text{ m/s}$$ جواب



چون شتاب کل راکت برابر $g = ۹/۲۰$ m/s^2 و به طرف پایین است، به سادگی می‌توان مولفه‌های r و θ را برای موقعیت داده شده پیدا کرد. این مولفه‌ها مطابق شکل عبارتند از: ❶

❷ $$a_r = -9.20 \cos 30° = -7.97 \text{ m/s}^2$$

$$a_\theta = 9.20 \sin 30° = 4.60 \text{ m/s}^2$$

اکنون این مقادیر را با عبارتهای a_r و a_θ در مختصات قطبی که شامل مجهولهای $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ هستند، برابر می‌گیریم. بنابراین از معادله ۱۴-۲ داریم:

❸ $$[a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2] \qquad -7.97 = \ddot{r} - 8(10^4)\left(0.80\frac{\pi}{180}\right)^2$$

$$\ddot{r} = 7.63 \text{ m/s}^2$$ جواب

$$[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}] \qquad 4.60 = 8(10^4)\ddot{\theta} + 2(1200)\left(0.80\frac{\pi}{180}\right)$$

$$\ddot{\theta} = -3.61(10^{-4}) \text{ rad/s}^2$$ جواب

نکات مفید

❶ *ملاحظه می‌کنیم که در مختصات قطبی همیشه نیاز نیست که زاویه θ در جهت پاد ساعتگرد باشد.*

❷ *توجه کنید که مولفه r شتاب در جهت منفی r است. به همین دلیل علامت منفی دارد.*

❸ *باید دقت داشته باشیم که $\dot{\theta}$ را از deg/s به rad/s تبدیل کنیم.*

مسائل

مسائل مقدماتی

۲-۱۳۱ همزمان با دوران بازوی متحرک OAB حول O، قسمت AB از داخل قسمت OA افزایش طول می‌دهد. سرعت و شتاب مرکز قرقره B را در شرایط زیر تعیین کنید.

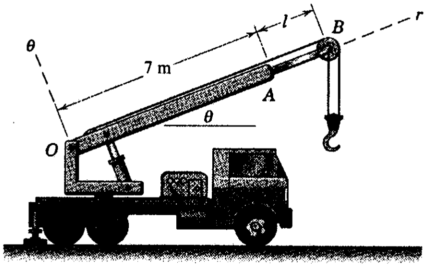
$$l = ۲ \text{ m} ، \dot{l} = ۰/۵ \text{ m/s} ، \ddot{l} = -۱/۲ \text{ m/s}^2$$

$$\theta = ۲۰° ، \dot{\theta} = ۵ \text{ deg/s} ، \ddot{\theta} = ۲ \text{ deg/s}^2$$

کمیتهای $\dot{l}$ و $\ddot{l}$ عبارتند از مشتق اول و دوم l از قسمت AB، نسبت به زمان است.

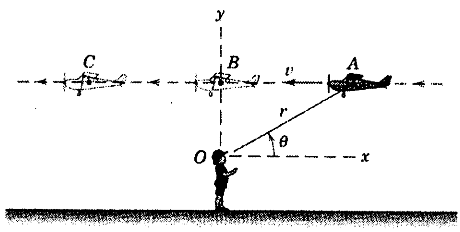
جواب $\mathbf{v} = ۰/۵\ \mathbf{e}_r + ۰/۷۸۵\ \mathbf{e}_\theta$ m/s

$\mathbf{a} = -۱/۲۶۹\ \mathbf{e}_r + ۰/۴۰۱\ \mathbf{e}_\theta$ m/s^2



شکل مسئله ۱۳۱-۲

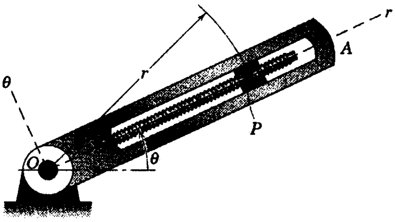
۲-۱۳۲ یک هواپیمای مدل با سرعت ثابت حرکت در یک خط مستقیم، مطابق شکل، بالای سر شاهد O پرواز می‌کند. علائم (مثبت، منفی یا صفر) کمیتهای r ، $\dot{r}$ ، $\ddot{r}$ ، θ ، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ را در هر یک از موقعیتهای A، B و C معین کنید.



شکل مسئله ۱۳۲-۲

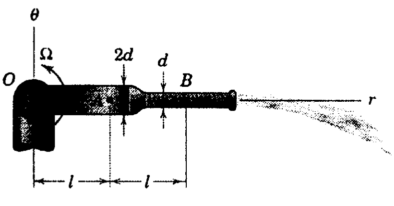
۲-۱۳۳ موقعیت لغزنده P در بازوی شیار دار در حال دوران OA توسط یک پیچ انتقال قدرت، مطابق شکل، کنترل می‌شود. در لحظه مشخص شده $\dot{\theta} = ۸$ rad/s و $\ddot{\theta} = -۲۰$ rad/s^2 می‌باشند. همچنین در همین لحظه $r = ۲۰۰$ mm ، $\dot{r} = -۳۰۰$ mm/s و $\ddot{r} = ۰$ می‌باشند. برای این لحظه، مولفه‌های r و θ شتاب P را تعیین نمایید.

جواب $a_r = -۱۲/۸۰$ m/s^2 و $a_\theta = -۸/۸۰$ m/s^2



شکل مسئله ۱۳۳-۲

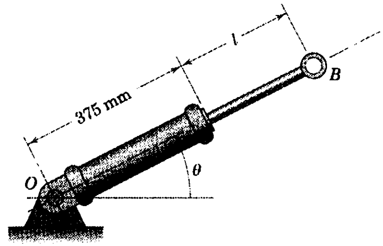
۲-۱۳۴ شیپوره نشان داده شده در شکل با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محور افقی ثابت که از O می‌گذرد، دوران می‌نماید. به علت تغییر قطر با ضریب ۲، اگر سرعت آب نسبت به شیپوره در قسمت A را، v در نظر بگیریم، در قسمت B برابر با $۴v$ خواهد بود. سرعت آب در مقاطع A و B ثابت می‌باشد. سرعت و شتاب یک ذره آب را هنگام گذر از (الف) نقطه A و (ب) نقطه B حساب کنید.



شکل مسئله ۱۳۴-۲

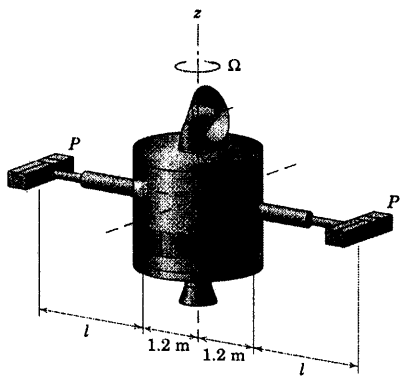
۲-۱۳۵ هنگامیکه سیلندر هیدرولیکی حول نقطه O دوران می‌کند، l طول میله حرکت دهنده پیستون P توسط فشار ایجاد شده در سیلندر کنترل می‌گردد. اگر سیلندر با سرعت دورانی ثابت $\dot{\theta} = ۶۰$ deg/s دوران کرده و l با میزان ثابت ۱۵۰ mm/s کاهش یابد، مقادیر سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ انتهای B را موقعی که $l = ۱۲۵$ mm می‌باشد، حساب کنید.

جواب $v = ۵۴۵$ mm/s و $a = ۶۳۲$ mm/s^2



شکل مسئله ۱۳۵-۲

۱۳۶-۲ هنگامیکه بازوهای تلسکوپی با میزان ثابت باز می‌شوند، سرعت زاویه‌ای فضاپیما توسط یک مکانیزم داخلی ثابت و برابر $\Omega = ۰/۰۵$ rad/s حول محور z نگاه داشته می‌شود. طول l از صفر تا ۳ متر قابل افزایش است. ماکزیمم شتاب قابل اعمال به مدول‌های P برابر $۰/۰۱۱$m/s^2 می‌باشد. حداکثر مقدار مجاز برای تغییر میزان طول بازو $\dot{l}$ را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۳۶-۲

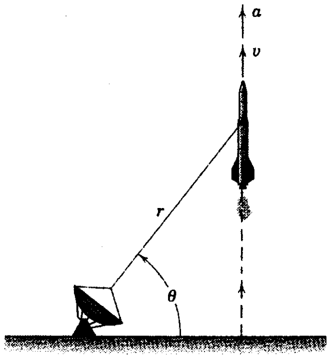
۱۳۷-۲ حرکت منحنی الخط یک ذره، در مختصات قطبی توسط روابط $r = \dfrac{t^۳}{۳}$ و $\theta = ۲\cos(\pi t/۶)$ مشخص شده‌اند که در آنها r بر حسب متر، θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه می‌باشد. سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ ذره را در $t = ۲$ s حساب کنید.

جواب

$\mathbf{a} = ۱/۸۰۷\,\mathbf{e}_r - ۷/۹۹\mathbf{e}_\theta$ m/s^2

$\mathbf{v} = ۴\,\mathbf{e}_r - ۲/۴۲\mathbf{e}_\theta$ m/s

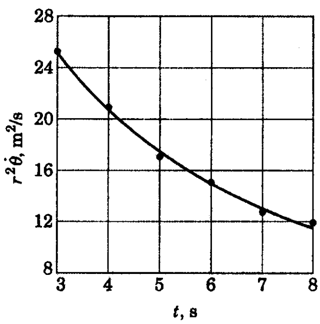
۱۳۸-۲ موشکی به حالت قائم شلیک شده و مطابق شکل توسط راداری ردیابی می‌شود. در لحظه‌ای که $\theta = ۶۰^\circ$ است، اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهد که $r = ۹$ km، $\ddot{r} = ۲۱$ m/s^2 و $\dot{\theta} = ۰/۰۲$ rad/s می‌باشند. مقادیر سرعت و شتاب موشک را در این موقعیت بدست آورید.



شکل مسئله ۱۳۸-۲

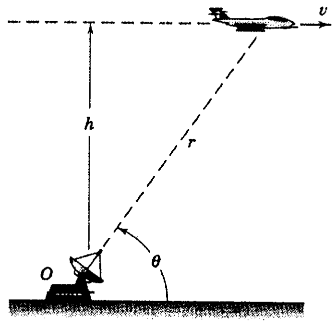
۱۳۹-۲ حرکت منحنی الخط خاص یک ذره در مختصات قطبی با حاصلضرب $r^۲\dot{\theta}$ بر حسب m^2/s بیان گردیده که در مدت کوتاهی از حرکت، رابطه فوق نسبت به زمان t مطابق شکل تغییر می‌کند. مولفه θ شتاب ذره را در $t = ۵$ s که $r = \dfrac{۱}{۳}$ m می‌باشد به تقریب حساب کنید.

جواب $a_\theta = -۸$ m/s^2



شکل مسئله ۱۳۹-۲

۲-۱۴۰ یک هواپیمای جت که در ارتفاع $h =$ ۱۰ km با سرعت ثابت v پرواز می‌کند، توسط رادار مستقر در نقطه O ردیابی می‌شود. هنگامیکه $\theta =$ ۶۰° و میزان کاهش آن ۰/۰۲۰ rad/s می‌باشد، مقدار $\ddot{r}$ و مقدار سرعت **v** هواپیما را تعیین کنید.



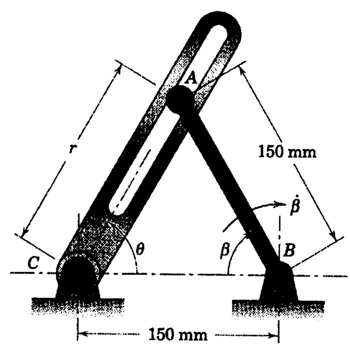
شکل مسئله ۲-۱۴۰

مسائل ویژه

۲-۱۴۱ بازوی AB در محدوده زاویه β دوران نموده و انتهای A آن باعث چرخش بازوی شیاردار AC می‌گردد. برای لحظه‌ای که $\beta =$ ۶۰° و $\dot{\beta} =$ ۰/۶ rad/s و ثابت می‌باشد، مقادیر متناظر $\dot{r}$، $\ddot{r}$، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ را بدست آورید. از روابط ۲-۱۳ و ۲-۱۴ استفاده نمایید.

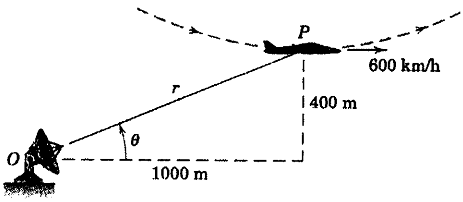
جواب $\dot{r}$ = ۷۷/۹ mm/s و $\ddot{r}$ = −۱۳/۵ mm/s^2

$\dot{\theta}$ = −۰/۳ rad/s و $\ddot{\theta}$ = ۰



شکل مسئله ۲-۱۴۱

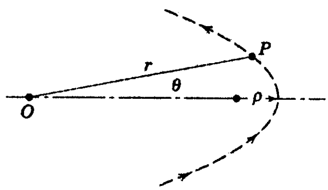
۲-۱۴۲ در پایین‌ترین نقطه یک حلقه در صفحه قائم $(r\text{-}\theta)$ و در ارتفاع ۴۰۰ m، هواپیمای P دارای سرعت افقی ۶۰۰ km/h و بدون شتاب افقی است. شعاع انحنای حلقه ۱۲۰۰ m می‌باشد. رادار ردیاب مستقر در O، در این لحظه چه مقادیری را برای $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ ثبت می‌کند.



شکل مسئله ۲-۱۴۲

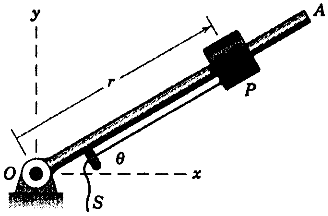
۲-۱۴۳ ذره P بر روی مسیری حرکت می‌کند که رابطه $r = f(\theta)$ داده شده و نسبت به خط $\theta =$ ۰ متقارن می‌باشد. هنگامیکه ذره از موقعیت $\theta =$ ۰ عبور می‌کند، شعاع انحنا ρ بوده و سرعت آن برابر v می‌باشد. رابطه‌ای برای $\ddot{r}$ بر حسب v، r و ρ ضمن حرکت ذره در این نقطه بدست آورید.

جواب $\ddot{r} = -v^2\left(\frac{1}{\rho}-\frac{1}{r}\right)$



شکل مسئله ۲-۱۴۳

۲-۱۴۴ لغزنده P، در حالیکه میله OA حول مفصل O دوران می‌کند، توسط نخ S به طرف داخل کشیده می‌شود. موقعیت زاویه‌ای میله توسط رابطه $\theta =$ ۰/۴+۰/۱۲t+۰/۰۶t^3 داده شده که در آن θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه است. موقعیت لغزنده توسط رابطه $r =$ ۰/۸−۰/۱t−۰/۰۵t^2 داده شده که در آن r بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. سرعت و شتاب لغزنده را در $t =$ ۲ s تعیین و ترسیم نمایید. زوایای α و β را که به ترتیب **v** و **a** با امتداد مثبت محور x می‌سازند، بدست آورید.

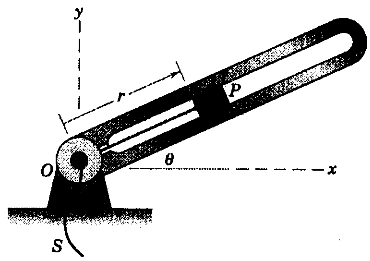


شکل مسئله ۱۴۴-۲

۱۴۵-۲ لغزنده P در امتداد بازوی شیارداری که حول نقطه O می‌چرخد توسط نخ S کنترل می‌گردد. موقعیت زاویه‌ای بازو توسط رابطه $\theta = ۰/۸t - \frac{t^۲}{۲۰}$ داده شده که در آن θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه می‌باشد. در $t = ۰$ لغزنده در $r = ۱/۶\ \text{m}$ بوده، سپس با میزان ثابت $۰/۲\ \text{m/s}$ به طرف داخل کشیده می‌شود. مقدار و جهت (بر حسب زاویه α نسبت به محور x) سرعت و شتاب لغزنده را در $t = ٤\ \text{s}$ معین کنید.

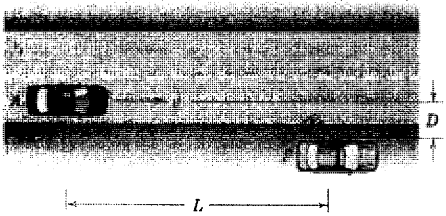
جواب $v = ۰/۳۷۷\ \text{m/s}$ در $\alpha = ۲٦۰°$

$a = ۰/۲۷۲\ \text{m/s}^2$ در $\alpha = ۱۹/٤٤°$



شکل مسئله ۱۴۵-۲

۱٤٦-۲ اتومبیل A با سرعت ثابت v در سطح یک بزرگراه در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. افسر پلیسی در اتومبیل پارک شده P منتظر اندازه گیری سرعت v توسط رادارش می‌باشد. اگر رادار، سرعت «خط دید» را اندازه بگیرد، سرعتی را که افسر پلیس مشاهده می‌کند، چه خواهد بود؟ v' رابطه‌ای را که بدست آوردید برای $v = ۱۱۵\ \text{km/h}$، $L = ۱۵۰\ \text{m}$ و $D = ٦\ \text{m}$ ارزیابی کرده و نتیجه مناسب را بیان نمایید.



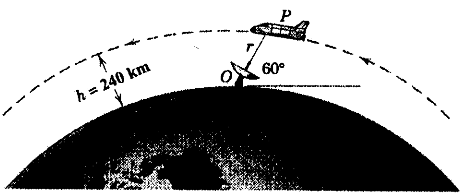
شکل مسئله ۱۴۶-۲

۱٤۷-۲ در لحظه‌ای معین، ذره‌ای نسبت به محورهای ثابت x-y دارای مولفه‌های موقعیت، سرعت و شتاب $x = ٤\ \text{m}$، $y = ۲\ \text{m}$، $\dot{x} = ۲\sqrt{۳}\ \text{m/s}$، $\dot{y} = -۲\ \text{m/s}$، $\ddot{x} = -٥\ \text{m/s}^2$ و $\ddot{y} = ٥\ \text{m/s}^2$ می‌باشد. مشخصه‌های مختصات قطبی θ، $\dot{\theta}$، $\ddot{\theta}$، r، $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ را بدست آورید. هندسه مسئله را به همراه حل، رسم کنید.

جواب $\theta = ۲٦/٦°$ و $\dot{\theta} = -۰/٧٤٦\ \text{rad/s}$ و $\ddot{\theta} = ۲/۲٤\ \text{rad/s}^2$

$r = ۲\sqrt{٥}\ \text{m}$ و $\dot{r} = ۲/۲۰\ \text{m/s}$ و $\ddot{r} = ۰/۲٥٥\ \text{m/s}^2$

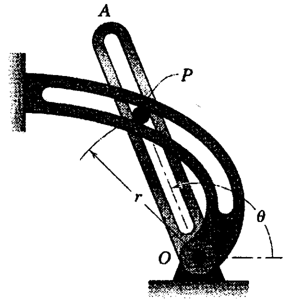
۱٤۸-۲ در لحظه نشان داده شده در شکل، ایستگاه رادار O تغییرات دامنه شاتل فضایی P را برابر $\dot{r} = -۳۷٤۲\ \text{m/s}$ اندازه می‌گیرد. نقطه O را ثابت در نظر می‌گیریم. اگر شاتل در یک مدار مدور در ارتفاع $h = ۲٤۰\ \text{km}$ از سطح زمین در حال حرکت باشد، سرعت شاتل را در مدارش بر حسب این اطلاعات بدست آورید.



شکل مسئله ۱۴۸-۲

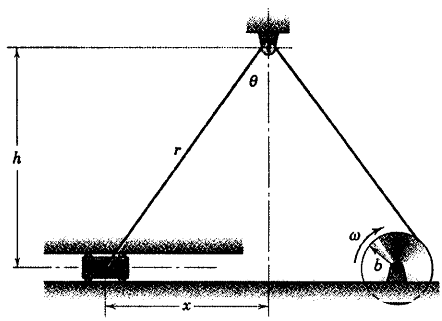
۲-۱۴۹ بازوی شیاردار OA پین کوچکی را وادار می‌کند تا در شیار ثابت مارپیچی که با $r = K\theta$ تعریف شده است، حرکت نماید. بازوی OA در $\theta = \pi/4$ از حالت سکون به حرکت در می‌آید و شتاب زاویه‌ای ثابت α در جهت پادساعتگرد دارد. مقدار شتاب پین را هنگامیکه $\theta = 3\pi/4$ می‌باشد، تعیین کنید.

جواب $a = 10/76\, K\alpha$



شکل مسئله ۱۴۹-۲

۲-۱۵۰ در مقطعی از حرکت، یک قرقره به شعاع b در جهت ساعتگرد با سرعت زاویه‌ای ثابت ω رادیان بر ثانیه می‌چرخد و باعث می‌شود لغزنده P به سمت راست حرکت نموده و طول طناب رابط کوتاه گردد. از مختصات قطبی r و θ استفاده کرده، رابطه‌ای برای سرعت v و شتاب a لغزنده P که در راهنمای افقی حرکت می‌کند بر حسب θ بدست آورید. نتیجه خود را با گرفتن مستقیم دیفرانسیل از رابطه $x^2 + h^2 = r^2$ مقایسه کنید.

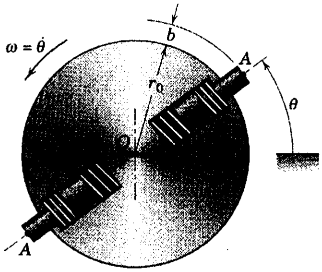


شکل مسئله ۱۵۰-۲

۲-۱۵۱ دیسک مدوری مطابق شکل با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = \dot{\theta}$ حول مرکز O دوران نموده و دو پیستون فنردار را حمل می‌کند. مقدار فاصله b که هر پیستون از لبه دیسک بیرون می‌زند، طبق رابطه $b = b_0 \sin 2\pi nt$ تغییر می‌کند که در آن b_0 مقدار ماکزیمم خروج، n فرکانس ثابت نوسانات پیستونها و t زمان است. مقادیر ماکزیمم مولفه‌های r و θ شتاب نقاط A پیستونها را در طی حرکتشان تعیین کنید.

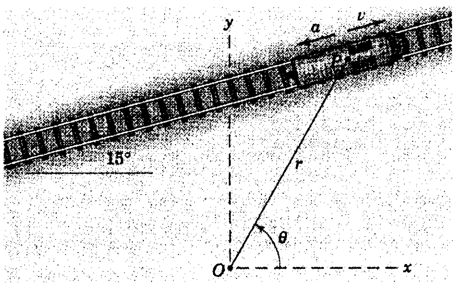
جواب $|a_r|_{max} = (4\pi^2 n^2 + \omega^2) b_0 + r_0\omega^2$

$|a_\theta|_{max} = 4\pi b_0 n\omega$



شکل مسئله ۱۵۱-۲

۲-۱۵۲ لوکوموتیوی با سرعت $v = 90$ km/h و شتاب کند شونده $a = 0/5$ m/s^2 مطابق شکل روی یک مسیر مستقیم و مسطح حرکت می‌کند. کمیتهای $\dot{r}$، $\ddot{r}$، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ را نسبت به ناظری ثابت که در نقطه O قرار گرفته و در لحظه‌ای که $\theta = 60°$ و $r = 400$ m است، تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۵۲-۲

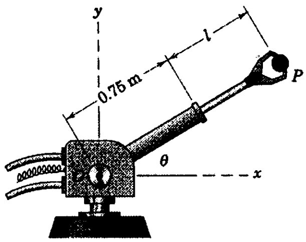
۲-۱۵۳ بازوی روبات همزمان بالا رفته و افزایش طول می‌دهد. در لحظه نشان داده شده، $\theta = 30°$، $\dot{\theta} = 10$ deg/s و ثابت، $l = 0/5$ m، $\dot{l} = 0/2$ m/s و $\ddot{l} = -0/3$ m/s^2 می‌باشد. مقدار سرعت **v** و شتاب **a** را برای P پنجه روبات، حساب

کنید. بعلاوه روابطی برای **v** و **a** بر حسب بردارهای یکه **i** و **j** بنویسید.

جواب $v = ۰/۲۹۶\ \text{m/s}$ و $a = ۰/۳۴۵\ \text{m/s}^2$

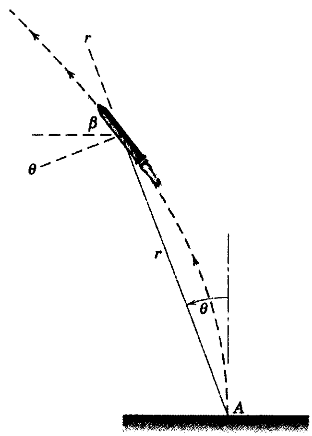
$\mathbf{v} = ۰/۰۶۴\mathbf{i} + ۰/۲۸۹\mathbf{j}\ \ \text{m/s}$

$\mathbf{a} = -۰/۳۲۸\mathbf{i} - ۰/۱۰۸۶\mathbf{j}\ \ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۱۵۳-۲

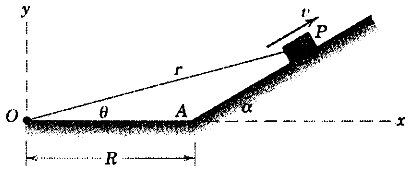
۱۵۴-۲ موشکی توسط راداری در نقطه پرتابش یعنی A ردیابی می‌گردد. موقعی که ۱۰ ثانیه از پرواز آن می‌گذرد، اندازه گیری‌های زیر توسط رادار ثبت می‌شود.
$r = ۲۲۰۰\ \text{m}$، $\dot r = ۵۰۰\ \text{m/s}$، $\ddot r = ۴/۶۶\ \text{m/s}^2$، $\theta = ۲۲°$، $\dot\theta = ۰/۰۷۸۸\ \text{rad/s}$ و $\ddot\theta = -۰/۰۳۴۱\ \text{rad/s}^2$. برای این لحظه زاویه β بین افق و امتداد مسیر موشک را تعیین کنید و مقادیر سرعت **v** و شتاب **a** را پیدا کنید.



شکل مسئله ۱۵۴-۲

۱۵۵-۲ قطعه کوچک P در زمان $t = ۰$ از نقطه A از حالت سکون و با شتاب ثابت a به طرف بالای سطح شیبدار شروع به حرکت می‌نماید. $\dot r$ را به صورت تابعی از زمان تعیین کنید.

جواب
$$\dot r = \frac{\frac{۱}{۲}at\left(۲R\cos\alpha + at^۲\right)}{\sqrt{R^۲ + Rat^۲\cos\alpha + \frac{۱}{۴}a^۲t^۴}}$$



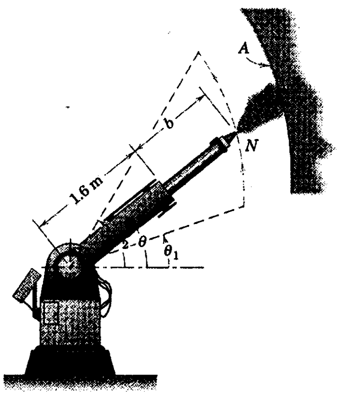
شکل مسئله ۱۵۵-۲

۱۵۶-۲ برای شرایط مسئله ۱۵۵-۲، $\dot\theta$ را به صورت تابعی از زمان تعیین نمایید.

۱۵۷-۲ روبات رنگ پاش، برنامه ریزی شده تا خط تولید سطح منحنی ۱ شکل A (گوشه شکل دیده می‌شود) را رنگ کند. طول بازوی تلسکوپی روبات مطابق رابطه $b = ۰/۳\sin(\pi t/۲)$ کنترل می‌شود که در آن، b بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. بازو چنان طراحی شده که بطور همزمان دورانی مطابق رابطه $\theta = \pi/۴ + (\pi/۸)\sin(\pi t/۲)$ بر حسب رادیان را انجام دهد. مقدار v سرعت شیپوره N و مقدار a شتاب N را در $t = ۱\ \text{s}$ و $t = ۲\ \text{s}$ بدست آورید.

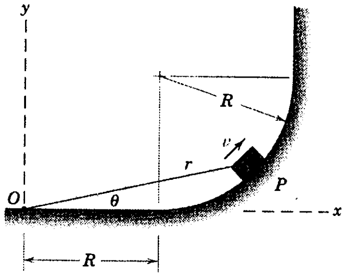
جواب در $t = ۱\ \text{s} : v = ۰$ و $a = ۱/۹۸۴\ \text{m/s}^2$

در $t = ۲\ \text{s} : v = ۱/۰۹۴\ \text{m/s}$ و $a = ۰/۸۴۲\ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۱۵۷-۲

۲-۱۵۸ قطعه P مطابق شکل بر روی سطحی با سرعت ثابت $v = ۰/۶ \ m/s$ می‌لغزد و در زمان $t = ۰$ از نقطه O عبور می‌کند. اگر $R = ۱/۲ \ m$ باشد، کمیتهای زیر را در زمان $t = ۲(۱+\frac{\pi}{۳})$ تعیین کنید: r، θ، $\dot{r}$، $\dot{\theta}$، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$.



شکل مسئله ۱۵۸-۲

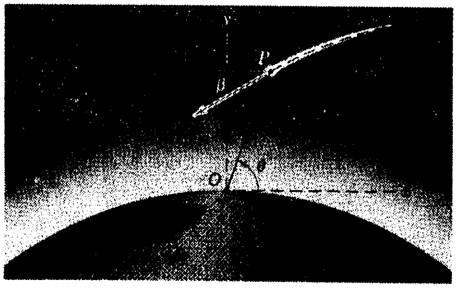
۲-۱۵۹ شهاب سنگ P توسط رادار مستقر در یک رصدخانه زمینی در O ردیابی می‌شود. هنگامیکه شهاب سنگ مستقیماً از بالای رصدخانه می‌گذرد ($\theta = ۹۰°$)، مشاهدات ثبت شده عبارتند از:

$r = ۸۰ \ km$، $\dot{r} = -۲۰ \ km/s$ و $\dot{\theta} = ۰/۴ \ rad/s$.

(الف) سرعت v حرکت شهاب سنگ و زاویه β بین بردار سرعت آن و امتداد افق را تعیین کنید. (ب) مسئله را دوباره با همان داده‌ها به غیر از $\theta = ۷۵°$ حل کنید.

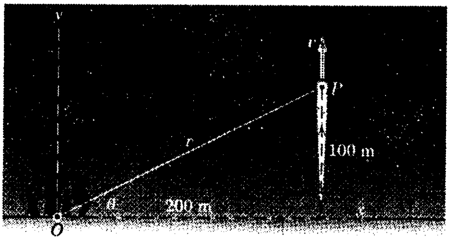
جواب (الف) $v = ۳۷/۷ \ km/s$ و $\beta = ۳۲/۰°$

(ب) $v = ۳۷/۷ \ km/s$ و $\beta = ۱۷/۰۱°$



شکل مسئله ۱۵۹-۲

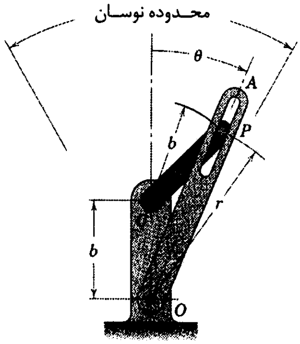
۲-۱۶۰ در یک مراسم آتش بازی، گلوله P در یک مسیر قائم با مولفه شتاب y که با رابطه $a_y = -g - kv^۲$ بیان می‌شود، شلیک می‌گردد که جمله آخر رابطه ناشی از مقاومت آیرودینامیکی می‌باشد. اگر مقدار سرعت حرکت گلوله در لحظه نشان داده شده برابر ۱۵ m/s باشد، مقادیر متناظر r، $\dot{r}$، $\ddot{r}$، θ، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ را بدست آورید. ضریب مقاومت k مقدار ثابت $۰/۰۱ \ m^{-1}$ می‌باشد.



شکل مسئله ۱۶۰-۲

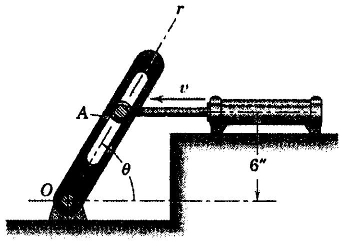
۲-۱۶۱ بازوی شیاردار OA در محدوده نشان داده شده حول نقطه O نوسان می‌کند و لنگ CP را از طریق پین P به حرکت در می‌آورد. در بازه‌ای از زمان حرکت، $\dot{\theta} = K$ و ثابت است. اندازه شتاب کل متناظر P را به ازای هر مقدار θ در این بازه زمانی که $\dot{\theta} = K$ می‌باشد، تعیین کنید. از مختصات قطبی r و θ استفاده نمایید. نشان دهید که اندازه سرعت و شتاب P در مسیر دایره‌ای آن، ثابت است.

جواب $v = ۲bK$ و $a = ۴bK^۲$



شکل مسئله ۱۶۱-۲

۲-۱۶۲ پیستون یک سیلندر هیدرولیکی به پین A سرعت ثابت $v = ۱/۵ \ m/s$ را در جهت نشان داده شده در برهه‌ای از حرکتش می‌دهد. به ازای $\theta = ۶۰°$ معین کنید: $\dot{r}$، $\ddot{r}$، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ که در آن $r = \overline{OA}$ باشد.

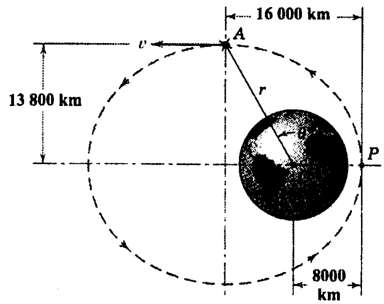


شکل مسئله ۱۶۲-۲

۱٦۳-۲ ماهواره زمینی که مدار بیضی را طی می‌کند، در موقعیت نشان داده شده به هنگامیکه از انتهای قطر کوچکتر در نقطه A عبور می‌کند، سرعتی برابر v = ۱۷۹۷۰ km/h دارد. نیروی جاذبه زمین شتابی برابر $a = a_r$ = - ۱/۵۵٦ m/s^2 از A به طرف O به ماهواره وارد می‌کند. در موقعیت A مقادیر $\dot{v}$ و $\ddot{r}$ را محاسبه کنید.

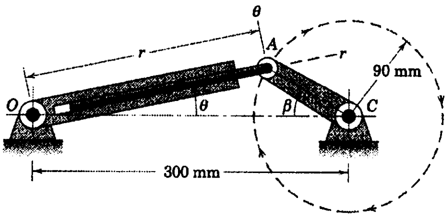
جواب $\dot{v}$ = - ۰/۷۷۸ m/s^2

$\ddot{r}$ = - ۰/۳۸۸ m/s^2



شکل مسئله ۱۶۳-۲

۱٦٤-۲ موقعی که لنگ AC با میزان ثابت $\dot{\beta}$ = ٦۰rad/s دوران می‌کند، پین A روی دایره‌ای به شعاع ۹۰ mm حرکت می‌کند. هنگام حرکت رفت و برگشتی، میله متصل به A درون شیار بازوی شیاردار، حول نقطه O دوران می‌کند. در موقعیت β = ۳۰°، $\dot{r}$ ، $\ddot{r}$ ، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ را تعیین کنید.

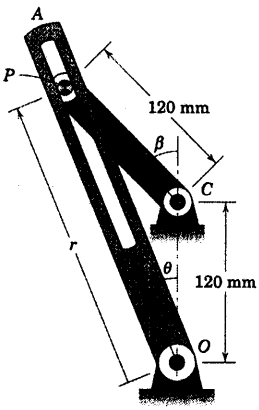


شکل مسئله ۱۶۴-۲

۱٦٥-۲ ◀ در برهه محدودی از حرکت، لنگ CP باعث دوران بازوی شیاردار OA می‌گردد. اگر β در حال افزایش با میزان ثابت ٤ rad/s در موقعیت متناظر با $\beta = \pi/4$ باشد، مولفه‌های r و θ شتاب پین P را در این موقعیت بدست آورده و مقادیر متناظر $\dot{r}$ و $\ddot{r}$ را مشخص نمایید. مسئله را ابتدا به روش محاسبه مولفه‌های رابطه ١٤-۲ و سپس به روش تجزیه کردن شتاب P به مولفه‌های r و θ در حرکت دایره‌ای آن، حل نمایید.

جواب a_θ = -۷۳٥ mm/s^2 و a_r = -۱۷۷٤ mm/s^2

$\ddot{r}$ = - ۸۸۷ mm/s^2 و $\dot{r}$ = - ۱۸۳/ ۷ mm/s



شکل مسئله ۱۶۵-۲

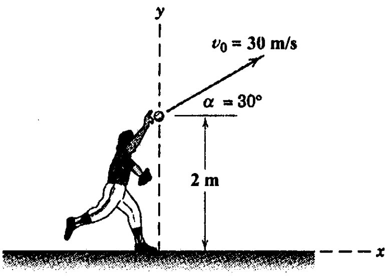
۲-۱٦٦ ◀ بازیکن بیسبال مسئله ۱۲۰-۲ با اضافه کردن چند داده تکرار می‌شود. در زمان $t = 0$ توپ با سرعت اولیه ۳۰ m/s تحت زاویه °۳۰ نسبت به افق پرتاب می‌گردد. کمیتهای r، $\dot{r}$، $\ddot{r}$، θ، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ را در زمان $t = 0/5$ s نسبت به دستگاه مختصات x-y نشان داده، تعیین کنید.

جواب

$r = ۱۵/٤۰$ m ، $\dot{r} = ۲۷/۳$ m/s

$\theta = ۳۲/۵°$ ، $\dot{\theta} = -۰/۳۵۳$ rad/s

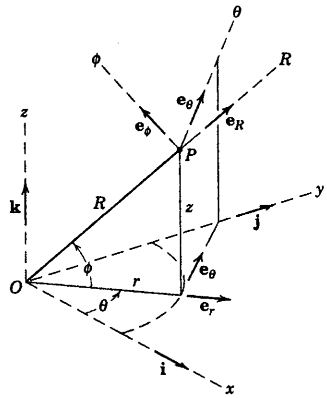
$\ddot{\theta} = ۰/۷۱۷$ rad/s^2 ، $\ddot{r} = -۳/۳۵$ m/s^2



شکل مسئله ۱۶۶-۲

۷-۲ حرکت منحنی الخط در فضا

حالت کلی حرکت سه بعدی ذره در امتداد مسیر منحنی شکل در فضا در بخش ۱-۲ معرفی شد و در شکل ۱-۲ نشان داده شد. سه دستگاه مختصات کارتزین (x-y-z)، استوانه‌ای (r-θ-z) و کروی (R-θ-ϕ) بر شمرده شدند که معمولاً برای تشریح این حرکت مورد استفاده قرار می‌گیرند. این سه دستگاه مختصات و همچنین بردارهای یکه آنها در شکل ۱٦-۲ نشان داده شده‌اند.*



شکل (۱۶-۲)

قبل از تشریح موارد استفاده این دستگاههای مختصات ملاحظه می‌کنیم که توصیف متغیرهای مسیر را نیز با استفاده از مختصات n و t که در بخش ۵-۲ بسط داده شد، بوسیله صفحه بوسان نشان داده شده در شکل ۱-۲ می‌توان بکار برد. قبلاً این صفحه را به عنوان صفحه‌ای تعریف کرده‌ایم که شامل منحنی در محل مورد نظر است. مشاهده می‌کنیم که سرعت **v** که در امتداد مماس t بر منحنی است، در صفحه بوسان قرار گرفته است. شتاب **a** نیز در صفحه بوسان می‌باشد و هنگامیکه حرکت در صفحه است، یک مولفه $a_t = \dot{v}$ مماس بر مسیر دارد که ناشی از تغییر اندازه سرعت بوده و همچنین یک مولفه $a_n = v^2/\rho$ عمود بر منحنی دارد که منتج از تغییر امتداد سرعت می‌باشد. همانطور که قبلاً نیز داشتیم، ρ شعاع انحنای مسیر در نقطه مورد نظر می‌باشد که می‌توان آن را در صفحه بوسان اندازه گرفت. این توصیف حرکت که برای بسیاری از مسائل حرکت در صفحه، طبیعی و درست است، در حرکت فضایی کاربرد کمی دارد. زیرا جهت صفحه بوسان دائماً تغییر می‌کند. بنابراین استفاده از آن به عنوان یک مرجع، اشتباه است. در نتیجه توجه خود را به سه دستگاه مختصات ثابت نشان داده شده در شکل ۱٦-۲ معطوف می‌کنیم.

مختصات کارتزین (x-y-z)

بسط از دو به سه بعد، مشکل خاصی را ایجاد نمی‌کند. کافیست که مختصه z و دو مشتق زمانی آن را به عبارات دو بعدی روابط ٦-۲ اضافه کنیم تا بردارهای موقعیت **R**، سرعت **v** و شتاب **a** به صورت زیر درآیند.

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{R} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{R}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{R}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \end{aligned}} \qquad (۲-۱۵)$$

توجه شود که در حرکت سه بعدی بجای **r** برای بردار موقعیت از **R** استفاده می‌کنیم.

* به هنگام استفاده از دستگاه مختصات کروی، معمولاً می‌توان با یک تغییر، بجای زاویه ϕ از زاویه متمم آن استفاده کرد.

مختصات استوانه‌ای (r-θ-z)

اگر مختصات قطبی را در حرکت صفحه‌ای خوب فهمیده باشیم، نباید با درک مختصات استوانه‌ای مشکلی داشته باشیم. زیرا کافیست تنها مختصه z و دو مشتق زمانی آن را اضافه کنیم. بردار **R** موقعیت ذره در مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است.

$$\mathbf{R} = r\,\mathbf{e}_r + z\mathbf{k}$$

بجای رابطه ۱۳-۲ برای حرکت صفحه‌ای می‌توانیم سرعت را به صورت زیر بنویسیم.

$$\boxed{\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta + \dot{z}\mathbf{k}} \tag{۲-۱۶}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} v_r &= \dot{r} \\ v_\theta &= r\dot{\theta} \\ v_z &= \dot{z} \\ v &= \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2 + v_z^2} \end{aligned}$$

به همین ترتیب، شتاب با اضافه کردن مولفه z به رابطه ۱٤-۲ نوشته می‌شود که خواهیم داشت.

$$\boxed{\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + \ddot{z}\mathbf{k}} \tag{۲-۱۷}$$

که در آن:

$$\begin{aligned} a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\dot{\theta}\right) \\ a_z &= \ddot{z} \\ a &= \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2} \end{aligned}$$

در حالی که بردارهای یکه $\mathbf{e}_r$ و $\mathbf{e}_\theta$ دارای مشتق‌های زمانی‌ای هستند که از تغییرات امتداد آنها ناشی می‌گردد، توجه داریم که بردار یکه **k** در راستای محور z ، دارای امتدادی ثابت است و بنابراین مشتق زمانی ندارد.

مختصات کروی (R-θ-ϕ)

وقتی برای مشخص کردن موقعیت یک ذره از یک فاصله شعاعی و دو زاویه استفاده می‌شود (برای مثال، در حالتی که از رادارها برای اندازه‌گیری بهره می‌گیریم) مختصات کروی R ، θ و ϕ بکار می‌رود. عبارت مربوط به سرعت **v** به سادگی بدست می‌آید، اما به دلایل هندسی عبارت مربوط به شتاب **a** پیچیده‌تر حاصل می‌شود. بنابراین در اینجا فقط نتایج

را ذکر می‌کنیم*. قسمت بردارهای یکه $\mathbf{e}_R$، $\mathbf{e}_\theta$ و $\mathbf{e}_\phi$ را مطابق شکل معرفی می‌کنیم. توجه کنید بردار یکه $\mathbf{e}_R$ در امتدادیست که در صورت افزایش R و ثابت ماندن θ و ϕ، ذره P میل به حرکت در آن راستا را دارد. همچنین بردار یکه $\mathbf{e}_\theta$ در امتدادیست که در صورت ثابت ماندن R و ϕ و افزایش θ، ذره P در آن راستا حرکت می‌کند و بالاخره بردار یکه $\mathbf{e}_\phi$ در امتدادیست که اگر ϕ افزایش یابد و R و θ ثابت بمانند، P در آن راستا حرکت خواهد کرد. عبارتهای حاصل برای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ به صورت زیر هستند.

$$\boxed{\mathbf{v} = v_R\,\mathbf{e}_R + v_\theta\,\mathbf{e}_\theta + v_\phi\,\mathbf{e}_\phi} \tag{۲-۱۸}$$

که در آن:

$$v_R = \dot{R}$$
$$v_\theta = R\dot{\theta}\cos\phi$$
$$v_\phi = R\dot{\phi}$$

و

$$\boxed{\mathbf{a} = a_R\,\mathbf{e}_R + a_\theta\,\mathbf{e}_\theta + a_\phi\,\mathbf{e}_\phi} \tag{۲-۱۹}$$

که در آن:

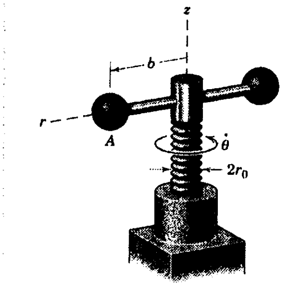
$$a_R = \ddot{R} - R\dot{\phi}^2 - R\dot{\theta}^2\cos^2\phi$$
$$a_\theta = \frac{\cos\phi}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\theta}\right) - 2R\dot{\theta}\dot{\phi}\sin\phi$$
$$a_\phi = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(R^2\dot{\phi}\right) + R\dot{\theta}^2\sin\phi\cos\phi$$

باید متذکر شویم که می‌توان تبدیل‌های غیر خطی بین عبارات مربوط به سرعت و شتاب در هر دو دستگاه از سه دستگاه مختصات را بدست آورد. تبدیل‌ها این امکان را ایجاد می‌کنند که برای مثال اگر مولفه‌های حرکتی را در مختصات کروی بدانیم، بتوانیم آنها را در مختصات کارتزین بیان کنیم و یا بالعکس**. این تبدیل‌ها را می‌توان به کمک جبر ماتریس و یک برنامه ساده کامپیوتری انجام داد.

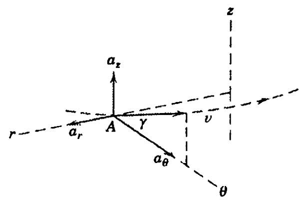
* برای مشتق‌گیری کامل از v و a در مختصات کروی، کتاب دیگر نویسنده، دینامیک، چاپ دوم (۱۹۷۱) و یا ویرایش SI (۱۹۷۵) از انتشارات John wiley & Sons, Inc را ببینید.

** این تبدیلهای مختصات در کتاب دیگر نویسنده، دینامیک چاپ دوم (۱۹۷۱) و یا ویرایش SI (۱۹۷۵) از انتشارات Jhon wiley & Sons, Inc بسط و تشریح شده است.

مسئله نمونه ۱۱-۲



پیچ انتقال قدرتی از حالت سکون شروع به حرکت نموده و سرعت دورانی آن $\dot{\theta}$ به طور یکنواخت با زمان افزایش می‌یابد که توسط رابطه $\dot{\theta} = kt$ می‌توان آن را نشان داد در آن k عدد ثابتی است. مطلوب است روابط سرعت v و شتاب a برای مرکز گوی A، هنگامی که پیچ از شروع حرکت یک دور کامل زده باشد. گام پیچ (پیشروی پیچ به ازای هر دور چرخش) برابر L است.



حل: مرکز گوی A مسیر مارپیچی را روی سطح استوانه‌ای به شعاع b می‌پیماید و مختصات استوانه‌ای r-θ-z را به روشنی مشخص می‌کنند. با انتگرال‌گیری از رابطه $\dot{\theta}$ داریم:

$$\theta = \Delta\theta = \int \dot{\theta}\, dt = \frac{1}{2}kt^2$$

برای یک دور دوران از حالت سکون داریم:

$$2\pi = \frac{1}{2}kt^2$$

که نتیجه می‌دهد:

$$t = 2\sqrt{\pi/k}$$

بنابراین، سرعت زاویه‌ای برای یک دور دوران برابر است با:

$$\dot{\theta} = kt = k\left(2\sqrt{\pi/k}\right) = 2\sqrt{\pi\, k}$$

① زاویه γ، زاویه مسیر مارپیچی پیموده شده توسط مرکز گوی، رابطه‌ای بین مولفه‌های θ و z سرعت را تعیین می‌کند که توسط $\tan\gamma = L/(2\pi b)$ بیان می‌گردد. اکنون از روی شکل دیده می‌شود که $v_\theta = v\cos\gamma$ است.

② با جایگزینی $v_\theta = r\dot{\theta} = b\dot{\theta}$ از رابطه ۱۶-۲ خواهیم داشت: $v = \dfrac{v_\theta}{\cos\gamma} = \dfrac{b\dot{\theta}}{\cos\gamma}$. با بدست آوردن $\cos\gamma$ از روی $\tan\gamma$ و با داشتن $\dot{\theta} = 2\sqrt{\pi\, k}$ برای موقعیت پیچ پس از یک دور چرخش داریم:

$$v = 2b\sqrt{\pi\, k}\,\frac{\sqrt{L^2 + 4\pi^2 b^2}}{2\pi\, b} = \sqrt{\frac{k}{\pi}}\sqrt{L^2 + 4\pi^2 b^2}$$ جواب

مولفه‌های شتاب از رابطه ۱۷-۲ بدست می‌آید.

③

$$\left[a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right] \qquad a_r = 0 - b\left(2\sqrt{\pi k}\right)^2 = -4b\pi k$$

$$\left[a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right] \qquad a_\theta = bk + 2(0)\left(2\sqrt{\pi k}\right) = bk$$

$$\left[a_z = \ddot{z} = \dot{v}_z\right] \qquad a_z = \frac{d}{dt}(v_z) = \frac{d}{dt}(v_\theta \tan\gamma) = \frac{d}{dt}\left(b\dot{\theta}\tan\gamma\right)$$

$$= (b\tan\gamma)\ddot{\theta} = b\frac{L}{2\pi b}k = \frac{kL}{2\pi}$$

اکنون مولفه‌های شتاب را برای بدست آوردن مقدار شتاب کل ترکیب می‌کنیم که نتیجه می‌شود:

$$a = \sqrt{(-4b\pi k)^2 + (bk)^2\left(\frac{kL}{2\pi}\right)^2}$$

جواب

$$= bk\sqrt{\frac{\left(1+16\pi^2\right)+L^2}{\left(4\pi^2 b^2\right)}}$$

نکات مفید

❶ اگر تشخیص ندهیم که حرکت در امتداد z مطابق رابطه مارپیچ صورت می‌گیرد، نمی‌توانیم مسئله را کامل حل کنیم. همچنین توجه داشته باشیم که باید گام L را بر محیط $2\pi b$ تقسیم کنیم نه بر قطر $2b$، تا $\tan\gamma$ بدست آید. در صورتیکه شک دارید، یک دور مارپیچ را با ردگیری از مرکز گوی باز کنید.

❷ مثلثی قائم الزاویه رسم کنید و به خاطر آورید که به ازای $\tan\beta = a/b$، کسینوس β برابر $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ می‌گردد.

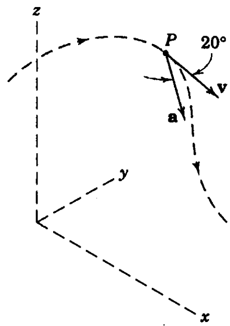
❸ علامت منفی a_r، همانطور که از قبل می‌دانیم، مولفه عمودی شتاب است که جهتش به طرف مرکز انحنای منحنی می‌باشد که با جواب ما سازگار است.

مسائل

مسائل مقدماتی

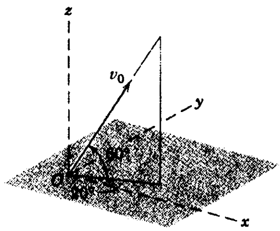
۲-۱۶۷ ذره P در امتداد یک منحنی فضایی حرکت می‌کند و سرعتش در لحظه نشان داده شده $\mathbf{v} = ٤\mathbf{i}-٢\mathbf{j}-\mathbf{k}$ m/s است. در همان لحظه، ذره دارای شتاب $\mathbf{a}$ به مقدار ۸ m/s^2 می‌باشد. شعاع انحنای ρ مسیر را در این موقعیت حساب کرده و میزان افزایش سرعت $\dot{v}$ را بیابید.

جواب $\rho = ٧/٦٧$ m و $\dot{v} = ٧/٥٢$ m/s^2



شکل مسئله ۲-۱۶۷

۲-۱۶۸ پرتابه‌ای از نقطهٔ O با سرعت اولیه $v_o = ١٥٠$ m/s در امتداد نشان داده شده در شکل پرتاب می‌گردد. مولفه‌های x، y و z موقعیت، سرعت و شتاب را ۲۰ ثانیه پس از پرتاب بدست آورید. از نیروی مقاومت ایرودینامیکی صرفنظر کنید.

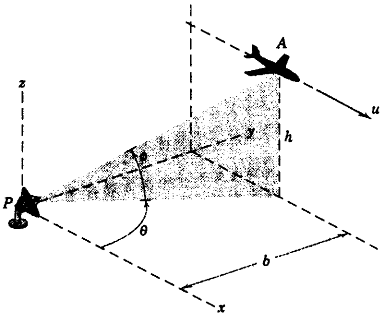


شکل مسئله ۲-۱۶۸

۲-۱۶۹ سرعت و شتاب ذره‌ای در یک لحظه معین با رابطه‌های $\mathbf{v} = ٦\mathbf{i}-٣\mathbf{j}+٢\mathbf{k}$ m/s و $\mathbf{a} = ٣\mathbf{i}-\mathbf{j}-٥\mathbf{k}$ m/s^2 داده شده‌اند. θ زاویه بین $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ و همچنین مقدار $\dot{v}$ و شعاع انحنای ρ که در صفحه بوسان می‌باشد را تعیین نمایید.

جواب $\theta = ٧٤/٦°$ و $\dot{v} = ١/٥٧١$ m/s^2 و $\rho = ٨/٥٩$ m

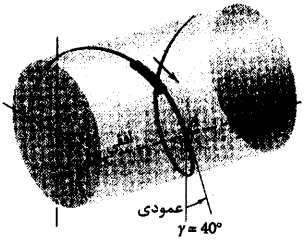
۲-۱۷۰ آنتن رادار P، هواپیمای جت A را در حالیکه با سرعت افقی u در ارتفاع h پرواز می‌کند، ردیابی می‌نماید. رابطه‌هایی را برای مولفه‌های سرعت در مختصات کروی حرکت آنتن بیان کنید.



شکل مسئله ۲-۱۷۰

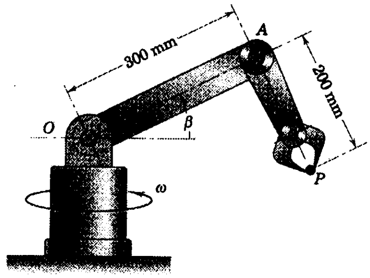
۲-۱۷۱ یک وسیله تفریحی موسوم به «مارپیچ»، سرنشینان خود را در یک مسیر مارپیچی حول یک استوانه به طور وارونه بالا و پایین می‌برد. سرعت واگنها به هنگام عبور از نقطه A برابر ۱۵ m/s بوده و مولفه شتاب آنها، در امتداد مماس بر مسیر، در این نقطه برابر $g\cos\gamma$ می‌باشد. شعاع موثر مارپیچ استوانه ۵ m و زاویه پیچ $\gamma = ٤٠°$ می‌باشد. شتاب سرنشینان به هنگام عبور از نقطه A را محاسبه کنید.

جواب $a = ٢٧/٥$ m/s^2



شکل مسئله ۲-۱۷۱

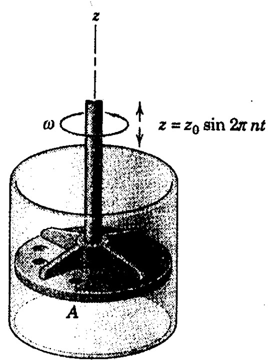
۲-۱۷۲ یک روبات صنعتی، برای جابجایی جسم کوچک P استفاده می‌گردد. مطلوبست محاسبه مقدار شتاب **a** جسم P را برای لحظه‌ای که $\beta = 30^\circ$ و $\dot{\beta} = 10$ درجه بر ثانیه و $\ddot{\beta} = 20$ درجه بر مجذور ثانیه باشد. پایه روبات با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = 40$ درجه بر ثانیه در حال دوران است. در حین حرکت بازوهای AO و AP عمود بر هم باقی می‌مانند.



شکل مسئله ۲-۱۷۲

۲-۱۷۳ به دیسک چرخنده یک مخلوط‌کن که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = \dot{\theta}$ می‌چرخد در امتداد محورش حرکت متناوب $z = z_0 \sin 2\pi nt$ داده می‌شود. رابطه‌ای برای مقدار ماکزیمم شتاب نقطه A واقع بر لبه دیسک به شعاع r بدست آورید. فرکانس نوسانات عمودی دیسک، n ثابت می‌باشد.

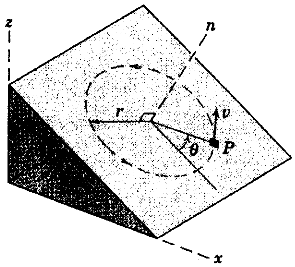
جواب $a_{max} = \sqrt{r^2\omega^4 + 16n^4\pi^4 z_0^2}$



شکل مسئله ۲-۱۷۳

مسائل ویژه

۲-۱۷٤ قطعه کوچک P با سرعت ثابت v یک مسیر دایره‌ای به شعاع r را که روی سطح شیبداری واقع شده، طی می‌کنند. اگر در $t = 0$، $\theta = 0$ باشد، مولفه‌های x، y و z سرعت و شتاب را بر حسب زمان بدست آورید.

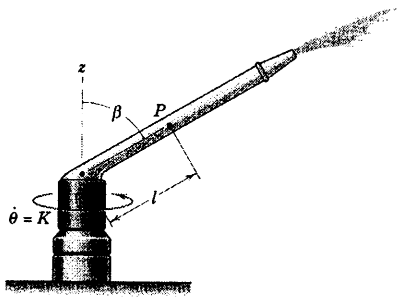


شکل مسئله ۲-۱۷۴

۲-۱۷۵ شیپوره‌ای چرخان که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = K$ دوران می‌کند، به سطح دایره‌ای بزرگ آب می‌پاشد. ذرات آب با میزان ثابت $\dot{l} = c$ نسبت به لوله، در طول آن حرکت می‌کنند. عبارتهایی برای اندازه‌های سرعت و شتاب ذره آب P، در موقعیت مشخص l در لوله چرخان بنویسید.

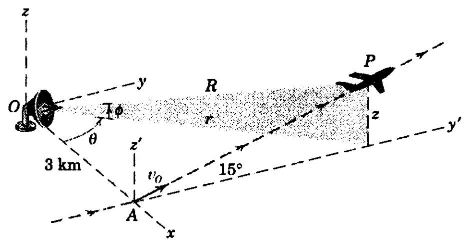
جواب $v = \sqrt{c^2 + K^2 l^2 \sin^2\beta}$

$a = K \sin\beta \sqrt{K^2 l^2 + 4c^2}$



شکل مسئله ۲-۱۷۵

۲-۱۷۶ هواپیمای P در نقطه A، بـا سـرعت υ_0 برابـر ۲۵۰ km/h از زمین جـدا شـده، در صفحـه عمـودی $y'-z'$ تحت زاویه ثابت °۱۵ و شتاب ۰/۸ m/s^2 اوج می‌گیـرد. پـرواز هواپیما توسط رادار مستقر در نقطه O تعقیب می‌گردد. سرعت P را در ٦۰ ثانیه پس از جدایی از زمین، بر حسـب مولفـه‌های استوانه‌ای بدست آورده و $\dot{r}$، $\dot{\theta}$ و $\dot{z}$ را برای آن لحظه پیدا کنید (*پیشـنهاد*: مولفه‌های سـرعت را روی صفحـات x-y و x-z تصویر نمایید).



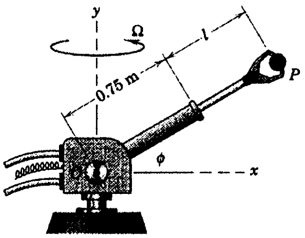
شکل مسئله ۲-۱۷۶

۲-۱۷۷ برای وضعیت مسئله ۲-۱۷٦، سرعت هواپیمای P را بر حسب مولفه‌های مختصـات کـروی، ٦۰ ثانیـه پس از جدا شدن از زمین محاسبه نموده و $\dot{R}$ ، $\dot{\theta}$ و $\dot{\phi}$ را در آن لحظه پیدا کنید (*پیشنهاد*: سرعت را روی محورهای x-y تصویر کرده و سپس آنها را روی صفحه عمودی که شامل r و R می‌باشـد، تصویر نمایید).

جواب $\dot{R} = ۱۰۳/٦\ m/s$ و $\dot{\theta} = ۸/۸۸(۱۰^{-۳})\ rad/s$

$\dot{\phi} = ۱/۰۹۳(۱۰^{-۳})\ rad/s$

۲-۱۷۸ بازوی روبات در حین اینکـه بـالا رفتـه و بـاز می‌شود، حول محور عمودی نیز می‌چرخد. در لحظه نشان داده شـده، $\phi = ۳۰°$ ، $\dot{\phi} = ۱۰\ deg/s$ و ثـابت، $l = ۰/۵\ m$، $\dot{l} = ۰/۲\ m/s$ ، $\ddot{l} = -۰/۳\ m/s^2$ و $\Omega = ۲۰\ deg/s$ و ثـــابت می‌باشد. مقدار سرعت $\mathbf{v}$ و مقدار شتاب $\mathbf{a}$ قطعه P گرفته شـده توسط پنجه روبات را حساب کنید.

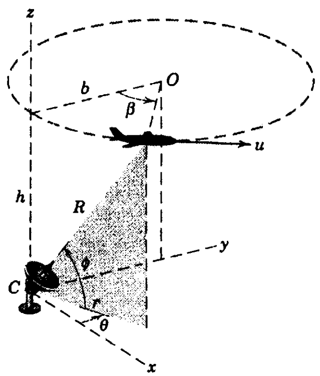


شکل مسئله ۲-۱۷۸

۲-۱۷۹ هواپیمایی بـا سـرعت ثـابت u در ارتفـاع h، مسیر دایره‌ای به شعاع b را در یـک صفحـه افقـی مـی‌پیمـاید. راداری که در نقطه C مستقر شده، آنرا ردیابی می‌کند. روابطـی برای مولفه‌های سرعت هواپیمـا در مختصـات کـروی رادار در موقعیت مشخص شده β بنویسید.

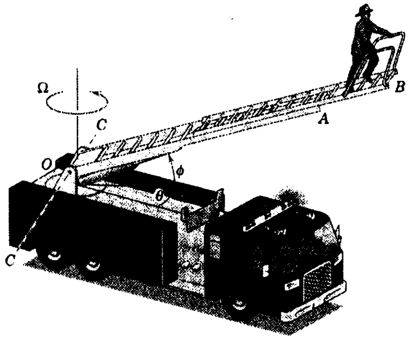
جواب
$$\upsilon_R = \frac{bu\sin\beta}{\sqrt{۴b^۲\sin^۲\frac{\beta}{۲}+h^۲}}$$

$$\upsilon_\theta = u\sin\frac{\beta}{۲}\ ,\ \upsilon_\phi = \frac{-hu\cos\frac{\beta}{۲}}{\sqrt{۴b^۲\sin^۲\frac{\beta}{۲}+h^۲}}$$



شکل مسئله ۲-۱۷۹

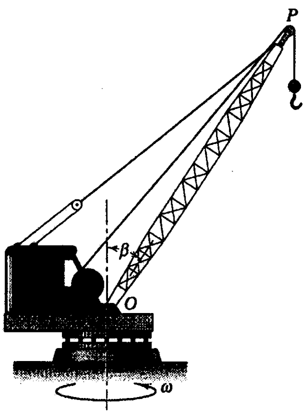
۲-۱۸۰ پایه نردبان یک ماشین آتش‌نشانی حول محـور عمودی O با سرعت زاویه‌ای ثابت $\Omega = ۱۰\ deg/s$ می‌چرخد. در همیـن لحظـه نردبـان OB بـا سـرعت زاویـه‌ای ثـابت $\dot{\phi} = ۷\ deg/s$ بالا رفته و قسمت AB از نردبان با مـیزان ثـابت ۰/۵ m/s نسبت به قسمت OA بـاز می‌شـود. در لحظـه مـورد نظر، $\phi = ۳۰°$ ، $\overline{OA} = ۹\ m$ و $\overline{AB} = ٦\ m$ می‌باشـد. مقـادیر سرعت و شتاب B ، نقطه انتهای نردبان را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۸۰-۲

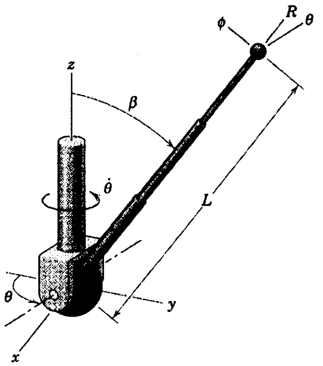
۱۸۱-۲ جرثقیل متحرکی که در شکل نشان داده شده است، دارای دکلی به طول $\overline{OP}$ = ۲۴ m بوده و با میزان ثابت ۲ rev/min حول محور قائم خود دوران می‌کند. همزمان با آن، دکل جرثقیل با میزان ثابت $\dot{\beta}$ = ۰/۱ rad/s پایین می‌آید. هنگامیکه β = ۳۰° می‌باشد، سرعت و شتاب انتهای P دکل را محاسبه کنید.

جواب v = ۳/۴۸ m/s و a = ۱/۱۰۴ m/s^2



شکل مسئله ۲/۱۸۱

۱۸۲-۲ هنگام آزمایش مکانیزم محرک یک آنتن تلسکوپی روی یک فضاپیما، محور نگهدارنده آنتن حول محور ثابت z با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ می‌چرخد. مطلوب است تعیین مولفه‌های R، θ و ϕ شتاب **a** انتهای آنتن را در شرایطی بدست آورید که: L = ۱/۲ m، β = ۴۵° بوده و اگر $\dot{\theta}$ = ۲ rad/s، $\dot{\beta} = \frac{۳}{۲}$ rad/s و $\dot{L}$ = ۰/۹ m/s در حین حرکت ثابت باشند.

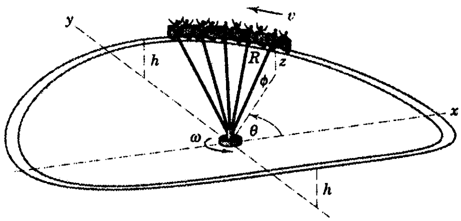


شکل مسئله ۱۸۲-۲

۱۸۳-۲ ◄ ارابه‌های پارک بازی به بازوهایی به طول R متصل شده‌اند که این بازوها به طوقه دواری که مجموعه را با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = \dot{\theta}$ حول محور قائم می‌چرخاند، لولا شده‌اند. ارابه‌ها طبق رابطه $z = (h/۲)(۱-\cos ۲\theta)$ بالا و پایین می‌روند. عباراتی برای مولفه‌های R، θ و ϕ سرعت **v** هر ارابه در لحظه‌ای که از موقعیت $\theta = \pi/۴$ rad می‌گذرد، تعیین کنید.

جواب $v_R = ۰$, $v_\theta = R\omega\sqrt{۱-\left(\frac{h}{۲R}\right)^۲}$

$$v_\phi = \frac{h\omega}{\sqrt{۱-\left(\frac{h}{۲R}\right)^۲}}$$

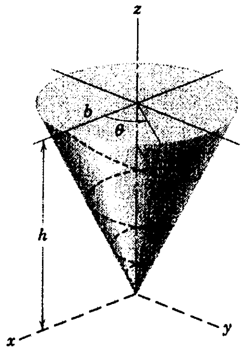


شکل مسئله ۱۸۳-۲

۲-۱۸٤ ◀ ذره P در امتداد مسیر مارپیچی حول یک مخروط قائم به ارتفاع h و شعاع قاعده b به پایین می‌غلتد. زاویه γ بین مماس بر مسیر در هر نقطه مماس افقی بر مخروط در همان نقطه ثابت می‌باشد. همچنین حرکت ذره چنان کنترل می‌شود که $\dot{\theta}$ ثابت است. شتاب شعاعی a_r ذره را به ازای هر مقدار از θ حساب کنید.

جواب $a_r = b\dot{\theta}\left(\tan^{۲}\gamma \sin^{۲}\beta - ۱\right)e^{-\theta \tan\gamma \sin\beta}$

که در آن $\beta = \tan^{-۱}\left(\frac{b}{h}\right)$ است



شکل مسئله ۱۸۴-۲

۸-۲ حرکت نسبی (محورها در انتقال)

در بخشهای گذشته این فصل، حرکت ذره با استفاده از مختصاتی که محورهای ثابتی داشت، تشریح گردید. جابجایی، سرعت و شتاب‌هایی که به این ترتیب تعیین گردد را *مطلق* می‌نامند. اما همیشه امکان پذیر نیست که از دستگاه محورهای ثابت برای مشاهده حرکت استفاده شود و مسائل مهندسی بسیاری وجود دارند که تحلیل حرکت آنها نسبت به دستگاه مختصات متحرک بسیار ساده‌تر است. این اندازه‌گیری‌ها هنگامی که با حرکت مطلق خود مختصات متحرک ترکیب شوند، تعیین حرکت مطلق مورد نظر را ممکن می‌سازند. این روش را تحلیل حرکت *نسبی* گویند.

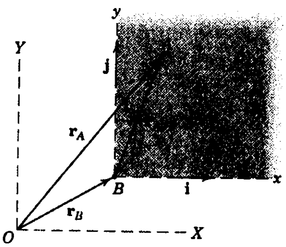
انتخاب دستگاه مختصات

حرکت دستگاه مختصات متحرک نسبت به یک دستگاه مختصات ثابت مشخص می‌گردد. به عبارت دقیق‌تر، این دستگاه ثابت در مکانیک نیوتنی، دستگاه اینرسی اولیه است که فرض می‌شود در فضا هیچ حرکتی ندارد. از نقطه نظر مهندسی، دستگاه ثابت را می‌توان هر دستگاهی در نظر گرفت که حرکت مطلقش در مسئله مورد نظر قابل چشم پوشی باشد. برای اکثر مسائل مهندسی محدود به زمین، کافی است دستگاه مختصات ثابتی اختیار شود که به سطح زمین نصب شده و از حرکت زمین صرفنظر گردد. برای حرکت ماهواره‌ها به دور زمین، دستگاه مختصات غیر دوار که بر محور زمین منطبق است اختیار می‌شود. برای تشریح حرکت بین سیاره‌ها از دستگاه مختصات ثابت و غیر دوار متصل به خورشید استفاده می‌گردد. بنابراین انتخاب دستگاه ثابت بستگی به نوع مسئله مورد نظر دارد.

در این بخش به دستگاههای مرجعی که دارای انتقال هستند و نه دوران توجه داریم. حرکت اندازه گیری شده در دستگاههای دوار در بخش ۷-۵ از فصل پنجم در سینماتیک اجسام صلب بحث گردیده که در آنجا این مسئله کاربردی خاص اما با اهمیت پیدا می‌کند. در این قسمت همچنین به تحلیل حرکت نسبی در صفحه توجه می‌کنیم.

نمایش برداری

اکنون در نظر بگیرید که دو ذره A و B به طور مجزا در یک صفحه یا صفحات موازی دارای حرکت منحنی الخط می‌باشند، شکل ۱۷-۲. به طور دلخواه مبدا محورهای x-y (غیر دوار) را به ذره B متصل کرده و حرکت A را از موقعیت متحرک B نظاره می‌کنیم. بردار موقعیت A نسبت به دستگاه مختصات در B برابر است با $\mathbf{r}_{A/B} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$، که در آن اندیس A/B به معنی «A نسبت به B» یا «A در مقایسه با B» می‌باشد. بردارهای یکه در امتداد محورهای x و y عبارتند از: $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ و x و y، مختصات A هستند که در دستگاه x-y اندازه گیری می‌شوند. موقعیت مطلق B با بردار $\mathbf{r}_B$ نسبت به دستگاه مختصات ثابت X-Y سنجیده می‌شود. بنابراین موقعیت مطلق A توسط بردار زیر تعیین می‌گردد.



شکل ۲/۱۷

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B}$$

اکنون با یک بار مشتق گیری از عبارت فوق نسبت به زمان، سرعتها و با دو بار مشتق گیری، شتابها بدست می‌آینـد. بنابراین:

$$\dot{\mathbf{r}}_A = \dot{\mathbf{r}}_B + \dot{\mathbf{r}}_{A/B} \quad \text{یا} \quad \boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}} \qquad (۲-۲۰)$$

$$\ddot{\mathbf{r}}_A = \ddot{\mathbf{r}}_B + \ddot{\mathbf{r}}_{A/B} \quad \text{یا} \quad \boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}} \qquad (۲-۲۱)$$

در رابطـه ۲۰-۲، از موقعیـت خـود درB ، کـه بـه محورهـای متحـرک x-y متصـل اسـت، سـرعت A را برابـر بـا $\dot{\mathbf{r}}_{A/B} = \mathbf{v}_{A/B} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$ می‌بینیم. این عبارت، سرعت A نسبت به B می‌باشد. به همین طریق، از موقعیت غیر دوارB ، شتاب A را برابر $\ddot{\mathbf{r}}_{A/B} = \dot{\mathbf{v}}_{A/B} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$ می‌بینیم. این عبارت نیز، شتاب A نسبت به B است. در مشتق گیریهای مزبور باید به این نکته توجه نمود که بردارهای یکه دارای مشتق نیستند، زیرا هم مقدار و هم امتدادشان بـدون تغییـر می‌مـانند (بعـداً وقتـی محورهای مرجع دوار را بررسی می‌کنیم، ناچاریم مشتق بردارهای یکه را وقتی امتدادشان تغییر می‌کند، در نظر بگیریم).

به عبارتی رابطه ۲۰-۲، (یا ۲۱-۲) بیان می‌کند که در صورتی که جمع مزبور به صورت برداری انجام پذیرد، سرعت مطلق (یا شتاب مطلق) ذرهA برابر است با سرعت مطلق (یا شتاب مطلق) ذرهB بعلاوه سرعت (یا شـتاب)A نسـبت بـه B . جمله نسبی سرعت (یا شتاب) جمله‌ای است که یـک نـاظر متصـل بـه دسـتگاه مختصـات متحـرکx-y بدسـت مـی‌آورد. جمله‌های نسبی حرکت را می‌توانیم در هر سیستم مختصات مناسبی (کارتزین، عمودی و مماسی یا قطبی) بیـان کـرده و از فرمولهای بخشهای قبلی استفاده کنیم. توجه کنید که در اینجا دستگاه ثابت بخشـهای قبـل، تبدیـل بـه دسـتگاهی متحـرک می‌شود.

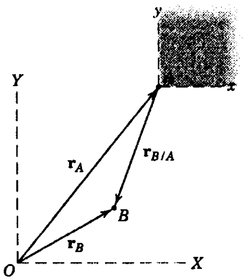
مشاهده دیگر

انتخاب نقطه B جهت اتصال دستگاه متحرک به آن، اختیاری است. همانطور که در شکل ۱۸-۲ مشاهده می‌گردد، از نقطه A نیز می‌توان برای اتصال دسـتگاه متحـرک استفاده نمود که در این صورت سه معادله حرکـت نسـبی یعنـی موقعیـت، سـرعت و شتاب عبارتند از:

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \qquad \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

بنابراین مشاهده می‌شود که:

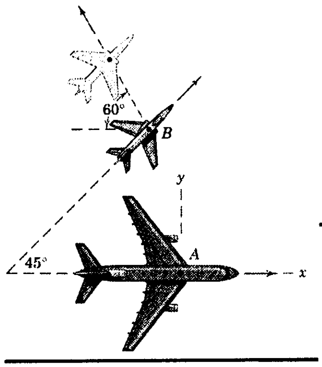
$$\mathbf{r}_{B/A} = -\,\mathbf{r}_{A/B} \qquad \mathbf{v}_{B/A} = -\,\mathbf{v}_{A/B} \qquad \mathbf{a}_{B/A} = -\,\mathbf{a}_{A/B}$$



شکل ۱۸-۲

نکته مهمی که در تحلیل حرکت نسبی باید به آن توجه نمود این است که اگر دستگاه متحرک سرعت ثـابتی داشـته باشد، شتاب ذره در دستگاه محورهای متحرک انتقالی x-y با شتاب ذره در سیستم ثابت X-Y یکسان خواهد بود. این نتیجـه گیری کاربرد قانون دوم نیوتن را توسعه می‌دهد که در فصل ۳ مطالعه می‌شود. بنابراین نتیجه مـی‌گیریـم کـه بـرای تعییـن شتاب، به جای یک دستگاه ثابت، می‌توان از یک مجموعه محور استفاده نمود که دارای سرعت مطلق ثابت هستند. دستگاه مرجع انتقالی که شتاب ندارد را *دستگاه اینرسی* می‌نامند.

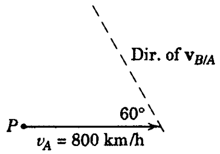
مسئله نمونه ۱۲-۲



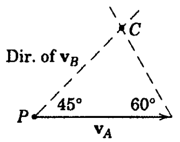
مسافران هواپیمای جت مسافربری A که با سرعت ۸۰۰ km/h به سمت شرق پرواز می‌کند، هواپیمای جت دیگر B را مشاهده می‌کنند که در زیر هواپیمای مسافربری در سطح افقی پرواز می‌کند. اگرچه دماغه هواپیمای B در جهت ۴۵° شمال شرقی است ولی مسافران هواپیمای A هواپیمای B را مطابق شکل تحت زاویه ۶۰° در حال دور شدن از هواپیمای مسافری می‌بینند. سرعت واقعی B را تعیین کنید.

حل. محورهای مرجع متحرک x-y که از آن مشاهدات صورت می‌گیرد به A متصل‌اند. بنابراین می‌نویسیم:

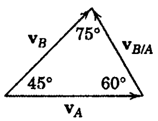
❶
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$



سپس داده‌ها و مجهولات را مشخص می‌کنیم. اندازه و جهت سرعت $\mathbf{v}_A$ داده
❷ شده است. امتداد سرعت نسبی B از دید ناظران متحرک در A یعنی $\mathbf{v}_{A/B}$ که ۶۰° می‌باشد، معلوم است و سرعت واقعی B در راستای ۴۵° که هواپیما به سوی آن حرکت می‌کند نیز معین است. دو مجهول باقی می‌ماند که عبارتند از اندازه
❸ سرعتهای $\mathbf{v}_B$ و $\mathbf{v}_{B/A}$. معادله برداری فوق را می‌توان به یکی از سه طریق زیر بدست آورد.



(I) ترسیمی: جمع برداری را در نقطه دلخواه P با رسم $\mathbf{v}_A$ با مقیاس مناسب شروع کرده و بعد خطی را از انتهای $\mathbf{v}_A$ به موازات جهت $\mathbf{v}_{B/A}$ رسم می‌کنیم. سپس امتداد معلوم $\mathbf{v}_B$ را از P رسم کرده تا نقطه تقاطع C که یگانه جواب مسئله است، بدست آید. از روی این نقطه می‌توانیم مثلث برداری را تکمیل کرده و اندازه‌های مجهول را با توجه به مقیاس معلوم، معین کنیم. این مقادیر چنین‌اند.



جواب $\quad v_{B/A} = 586 \text{ km/h} \quad , \quad v_B = 717 \text{ km/h}$

(II) مثلثاتی: شکل مثلث برداری را رسم کرده تا روابط مثلثاتی لازم مشخص شوند، داریم:

❹ جواب
$$\frac{v_B}{\sin 60^\circ} = \frac{v_A}{\sin 75^\circ} \qquad v_B = 800\frac{\sin 60^\circ}{\sin 75^\circ} = 717 \text{ km/h}$$

(III) جبر برداری: با استفاده از بردارهای یکه $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ سرعتها را به صورت برداری زیر بیان می‌کنیم.

$$\mathbf{v}_A = 800\mathbf{i} \text{ km/h} \qquad \mathbf{v}_B = (v_B \cos 45^\circ)\mathbf{i} + (v_B \sin 45^\circ)\mathbf{j}$$
$$\mathbf{v}_{B/A} = (v_{B/A} \cos 60^\circ)(-\mathbf{i}) + (v_{B/A} \sin 60^\circ)\mathbf{j}$$

با قرار دادن این روابط در معادله سرعت نسبی و حل آن به طور جداگانه برای جملات $\mathbf{j}$ و $\mathbf{i}$ خواهیم داشت:

(جملات $\mathbf{i}$) $\qquad v_B \cos 45^\circ = 800 - v_{B/A} \cos 60^\circ$

(جملات $\mathbf{j}$) $\qquad v_B \sin 45^\circ = v_{B/A} \sin 60^\circ$

❺ با حل معادلات فوق اندازه مجهول سرعتها بدست می‌آید.

جواب $\quad v_{B/A} = 586 \text{ km/h} \quad , \quad v_B = 717 \text{ km/h}$

جالب است به جواب این مسئله از دید ناظر B توجه کنیم. اگر محورهای مرجع به B متصل شوند، می‌توانیم بنویسیم $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$. بنابراین سرعت ظاهری A از دید ناظر B برابر $\mathbf{v}_{A/B}$ یعنی منهای $\mathbf{v}_{B/A}$ می‌باشد.

نکات مفید

❶ هر یک از هواپیماها را به صورت ذره در نظر می‌گیریم.

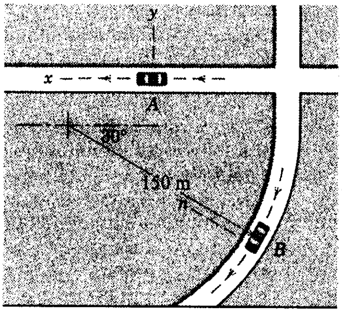
❷ فرض می‌کنیم که حرکت جانبی ناشی از باد مخالف وجود ندارد.

❸ دانشجویان باید با هر سه روش آشنا گردند.

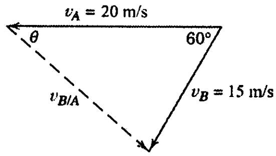
❹ باید از رابطه‌های مفید مثلثاتی استفاده نمود. در اینجا از قانون سینوسها استفاده شده است.

❺ در این مسئله خاص می‌توان مشاهده کرد که راه حل‌های ترسیمی و مثلثاتی از راه حل جبر برداری کوتاه‌تر می‌باشند.

مسئله نمونه ۱۳-۲



اتومبیل A در امتداد حرکت خود با میزان $1/2\ \text{m/s}^2$ شتاب می‌گیرد. اتومبیل B با سرعت ثابت $54\ \text{km/h}$ پیچی به شعاع $150\ \text{m}$ را دور می‌زند. اگر در موقعیت نشان داده شده، سرعت اتومبیل A به $72\ \text{km/h}$ رسیده باشد، سرعت و شتاب اتومبیل B را از دید ناظر A تعیین کنید.



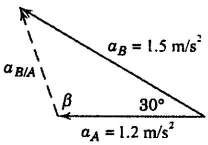
حل: محورهای مرجع غیر دوار را روی A انتخاب می‌نماییم. زیرا حرکت B نسبت به A مد نظر است.

سرعت: معادله سرعت نسبی به صورت زیر می‌باشد.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

و اندازه سرعتهای A و B در موقعیت مورد نظر برابر است با:

$$v_A = \frac{72}{3.6} = 20\ \text{m/s} \qquad v_B = \frac{54}{3.6} = 15\ \text{m/s}$$



مثلث بردارهای سرعت بر حسب معادله سرعت رسم شده است و با بکارگیری قانون کسینوسها و سینوسها، چنین نتیجه می‌گیریم:

❶ جواب $\quad \theta = 46.1° \qquad v_{B/A} = 18.03\ \text{m/s}$

شتاب: معادله شتاب نسبی به صورت زیر است.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

شتاب A داده شده است و شتاب B عمود بر منحنی در امتداد n و دارای اندازه زیر می‌باشد.

$$a_B = \frac{(15)^2}{150} = 1.5\ \text{m/s}^2 \qquad \left[a_n = \frac{v^2}{\rho}\right]$$

مثلث بردارهای شتاب مطابق شکل طبق معادله شتاب نسبی رسم شده است. از روی آن مولفه‌های x و y شتاب $\mathbf{a}_{B/A}$ چنین خواهند بود:

$$(a_{B/A})_x = 1.5\cos 30° - 1.2 = 0.0990 \text{ m/s}^2$$

$$(a_{B/A})_y = 1.5\sin 30° = 0.750 \text{ m/s}^2$$

و از روی آن: جواب $$a_{B/A} = \sqrt{(0.0990)^2 + (0.750)^2} = 0.757 \text{ m/s}^2$$

امتداد $\mathbf{a}_{B/A}$ را می‌توان با زاویه β مشخص کرده و آن را با استفاده از قانون سینوسها بدست آورد.

❷ $$\frac{1.5}{\sin\beta} = \frac{0.757}{\sin 30°} \qquad \beta = \sin^{-1}\left(\frac{1.5}{0.757}0.5\right) = 97.5°$$ جواب

نکات مفید

❶ از روشهای ترسیمی یا جبر برداری نیز می‌توانیم استفاده کنیم.

❷ در انتخاب بین دو مقدار °۸۲/۵ و °۹۷/۵=۸۲/۵ − ۱۸۰ دقت کنید.

پیشنهاد برای آشنایی با محاسبات معادلات برداری، پیشنهاد می‌گردد دانشجویان، معادلات حرکت نسبی را به شکل $\mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$ و $\mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_A$ بنویسید و چند ضلعی‌های برداری را دوباره به گونه‌ای رسم نمایند تا با این روابط برداری مطابقت نماید.

تذکر: تا اینجا فقط برای حل مسائل حرکت نسبت به محورهای غیر دوار آمادگی پیدا کرده‌ایم. اگر محورهای مرجع را به صورت صلب به اتومبیل B متصل کرده بودیم، آنها نیز با اتومبیل دوران می‌کردند و درمی‌یافتیم که جمله‌های سرعت و شتاب نسبت به محورهای دوار، برابر منحنای سرعت و شتاب اندازه‌گیری شده از محورهای غیر دوار که با A حرکت می‌کنند، نیستند. محورهای دوار را در بخش ۷-۵ مطالعه خواهیم کرد.

مسائل

مسائل مقدماتی

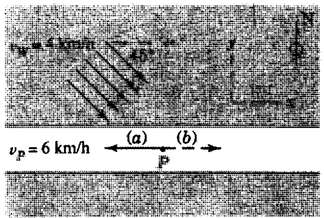
۲-۱۸۵ بانوی P در یک خیابان شرقی ـ غربی با سرعت ٦ km/h قدم می‌زند. باد مطابق شکل در امتداد شمال شرقی با سرعت ٤ km/h می‌وزد. سرعت نسبی باد نسبت به بانو را در صورتیکه او (الف) به جهت غرب و (ب) به جهت شرق خیابان قدم بزند، بدست آورید. نتایج خود را هم بر حسب بردارهای یکه **i** و **j** و هم بر حسب مقدار و امتداد قطب‌نما بیان نمایید.

جواب (الف) $\mathbf{v}_{w/p}$ = ۸/۸۳ **i** −۲/۸۳ **j** km/h

$v_{w/p}$ = ۹/۲۷ km/h به طرف جنوب شرقی °۱۷/۷٦

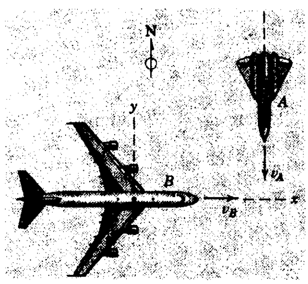
(ب) $\mathbf{v}_{w/p}$ = − ۳/۱۷ **i** − ۲/۸۳ **j** km/h

$v_{w/p}$ = ٤/۲۵ km/h به طرف جنوب غربی °٤۱/۷



شکل مسئله ۱۸۵-۲

۲-۱۸٦ هواپیمای مسافربری B با سرعت ۸۰۰ km/h به سمت شرق در پرواز است. یک جت نظامی با سرعت v_A = ۱۲۰۰ km/h به طرف جنوب می‌رود و با اختلاف ارتفاع کمی از زیر B می‌گذرد. از دید مسافران B سرعت A چگونه بنظر می‌رسد و امتداد ظاهری سرعت چیست؟

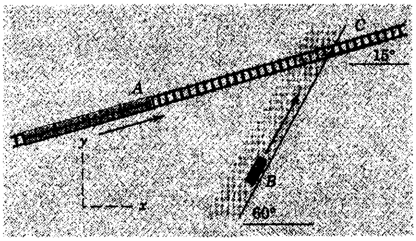


شکل مسئله ۱۸٦-۲

۲-۱۸۷ ترن A با سرعت ثابت v_A = ۱۲۰ km/h روی یک ریل مستقیم در حال عبور است. راننده اتومبیل B با دیدن تقاطع راه‌آهن C، سرعت اتومبیل را که ۹۰ km/h است با میزان ۳ m/s^2 کاهش می‌دهد. سرعت و شتاب ترن را نسبت به اتومبیل تعیین کنید.

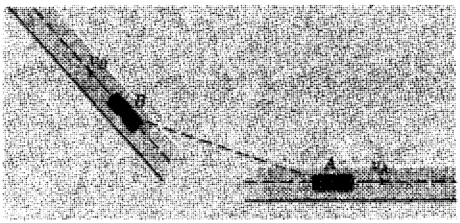
جواب $\mathbf{v}_{A/B}$ = ۷۰/۹**i**−٤٦/۹**j** km/h

$\mathbf{a}_{A/B}$ = ۱/۵**i**+۲/٦۰**j** m/s^2



شکل مسئله ۱۸۷-۲

۲-۱۸۸ دو اتومبیل A و B مطابق شکل در امتداد جاده‌های مستقیم در حرکت می‌باشند. اگر میزان تغییرات فاصله $\overline{AB}$ نسبت به زمان برابر مقدار سرعت نسبی بین آنها باشد، در ارتباط با سرعتهای دو اتومبیل چه می‌توان گفت؟

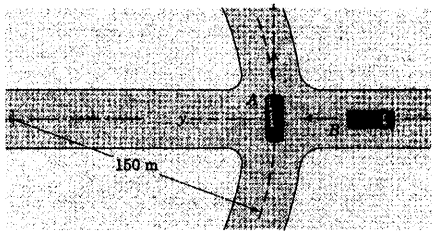


شکل مسئله ۱۸۸-۲

۲-۱۸۹ اتومبیل A با سرعت ثابت ۵٤ km/h، پیچی به شعاع ۱۵۰ m را دور می‌زند. در لحظه نشان داده شده، اتومبیل B دارای سرعت ۸۱ km/h بوده و سرعتش را با میزان ۳ m/s^2 کاهش می‌دهد. سرعت و شتاب A را از دید B محاسبه کنید.

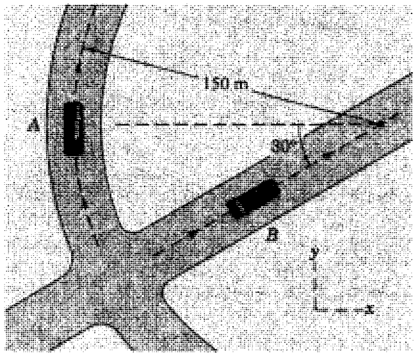
جواب $\mathbf{v}_{A/B}$ = ۱۵**i**−۲۲/۵**j** m/s

$\mathbf{a}_{A/B}$ = ٤/۵**j** m/s^2



شکل مسئله ۱۸۹-۲

۱۹۰-۲ در لحظه نشان داده شده، اتومبیل A مسیری دایره‌ای را با سرعت ثابت ۵۰ km/h طی می‌نماید. در حالیکه اتومبیل B سرعت خود را با میزان ۸ km/h در هر ثانیه کاهش می‌دهد، شتاب اتومبیل A را از دید یک ناظر در اتومبیل B تعیین کنید.



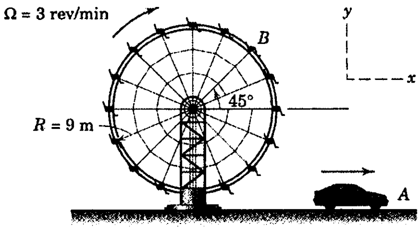
شکل مسئله ۱۹۰-۲

مسائل ویژه

۱۹۱-۲ سرعت اتومبیل A به طرف جلو ۱۸ km/h بوده و شتابش ۳ m/s^2 می‌باشد. سرعت و شتاب اتومبیل را از دید ناظر B که در صندلی چرخ فلکی نشسته، در صورتیکه صندلی چرخش نداشته باشد، تعیین کنید. سرعت زاویه‌ای چرخ‌فلک $\Omega =$ ۳ rev/min و ثابت می‌باشد.

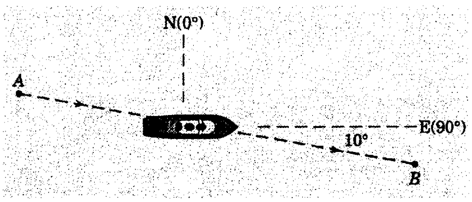
جواب $\mathbf{v}_{A/B} = ۳/۰۰\mathbf{i}+۲/۰۰\mathbf{j}$ m/s

$\mathbf{a}_{A/B} = ۳/۶۳\mathbf{i}+۰/۶۲۸\mathbf{j}$ m/s^2



شکل مسئله ۱۹۱-۲

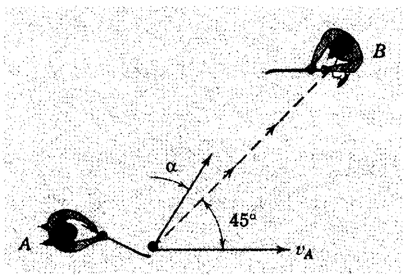
۱۹۲-۲ کشتی کوچکی که می‌تواند در آب ساکن با سرعت ۶ گره دریایی به سمت شرق حرکت نماید، به علت یک جریان آب دریایی به سمت جنوب منحرف می‌گردد. مسیر واقعی کشتی از A تا B، ۱۰ مایل دریایی است که درست در ۲ ساعت پیموده می‌شود. سرعت جریان آب v_W و جهت آن را نسبت به امتداد شمال در جهت ساعتگرد تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۹۲-۲

۱۹۳-۲ بازیکن هاکی A با سرعت $v_A =$ ٤ m/s در امتداد نشان داده شده در شکل، گوی را با چوگان خود هدایت می‌کند. تحت چه زاویه α بایستی گوی را به یارش که در نقطه B ایستاده، برساند؟ سرعت گوی نسبت به بازیکن A برابر ۷ m/s می‌باشد.

جواب $\alpha =$ ۲۳/۸°

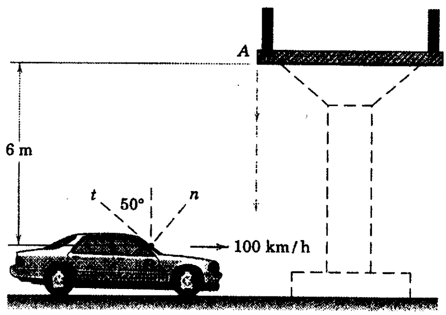


شکل مسئله ۱۹۳-۲

۲-۱۹۴ کشتی که با سرعت ۱۶ گره در آب آرامی در جهت غرب در حرکت است با یک جریان به سرعت ۳ گره که از شمال به جنوب در حرکت است، برخورد می‌کند. کشتی در چه جهتی تغییر مسیر می‌دهد (در جهت ساعتگرد نسبت به شمال کمترین درجه انحراف را اندازه بگیرید)؟ چه مدت طول می‌کشد تا کشتی در جهت غرب مسافت ۲۴ مایل دریایی را طی کند؟

۲-۱۹۵ یک قطره آب بدون سرعت اولیه از نقطه A یک پل روگذر در یک بزرگراه فرو می‌چکد. پس از ٦ m سقوط، قطره آب به نقطه B شیشه جلوی اتومبیلی که با سرعت ۱۰۰ km/h در بزرگراه افقی در حال حرکت است برخورد می‌کند. اگر زاویه شیشه با امتداد قائم مطابق شکل برابر °۵۰ باشد، زاویه θ برخورد قطره به شیشه را نسبت به خط عمود n بدست آورید.

جواب $\theta = ۲۸/۷°$ زیر خط عمود

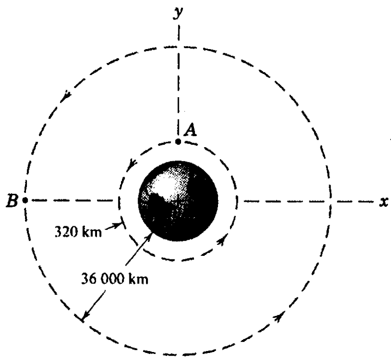


شکل مسئله ۲-۱۹۵

۲-۱۹۶ یک ماهواره زمینی در ارتفاع ۲۴۰ km روی یک مدار قطبی دایره‌ای شکل قرار داده شده و دارای سرعت ۲۷۹٤۰ km/h نسبت به مرکز زمین که نقطه ثابت در نظر گرفته شده است، می‌باشد. هنگامیکه ماهواره از جنوب به شمال حرکت کرده و در خط استوا از بالای سر یک ناظر می‌گذرد، امتداد حرکتش از دید ناظر چیست؟ شعاع استوایی زمین ٦۳۷۸ km و سرعت زاویه‌ای زمین $۰/۷۲۹(۱۰^{-۴})$ rad/s می‌باشد.

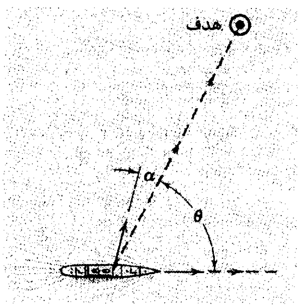
۲-۱۹۷ شاتل مدارپیمای A در یک مدار دایره‌ای در ارتفاع ۳۲۰ km قرار داشته و فضاپیمای B در مدار دایره‌ای همزمان در ارتفاع ۳٦۰۰۰ km قرار دارد. شتاب B را نسبت به ناظری غیر دوار در A حساب کنید. شتاب جاذبه در سطح زمین را $g_0 = ۹/۸۲۳\ m/s^2$ و شعاع زمین را $R = ٦۳۷۱$ km در نظر بگیرید.

جواب $\mathbf{a}_{B/A} = ۰/۲۲۲\mathbf{i} + ۸/۹۱\mathbf{j}\ m/s^2$



شکل مسئله ۲-۱۹۷

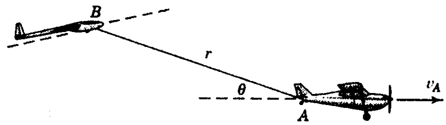
۲-۱۹۸ در شکل زیر رزمناوی با سرعت ۳۰ گره دریایی (هر گره ۱/۸۵۲ km/h) در امتداد نشان داده شده حرکت کرده و راکتی را به سوی هدف ساکنی شلیک می‌کند. امتداد شلیک با خط دید هدف زاویه α را می‌سازد. سرعت شلیک نسبت به کشتی ۷۵ m/s و زاویه شلیک نسبت به افق °۳۰ است. اگر راکت در صفحه قائمی حرکت کند که امتداد سرعت مطلقش در لحظه شلیک ایجاب می‌نماید، زاویه α را برای $\theta = ٦۰°$ حساب کنید.



شکل مسئله ۲-۱۹۸

۲-۱۹۹ هواپیمای A با سرعت ثابت ۲۰۰ km/h به صورت افقی در پرواز است و گلایدر B را که در حال اوج گرفتن می‌باشد، با خود می‌کشد. اگر طول کابل ۶۰ m = r بوده و θ با میزان ثابت ۵ درجه در هر ثانیه افزایش یابد، مقدار سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ گلایدر را در لحظه‌ای که $\theta = ۱۵^\circ$ می‌باشد، تعیین کنید.

جواب v_B = ۲۰٦ km/h و a_B = ۰/٤۵۷ m/s^2

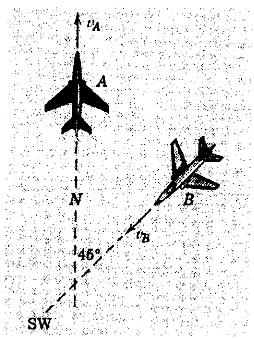


شکل مسئله ۱۹۹-۲

۲-۲۰۰ اگر در مسئله ۱۹۹-۲ هواپیما با میزان ۵ km/h در هر ثانیه سرعتش افزایش یابد و طول کابل متصل به گلایدر با میزان ثابت ۲ m/s = $\dot{r}$ مادامیکه θ ثابت است، بازگردد، مقدار شتاب گلایدر B را بدست آورید.

۲-۲۰۱ هواپیمای A با سرعت ثابت افقی ۵۰۰ km/h به سمت شمال پرواز نموده و هواپیمای B در همان ارتفاع با سرعت ۵۰۰ km/h به سوی جنوب غربی در پرواز است. سرعت نسبی یا ظاهری v_r هواپیمای B را نسبت به محورهای مختصاتی که بر A الصاق شده باشد، تعیین کنید. همچنین مقدار سرعت ظاهری v_n حرکت ظاهری B را در راستای عمود بر امتداد واقعی B حساب کنید. اگر هواپیماها در دو ارتفاع ثابت ولی مختلف پرواز می‌کردند، آیا نتایج تفاوت می‌داشت؟

جواب v_r = ۹۲٤ km/h و v_n = ۳۵٤ km/h

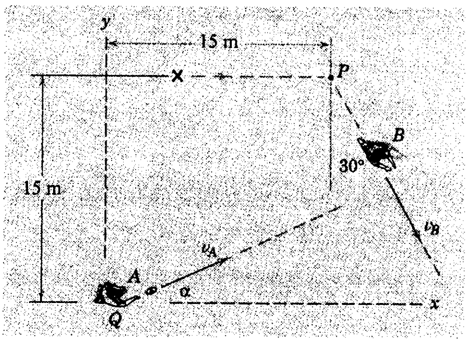


شکل مسئله ۲۰۱-۲

۲-۲۰۲ در مسئله ۲۰۱-۲ اگر هواپیمای A با میزان ۳ km/h در هر ثانیه به طرف شمال شتاب گیری کرده و هواپیمای B با میزان ٤ km/h در هر ثانیه سرعتش را در جهت جنوب غربی کاهش دهد، شتاب نسبی B نسبت به ناظر A را بر حسب m/s^2 حساب کرده و زاویه این شتاب (β) که در جهت ساعتگرد از شمال اندازه گیری می‌شود را بدست آورید.

۲-۲۰۳ پس از آغاز به حرکت از موقعیت نشان داده شده با علامت «x» بازیکن مهاجم B (دریافت کننده توپ در فوتبال آمریکایی)، ابتدا در خط مستقیم به سمت راست دویده و سپس در نقطه P مسیرش را مطابق شکل تغییر می‌دهد و در این امتداد با میزان ثابت ۷ m/s = v_B به دویدن خود ادامه می‌دهد. بازیکن مدافع (یک چهارم عقب) توپ را با سرعت افقی ۳۰ m/s در لحظه‌ای که مهاجم از نقطه P می‌گذرد، پرتاب می‌کند. زاویه α که توپ باید پرتاب شود و سرعت توپ نسبت به بازیکن B را در لحظه دریافت توپ تعیین کنید. از حرکت عمودی توپ صرفنظر کنید.

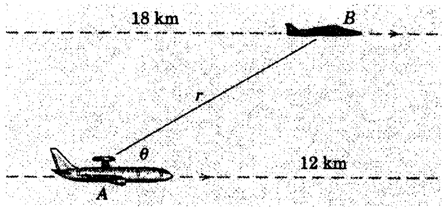
جواب $\alpha = ۳۲/۰^\circ$ و $\mathbf{v}_{A/B}$ = ۲۱/۹**i** + ۲۱/۹**j** m/s



شکل مسئله ۲۰۳-۲

۲-۲۰۴ ◀ هواپیمای مجهز به رادار A در ارتفاع ۱۲ کیلومتری به صورت افقی پرواز می‌کند و سرعتش را با میزان ۱/۲ m/s در هر ثانیه افزایش می‌دهد. رادار این هواپیما به سوی هواپیمای دیگری که در ارتفاع ۱۸ km پرواز می‌کند، نشانه روی شده است. اگر در موقعیت $\theta = ۳۰^\circ$ سرعت A برابر ۱۰۰۰ km/h و سرعت ثابت پرواز B مساوی ۱۵۰۰ km/h باشد، مقادیر $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ را در این لحظه حساب کنید.

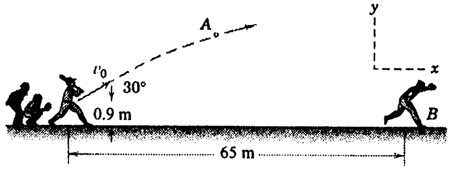
جواب $\ddot{r} = -۰/۶۳۷\ \text{m/s}^2$ و $\ddot{\theta} = ۱/۶۶۰ (۱۰^{-۴})\ \text{rad/s}^2$



شکل مسئله ۲-۲۰۴

۲-۲۰۵ ◀ چوگان‌زن بازی بیسبال، توپ را با سرعت اولیه $v_0 = ۳۰$ m/s با زاویه ۳۰° نسبت به افق به سوی بازیکن گیرنده B می‌زند. موقعیت اولیه توپ ۰/۹ m بالای سطح زمین می‌باشد. بازیکن B، $\frac{۱}{۴}$ s فرصت دارد تصمیم بگیرد کجا توپ را باید بگیرد و به سوی آن موقعیت با سرعت ثابت شروع به دویدن کند. با توجه به تجربه زیاد، بازیکن B سرعتش را طوری انتخاب می‌کند که همزمان با توپ به «موقعیت گرفتن» برسد. موقعیت گرفتن توپ جایی است که توپ در ارتفاع ۲/۱ m از سطح زمین قرار گرفته باشد. سرعت توپ نسبت به بازیکن B را در لحظه‌ای که توپ گرفته می‌شود، تعیین کنید.

جواب $\mathbf{v}_{A/B} = ۲۱/۵\mathbf{i} - ۱۴/۱۹\mathbf{j}$ m/s



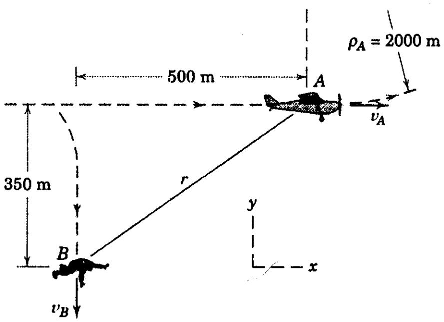
شکل مسئله ۲-۲۰۵

۲-۲۰۶ ◀ در یک لحظه خاص پس از پرش از هواپیمای A، چترباز B در موقعیت نشان داده شده قرار دارد و به سرعت حدی (ثابت) $v_B = ۵۰$ m/s می‌رسد. هواپیما نیز دارای همان سرعت ثابت حرکت $v_A = ۵۰$ m/s می‌باشد و پس از مدتی پرواز در خط مستقیم، شروع به حرکت در امتداد مسیری مدور به شعاع $\rho_A = ۲۰۰۰$ m، مطابق شکل می‌نماید. (الف) سرعت و شتاب هواپیما را نسبت به چترباز تعیین کنید. (ب) میزان تغییرات مقدار سرعت v_r هواپیما و شعاع انحنای مسیر آن ρ_r را نسبت به دید چترباز بدون دوران حساب کنید.

جواب (الف) $\mathbf{v}_{A/B} = ۵۰\mathbf{i} + ۵۰\mathbf{j}$ m/s

$\mathbf{a}_{A/B} = ۱/۲۵۰\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$

(ب) $\dot{v}_r = ۰/۸۸۴\ \text{m/s}^2$ و $\rho_r = ۵۶۶۰$ m

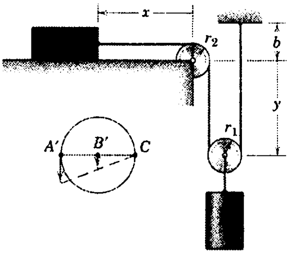


شکل مسئله ۲-۲۰۶

۹-۲ حرکت مقید ذرات متصل به هم

مواردی وجود دارد که حرکت ذرات توسط قیدهایی که آنها را به یکدیگر متصل می‌سازد به هم وابسته گشته و برای تعیین حرکتهای مربوطه به آنها باید این قیدها را به حساب آوریم.

یک درجه آزادی



شکل ۱۹-۲

ابتدا یک سیستم ساده که دو ذره A و B را به هم مرتبط ساخته مطابق شکل ۱۹-۲ در نظر می‌گیریم. اگرچه با کمی دقت، به سرعت مشخص می‌شود که حرکت افقی A دو برابر حرکت عمودی B می‌باشد، اما از این مثال ساده استفاده خواهیم کرد تا روش تحلیلی را نشان دهیم که در مورد مسائل پیچیده‌تر استفاده خواهد شد، یعنی در جایی که نمی‌توان به سادگی نتایج را با یک نگاه پیش‌بینی کرد. واضح است که حرکت B، مانند حرکت مرکز قرقره آن می‌باشد. بنابراین مختصات موقعیت x و y را نسبت به مرجع ثابت مناسبی اندازه می‌گیریم. طول کل کابل برابر است با:

$$L = x + \frac{\pi r_2}{2} + 2y + \pi r_1 + b$$

که در آن L، r_2، r_1 و b همگی ثابت هستند. مشتق‌های اول و دوم این رابطه نسبت به زمان عبارتند از:

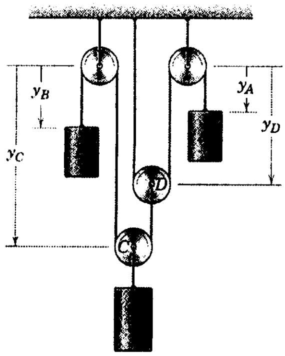
$$0 = \dot{x} + 2\dot{y} \quad \text{یا} \quad 0 = v_A + 2v_B$$

$$0 = \ddot{x} + 2\ddot{y} \quad \text{یا} \quad 0 = a_A + 2a_B$$

از روی معادلات سرعت و شتاب، برای مختصات انتخابی، باید علامت سرعت A مخالف سرعت B باشد و به همین شکل برای شتابها. معادلات مقید سیستم فوق برای هر جهتی دارای اعتبار است. تصریح می‌کنیم که $v_A = \dot{x}$ به سمت چپ مثبت بوده و $v_B = \dot{y}$ به سمت پایین مثبت می‌باشد.

از آنجایی که نتایج به طول کابل یا شعاع قرقره‌ها بستگی ندارند، باید بتوانیم حرکت ذرات را بدون در نظر گرفتن آنها تجزیه و تحلیل نماییم. در قسمت پایین و سمت چپ شکل ۱۹-۲، نمای بزرگ شده قطر افقی $A'B'C$ قرقره پایینی در یک لحظه نشان داده شده است. واضح است مقدار حرکت A و A' یکسان می‌باشد؛ همانطور که حرکت B و B'. به سادگی می‌توان دید که طی جابجایی جزئی A، جابجایی B' *نصف* آن خواهد بود. زیرا نقطه C روی کابل ثابت واقع شده که به طور لحظه‌ای حرکتی ندارد. بنابراین، با مشتق‌گیری ذهنی نسبت به زمان، رابطه‌های سرعت و شتاب را می‌توان از حفظ نوشت. در حقیقت قرقره، چرخی است که روی یک کابل ثابت عمودی می‌غلتد (سینماتیک چرخ‌های غلتشی بطور کامل در فصل ۵، حرکت اجسام صلب، مورد بررسی قرار خواهد گرفت). سیستم شکل ۱۹-۲ را یک *درجه آزادی* می‌نامند. زیرا فقط یک متغیر x یا y برای مشخص کردن موقعیت تمام قسمتهای سیستم، مورد نیاز است.

دو درجه آزادی



شکل ۲۰-۲

سیستم با *دو درجه آزادی* در شکل ۲۰-۲ نشان داده شده است. در این شکل موقعیت استوانه پایینی و قرقرهC به دو مختص y_A و y_B به طور جداگانه بستگی دارد. طول کابلهای متصل به استوانه‌های A و B را می‌توان به ترتیب به صورت زیر نوشت:

$$L_A = y_A + 2y_D + \text{مقدار ثابت}$$

$$L_B = y_B + y_C + (y_C - y_D) + \text{مقدار ثابت}$$

و مشتق‌های آنها نسبت به زمان برابرند با:

$$0 = \dot{y}_A + 2\dot{y}_D \quad , \quad 0 = \dot{y}_B + 2\dot{y}_C - \dot{y}_D$$

$$0 = \ddot{y}_A + 2\ddot{y}_D \quad , \quad 0 = \ddot{y}_B + 2\ddot{y}_C - \ddot{y}_D$$

با حذف جمله‌های $\dot{y}_D$ و $\ddot{y}_D$ خواهیم داشت:

$$\dot{y}_A + 2\dot{y}_B + 4\dot{y}_C = 0 \quad \text{یا} \quad v_A + 2v_B + 4v_C = 0$$

$$\ddot{y}_A + 2\ddot{y}_B + 4\ddot{y}_C = 0 \quad \text{یا} \quad a_A + 2a_B + 4a_C = 0$$

واضح است که علامت هر سه جمله نمی‌تواند همزمان مثبت باشد. بنابراین، برای مثال، اگر A و B هر دو دارای سرعتهایی به طرف پایین (مثبت) باشند، آنگاه C دارای سرعت رو به بالا (منفی) خواهد بود.

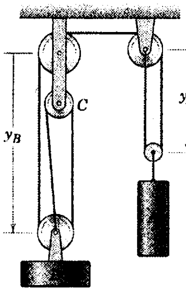
با بررسی حرکت دو قرقره C و D نیز می‌توان این نتایج را بدست آورد. به خاطر ازدیاد dy_A (با ثابت نگه داشتن y_B)، مرکز D به اندازه $dy_A/۲$ به طرف بالا حرکت می‌کند و باعث حرکت مرکز C به اندازه $dy_A/٤$ می‌گردد و یک افزایش dy_B (با ثابت نگه داشتن y_B)، مرکز C را به اندازه $dy_B/۲$ به سوی بالا حرکت می‌دهد. ترکیب این دو حرکت، موجب حرکت رو به بالای

$$-dy_C = \frac{dy_A}{4} + \frac{dy_B}{2}$$

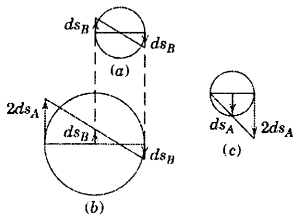
می‌گردد که مانند قبل نتیجه می‌شود $-v_C = \frac{v_A}{4} + \frac{v_B}{2}$. تجسم هندسی واقعی حرکت حائز اهمیت است.

نوع دوم قید، که در آن امتداد عضو رابط با حرکت تغییر می‌کند، در دومین مسئله نمونه تشریح شده است.

مسئله نمونه ۱۴-۲



در مجموعه قرقره‌های نشان داده شده، استوانه A دارای سرعت ۰/۳ m/s به طرف پایین می‌باشد. سرعت B را تعیین نمایید. مسئله را از دو راه، حل کنید.



حل (I) مرکز قرقره‌های A و B با مختصات y_A و y_B مشخص می‌گردند، که از موقعیت ثابتی اندازه گیری می‌شوند. مجموع طول ثابت کابل در سیستم قرقره‌ها برابر است با:

$$L = 3y_B + 2y_A + \text{مقادیر ثابت}$$

❶ که در آن مقادیر ثابت شامل طولهای ثابت کابل در تماس با محیط قرقره‌ها و همچنین فاصله عمودی ثابت بین دو قرقره سمت چپ بالایی می‌باشند. با مشتق‌گیری نسبت به زمان نتیجه می‌گیریم:

$$0 = 3\dot{y}_B + 2\dot{y}_A$$

با قرار دادن $\upsilon_A = \dot{y}_A =$ ۰/۳ m/s و $\upsilon_B = \dot{y}_B$ در رابطه اخیر داریم:

جواب $$0 = 3\,(\upsilon_B) + 2\,(0.3) \quad \text{یا} \quad \upsilon_B = -0.2 \text{ m/s}$$

حل (II) نمودار بزرگ شده قرقره‌های A، B و C در شکل فوق نشان داده شده‌اند. در حین حرکت جزئی ds_A از مرکز قرقره A، انتهای سمت چپ قطر افقی حرکتی ندارد، چون به قسمت ثابت کابل متصل شده است. بنابراین، انتهای سمت راست، مطابق شکل حرکتی برابر با ۲ds_A دارد. این حرکت به انتهای سمت چپ قطر افقی قرقره B انتقال می‌یابد. به علاوه چون مرکز قرقره C ثابت است، دیده می‌شود که جابجایی دو طرف آن مساوی ولی در جهت‌های مخالف می‌باشد. بنابراین، در قرقره B، انتهای سمت راست قطر آن جابجایی رو به پایین برابر جابجایی رو به بالای ds_B مرکز آن دارد. با بررسی هندسه شکل، نتیجه می‌گیریم که:

❷ $$2ds_A = 3ds_B \quad \text{یا} \quad ds_B = \frac{2}{3}ds_A$$

با تقسیم بر dt داریم:

جواب $$|\upsilon_B| = \frac{2}{3}\upsilon_A = \frac{2}{3}(0.3) = 0.2 \text{ m/s (به طرف بالا)}$$

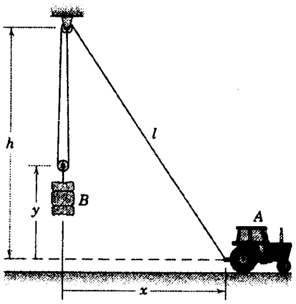
نکات مفید

❶ *از زاویه‌ای بودن ناچیز کابل، بین B و C صرفنظر می‌کنیم.*

❷ *علامت منفی نشان می‌دهد که سرعت B به طرف بالا می‌باشد.*

مسئله نمونه ۱۵-۲

از تراکتور A برای بلند کردن بار به کمک مجموعه قرقره نشان داده شده در شکل استفاده می‌گردد. اگر A دارای سرعت رو به جلوی v_A باشد، عبارتی برای v_B ، سرعت رو به بالای بار برحسب x تعیین کنید.



حل: موقعیت تراکتور را با مختص x و موقعیت بار را با مختص y ، نسبت به یک مرجع ثابت، مشخص می‌نماییم. مجموع طول ثابت کابل برابر است با:

$$L = 2(h-y) + l = 2(h-y) + \sqrt{h^2 + x^2}$$

❶ مشتق گیری نسبت به زمان نتیجه می‌دهد:

$$0 = -2\dot{y} + \frac{x\dot{x}}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$

با قرار دادن $v_A = \dot{x}$ و $v_B = \dot{y}$ داریم:

$$v_B = \frac{1}{2}\frac{xv_A}{\sqrt{h^2 + x^2}}$$ جواب

نکته مفید

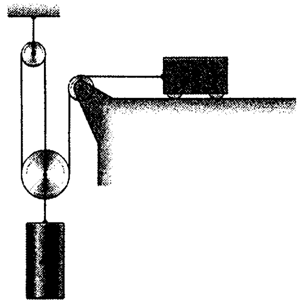
❶ *در مکانیک، مشتق‌گیری از رابطه مثلث قائم‌الزاویه اغلب اتفاق می‌افتد.*

مسائل

مسائل مقدماتی

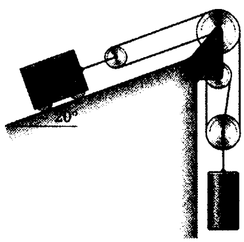
۲-۲۰۷ اگر قطعه B دارای سرعت ۱/۲ m/s به طرف چپ باشد، سرعت استوانه A را تعیین کنید.

جواب v_A = ۰/٤ m/s به طرف پایین



شکل مسئله ۲۰۷-۲

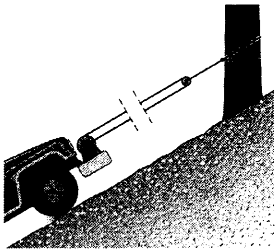
۲-۲۰۸ استوانه B دارای سرعت ۰/٦ m/s به طرف پایین بوده و شتابش برابر ۰/۱۵ m/s^2 به طرف بالا می‌باشد. سرعت و شتاب قطعه A را محاسبه نمایید.



شکل مسئله ۲۰۸-۲

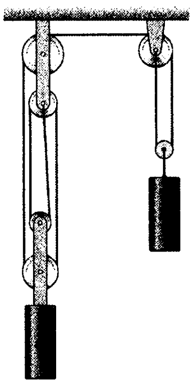
۲-۲۰۹ کامیونی که در جلوی خود مجهز به وینچ پر قدرتی است، با استفاده از مجموعه قرقره و کابل، مطابق شکل خود را از شیب تندی به طرف بالا می‌کشد. اگر کابل با سرعت ثابت ٤۰ mm/s به دور طبلک پیچیده شود، چه مدت طول می‌کشد تا کامیون ٤ m خود را روی شیب، بالا براند؟

جواب t = ۳ min ۲۰ s



شکل مسئله ۲۰۹-۲

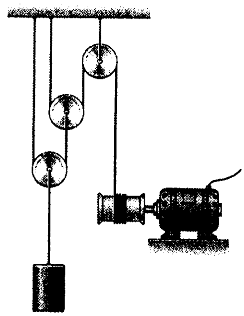
۲-۲۱۰ استوانه B دارای سرعت رو به پایینی به صورت $v_B = t^2/2 + t^3/6$ بر حسب متر بر ثانیه می‌باشد که در آن t بر حسب ثانیه است. شتاب A را در لحظه t = ۲s حساب کنید.



شکل مسئله ۲۱۰-۲

۲-۲۱۱ اگر طبلک، کابل را با سرعت ثابت ۳۲۰ mm/s به دور خود بپیچاند، مقدار بالا رفتن h بار W را در طی مدت ۵ ثانیه تعیین کنید.

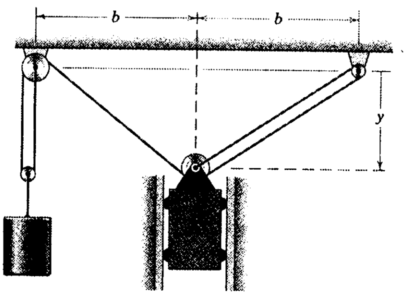
جواب h = ٤۰۰ mm



شکل مسئله ۲-۲۱۱

مسائل ویژه

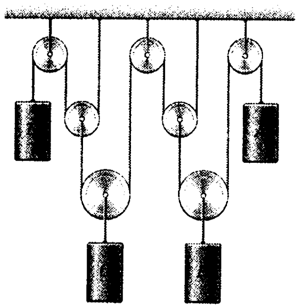
۲-۲۱۲ با صرفنظر کردن از قطر چرخهای کوچک، رابطه بین سرعت A و سرعت B به ازای مقدار معلوم y بیابید.



شکل مسئله ۲-۲۱۲

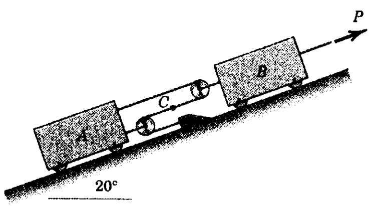
۲-۲۱۳ رابطه‌ای که سرعت چهار استوانه را به هم مرتبط می‌کند، تعیین کنید. سرعت‌ها را رو به پایین مثبت فرض کنید. چند درجه آزادی وجود دارد؟

جواب سه درجه آزادی $4v_A + 8v_B + 4v_C + v_D = 0$



شکل مسئله ۲-۲۱۳

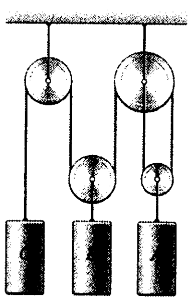
۲-۲۱٤ تحت تاثیر نیروی P، شتاب ثابت قطعه B به سمت بالای شیب، ۲ m/s^2 می‌باشد. در لحظه‌ای که سرعت B برابر ۱/۲ m/s به طرف بالای شیب می‌باشد، سرعت B نسبت به A، شتاب B نسبت به A و سرعت مطلق نقطه C کابل را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲-۲۱۴

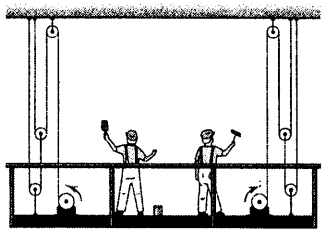
۲-۲۱۵ رابطه‌ای حاکم بر شتاب‌های A، B و C که همگی به طرف پایین مثبت در نظر گرفته شده‌اند، بیابید. تعداد درجات آزادی را نیز تعیین نمایید.

جواب ۲ درجه آزادی $2a_A + 2a_B + a_C = 0$



شکل مسئله ۲-۲۱۵

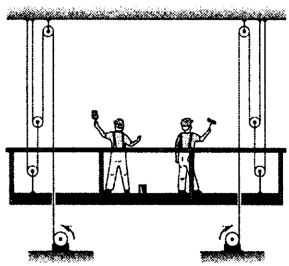
۲-۲۱۶ وینچ‌های قدرت یک داربست متحرک قادر هستند آنرا به بالا و پایین ببرند. با چرخش در جهت‌های نشان داده شده، داربست بالا می‌رود. اگر هر کدام از طبلکها دارای قطر ۲۰۰ mm بوده، با میزان ۴۰ rev/min دوران نماید، v سرعت بالا رفتن داربست متحرک را تعیین کنید.



شکل مسئله ۲-۲۱۶

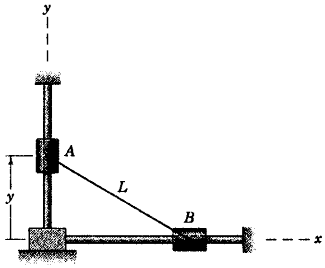
۲-۲۱۷ داربست متحرک مسئله ۲-۲۱۶ در اینجا با قرار دادن وینچ‌های قدرت روی زمین و خارج از داربست تغییر داده می‌شود. بقیه شرایط به همان شکل باقی می‌ماند. v سرعت بالا رفتن داربست متحرک را محاسبه کنید.

جواب $v = ۱۰۴/۷$ mm/s



شکل مسئله ۲-۲۱۷

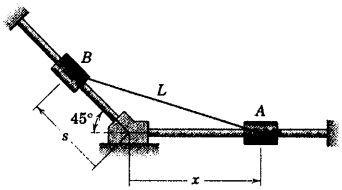
۲-۲۱۸ غلافهای A و B در امتداد میله‌های ثابت قائم‌الزاویه‌ای می‌لغزند و توسط ریسمانی به طول L به یکدیگر متصل گردیده‌اند. شتاب a_x غلاف B را به صورت تابعی از y، در صورتیکه v_y سرعت بالا رفتن غلاف A ثابت باشد، بدست آورید.



شکل مسئله ۲-۲۱۸

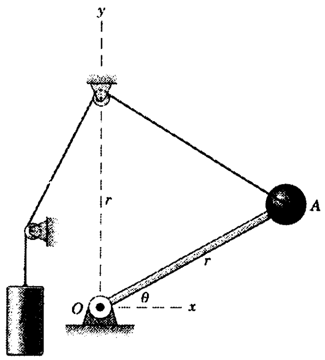
۲-۲۱۹ غلافهای A و B در امتداد میله‌های ثابت می‌لغزند و توسط ریسمانی به طول L به یکدیگر متصل گردیده‌اند. اگر لغزنده A دارای سرعت $v_A = \dot{x}$ به سمت راست باشد، سرعت B، $v_B = -\dot{s}$ را بر حسب x، v_A و s بیان کنید.

جواب $$v_B = \frac{s + \sqrt{۲}\,x}{x + \sqrt{۲}\,s} v_A$$



شکل مسئله ۲-۲۱۹

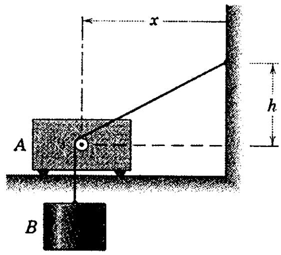
۲-۲۲۰ ذره A بر روی میله سبکی که در O لولا شده سوار است و بنابراین مقید به حرکت روی قوس دایره‌ای شکل به شعاع r می‌باشد. سرعت A را بر حسب سرعت به طرف پایین v_B وزنه به ازای هر مقدار زاویه θ تعیین کنید.



شکل مسئله ۲-۲۲۰

۲-۲۲۱ ◀ با صرفنظر کردن از قطر قرقره کوچک متصل به جسم A، مقدار سرعت کل B را بر حسب سرعت v_A که جسم A به طرف راست دارد، تعیین کنید. فرض کنید کابل بین B و قرقره به صورت عمودی باقی می‌ماند و به ازای x معلوم، مسئله را حل کنید.

جواب $v_B = v_A\sqrt{\dfrac{2x^2 + h^2}{x^2 + h^2}}$

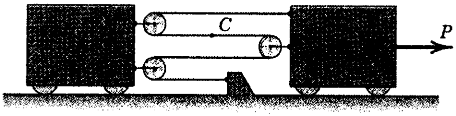


شکل مسئله ۲-۲۲۱

۲-۲۲۲ ◀ بر اثر نیروی P، شتاب قطعه B به طرف راست برابر $3\ m/s^2$ می‌باشد. در لحظه‌ای که سرعت B برابر $2\ m/s$ به طرف راست می‌باشد، سرعت B نسبت به A، شتاب B نسبت به A و سرعت مطلق C واقع بر کابل را تعیین کنید.

جواب $v_{B/A} = 0/5\ m/s$ و $a_{B/A} = 0/75\ m/s^2$

$v_C = 1\ m/s$ همه به سمت راست



شکل مسئله ۲-۲۲۲

دوره فصل

در فصل ۲ تئوری بنیادینی را جهت توصیف حرکت یک ذره طرح و تشریح کردیم. مفاهیم و روشهای طرح و تشریح شده در این فصل، پایه‌ای برای بنای بخش بزرگی از موضوع کلی دینامیک را تشکیل می‌دهند و حائز اهمیت است، قبل از پرداختن به فصل‌های بعدی مروری بر مطالب این فصل صورت پذیرد.

البته مهمترین مبحث فصل ۲ مشتق زمانی بردار می‌باشد. مشتق زمانی یک بردار هم بستگی به تغییرات امتداد دارد و هم به تغییرات مقدار. در ادامه مطالعه دینامیک، موارد دیگری پیش خواهد آمد که مشتق‌های زمانی بردارهایی به جز بردارهای موقعیت و سرعت مورد بررسی قرار گیرند که در آنجا اصول و روش شرح داده شده در فصل ۲ مستقیماً مورد استفاده قرار خواهند گرفت.

گروه بندی حرکت

در این فصل سه نوع گروه بندی حرکتی صورت گرفت که عبارتند از:

۱- حرکت مستقیم الخط (یک بعدی)

۲- حرکت منحنی الخط در صفحه (دو بعدی)

۳- حرکت منحنی الخط در فضا (سه بعدی)

معمولاً هندسه مسئله داده شده، تشخیص نوع حرکت را میسر می‌سازد. مورد استثنا، موقعی است که فقط مقادیر کمیتهای حرکتی اندازه گیری شده در امتداد مسیر مورد توجه می‌باشند. در این صورت، از یک مختص که فاصله از مسیر منحنی می‌باشد، استفاده نموده و با مشتق‌گیری نسبت به زمان به صورت اسکالر، مقدار سرعت $|\dot{s}|$ و شتاب مماسی $\ddot{s}$ بدست می‌آیند.

حرکت در صفحه، به ویژه در ماشین آلات، ساده‌تر از حرکت فضایی ایجاد و کنترل می‌شود. به همین دلیل درصد زیادی مسائل حرکتی در دو گروه حرکت منحنی الخط در صفحه و حرکت مستقیم الخط مطرح می‌گردند.

استفاده از محورهای ثابت

معمولاً اندازه‌گیری حرکتی را نسبت به محورهای مرجع ثابت (حرکت مطلق) و محورهای متحرک (حرکت نسبی) انجام می‌دهیم. انتخاب مناسب محورهای ثابت، بستگی به مسئله دارد. برای بیشتر مسائل مهندسی، محورهای متصل به سطح زمین ثابت در نظر گرفته می‌شود مگر در موارد استثناء. مانند حرکت ماهواره‌های زمینی و حرکت بین سیاره‌ای، مسیرهای دقیق پرتابه‌ها، ناوبری و مسائلی از این نظیر. روابط حرکت نسبی توصیف شده در فصل ۲ به محورهای مرجع انتقالی محدود می‌شوند.

انتخاب مختصات

انتخاب مختصات مهمترین کار و در اولویت می‌باشد. تشریح حرکت را با استفاده از مختصات زیر توسعه دادیم:

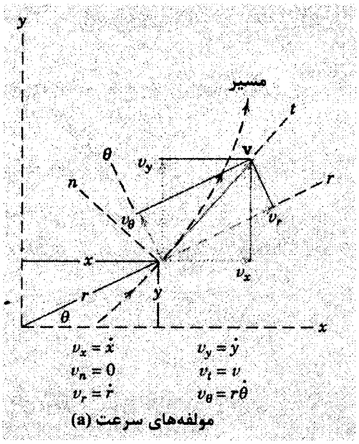
۱- مختصات قائم (کارتزین) $(x\text{-}y)$ و $(x\text{-}y\text{-}z)$

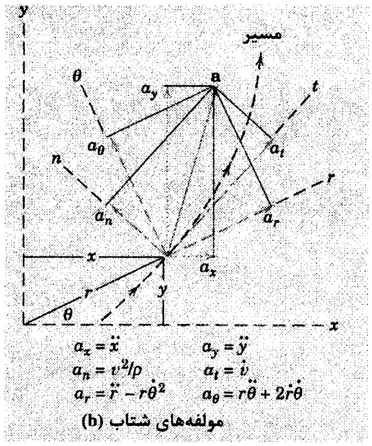
۲- مختصات عمودی و مماسی $(n\text{-}t)$

۳- مختصات قطبی $(r\text{-}\theta)$

٤- مختصات استوانه‌ای $(r\text{-}\theta\text{-}z)$

۵- مختصات کروی (R-θ-ϕ)





شکل ۲۱-۲

وقتی نوع مختصات مشخص نشده باشد، انتخاب آن به نوع حرکت ایجاد شده یا اندازه گیری شده بستگی پیدا می‌کند. بنابراین، ذره‌ای که در امتداد میله‌ای دوار می‌لغزد، مختصات قطبی طبیعی‌ترین مختصات مورد استفاده است. ردیابی رادار مختصات قطبی یا کروی را می‌طلبد. در هنگام اندازه گیری در امتداد مسیری منحنی، مختصات عمودی و مماسی لازم می‌شود. رسام (پلاتر) x-y به روشی از مختصات کارتزین استفاده می‌کند.

شکل ۲۱-۲ نشان دهنده ترکیبی از مختصات x-y، n-t و r-θ می‌باشد که سرعت **v** و شتاب **a** در حرکت منحنی الخط را توصیف می‌کند. گاهی ضروری است که حرکت توصیف شده از یک مختصات به مختصات دیگر تبدیل شود و شکل ۲۱-۲ اطلاعات لازم برای این انتقال را در اختیار می‌گذارد.

تقریب‌ها

یکی از مهمترین مهارتهایی که بایستی بدست آورد، استفاده از تقریب‌های مناسب است. فرض ثابت بودن شتاب هنگامی معتبر است که نیرویی که موجب این شتاب شده، تغییرات محسوسی ننماید. هنگامی که داده‌های حرکت به صورت تجربی بدست می‌آیند، باید از داده‌های غیر دقیق بهترین توصیف ممکن را کسب نماییم که این کار اغلب به کمک تقریب‌های ترسیمی و عددی صورت می‌گیرد.

انتخاب روش ریاضی

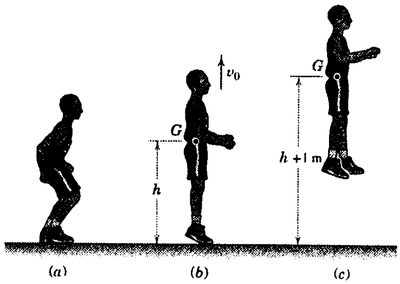
معمولا این انتخاب وجود دارد که مسئله را با استفاده از جبر اسکالر، جبر برداری، هندسه مثلثاتی یا هندسه ترسیمی حل نماییم. تمام این روشها نشان داده شده‌اند و یادگیری آنها مهم است. انتخاب روش، به هندسه مسئله، چگونگی ارائه داده‌های حرکت و دقت مورد نظر بستگی خواهد داشت. از آنجا که مکانیک ماهیتی هندسی دارد، شما را تشویق می‌کنیم که در رسم رابطه‌های برداری مهارت خود را افزایش دهید تا هم به عنوان کمک به آشکار سازی رابطه‌های مناسب هندسی و مثلثاتی و هم به عنوان روشی برای حل ترسیمی رابطه‌های برداری، از آن استفاده نمایید. نمایش هندسی، سر راست‌ترین راه ارائه اغلب مسائل مکانیکی می‌باشد.

مسائل دوره‌ای

۲-۲۲۳ موقعیت s ذره، در امتداد یک خط مستقیم توسط رابطه $s = 8e^{-0.4t} - 6t + t^2$ داده شده که در آن s بر حسب متر و t بر حسب ثانیه می‌باشد. سرعت v را موقعی که شتاب برابر $3\ m/s^2$ می‌باشد، تعیین کنید.

جواب $v = -7.27\ m/s$

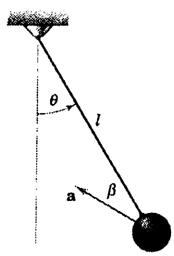
۲-۲۲۴ در یک آزمایش توانایی پرش قائم، بسکتبالیست (a) درست قبل از پرش، خم می‌گردد؛ (b) در لحظه جدا شدن پاهایش از زمین به مرکز جرم G خود سرعت قائم v_0 را می‌دهد؛ (c) به حداکثر ارتفاع می‌رسد. اگر بازیکن، بتواند مرکز جرم خود را مطابق شکل ۱ متر بالا ببرد، سرعت اولیه v_0 مرکز جرمش را در موقعیت (b) بدست آورید.



شکل مسئله ۲-۲۲۴

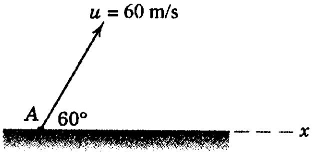
۲-۲۲۵ شتاب کل $\mathbf{a}$ یک آونگ ساده مطابق شکل با سیم معلق خود که در موقعیت زاویه‌ای θ آویزان است، زاویه β را می‌سازد. روابطی برای مقادیر متناظر $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ بنویسید.

جواب $\dot{\theta} = \pm\sqrt{\frac{a}{l}\cos\beta}\ ,\ \ddot{\theta} = -\frac{a}{l}\sin\beta$



شکل مسئله ۲-۲۲۵

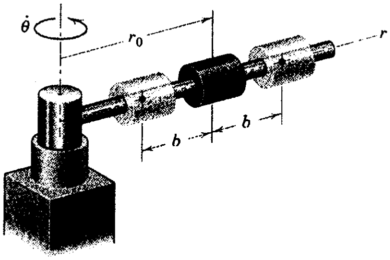
۲-۲۲۶ در زمان $t = 0$ توپ کوچکی از نقطه A با سرعت ۶۰ m/s تحت زاویه °۶۰ پرتاب می‌گردد. با صرفنظر کردن از مقاومت هوا، موقعی که سرعت توپ زاویه °۴۵ را با محور افقی x می‌سازد، دو زمان t_1 و t_2 را حساب کنید.



شکل مسئله ۲-۲۲۶

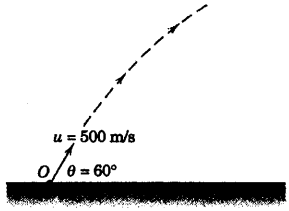
۲-۲۲۷ استوانه کوچکی در امتداد میله دوار دارای حرکتی بین دو موقعیت $r = r_0 + b$ و $r = r_0 - b$ است که توسط رابطه $r = r_0 + b\sin 2\pi t/\tau$ بیان می‌شود که در آن t زمان اندازه گیری شده از لحظه‌ای است که استوانه از $r = r_0$ عبور می‌کند و τ پریود نوسان (زمان یک نوسان کامل) می‌باشد. همزمان، میله با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}$ حول محور قائم در دوران است. مقدار r را موقعی که شتاب شعاعی (در امتداد r) صفر است، تعیین کنید.

جواب $r = r_0 \dfrac{1}{1+\left(\dfrac{\tau\dot{\theta}}{2\pi}\right)^2}$



شکل مسئله ۲-۲۲۷

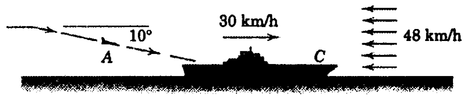
۲-۲۲۸ پرتابه کوچکی از نقطه O با سرعت اولیه $u = ۵۰۰$ m/s تحت زاویه ۶۰° نسبت به زمین، مطابق شکل شلیک می‌گردد. از مقاومت جو و تغییرات g صرفنظر نموده، شعاع انحنای ρ مسیر را ۳۰ s پس از شلیک محاسبه نمایید.



شکل مسئله ۲-۲۲۸

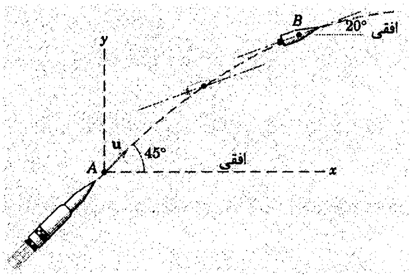
۲-۲۲۹ در بخشی از یک تمرین آموزشی، خلبان هواپیمای A سرعت پروازش (سرعت نسبت به باد) را ۲۲۰ km/h تنظیم نموده و به طرف عرشه یک ناو هواپیمابر نزدیک می‌گردد و سپس سرعت مطلقش را ثابت نگه داشته و تحت زاویه ۱۰° مسیر را بدون نیروی موتور طی می‌کند. سرعت مطلق ناو هواپیمابر ۳۰ km/h و سرعت باد ۴۸ km/h می‌باشد. β زاویه فرود هواپیما نسبت به افق، از دید ناظری که روی عرشه قرار گرفته، چقدر خواهد بود.

جواب $\beta = ۱۲/۰۹°$



شکل مسئله ۲-۲۲۹

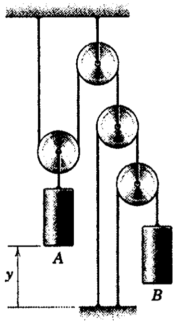
۲-۲۳۰ طبقه سوم یک موشک در نقطه A توسط موتور کمکی، با سرعت ۱۵۰۰۰ km/h به جلو رانده شده و پس از آن با موتور خاموش تا نقطه B پیش می‌رود. در نقطه B که مسیر موشک با افق زاویه ۲۰° می‌سازد، موتور آن روشن می‌گردد. تمام این عملیات در بالای جو صورت می‌گیرد و شتاب ثقل در این مدت دارای مقدار ثابت ۹ m/s^2 با امتداد ثابت می‌باشد. زمان لازم جهت پیمودن مسیر A به B را تعیین کنید (این کمیت در طراحی سیستم کنترل روشن کننده مورد نیاز است). همچنین افزایش ارتفاع h را در این بازه زمانی حساب کنید.



شکل مسئله ۲-۲۳۰

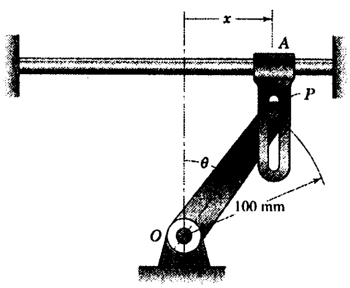
۲-۲۳۱ جابجایی قائم استوانه A بر حسب متر با رابطه $y = t^2/4$ بیان می‌شود که در آن t بر حسب ثانیه است. شتاب به طرف پایین a_B استوانه B را محاسبه کنید. تعداد درجات آزادی را مشخص کنید.

جواب یک درجه آزادی $a_B = ۴$ m/s^2



شکل مسئله ۲-۲۳۱

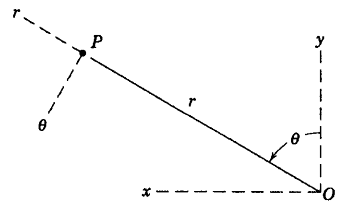
۲-۲۳۲ چرخش بازوی PO توسط حرکت افقی بازوی شیاردار عمودی کنترل می‌گردد. اگر در $x = ۵۰$ mm، $\dot{x} = ۱/۲$ m/s و $\ddot{x} = ۹$ m/s^2 باشد، $\dot{\theta}$ و $\ddot{\theta}$ را در این لحظه تعیین کنید.



شکل مسئله ۲-۲۳۲

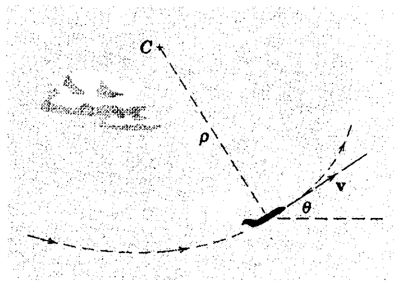
۲-۲۳۳ ذره P که دارای حرکت منحنی الخط در صفحه می‌باشد، توسط مختصات قطبی نشان داده شده مشخص شده است. در لحظه خاص $r = ۲$ m، $\theta = ۶۰°$، $v_r = ۳$ m/s، $v_\theta = ٤$ m/s، $a_r = -۱۰$ m/s^2 و $a_\theta = -۵$ m/s^2 می‌باشد. در این لحظه ρ شعاع انحنای مسیر ذره را محاسبه کنید. همچنین مرکز انحنای C را به طور ترسیمی مشخص کنید.

جواب $\rho = ۵$ m و $(x_c , y_c) = (-۰/۲۳$ و $-۳/۶۰)$ m



شکل مسئله ۲-۲۳۳

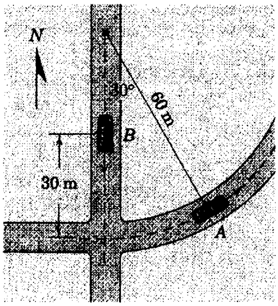
۲-۲۳٤ یک هواپیمای جت در یک مسیر منحنی قائم، مطابق شکل، به طرف بالا پرواز می‌کند. وقتی که از موقعیت $\theta = ۳۰°$ می‌گذرد، سرعتش ۱۰۰۰ km/h بوده و با میزان ۱۵ km/h در هر ثانیه کاهش می‌یابد. اگر شعاع انحنای مسیر پرواز در این موقعیت ρ برابر ۱/۵ km باشد، مولفه‌های عمودی و افقی شتاب هواپیما، $\ddot{x}$ و $\ddot{y}$ را محاسبه نمایید.



شکل مسئله ۲-۲۳۴

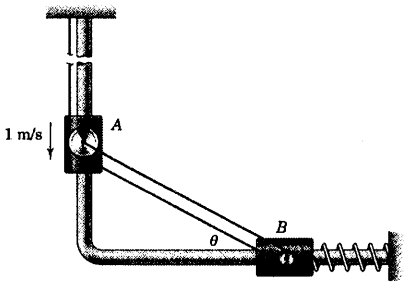
۲-۲۳۵ اتومبیل A با سرعت ثابت ۵۰ km/h جاده‌ای به شعاع انحنای ۶۰ m را دور می‌زند. هنگامیکه A در موقعیت نشان داده شده قرار دارد، فاصله اتومبیل B تا تقاطع ۳۰ m بوده و با شتاب ۱/۵ m/s^2 به سمت جنوب در حرکت می‌باشد. در لحظه مزبور شتاب A را از دید سرنشین B بدست آورید.

جواب $a_{A/B} = ٤/۵۸$ m/s^2 و $\beta = ۲۰/۶°$ شمال غربی



شکل مسئله ۲-۲۳۵

۲-۲۳۶ استوانه A دارای سرعت ثابت ۱ m/s به طرف پایین می‌باشد. سرعت استوانه B را برای (الف) $\theta = ٤۵°$، (ب) $\theta = ۳۰°$ و (ج) $\theta = ۱۵°$ محاسبه کنید. فنر در حین حرکت مورد نظر تحت فشار می‌باشد و قرقره‌ها نیز توسط کابلی به طول ثابت به هم متصل شده‌اند.



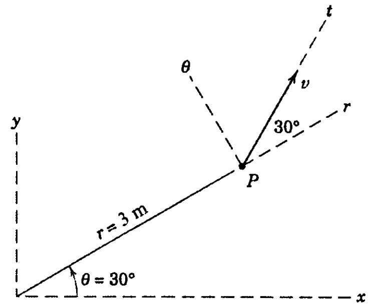
شکل مسئله ۲-۲۳۶

۲-۲۳۷ برای لحظه مشخص شده در شکل، ذره P دارای سرعت $v = ٦\ m/s$ در جهت نشان داده شده و مولفه‌های شتاب $a_x = ۱۵\ m/s^2$ و $a_\theta = -۱۵\ m/s^2$ می‌باشد. مطلوبست محاسبه a_r، a_y، a_t و a_n و شعاع انحنای ρ مسیر را در این موقعیت.

(توجه: مولفه‌های شتاب مربوطه کل ذره را رسم کرده و از هندسه ساده شده آن برای محاسبه استفاده نمایید)

جواب $a_r = ۵\sqrt{۳}\ m/s^2$ و $a_y = -۵\sqrt{۳}\ m/s^2$

$a_t = ۰$ و $a_n = ۱۰\sqrt{۳}\ m/s^2$ و $\rho = \frac{۶\sqrt{۳}}{۵}\ m$



شکل مسئله ۲-۲۳۷

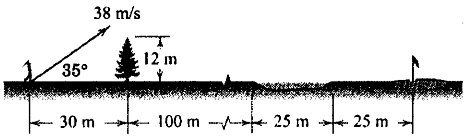
۲-۲۳۸ ذره‌ای دارای مولفه‌های موقعیت، سرعت و شتاب: $x = ۵۰\ m$، $y = ۲۵\ m$، $\dot{x} = -۱۰\ m/s$، $\dot{y} = ۱۰\ m/s$، $\ddot{x} = -۱۰\ m/s^2$ و $\ddot{y} = ۵\ m/s^2$ می‌باشد. مقادیر زیر را بدست آورید.

v , a , $\mathbf{e}_t$, $\mathbf{e}_n$, a_t , $\mathbf{a}_t$, a_n , $\mathbf{a}_n$, ρ , $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\theta$, v_r , $\mathbf{v}_r$, v_θ , $\mathbf{v}_\theta$, a_r , $\mathbf{a}_r$, a_θ , $\mathbf{a}_\theta$, r , $\dot{r}$, $\ddot{r}$, θ , $\dot{\theta}$, $\ddot{\theta}$.

کلیه بردارها را بر حسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بیان کرده و شکل بردارهای آنها را روی مختصات x-y به ترتیب بدست آوردنشان ترسیم کنید.

۲-۲۳۹ توپ گلفی بلافاصله پس از ضربهٔ چوب گلف، مطابق شکل دارای سرعت ۳۸ m/s نسبت به افق می‌گردد. موقعیت نقطه سقوط توپ را تعیین کنید.

جواب $R = ۱۳۸/۳\ m$

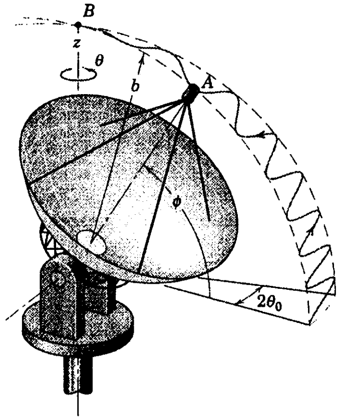


شکل مسئله ۲-۲۳۹

۲-۲۴۰ ◀ آنتن یک رادار ردیاب، حول محور قائم طبق رابطه $\theta = \theta_۰ \cos\omega t$ نوسان می‌کند که در آن ω فرکانس زاویه‌ای ثابت و $۲\theta_۰$ دو برابر دامنه نوسان می‌باشد. همزمان، زاویه ϕ با میزان ثابت $\dot{\phi} = K$ افزایش می‌یابد. عبارتی برای اندازه شتاب نوک شیپوره آنتن تعیین کنید: (الف) به هنگام گذشتن از A (ب) به هنگام عبور از نقطه اوج B، با فرض اینکه در این لحظه $\theta = ۰$ می‌باشد.

جواب (الف) $a = b\sqrt{K^۴ + \omega^۴\theta_۰^۲ \cos^۲\phi}$

(ب) $a = bK\sqrt{K^۲ + ۴\omega^۲\theta_۰^۲}$



شکل مسئله ۲-۲۴۰

* مسائل کامپیوتری

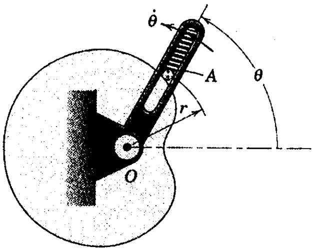
***۲-۲۴۱** دو ذره A و B از موقعیت $x = 0$ از حالت سکون در امتداد مسیرهای موازی به صورت زیر شروع به حرکت می‌نمایند. $x_A = 0/16 \sin \pi t / 2$ و $x_B = 0/08t$ که در آنها x_A و x_B بر حسب متر و t زمان اندازه گیری شده از شروع حرکت بر حسب ثانیه می‌باشد. زمان t را $(t > 0)$ موقعی که دو ذره دارای جابجایی مساوی هستند، تعیین کنید و همچنین این جابجایی x را محاسبه کنید.

جواب $t = 1/473$ s و $x = 0/1178$ m

***۲-۲۴۲** یک توپ بیسبال از ارتفاع $h = 60$ m پایین می‌افتد و به هنگام برخورد با زمین دارای سرعت 26 m/s می‌گردد. علاوه بر شتاب جاذبه که می‌توان آنرا ثابت در نظر گرفت، مقاومت هوا نیز باعث مولفه شتاب کند شونده‌ای به مقدار kv^2 می‌گردد که در آن v سرعت توپ و k مقدار ثابت است. مقدار ضریب k را تعیین کنید. سرعت توپ را بر حسب تابعی از ارتفاع y رسم کنید. اگر توپ از ارتفاعی بالاتر سقوط می کرد و g باز ثابت فرض می‌شد، سرعت حدی v_t توپ چقدر بود؟ (سرعت حدی، سرعتی است که به ازای آن شتاب جاذبه با شتاب کند شونده ناشی از نیروی مقاومت هوا یکسان و مخالف جهت هم می‌شوند به طوری که توپ با سرعت ثابت سقوط خواهد نمود) اگر توپ از ارتفاع $h = 60$ m سقوط می‌کرد و از مقاومت هوا صرفنظر می‌شد، سرعت v' برخورد توپ با زمین چه مقدار می‌شد؟

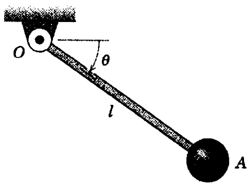
***۲-۲۴۳** بادامک ثابت نشان داده شده به شکلی است که مرکز پیرو غلتکی A منحنی لیماسون $r = b - c\cos\theta$ را طی می‌کند؛ در حالیکه $b > c$ است. اگر $b = 100$ mm و $c = 50$ mm و بازوی شیاردار با میزان ثابت $\dot{\theta} = 2$ rad/s دوران کند، مقدار سرعت **v** و شتاب **a** مربوط به غلتک را از $\theta = 0$ تا $\theta = 180°$ رسم کنید. نتیجه حاصل را برای شتاب در $\theta = 0$ توجیه نمایید.

جواب $a = 0$ در $\theta = 0$



شکل مسئله ۲-۲۴۳

***۲-۲۴۴** اگر از اثرات کلیه نیروهای اصطکاکی صرفنظر شود، شتاب زاویه‌ای آونگ ساده توسط رابطه $\ddot{\theta} = \frac{g}{l}\cos\theta$ بیان می‌گردد که در آن g شتاب جاذبه و l طول میله OA می‌باشد. اگر آونگ دارای سرعت زاویه‌ای در جهت ساعتگرد برابر با $\dot{\theta} = 2$ rad/s به ازای $\theta = 0$ در $t = 0$ باشد، زمان t' را که در آن آونگ از حالت قائم $\theta = 90°$ می‌گذرد، حساب کنید. طول آونگ $l = 0/6$ m است. همچنین زمان t بر حسب زاویه θ را رسم کنید.

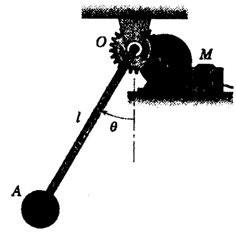


شکل مسئله ۲-۲۴۴

*۲-۲۴۵ توسط واحد کنترل M به آونگ OA حرکت نوسانی حول محور قائم داده می‌شود که توسط رابطه $\theta = \theta_\circ \sin\sqrt{\frac{g}{l}}\, t$ بیان می‌گردد که در آن $\theta_\circ$ حداکثر جابجایی زاویه‌ای بر حسب رادیان، g شتاب جاذبه، l طول آونگ و t زمان بر حسب ثانیه از لحظه‌ای که OA در حالت قائم است، اندازه گیری می‌شود. مقدار شتاب A را بر حسب تابعی از زمان و بر حسب تابعی از θ، در اولین ربع یک دور کامل حرکت، تعیین و رسم کنید. مقادیر حداقل و حداکثر مقدار شتاب a و مقادیر t و θ متناظر را تعیین کنید. از مقادیر $\theta_\circ = \pi / ۳$ رادیان، $l = ۰/۸$ m و $g = ۹/۸۱$ m/s^2 استفاده کنید (توجه: حرکت توصیف شده با حرکت نوسانی آزاد یک آونگ با دامنه زیاد مطابقت ندارد).

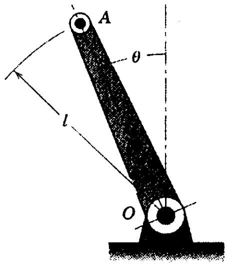
جواب $a_{min} = ۹/۰۳$ m/s^2 در $\theta = ۴۴/۳^\circ$ و $t = ۰/۲۳۷$ s

$a_{max} = ۱۰/۷۶$ m/s^2 در $\theta = \circ$ و $t = \circ$



شکل مسئله ۲-۲۴۵

*۲-۲۴۶ میله OA حرکت نوسانی را در صفحه قائم انجام می‌دهد که توسط رابطه $\theta = \theta_\circ \sin(۲\pi t/\tau)$ بیان می‌گردد که در آن $\theta_\circ$ جابجایی زاویه‌ای حداکثر بر حسب رادیان، τ زمان (پریود) برای یک نوسان کامل و t زمان بر حسب ثانیه است که از موقعی که OA در حالت قائم است، اندازه گیری می‌شود. برای مقادیر $\theta_\circ = \pi/۲$، $\tau = ۲$ s و $\overline{OA} = l = ۱۰۰$ mm، مقدار a شتاب کل A را بر حسب تابعی از t برای ربع اول یک سیکل ($t = \circ$ تا $t = ۰/۵$ ثانیه) رسم کنید. مقادیر حداکثر و حداقل a و مقادیر θ متناظر را تعیین کنید.

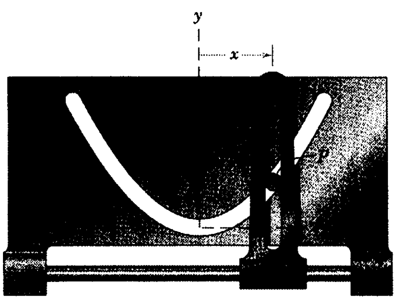


شکل مسئله ۲-۲۴۶

*۲-۲۴۷ گلوله‌ای با سرعت ۶۰۰ m/s به طور قائم از دهانه تفنگی به طرف بالا شلیک می‌شود و به حداکثر ارتفاع ۱۶۰۰ m می‌رسد. مقاومت هوا باعث شتابی در جهت پایین برابر $kv^۲$، متناسب با مربع سرعت v، می‌گردد. مقدار g را ثابت و برابر ۹/۸۱ m/s^2 گرفته و ضریب k را محاسبه کنید.

جواب $k = ۱۱/۸۶\,(۱۰^{-۴})$ m^{-1}

*۲-۲۴۸ به یک راهنمای شیاردار عمودی، حرکتی نوسانی مطابق با $x = ۱۰۰\sin ۲t$ داده می‌شود که در آن x بر حسب میلیمتر و t بر حسب ثانیه است. نوسان باعث می‌شود که پین P در شیار سهمی شکل ثابتی که شکلش به صورت $y = x^۲/۱۰۰$ داده شده است، حرکت کند که در آن y نیز بر حسب میلیمتر می‌باشد. v، مقدار سرعت پین را بر حسب زمان، در فاصله زمانی که پین از مرکز تا انتها یعنی $x = ۱۰۰$ mm می‌رود، رسم کنید. حداکثر مقدار v، و موقعیت آنرا پیدا کنید و به روش تحلیلی صحت نتایج حاصل را تحقیق کنید.

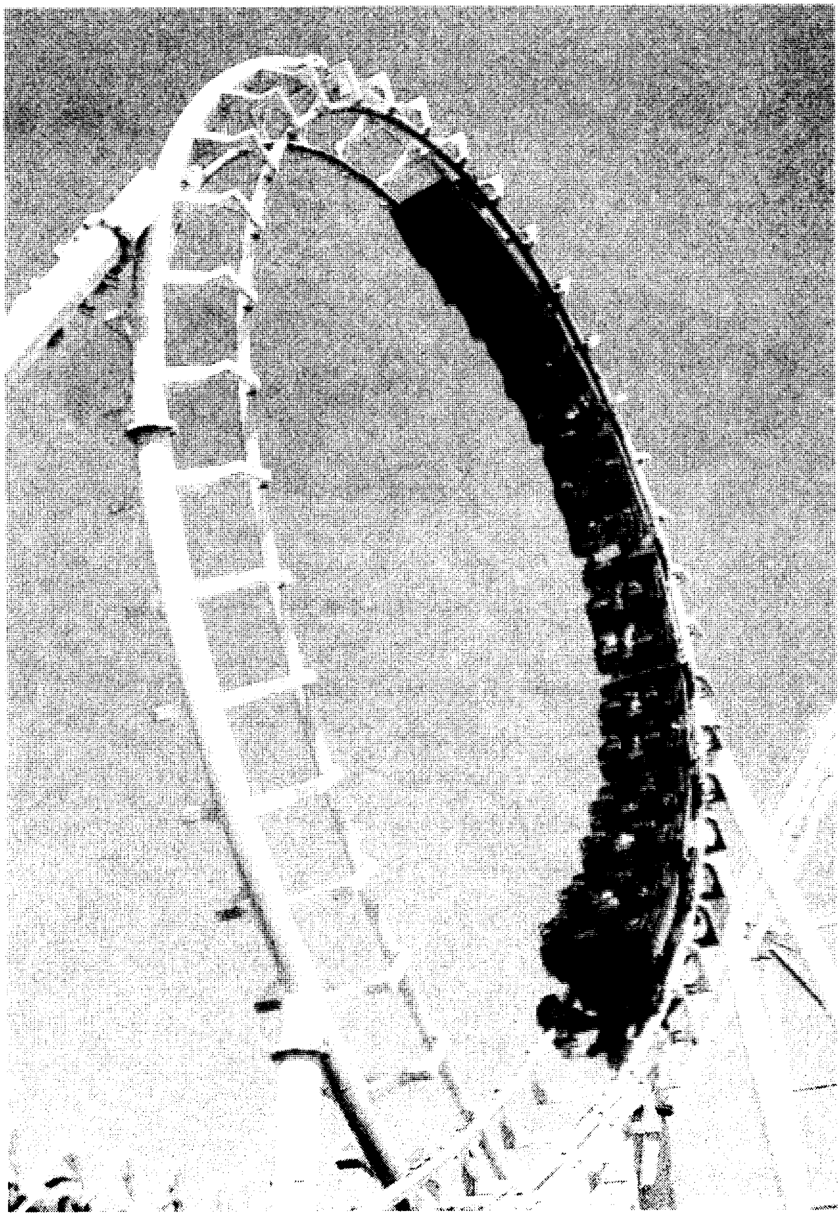


شکل مسئله ۲-۲۴۸

فصل سوم

سینتیک ذرات

فهرست مطالب



طراحان یک وسیله سواری در پارک بازی، مانند قطار غلتان، نبایستی در طراحی، تنها به اصول تعادل روی واگن‌ها و سازه‌های پشتیبان آن تکیه نمایند. سینتیک ذره برای هر ارابه بایستی مورد ملاحظه قرار گرفته و ارزیابی نیروهای پیچیده که سیستم را ایمن می‌سازند، انجام گیرند.

۳-۱ مقدمه

هنگامیکه به ذره‌ای نیروهای نامتعادل وارد شود، طبق قانون دوم نیوتن ذره شتاب خواهد گرفت. سینتیک عبارت است از مطالعه روابط بین نیروهای نامتعادل و تغییرات حرکت ناشی از آنها. در فصل سوم، سینتیک ذرات را مطالعه خواهیم کرد. مطالعه این مبحث ایجاب می‌کند که معلومات خود را از مشخصات نیرو که در مبحث استاتیک بررسی گردید و مبحث سینماتیک حرکت ذره که در فصل ۲ بررسی شد، با هم ترکیب کنیم. به کمک قانون دوم نیوتن می‌توانیم این دو مبحث را با هم ترکیب کرده و به حل مسائل مهندسی که شامل نیرو، جرم و حرکت می‌باشد، بپردازیم.

سه روش عمومی برای حل مسائل سینتیکی وجود دارد:(A) بکارگیری مستقیم قانون دوم نیوتن (موسوم به روش نیرو ـ جرم ـ شتاب)، (B) استفاده از اصل کار و انرژی، (C) حل به روش ضربه و مومنتم (اندازه حرکت). هر کدام از این روشها، مشخصات و امتیازاتی دارد و فصل ۳ بر اساس این سه روش حل، به سه بخشA ، B و C اختصاص یافته است. علاوه بر این، بخش چهارمی نیز وجود دارد؛ بخش D که در آن ترکیبها و کاربردهایی ویژه از این سه روش بنیادی بررسی می‌شود. قبل از شروع این مبحث به شما قویاً توصیه می‌شود، تعاریف و مفاهیم اساسی‌ای که در فصل ۱ ارائه شدند را به دقت مرور کنید، زیرا اساس مباحث آتی را تشکیل می‌دهند.

بخش A ـ نیرو، جرم و شتاب

۳-۲ قانون دوم نیوتن

رابطه اساسی بین نیرو و شتاب، توسط قانون دوم نیوتن، معادله ۱-۱ بیان می‌شود و اثبات این قانون کاملاً تجربی است. معنای اساسی این قانون را توسط یک آزمایش ایده‌آل که در آن نیرو و شتاب بدون خطا اندازه گیری شده‌اند، تشریح می‌کنیم. یک ذره جرم دار در یک سیستم اینرسی اولیه* به صورت مجزا در نظر گرفته شده و تحت تاثیر نیروی منفرد $\mathbf{F}_1$ قرار می‌گیرد. شتاب $\mathbf{a}_1$ ذره اندازه گیری شده و نسبت نیرو به شتاب F_1/a_1 عددی مانند C_1 خواهد بود که بستگی به آحادی دارد که برای اندازه گیری نیرو و شتاب مورد استفاده قرار گرفته است. اکنون آزمایش را با قرار دادن همین ذره در معرض نیروی دیگری مانند $\mathbf{F}_2$ تکرار نموده و شتاب متناظر $\mathbf{a}_2$ را اندازه می‌گیریم. مجدداً نسبت F_2/a_2 عدد دیگری مانند C_2 را

* سیستم اینرسی اولیه یا دستگاه مرجع نجومی، دستگاهی است فرضی که در فضا بدون انتقال و دوران تلقی می‌شود. به بخش ۲-۱، فصل ۱ مراجعه شود

نتیجه می‌دهد. آزمایش را به دفعات دلخواه تکرار می‌کنیم. دو نتیجه مهم از این آزمایش‌ها بدست می‌آید، اول اینکه در تمام موارد، نسبت نیروی اعمال شده به شتاب حاصل یکسان است؛ به شرط اینکه آحاد مورد استفاده در آزمایش‌ها تغییر ننماید. بنابراین:

$$\frac{F_1}{a_1} = \frac{F_2}{a_2} = \cdots = \frac{F}{a} = C \quad \text{عددی ثابت،}$$

نتیجه می‌گیریم که ثابت C معیاری است از یک مشخصه ذره که تغییر نمی‌کند. این مشخصه اینرسی ذره، یعنی *مقاومت ذره در برابر میزان تغییر سرعت* است. برای ذره‌ای که اینرسی زیاد دارد (C بزرگ)، شتاب ناشی از اعمال نیروی معین F کوچک خواهد بود. از طرف دیگر، اگر اینرسی کوچک باشد، شتاب بزرگ خواهد بود. جرم m به عنوان سنجش کمی اینرسی به کار می‌رود و بنابراین می‌توان عبارت $C = km$ را نوشت، که در آن k برای تنظیم آحادی که مورد استفاده قرار می‌گیرند، عدد ثابتی است. بنابراین رابطه تجربی به صورت زیر در می‌آید.

$$F = kma \qquad (۳-۱)$$

که در آن F مقدار نیروی برآیند که بر ذره به جرم m وارد می‌شود و a مقدار شتاب منتجه ذره است.

دومین نتیجه‌ای که از آزمایش ایده‌آل بدست می‌آید، این است که شتاب همواره هم جهت نیروی وارده می‌باشد. بنابراین رابطه ۱-۳ یک رابطه برداری است که می‌توان آن را به صورت زیر نوشت.

$$\mathbf{F} = km\mathbf{a} \qquad (۳-۲)$$

اگرچه یک آزمایش واقعی نمی‌تواند به شکل ایده‌آلی که تشریح شد، انجام گیرد؛ با این وجود نتایج مزبور بر پایه اندازه گیریهای بدست آمده از آزمایشهای دقیق متعددی بنا شده که فرضیه آزمایش ایده‌آل پیش بینی نموده است. یکی از دقیق‌ترین شواهد این آزمایش ایده‌آل، پیش بینی دقیق حرکت سیارات بر مبنای رابطه ۲-۳ است.

سیستم اینرسی

با اینکه نتایج آزمایشهای تجربی نسبت به سیستم اینرسی اولیه انجام شدند، می‌توان اندازه گیریها را نسبت به هر سیستم مرجعی که دوران نکرده ولی با سرعت ثابتی نسبت به سیستم اولیه انتقال می‌یابد، معتبر دانست. در مطالعه حرکت نسبی در بخش ۸-۲ دیدیم که شتاب اندازه گیری شده همانند سیستم اولیه است. بنابراین، قانون دوم نیوتن در سیستمهای بدون شتاب نیز به همان خوبی صادق است، پس یک *سیستم اینرسی* را می‌توان به عنوان سیستمی تعریف کنیم که در معادله ۲-۳ معتبر است.

اگر آزمایش ایده‌آل تشریح شده در سطح زمین انجام گیرد و کلیه اندازه گیریها نسبت به دستگاه مختصات الصاق شده به زمین باشند، هنگامیکه مقادیر اندازه گیری شده در رابطه ۲-۳ گذاشته می‌شوند، اختلافی جزئی مشاهده خواهد شد. این اختلاف ناشی از این واقعیت است که شتاب اندازه گیری شده شتاب مطلق واقعی نخواهد بود. اما چنانچه مولفه‌های شتاب زمین را منظور نماییم، شتاب ذره تصحیح شده و اختلاف از بین می‌رود. این تصحیحات در اکثر مسائل مهندسی که شامل حرکت سازه‌ها و ماشینها در سطح زمین‌اند، قابل اغماض است. در چنین مواردی شتابهای اندازه گیری شده نسبت به

محورهای مرجع متصل به سطح زمین را می‌توان شتاب مطلق قلمداد کرد و رابطه ۲-۳ را با خطای ناچیزی برای اندازه گیریهای تجربی در سطح زمین بکار برد*.

مسائل بیشماری وجود دارند، به ویژه در زمینه طراحی راکت‌ها و فضاپیماها که در آنها مولفه‌های شتاب زمین در درجه اول اهمیت می‌باشند. در این موارد ضروری است که مبنای قانون دوم نیوتن کاملاً درک شده و مولفه‌های شتاب مطلق مناسبی مورد استفاده قرار گیرند.

قبل از سال ۱۹۰۵، قوانین مکانیک نیوتنی توسط آزمایشهای فیزیکی بیشماری به اثبات می‌رسیدند و به عنوان آخرین قوانین حرکتی اجسام قلمداد می‌شدند. مفهوم *زمان* که در تئوری نیوتنی یک کمیت مطلق در نظر گرفته می‌شد، توسط اینشتن در سال ۱۹۰۵ در تئوری نسبیتش توجیه و تفسیر کاملاً جدیدی پیدا کرد. مفهوم جدید، فرمولبندی جدید و کاملی از قوانین پذیرفته شده مکانیک را اقتضا می‌کرد. تئوری نسبیت در ابتدا مورد تمسخر قرار گرفت، اما با آزمایشهایی که تا کنون به اثبات رسیده، امروزه مورد پذیرش دانشمندان در سطح جهان می‌باشد. اگرچه اختلاف بین مکانیک نیوتنی و مکانیک اینشتنی، یک تفاوت اساسی است، اما تفاوت عملی این دو، تنها زمانی است که سرعتهای مورد نظر در حدود سرعت نور (۳۰۰×۱۰^{۶} m/s) باشند**. مثلاً در مسائلی که با ذرات اتمی و هسته‌ای سروکار دارند، محاسبات بر مبنای تئوری نسبیت بوده که از امور اساسی دانشمندان و مهندسان می‌باشد.

سیستم‌های آحاد

مرسوم است که k را در رابطه ۲-۳ برابر یک می‌گیرند، بنابراین با قرار دادن این مقدار، رابطه متداول نیوتن بدست می‌آید.

$$\boxed{\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \qquad [۱-۱]$$

سیستم آحادی که در آن k مساوی یک است، سیستم سینتیکی نامیده می‌شود. بنابراین در سیستم سینتیکی آحاد نیرو، جرم و شتاب مستقل از یکدیگر نخواهند بود. در سیستم SI، چنانکه در بخش ٤-١ بیان شد، واحد نیرو (نیوتن،N) توسط قانون دوم نیوتن از حاصلضرب آحاد اساسی جرم (کیلوگرمkg) در شتاب (متر بر مجذور ثانیه، m/s^2) بدست می‌آید. بنابراین $N = kg \,.\, m/s^2$ است. این سیستم به عنوان یک سیستم مطلق شناخته می‌شود. زیرا واحد نیرو به مقدار مطلق جرم بستگی دارد.

---

* به عنوان مثال، از اندازه خطایی که با اغماض از حرکت زمین پدید می‌آید در مورد ذره‌ای که از ارتفاع h به سوی سطح زمین از حالت سکون (نسبت به زمین) رها می‌شود، می‌توان ذکر کرد. می‌توان نشان داد که حرکت دورانی زمین باعث مولفه شتابی به سمت شرق (شتاب کوریولیس) نسبت به زمین می‌شود با صرفنظر کردن از مقاومت هوا، ذره در فاصله $x = \frac{2}{3}\omega\sqrt{\frac{2h^3}{g}}\cos\gamma$ به سمت شرق نقطه‌ای در روی زمین که درست زیر مکان رها شده ذره قرار دارد، سقوط می‌کند. سرعت زاویه‌ای زمین $\omega = ۰/۷۲۹(۱۰^{-۴})$ rad/s و عرض جغرافیایی شمالی یا جنوبی، γ می‌باشد. در عرض جغرافیایی ۴۵° و ارتفاع ۲۰۰ m، این انحراف به طرف شرق برابر $x =$ ۴۳/۹ mm خواهد بود.

** تئوری نسبیت نشان می‌دهد که چیزی به عنوان سیستم اینرسی اولیه وجود ندارد و اندازه‌گیری زمان در دو سیستم مختصات با سرعت نسبی نسبت به یکدیگر، نتایج متفاوتی می‌دهد. بر این اساس، به عنوان مثالی، نسبیت نشان می‌دهد ساعت خلبانان یک فضاپیما که با سرعت ۲۷۰۸۰ km/h در یک مدار قطبی در ارتفاع ۶۴۴ km حرکت می‌کند، در مقایسه با ساعتی که در قطب قرار دارد، به ازای هر دور دورانs ۰/۰۰۰۰۰۱۸۵ عقب می‌ماند.

از طرف دیگر در سیستم آحاد متداول آمریکایی، واحد جرم (اسلاگ) از تقسیم نیرو (پوند نیرو،lb) بر شتاب (فوت بر مجذور ثانیه، ft/sec^2) بدست می‌آید. بنابراین واحد جرم، اسلاگ برابر است با $slug = lb.sec^2/ft$. این سیستم به سیستم *ثقلی* معروف است زیرا جرم از نیرو مشتق می‌شود که خود ناشی از جاذبه ثقل می‌باشد.

در اندازه گیریهایی که نسبت به زمین در حال دوران انجام می‌شود، باید مقدار نسبی g مورد استفاده قرار گیرد. مقدار بین المللی پذیرفته شده g نسبت به زمین در سطح دریا و در عرض جغرافیایی‌°۴۵ برابر $9/80665\ m/s^2$ است. بجز مواردی که دقت زیادی مورد نظر است، مقدار $9/81\ m/s^2$ برای g بکار برده می‌شود. در اندازه گیریهایی که نسبت به زمین غیر دوار انجام می‌شود، مقدار مطلق g مورد استفاده قرار می‌گیرد. در عرض جغرافیایی‌°۴۵ و در سطح دریا، مقدار مطلق g برابر با $9/8236\ m/s^2$ است. تغییرات مقادیر مطلق و نسبی g با عرض جغرافیایی در سطح دریا، در شکل ۱-۱ از بخش ۵-۱ نشان داده شده است.

در سیستم متداول آمریکایی، مقدار استاندارد g نسبت به زمین دوار و در سطح دریا و عرض جغرافیایی‌°۴۵ برابر $32/1740\ ft/sec^2$ می‌باشد. مقدار مربوط به زمین غیر دوار برابر $32/2230\ ft/sec^2$ است.

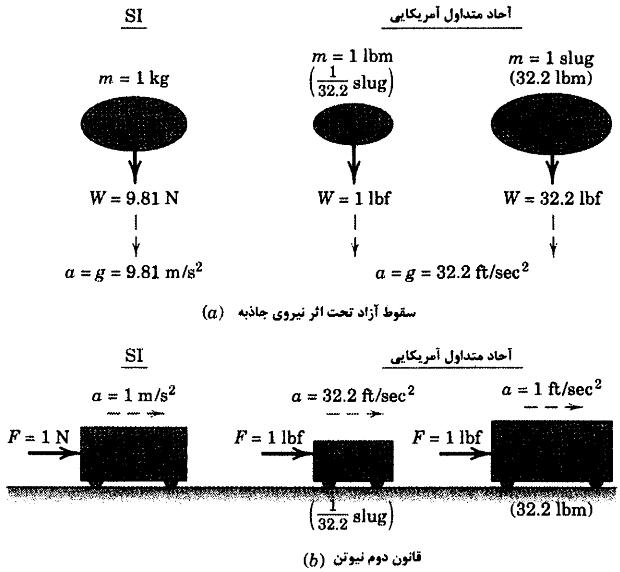
آحاد نیرو و جرم

بنا به نیاز، برای استفاده از هر دو سیستم SI و متداول آمریکایی، بایستی مطمئن باشیم که آحاد صحیح نیرو و جرم را در هر دو دستگاه به خوبی درک کرده‌ایم. این آحاد در بخش ۴-۱ توضیح داده شدند، اما قبل از کاربرد قانون دوم نیوتن، مفید است که آنها را با استفاده از اعداد ساده‌ای در اینجا نشان دهیم. ابتدا، مطابق شکل‌a۱-۳، آزمایش سقوط آزاد را در نظر بگیرید که در آن جسمی را از نزدیکی سطح زمین، از حالت سکون رها می‌کنیم و اجازه می‌دهیم تحت تاثیر نیروی جاذبه W به جسم، که آن را *وزن* جسم می‌نامیم، سقوط آزاد کند. در سیستم آحادSI برای جرم $m = 1\ kg$ وزن برابر است با $W = 9/81\ N$ و شتاب متناظر رو به پایین a برابر $g = 9/81\ m/s^2$ است. در سیستم آحاد متداول آمریکایی برای جرم $m = 1\ lbm\ (\frac{1}{32/2}\ slug)$ وزن برابر است با $W = 1\ lbf$ و شتاب ناشی از ثقل $g = 32/2\ ft/sec^2$ است. برای جرم $m = 1\ slug\ (32/2\ lbm)$ وزن برابر است با $W = 32/2\ lbf$ و البته شتاب نیز $g = 32/2\ ft/sec^2$ است.

در شکل ۱b-۳ آحاد مناسب را با ساده‌ترین مثال نشان داده‌ایم که در آن، جسمی به جرم m، در امتداد افق توسط نیروی F شتاب می‌گیرد. در سیستم آحاد مرتبطSI، نیروی $F = 1\ N$ باعث می‌شود که جرم $m = 1\ kg$ شتابی برابر با $a = 1\ m/s^2$ بگیرد. بنابراین، $1\ N = 1\ kg.\ m/s^2$ می‌باشد. در سیستم متداول آمریکایی (که یک سیستم جاذبه‌ای غیر وابسته است) نیروی $F = 1\ lbf$ باعث می‌شود که جرم $m = 1\ lbm\ (\frac{1}{32/2}\ slug)$ شتابی برابر با $a = 32/2\ ft/sec^2$ کسب کند، در حالی که نیروی $F = 1\ lbf$ باعث می‌شود که جرم $m = 1\ slug\ (32/2\ lbm)$ شتابی برابر با $a = 1\ ft/sec^2$ بگیرد.

توجه می‌کنیم که در سیستم آحاد SI که جرم بر حسب کیلوگرم (kg) است، وزن W جسم بر حسب نیوتن (N) توسط رابطه $W = mg$ داده می‌شود که در آن $g = 9/81 m/s^2$ است. در سیستم آحاد متداول آمریکایی، وزن‌W جسم بر حسب پوند نیرو (lbf) بیان می‌شود و جرم برحسب اسلاگ ($lbf\text{-}sec^2/ft$) توسط رابطه $m = W/g$ داده می‌شود که در آن $g = 32/2 ft/sec^2$ است. در سیستم آحاد متداول آمریکایی، معمولاً صحبت از وزن جسم می‌شود در حالیکه در حقیقت جرم جسم مد نظر است. بسیار معمول است که جرم جسم بر حسب (lbm) مشخص می‌باشد که باید قبل از اینکه در قانون دوم

نیوتن قرار دهیم، آن را به اسلاگ تبدیل کنیم. پوند (lb) معمولاً به عنوان واحد نیرو (lbf) به کار می‌رود، مگر آنکه خلاف این حالت اعلان شود.



شکل (۱-۳)

۳-۳ معادله حرکت و حل مسائل

وقتی ذره‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروهای متقارب $\mathbf{F}_1$، $\mathbf{F}_2$، $\mathbf{F}_3$ و ... در جایی که مجموع برداری این نیروها $\Sigma\mathbf{F}$ است، قرار دارد معادله ۱-۱ به صورت زیر در می‌آید.

$$\boxed{\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}} \qquad (۳-۳)$$

در حل مسائل، معمولاً رابطه ۳-۳ با استفاده از یکی از دستگاههای مختصات شرح داده شده در فصل ۲، به صورت مولفه اسکالر بیان می‌شود. انتخاب دستگاه مختصات مناسب توسط نوع حرکت مشخص می‌شود و مرحله اساسی‌ای در حل هر مسئله است. رابطه ۳-۳ یا هر یک از شکلهای مولفه‌ای رابطه نیرو ـ جرم ـ شتاب را معمولاً بـه عنـوان *معادله* حرکـت می‌شناسند. معادله حرکت، مقدار لحظه‌ای شتاب را متناسب با مقادیر لحظه‌ای نیروهای اعمال شده می‌دهد.

دو نوع مسئله در دینامیک

به هنگام استفاده از رابطه ۳-۳، با دو نوع مسئله مواجه می‌شویم. در نوع اول، شتاب مشخص شده مستقیماً از شرایط سینماتیکی قابل تعیین است. سپس نیروهای متناظر وارد شده بر ذره‌ای که حرکتش مشخص شده است با جایگزینی مستقیم در رابطه ۳-۳ تعیین می‌شوند. این نوع مسئله معمولاً خیلی سرراست است.

در نوع دوم، نیروها مشخص هستند و باید حرکت منتجه تعیین شود. اگر نیروها ثابت باشند، شتاب نیز ثابت خواهد بود و از رابطه ۳-۳ براحتی پیدا می‌شود. موقعی که نیروها تابعی از زمان، موقعیت، سرعت و یا شتاب هستند، رابطه ۳-۳ به معادله دیفرانسیلی تبدیل می‌شود که باید انتگرال گیری کرد تا به سرعت و جابجایی رسید.

مسائل نوع دوم غالباً دشوارند. زیرا ممکن است انتگرال گیری مشکل باشد. خصوصاً موقعی که نیرو ترکیبی از دو یا چند متغیر حرکتی است. در عمل اکثراً لازم است از روشهای انتگرال گیری تقریبی عددی یا ترسیمی استفاده کنیم. خصوصاً وقتی داده‌ها، تجربی بدست آمده باشند. روشهای ریاضی انتگرال گیری شتاب، موقعی که تابع متغیرهای حرکتی است، در بخش ۲-۲ بسط داده شدند و هنگامی که نیرو تابع همین پارامترها باشد، از همین روشها استفاده می‌شود. زیرا نیرو و شتاب تنها در ضریب ثابت جرم با هم تفاوت دارند.

حرکت مقید و نامقید

از لحاظ فیزیکی دو نوع حرکت متمایز وجود دارد که هر دو توسط رابطه ۳-۳ توصیف می‌گردند. نوع اول حرکت *نامقید* است که در آن ذره فاقد راهنمای مکانیکی، مسیری را طی می‌کند که توسط حرکت اولیه آن و نیروهایی که از منابع خارجی به آن وارد می‌شود، تعیین می‌شود. هواپیما، راکتی در پرواز و الکترون که در یک میدان باردار حرکت می‌کند، مثالهایی از حرکت نامقید هستند.

نوع دوم، حرکت *مقید* است که در آن بخشی از مسیر و یا تمامی آن توسط راهنماهای کنترل کننده تعیین می‌شود. در بازی هاکی روی یخ، بخشی از حرکت گوی توسط یخ روی زمین بازی، مقید می‌گردد. ترنی که در امتداد ریل حرکت می‌کند، طوقه‌ای که در امتداد یک محور ثابت می‌لغزد، مثالهایی از حرکت با قید کامل هستند. بعضی از نیروهایی که به ذره وارد می‌شود از منابع خارجی ناشی شده و بعضی دیگر می‌توانند عکس العمل راهنماهای مقید کننده باشند که به ذره وارد می‌گردد. *کلیه* نیروهای عمل و عکس العمل که بر جسم اثر می‌کنند، باید موقعی که از رابطه ۳-۳ استفاده می‌گردد، در نظر گرفته شوند.

انتخاب دستگاه مختصات، اغلب توسط تعداد قیود و هندسه آنها مشخص می‌گردد. بنابراین اگر ذره‌ای آزاد باشد تا در فضا حرکت کند، مثلاً مرکز جرم یک هواپیما یا راکت در پرواز آزاد، گفته می‌شود که ذره دارای *سه درجه آزادی* بوده؛ زیرا برای مشخص کردن موقعیت ذره در هر لحظه به سه مختص مستقل نیاز است. برای بدست آوردن مختصات فضایی ذره تابعی از زمان، هر سه مولفه اسکالر معادله حرکت را باید بکار گرفته و از آنها انتگرال گیری کرد. اگر ذره‌ای مقید باشد که بر روی یک سطح حرکت کند، مانند حرکت گوی بازی در هاکی روی یخ یا سنگریزه‌ای که در سطح منحنی یک پیاله می‌لغزد، مشخص نمودن دو مختص برای تعیین موقعیت آن کافی بوده و در این حالت گفته می‌شود که ذره دارای *دو درجه آزادی* است. اگر ذره‌ای مقید باشد که در امتداد یک مسیر خطی ثابت حرکت کند، مانند طوقه‌ای که در امتداد یک محور ثابت می‌لغزد، موقعیتش با تعیین مختصات در امتداد خط مزبور مشخص می‌گردد. در این حالت، ذره دارای یک درجه *آزادی* است.

ترسیمه آزاد جسم

نکات کلیدی

هنگام استفاده از هر یک از معادلات حرکتی نیرو ـ جرم ـ شتاب، کاملاً ضروری است که کلیه نیروهای وارده بر ذره را به حساب آوریم. تنها نیروهایی قابل اغماض هستند که در مقایسه با سایر نیروهای عمل کننده ناچیز باشند، مانند نیروهای جاذبه متقابل بین دو ذره در قیاس با نیروهای جاذبه آنها به یک جسم سماوی مثل کره زمین. جمع برداری $\Sigma\mathbf{F}$ در رابطه ۳-۳ به معنی مجموع برداری *کلیه* نیروهای وارده بر ذره مورد نظر است. به همین ترتیب، جمع اسکالر نیروها در هر امتداد به معنی مجموع *کلیه* نیروهایی که در آن امتداد خاص بر ذره اثر می‌کنند، می‌باشد.

تنها روش مطمئن برای احتساب دقیق و صحیح هر نیرویی، این است که ذره مورد نظر را از کلیه اجسامی که با آن در تماس هستند، *مجزا ساخته* و نیروهای وارد شده از طرف این اجسام که بر ذره اعمال می‌گردد را جانشین نمود. بدین ترتیب، *ترسیمه آزاد* جسم حاصل می‌شود که وسیله‌ای برای نشان دادن کلیه نیروهای معلوم و مجهول وارد بر ذره است که به حساب می‌آیند. تنها پس از تکمیل این مرحله اساسی است که می‌توان معادله یا معادلات حرکت را نوشت.

ترسیمه آزاد جسم همان نقش کلیدی را که در استاتیک داشت، در دینامیک نیز دارد. به طور ساده این نقش عبارت است از فراهم آوردن *روشی کاملاً قابل اطمینان* جهت ارزیابی صحیح برآیند کلیه نیروهای واقعی که بر جسم یا ذره مورد نظر اثر می‌کنند. در استاتیک برآیند نیروها صفر است، در حالی که در دینامیک برآیند نیروها مساوی با حاصلضرب جرم در شتاب است. موقعی که از معادلات حرکت به صورت برداری استفاده می‌کنید، به خاطر داشته باشید که این معادله معرف چندین رابطه اسکالر است.

استفاده دقیق و مطمئن و منطقی *روش ترسیمه آزاد* جسم، مهمترین درسی است که در مکانیک مهندسی باید فراگرفت. در رسم ترسیمه آزاد جسم، محورهای مختصات و جهت مثبت آنها باید به وضوح مشخص شوند. وقتی معادلات حرکت نوشته می‌شوند، نیروها را بایستی با توجه به این جهات مثبت جمع نمود. همچنین برای کمک به تشخیص نیروهای خارجی وارد بر جسم مورد نظر، این نیروها در شکل‌های کتاب با بردار ضخیم نشان داده شده‌اند. مسائل نمونه ۱-۳ تا ۵-۳ در قسمت بعدی، شامل پنج مثال از ترسیمه آزاد جسم است که شما می‌بایست با مطالعه آنها چگونگی رسم ترسیمه‌ها را دریابید.

هنگام حل مسائل، شما غالباً مردد هستید که چگونه حل را شروع کنید و چه راه حلی را برای رسیدن به جواب نهایی طی کنید. اگر عادت کنید که ابتدا بین کمیت مورد نظر در مسئله و سایر کمیتهای معلوم و مجهول، رابطه‌ای مشخص کنید؛ این مشکل می‌تواند به حداقل برسد. آنگاه در صدد یافتن سایر روابطی باشید که مجهولات اخیر را به کمیتهای معلوم یا مجهول دیگر ارتباط دهد. سرانجام، وابستگی مسئله به داده‌های اولیه مشخص شده و روش تجزیه و تحلیل و محاسبات لازمه پدیدار خواهد شد. صرف چند دقیقه وقت برای برنامه ریزی حل مسئله، از طریق تشخیص وابستگی یک کمیت بر کمیتهای دیگر، در سرعت حل، موثر است و معمولاً از محاسبات نامربوط و وقت گیر برای رسیدن به جواب، جلوگیری می‌کند.

۳-۴ حرکت مستقیم الخط

اکنون مفاهیم بحث شده در بخش‌های ۳-۲ و ۳-۳ را در مورد مسائل حرکت ذره به کار می‌بریم و در این بخش حرکت مستقیم الخط را شروع کرده و در بخش ۳-۵ حرکت منحنی الخط مورد بررسی قرار خواهد گرفت. در هر دو بخش، حرکات اجسامی را تجزیه و تحلیل خواهیم کرد که به عنوان ذره قابل بررسی هستند. این ساده سازی تا زمانیکه فقط حرکت مرکز جرم جسم مورد توجه است، مجاز می‌باشد. در این صورت می‌توان نیروها را به صورت متقارب در مرکز جرم مورد بررسی قرار داد. وقتی که در فصل ٦ دربارهٔ سینتیک اجسام صلب بحث می‌کنیم، اثر نیروهای غیر متقارب را بر روی جسم به حساب خواهیم آورد.

اگر جهت x را به عنوان مثال، جهت حرکت مستقیم الخط جرم m انتخاب کنیم، شتاب در امتدادهای y و z صفر خواهد بود و مولفه‌های اسکالر رابطه ۳-۳ به صورت زیر می‌شوند.

$$\Sigma F_x = m\,a_x \qquad \Sigma F_y = 0 \qquad \Sigma F_z = 0 \tag{۳-٤}$$

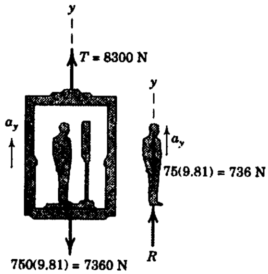
برای حالتی که مجاز به انتخاب مختصاتی در امتداد حرکت نیستیم، در حالتی کلی، هر سه رابطه را برای مولفه‌ها خواهیم داشت.

$$\Sigma F_x = m\,a_x \qquad \Sigma F_y = m\,a_y \qquad \Sigma F_z = m\,a_z \tag{۳-۵}$$

که شتاب و نیروی منتجه چنین بیان می‌شوند:

$$\mathbf{a} = a_x\,\mathbf{i} + a_y\,\mathbf{j} + a_z\,\mathbf{k}$$
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$
$$\Sigma\mathbf{F} = \Sigma F_x\,\mathbf{i} + \Sigma F_y\,\mathbf{j} + \Sigma F_z\,\mathbf{k}$$
$$|\Sigma\mathbf{F}| = \sqrt{(\Sigma F_x)^2 + (\Sigma F_y)^2 + (\Sigma F_z)^2}$$

مسئله نمونه ۱-۳



مردی به جرم ۷۵ kg روی یک ترازوی فنری در داخل یک آسانسور ایستاده است. در طی ۳ ثانیه اول حرکت از حالت سکون، کشش T کابل بالابر برابر ۸۳۰۰ N است. در طی این فاصله زمانی، R خوانده شده از روی ترازو بر حسب نیوتن چقدر است و سرعت v به طرف بالای آسانسور در پایان سه ثانیه را پیدا کنید. جرم کل آسانسور، مرد و ترازو ۷۵۰ kg است.

حل. نیروی ثبت شده توسط ترازو و همچنین سرعت آسانسور، هر دو بستگی به شتاب آسانسور دارند که در این فاصله زمانی که نیروها ثابت می‌مانند، ثابت است. از ترسیمه آزاد مجموعه آسانسور، ترازو و مرد، شتاب چنین بدست می‌آید.

$$[\Sigma F_y = m\,a_y] \qquad 8300 - 7360 = 750\,a_y \qquad a_y = 1.257 \text{ m/s}^2$$

ترازو نیرویی را که از طرف پاهای مرد به سمت پایین بر آن وارد می‌شود، نشان می‌دهد. عکس العمل مساوی و مخالف R در برابر این نیرو به همراه وزن مرد در ترسیمه آزاد جسم نشان داده شده است. بنابراین معادله حرکت برای مرد چنین است:

❶ $$[\Sigma F_y = m\,a_y] \qquad R - 736 = 75\,(1.257) \qquad R = 830 \text{ N}$$ جواب

سرعت آسانسور در پایان ۳ ثانیه برابر است با:

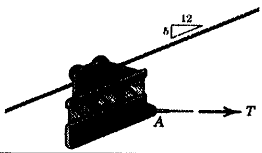
$$\left[\Delta v = \int a\,dt\right] \qquad v - 0 = \int_0^3 1.257\,dt \qquad v = 3.77 \text{ m/s}$$ جواب

نکته مفید

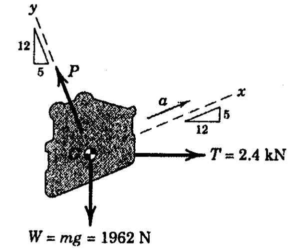
❶ *اگر ترازو بر حسب کیلوگرم مدرج شده باشد، $\frac{۸۳۰}{۹/۸۱} = ۸۴/۶$ kg را نشان می‌دهد که البته جرم واقعی مرد نیست. زیرا اندازه‌گیری در دستگاه مرجع غیر اینرسی (شتابدار) انجام شده است.*

پیشنهاد: این مسئله را با سیستم آحاد متداول آمریکایی نیز حل کنید.

مسئله نمونه ۲-۳



یک اتاقک کوچک بازرسی به جرم ۲۰۰ kg در امتداد کابل ثابت هوایی حرکت کرده و توسط کابل متصل شده به A کنترل می‌گردد. شتاب اتاقک را هنگامیکه کابل کنترل به صورت افقی و تحت کشش T = ۲/٤ kN قرار گرفته، تعیین کنید. همچنین نیروی کل P که توسط کابل نگهدارنده بر چرخها وارد می‌شود را پیدا کنید.



حل: در ترسیمه آزاد اتاقک و چرخها که به عنــوان یـک ذره در نظـر گرفتـه شده‌اند، کشش T برابـــر ۲/٤ kN، وزن $W = mg =$ ۲۰۰(۹/۸۱) = ۱۹۶۲ N و نـیروی P وارد بر مجموعه از طرف کابل نشان داده شده‌اند. اتاقک در امتداد y در تعادل بــوده، زیرا در این امتداد هیچ شتابی وجود ندارد. بنابراین:

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad P - 2.4\left(\frac{5}{13}\right) - 1.962\left(\frac{12}{13}\right) = 0 \quad , \quad P = 2.73 \text{ kN}$$ جواب

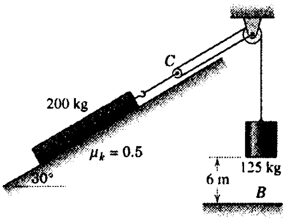
❶ در امتداد x، از معادله حرکت داریم:

$$[\Sigma F_x = ma_x] \qquad 2400\left(\frac{12}{13}\right) - 1962\left(\frac{5}{13}\right) = 200a \quad , \quad a = 7.30 \text{ m/s}^2$$ جواب

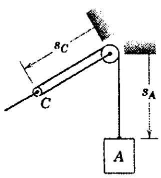
نکته مفید

❶ *با انتخاب محورهای مختصات در امتداد عمود بر امتداد شتاب، می‌توانیم دو معادله را مستقلاً حل نماییم. اگر x و y به صورت افقی و عموری انتخاب می‌شدند، آیا باز این چنین می‌بود؟*

مسئله نمونه ۳-۳



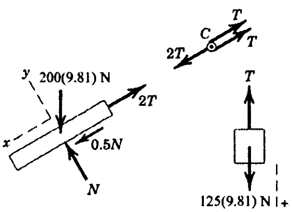
بلوک بتنی A به جرم ۱۲۵ kg از حالت سکون، در موقعیـت نشان داده شـده، رها می‌گردد و کُنده درختی به جرم ۲۰۰ kg را بر روی شـیب °۳۰ بـالا می‌کشـد. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی بین کنده و سطح شیبدار برابر ۰/۵ باشد، سرعت بلـوک را هنگامیکه در نقطه B به زمین برخورد می‌کند، تعیین کنید.



حل: واضح است که حرکتهای کنده و بلوک A به هـم ارتبـاط دارنـد. گرچـه مشخص است که شتاب به طرف بالای کنده نصف شتاب رو به پایین A می‌باشـد. بـا ایـن وجـود اثبـات می‌کنیـم. طـول کـل ثـابت کـابل برابـــر اسـت بـا: $L = 2s_C + s_A +$ *مقدار ثابت* که در آن مقدار ثابت، قسمتهایی از کابل که دور چرخـها

❶ پیچیده شده است را شامل می‌گردد. با دو بار مشتق‌گیری از رابطه فوق نسبت به زمان، نتیجه می‌شود: $0 = 2\ddot{s}_C + \ddot{s}_A$، یا:

$$0 = 2a_C + a_A$$



در اینجا فرض می‌کنیم که جرمهای چرخها قابل صرفنظر کردن بوده و بدون اصطکاک دوران می‌کنند. با این فرض‌ها، ترسیمه آزاد قرقره C، تعادل نیرو و گشتاور را آشـکار می‌سازد. بنابراین، کشش در کابل متصل به کنده درخت دو برابر کشش اعمال شده به

بلوک بتنی است. توجه کنید که شتاب کُنده با شتاب قرقره C یکسان است.

ترسیمه آزاد کُنده درخت نشان می‌دهد، نیروی اصطکاک $\mu_k N$ خلاف حرکت رو به بالاست. تعادل کُنده در امتداد y نتیجه می‌دهد:

❷ $$\Sigma F_y = 0 \qquad N \quad 200(9.81)\cos 30^\circ = 0 \qquad N = \ 1699\text{ N}$$

و معادله حرکت در امتداد x می‌دهد:

$$[\Sigma F_x = ma_x] \qquad 0.5(1699) - 2T + 200(9.81)\sin 30^\circ \ = 200a_C$$

برای بلوک در امتداد حرکت به طرف پایین داریم:

❸ $$[+\downarrow \Sigma F = ma] \qquad 125(9.81) - T = 125a_A$$

با حل سه معادله فوق a_C ، a_A و T به صورت زیر بدست می‌آیند.

$$a_A = 1.777\ \text{m/s}^2 \qquad a_C = -\,0.888\ \text{m/s}^2 \qquad T = 1004\ \text{N}$$

❹ برای سقوط ٦ m با شتاب ثابت، سرعت بلوک برابر خواهد بود با:

$$[\upsilon^2 = 2ax] \qquad \upsilon_A = \sqrt{2(1.777)(6)} = 4.62\ \text{m/s}$$ جواب

نکات مفید

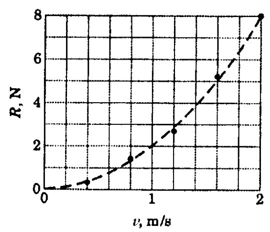
❶ *مختصات استفاده شده برای بیان رابطه مقید سینماتیک نهایی باید با مختصات استفاده شده برای معادله‌های سینتیکی حرکت سازگار باشد.*

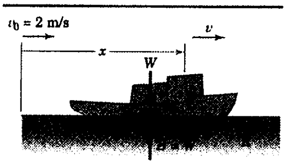
❷ *با محاسبه نیروی اولیه در کابل می‌توان ثابت کرد که حرکت کنده به سمت بالای شیب می‌باشد. از رابطه تعادل برای کُنده داریم؛ ۲T = ۰/۵N+ ۲۰۰(۹/۸۱)sin۳۰° + ۱۸۳۱ N یا T = ۹۱۵ N که کمتر از ۱۲۲٦ N وزن بلوک A است. بنابراین کُنده به طرف بالا حرکت خواهد نمود.*

❸ *به خطای بزرگ فرض T = ۱۲۵ (۹/۸۱) N توجه داشته باشید که در آن صورت، بلوک A شتاب نخواهد داشت.*

❹ *چون نیروهای وارد به مجموعه ثابت هستند، شتاب حاصل نیز ثابت می‌ماند.*

مسئله نمونه ۴-۳





مدل طراحی شده یک کشتی جدید، جرمی برابر ۱۰ kg دارد و در یک تانک آزمایش مدل کشتی، جهت تعیین مقاومت آن در مقابل جریان آب در سرعتهای مختلف مورد آزمایش قرار می‌گیرد. نتایج آزمایش در شکل رسم شده است و مقاومت R را می‌توان با تقریب نسبتاً دقیقی به صورت منحنی سهمی شکل خط چین نشان داد. اگر مدل را با سرعتی برابر۲ m/s رها کنیم، زمان t لازم برای اینکه سرعت کشتی به ۱ m/s کاهش یابد و همچنین فاصله x طی شده در این مدت را تعیین کنید.

حل: رابطه مقاومت ـ سرعت را با تقریب $R = kv^2$ نشان می‌دهیم و مقدار k را با قرار دادن $R = ۸\ N$ و $v = ۲\ m/s$ در آن رابطه پیدا می‌کنیم که $k = \frac{۸}{۲^۲} = ۲\ N.s^2/m^2$ بنابراین، $R = ۲v^۲$ می‌گردد.

تنها نیروی افقی وارده به مدل، R می‌باشد، بنابراین:

❶ $$[\Sigma F_x = ma_x] \qquad -R = m\,a_x \qquad \text{یا} \qquad -2v^2 = 10\frac{dv}{dt}$$

با جدا کردن متغیرها و انتگرال‌گیری خواهیم داشت:

$$\int_0^t dt = -5\int_2^v \frac{dv}{v^2} \qquad t = 5\left(\frac{1}{v} - \frac{1}{2}\right)\ \text{sec}$$

بنابراین موقعی که $v = v_0/۲ = ۱\ m/s$ است، زمان برابراست با:

جواب $$t = 5\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) = 2.5\ \text{s}$$

فاصله پیموده شده در مدت ۲/۵ ثانیه توسط انتگرال‌گیری از $v = dx/dt$ بدست می‌آید. پس، $v = ۱۰/(۵+۲t)$ است.

بنابراین:

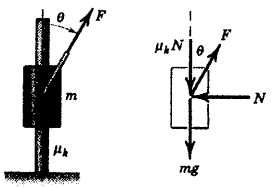
❷ $$\int_0^x dx = \int_0^{2.5} \frac{10}{5+2t}\,dt \qquad x = \frac{10}{2}\ln(5+2t)\Big|_0^{2.5} = 3.47\ \text{m}$$

نکات مفید

❶ *به علامت منفی R توجه داشته باشید*

❷ *پیشنهاد، فاصله x را برحسب سرعت v بعد از رها شدن بیان کنید و ببینید که با رابطه $x = 5\ln\frac{v_0}{v}$ مطابقت دارد.*

مسئله نمونه ۵-۳



طوقه‌ای به جرم m تحت تاثیر نیروی F که دارای مقدار ثابت و امتداد متغیر می‌باشد، بر روی میله‌ای عمودی به طرف بالا می‌لغزد. اگر $\theta = kt$ باشد؛ که در آن k عددی ثابت است و اگر طوقه در $\theta = ۰$ از سکون شروع به حرکت نماید، مقدار نیروی F در موقعیتی که $\theta = \pi/۲$ طوقه به سکون می‌رسد را تعیین کنید. ضریب اصطکاک سینتیکی بین طوقه و میله برابر μ_k می‌باشد.

حل: پس از رسم ترسیمه آزاد جسم، معادله حرکت را در جهت y، بکار برده، خواهیم داشت:

❶ $$[\Sigma F_y = ma_y] \qquad F\cos\theta - \mu_k N - mg = m\frac{dv}{dt}$$

تعادل در امتداد افقی ایجاب می‌کند که $N = F\sin\theta$ گردد. با قرار دادن $\theta = kt$ و انتگرال‌گیری اولیه بین حدود کلی خواهیم داشت:

$$\int_0^t (F\cos kt - \mu_k F\sin kt - mg)dt = m\int_0^v dv$$

که نتیجه می‌گردد:

$$\frac{F}{k}[\sin kt + \mu_k(\cos kt - 1)] - mgt = m\upsilon$$

برای $\theta = \pi/۲$ ، زمان $t = \pi/۲k$ و $\upsilon = ۰$ می‌گردد. بنابراین:

❷ جواب $$\frac{F}{k}[1 + \mu_k(0-1)] - \frac{mg\pi}{2k} = 0 \quad \text{یا} \quad F = \frac{mg\pi}{2(1-\mu_k)}$$

نکات مفید

❶ اگر θ به جای اینکه تابعی از k باشد، به صورت تابعی از جابجایی عمودی y بیان می‌شد، شتاب تابعی از جابجایی می‌گشت و می‌بایست از رابطه $\upsilon d\upsilon = ady$ استفاده کرد.

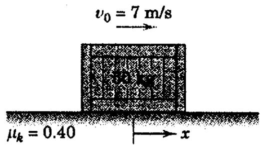
❷ مشاهده می‌شود که جوابها به k ، میزان تغییر امتداد نیرو بستگی ندارد.

مسائل

مسائل مقدماتی

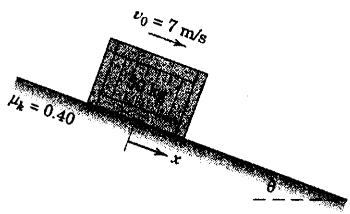
۳-۱ صندوقی به جرم ۵۰ kg با سرعت اولیه ۷ m/s در ۰ = x در امتداد کف پرتاب می‌شود. ضریب اصطکاک سینتیکی ۰/٤ است. زمان لازم برای اینکه صندوق متوقف شود و فاصله پیموده شده x را محاسبه کنید.

جواب $t =$ ۱/۷۸٤ s و $x =$ ٦/۲٤ m



شکل مسئله ۳-۱

۳-۲ صندوق ۵۰ کیلوگرمی مسئله ۳-۱ با سرعت ۷ m/s به طرف پایین شیب مطابق شکل پرتاب می‌شود. زمان t لازم برای متوقف شدن جعبه و فاصله پیموده شده x را پیدا کنید، اگر: (الف) $\theta =$ ۱۵° و (ب) $\theta =$ ۳۰° باشد.

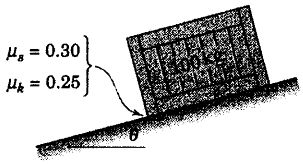


شکل مسئله ۳-۲

۳-۳ صندوقی به جرم ۱۰۰ kg با دقت با سرعت صفر روی سطح شیبداری قرار داده شده است. توضیح دهید چه اتفاقی خواهد افتاد اگر: (الف) $\theta =$ ۱۵° و (ب) $\theta =$ ۲۰° باشد.

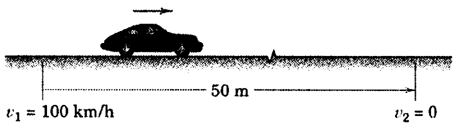
جواب بدون حرکت می‌ماند $a =$ ۰ (الف)

به طرف پایین حرکت می‌کند $a =$ ۱/۰۵۱ m/s^2 (ب)



شکل مسئله ۳-۳

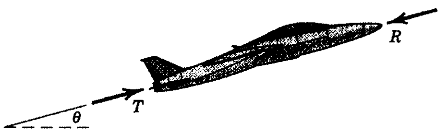
۳-٤ در طی آزمایش ترمز، یک اتومبیل موتور عقب که با سرعت ۱۰۰ km/h شروع به حرکت کرده، پس از مسافت ۵۰ m متوقف می‌گردد. اگر نیروی ترمز چهار چرخ یکسان باشد، نیروی ترمز هر چرخ را بدست آورید. فرض کنید شتاب کاهنده اتومبیل ۱۵۰۰ kg ثابت است.



شکل مسئله ۳-۴

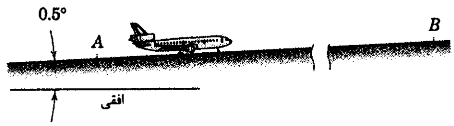
۳-۵ n، نسبت نیروی رانش خالص (نیروی جلو برنده T منهای مقاومت R) به وزن هواپیمای جت، چگونه باشد تا هواپیما بتواند تحت زاویه θ نسبت به افق و با شتاب a در امتداد پرواز، اوج بگیرد؟

جواب $n = \sin\theta + \dfrac{a}{g}$



شکل مسئله ۳-۵

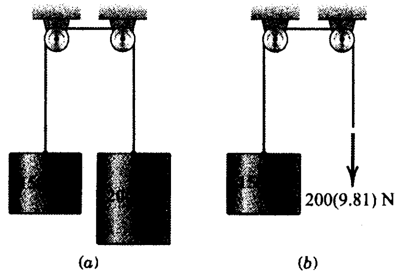
۳-٦ یک هواپیمای جت به جرم ۳۰۰ Mg دارای چهار موتور می‌باشد که هرکدام از آنها نیروی رانشی ثابت ۲٤۰ kN را در حین سرعت گیری جهت جدا شدن از زمین تولید می‌کنند. فاصله s را، اولا در موقعی که امتداد سرعت گیری، سربالایی از A به B و ثانیا، سرپایینی B به A باشد، روی باند که شیب ناچیزی دارد، بدست آورید. از مقاومت هوا و مقاومت حرکتی روی باند صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۶-۳

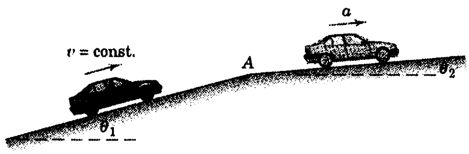
۷-۳ شتاب عمودی a استوانه ۱۵۰ kg را برای هر یک از دو حالت نشان داده شده، محاسبه کنید. از اصطکاک و جرم قرقره‌ها صرفنظر کنید.

جواب (الف) $a = ۱/۴۰۱\ m/s^2$ و (ب) $a = ۳/۲۷\ m/s^2$



شکل مسئله ۷-۳

۸-۳ اتومبیلی سربالایی تپه‌ای به شیب θ_1 را با سرعت ثابت v بالا می‌رود. اگر شیب کاهش پیدا کرده و در نقطه A به θ_2 برسد، شتاب a اتومبیل را درست بعد از گذشتن از نقطه A بدست آورید؛ در صورتیکه راننده اتومبیل نه گاز دادن را تغییر دهد و نه دنده را عوض نماید.

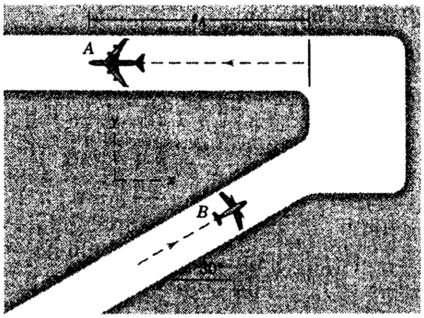


شکل مسئله ۸-۳

۹-۳ هواپیمای جت A به جرم ۳۴۰ Mg دارای چهار موتور است که هرکدام از آنها نیروی تقریباً ثابت رانشی ۲۰۰ kN را در حین بلند شدن از سطح باند فرودگاه تولید می‌کند. هواپیمای کوچک B به سمت انتهای باند پرواز با سرعت ثابت $v_B =$ ۲۵ km/h در حال حرکت است؛ بدون اینکه قصد بلند شدن داشته باشد. سرعت و شتاب ظاهری A را از دید ناظری که در B، در زمان ۱۰ ثانیه پس از لحظه‌ای که A شروع به حرکت می‌کند، حساب کنید. از نیروی مقاومت هوا و نیروی اصطکاک غلتشی صرفنظر کنید.

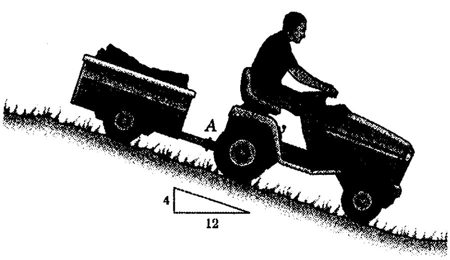
جواب $\mathbf{a}_{A/B} = -۲/۳۵\mathbf{i}\ m/s^2$

$\mathbf{v}_{A/B} = -۲۹/۵\ \mathbf{i} - ۳/۴۷\mathbf{j}\ m/s$



شکل مسئله ۹-۳

۱۰-۳ مجموعه تراکتور و یدک آن به طرف پایین سطح شیبداری با سرعت ۸ km/h در حرکت است که راننده ترمز می‌گیرد و پس از پیمودن مسافت ۱/۲ m تراکتور می‌ایستد. درصد افزایش n در مولفه نیروی اتصال بین تراکتور و یدک به موازات سطح شیبدار را نسبت به نیروی موجود در اتصال به هنگام حرکت مجموعه با سرعت ثابت، تخمین بزنید. جرم مجموعه یدک با بارش ۲۲۰ kg است. فرضیات خود را برای حل بیان کنید.



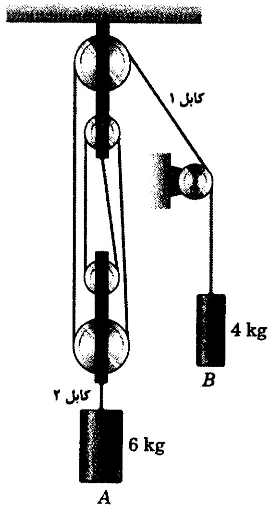
شکل مسئله ۱۰-۳

۳-۱۱ مجموعه بلوک ـ بالابر زیر از حالت سکون در حالی که کلیه کابل‌ها در حالت کشیدگی است، شروع به حرکت می‌کند. با صرفنظر کردن از جرم و اصطکاک قرقره‌ها، شتاب هر استوانه و کششهای T_1 و T_2 در دو کابل نشان داده شده را تعیین کنید.

جواب a_A = ۱/۴۰۱ m/s^2 به طرف بالا

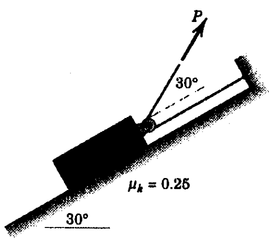
a_B = ۰/۶۱ m/s^2 به طرف پایین

T_1 = ۱۶/۸۲ N و T_2 = ۶۷/۳ N



شکل مسئله ۱۱-۳

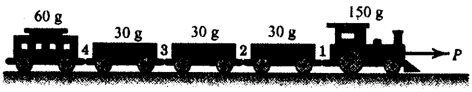
۳-۱۲ کشش P در کابل را طوری تعیین کنید که به بلوک ۵۰ کیلوگرمی، شتابی ثابت برابر ۲ m/s^2 به طرف بالای سطح شیبدار بدهد.



شکل مسئله ۱۲-۳

۳-۱۳ ترن اسباب بازی حداکثر نیروی متصل کننده مغناطیسی ۰/۹ N را بین اتصالات واگنها ایجاد می‌کند. حداکثر نیروی کشش P که بچه‌ای می‌توانـد بـه لوکوموتیـو بدهـد تـا اتصالات بین واگنها قطع نشود، چقـدر اسـت؟ اگر P بتدریـج اضافه گردد، کدام اتصال قطع مـی‌گردد؟ از جـرم و اصطکـاک کلیه چرخها صرفنظر کنید.

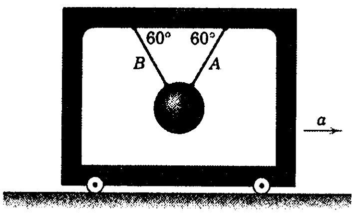
جواب P = ۱/۸ N و اتصال ۱



شکل مسئله ۱۳-۳

مسائل ویژه

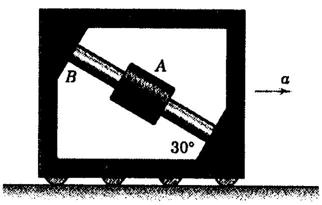
۳-۱۴ گوی فولادی توسط دو طنـاب A و B در قـابی شتابدار معلق می‌باشد. شتاب a قاب را طوری بدسـت آوریـد که کشش در A دو برابر کشش در B گردد.



شکل مسئله ۱۴-۳

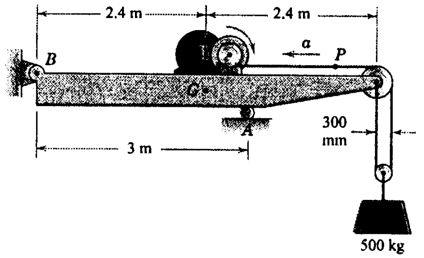
۳-۱۵ طوقه A آزادانه روی میله صیقلـی B کـه داخـل قابی سوار شده، می‌لغزد. صفحه قـاب عمـودی اسـت. شـتاب افقی a قاب را طوری تعیین کنید کـه طوقـه در یـک موقعیـت ثابت روی میله باقی بماند.

جواب a = ۵/۶۶ m/s^2



شکل مسئله ۱۵-۳

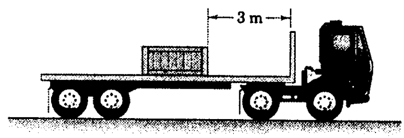
۳-۱۶ تیر و مجموعه مکانیزم بالابر آن ۱۲۰۰ kg جرم دارند و مرکز جرمشان در G می‌باشد. اگر شتاب اولیه a نقطه P روی کابل بالابر $6\ m/s^2$ باشد، نیروی عکس العمل متناظر تکیه‌گاه A را بدست آورید.



شکل مسئله ۱۶-۳

۳-۱۷ ضریب اصطکاک استاتیکی بین کفی کامیون و صندوقی که حمل می‌کند، ۰/۳ است. حداقل مسافت s را که کامیون می‌تواند از سرعت ۷۰ km/h با شتاب کاهنده ثابت تا توقف، طی کند به شرط آنکه صندوق به جلو نلغزد، تعیین کنید.

جواب $s = 64/3\ m$

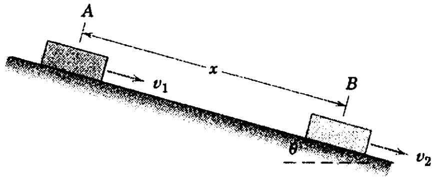


شکل مسئله ۱۷-۳

۳-۱۸ اگر کامیون مسئله ۱۷-۳ با سرعت اولیه ۷۰ km/h، با شتاب کاهنده یکنواخت به طرف جلو پس از طی مسافت ۵۰ m متوقف گردد. تعیین کنید آیا صندوق به دیواره جلویی کفی کامیون برخورد می‌کند یا نه؟ اگر صندوق به دیواره برخورد کند، سرعت آنرا نسبت به کامیون، در لحظه برخورد حساب کنید. از ضریب اصطکاک $\mu_s = 0/3$ و $\mu_k = 0/25$ استفاده کنید.

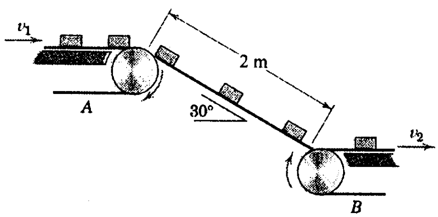
۳-۱۹ مشاهده می‌شود که قطعه نشان داده شده در هنگام عبور از نقطه A دارای سرعت $v_1 = 20\ m/s$ و هنگام عبور از نقطه B دارای سرعت $v_2 = 10\ m/s$ روی شیب می‌باشد. چنانچه $x = 75\ m$ و $\theta = 15°$ باشد، ضریب اصطکاک سینتیکی μ_k بین قطعه و شیب را حساب کنید.

جواب $\mu_k = 0/479$



شکل مسئله ۱۹-۳

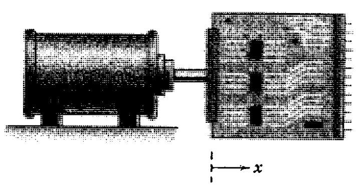
۳-۲۰ محموله‌های کوچکی توسط تسمه نقاله A که با سرعت $v_1 = 0/4\ m/s$ در حرکت است به سرسره ۲ m منتقل می‌شوند. اگر انتقال به تسمه نقاله B که دارای سرعت $v_2 = 0/9\ m/s$ می‌باشد، بدون لغزش انجام گیرد؛ ضریب اصطکاک μ_k بین محموله و سرسره را حساب کنید.



شکل مسئله ۲۰-۳

۳-۲۱ در طی آزمایش قابلیت اطمینان، یک مدار چاپی به جرم m را به مرتعش کننده الکترومغناطیسی متصل کرده، آنرا تحت اثر جابجایی نوسانی $x = X\sin\omega t$ قرار داده‌ایم، که در آن X دامنه حرکت، ω فرکانس حرکت بر حسب رادیان بر ثانیه و t زمان است. مقدار F_{max}، نیروی افقی را که مرتعش کننده روی مدار چاپی وارد می‌کند، تعیین کنید.

جواب $F_{max} = m X \omega^2$



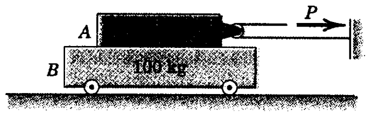
شکل مسئله ۲۱-۳

۳-۲۲ برای مسافرتهایی در اعماق فضا، یک موتور یون سزیم طوری طراحی شده کــه نیروی رانـش ۲/۵ N را بـرای مدت طولانی تولید کند. چنانچه موتور، سفینه فضایی به جــرم ۷۰ Mg را در فضای بین منظومه‌ها به حرکــت در آورد، زمـان لازم t جـهت افزایـش سـرعت ســفینه از ۴۰۰۰۰ km/h بــه ۶۵۰۰۰ km/h را حساب کنید. همچنین فاصله s را که در ایـن مدت می‌پیماید، پیدا کنید. فرض کنیــد کـه سـفینه فضـایی در ناحیه دور افتاده‌ای از فضا در حرکت بوده و در این ناحیه تنـها نیرویی که بر سفینه در امتداد حرکتش اعمال می‌شـود، نـیروی حاصل از موتور آن است.

۳-۲۳ اگر ضریب اصطکاک استاتیکی و سینتیکی بیـن قطعه A به جرم ۲۰ kg و ارابه B به جرم ۱۰۰ kg در عمل هـر دو برابـر ۰/۵ باشـند، شـتاب هـر قسـمت را بـه ازای (الف) $P =$ ۶۰ N و (ب) $P =$ ۴۰ N تعیین کنید.

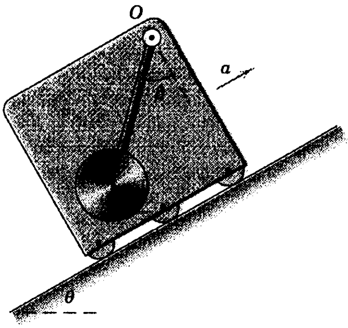
جواب (الف) $a_A =$ ۱/۰۹۵ m/s^2 و $a_B =$ ۰/۹۸۱ m/s^2

(ب) $a_A = a_B =$ ۰/۶۶۷ m/s^2



شکل مسئله ۳-۲۳

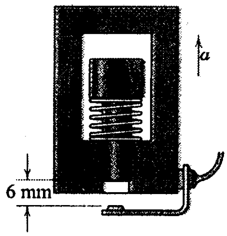
۳-۲۴ آونگ ساده‌ای که در نقطه O لـولا شـده آزادانـه می‌تواند در صفحه قائم قاب نوسان کند. در صورتیکه بر قـاب شتاب a در بالا رفتن از شیب θ داده شود، رابطه‌ای برای زاویه پایدار β، بعد از اینکه نوسانات بوجـود آمـده در اثـر حرکـت اولیه متوقف شدند، بنویسید. از جـرم میلـه بـاریک نگهدارنـده صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۳-۲۴

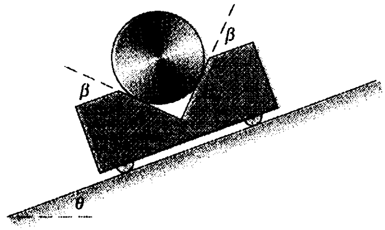
۳-۲۵ وسیله نشان داده شده، به عنوان یک شتاب‌سـنج بکار می‌رود و شامل استوانه A به جرم ۱۰۰ گرم که فـنر را در حالیکه به محفظه این وسـیله شـتاب a بـه طـرف بـالا اعمـال می‌شود، می‌فشارد. اگر شتاب a به آرامی به مقدار $5g$ افزایـش یابد و باعث شود که استوانه به اندازه ۶ mm از حـالت تعـادل خارج شده و کلید الکتریکی را لمس کنـد، سـختی فـنر k را مشخص نمایید. از اصطکاک می‌توان صرفنظر کرد.

جواب $k =$ ۸۱۸ N/m



شکل مسئله ۳-۲۵

۳-۲۶ یک استوانه به جرم m مطابق شکل روی ارابه‌ای نگهدارنده، قـرار گرفتـه اسـت. چنانچـه $\beta =$ ۴۵° و $\theta =$ ۳۰° باشد، شتاب ماکزیمم a را که می‌توان به ارابه در جـهت بـالای سطح شیب اعمال نمود بدون اینکه استوانه تمـاس خـود را در نقطه B با آن از دست بدهد، محاسبه کنید.

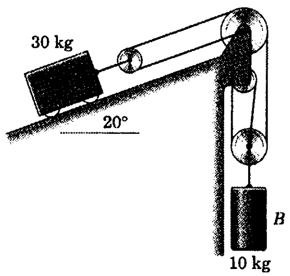


شکل مسئله ۲۶-۳

۲۷-۳ مجموعه مسئله ۲۰۸-۲ با اضافه شدن اطلاعات مربوط به جرم، در اینجا تکرار می‌شود. با صرفنظر کردن از اصطکاک و جرم قرقره‌ها، شتاب اجسام A و B را هنگامی که از حالت سکون رها می‌گردند، تعیین کنید.

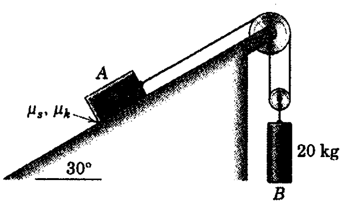
جواب به طرف پایین شیب $a_A = ۱/۰۲۴\ \text{m/s}^2$

به طرف بالا $a_B = ۰/۶۸۲\ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۲۷-۳

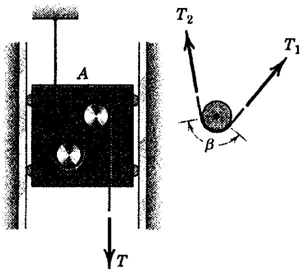
۲۸-۳ مجموعه از حالت سکون در حالت کابل کشیده رها می‌گردد. برای ضرایب اصطکاک $\mu_s = ۰/۲۵$ و $\mu_k = ۰/۲۰$، شتاب هر کدام از اجسام و کشش T در کابل را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۲۸-۳

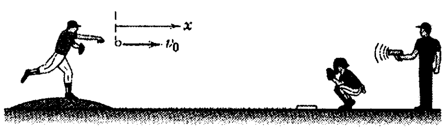
۲۹-۳ شتاب بالابر A به جرم ۵۰ kg در میان راهنمای صیقلی عمودی توسط کشش T کابلی که از بین دو توپی ثابت مدور روی بالابر رد شده، کنترل می‌گردد. اگر ضریب اصطکاک بین کابل و توپی‌ها ۰/۲۰ بوده و شتاب A به سمت پایین به ۱/۲ m/s^2 محدود شده باشد، مقدار T را تعیین کنید (بیاد آورید که رابطه بین کشش در یک کابل انعطاف پذیر که روی توپی ثابتی می‌لغزد، $T_۲ = T_۱\, e^{\mu\beta}$ می‌باشد).

جواب $T = ۱۷۱/۳\ \text{N}$



شکل مسئله ۲۹-۳

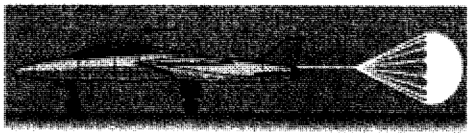
۳۰-۳ بازیکنی، یک توپ بیسبال را به صورت افقی به طرف تفنگدار سرعت سنج پرتاب می‌کند. توپ بیسبال دارای جرمی برابر ۱۴۶ گرم و محیطی برابر ۲۳۲ mm است. اگر در $x = ۰$ سرعت برابر $v_۰ = ۱۵۰\ \text{km/h}$ باشد، سرعت را بر حسب تابعی از x بیان کنید. فرض کنید نیروی مقاومت حرکتی در خلاف جهت افقی توپ با رابطه $D = C_D(\frac{۱}{۲}\rho v^۲)S$ داده شده است که در آن C_D ضریب پسا، ρ جرم مخصوص هوا، v سرعت، S مساحت سطح مقطع توپ می‌باشد. مقدار ۰/۳ را برای C_D بکار برید. از مولفه حرکتی y صرفنظر نمایید. اما درستی این فرض را هم بررسی کنید. جواب خود را برای $x = ۱۸\ \text{m}$ برآورد نمایید که فاصله بین دست پرتاب کننده و دستکش دریافت کننده توپ می‌باشد.

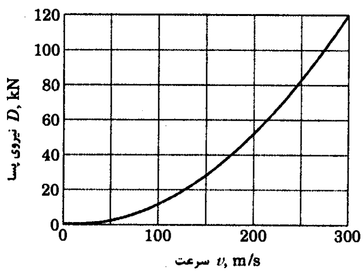


شکل مسئله ۳۰-۳

۳-۳۱ سرعت یک هواپیمای جت بــه جـرم ۵ Mg در هنگام نشستن ۳۰۰ km/h است کــه در آن لحظـه، چتـر ترمـز گیرنده برای کاهش سرعت بکار می‌افتد. اگر نــیروی مقـاومت حرکتی (نیروی پسا) هواپیما مطابق شکل پیوســته بـا سـرعت تغیـیر نمـاید، مقـدار مسـافت x را کـه لازم اسـت روی بـــاند فرودگاه پیموده شود تا سرعت به ۱۵۰ km/h تقلیل پیـدا کنـد، محاسبه کنید. تغییرات نیروی پسا را از رابطه $D = kv^2$ تقریـب بگیرید که در آن k مقدار ثابتی است.

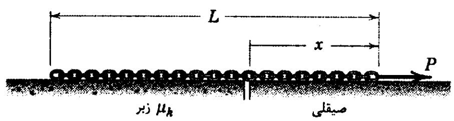
جواب $x = ۲۰۱$ m





شکل مسئله ۳-۳۱

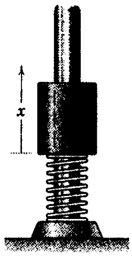
۳-۳۲ زنجیر سنگینی به جـرم در واحـد طـول ρ، در امتداد سطح افقی که قسمتی از آن صیقلی و قسمتی از آن زبـر است با نیروی ثابت P کشیده می‌شود. اگر در شـروع حرکـت در $x = ۰$، زنجیر در قسمت زبر قرار گرفتــه باشـد و چنانچـه ضریب اصطکاک بیـن زنجـیر و قسـمت زبـر برابـر μ_k باشـد، سرعت v زنجیر را در $x = L$ تعیین کنید. نیروی P بـزرگتـر از $\mu_k \rho g L$ می‌باشد و لذا باعث حرکت خواهد شد.



شکل مسئله ۳-۳۲

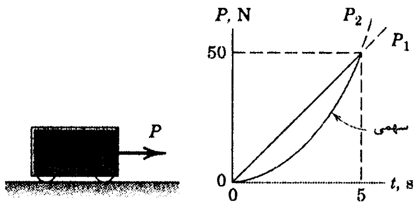
۳-۳۳ غلاف ۱/۸ کیلوگرمی کــه روی فـنری الاسـتیک قرار گرفته و فنر دارای سـختی ۱۷۵۰ N/m بـوده و بـه انـدازه ۱۵۰ mm فشـرده گردیده، از حالت سکون رها می‌گردد. شتاب a غلاف را به صورت تابعی از جابجایی قائم x از لحظه رهایی تعیین کنید. سرعت غلاف، v را در موقعیت $x = ۰/۱۵$ m پیـدا کنید. اصطکاک قابل چشم پوشی است.

جواب $a_x = ۱۳۶/۰ \quad ۹۷۲x$ و $v = ۴/۳۵$ m/s



شکل مسئله ۳-۳۳

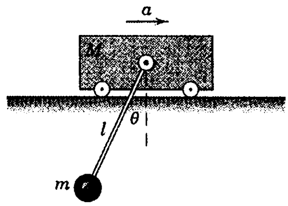
۳-۳۴ نیروی P مطابق شکل به ارابه‌ای کـه در حـالت سکون است، وارد می‌گردد. سرعت و جابجـایی را در $t = ۵$ s برای هر یک از نیروهــای $P_۱$ و $P_۲$ تعییـن کنیـد. از اصطکـاک صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۳-۳۴

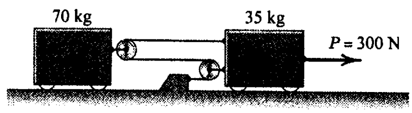
۳-۳۵ میله‌ای به طول l و جرم ناچیز، ارابه‌ای بــه جـرم M را به ذره‌ای به جرم m وصل می‌کنـند. اگر ارابــه تحـت اثـر شتاب ثابت a به طرف راست قرار گیرد، زاویه حالت پایـای θ که میلهٔ دارای حرکت چرخشی آزاد، با محـور قـائم می‌سـازد، چقدر است؟ نیروی خالص P را (نشان داده نشده) که بایسـتی به ارابه وارد گردد تا شتاب مذکور ایجاد شود، تعیین کنید.

جواب $\theta = \tan^{-1}(a/g)$ و $P = (M + m)\, a$



شکل مسئله ۳۵-۳

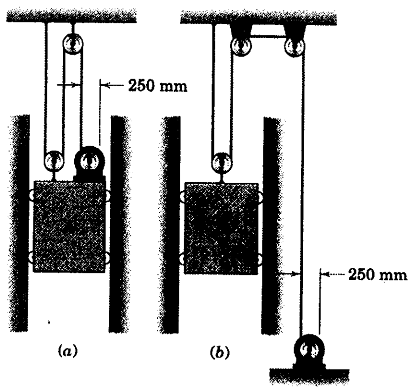
۳۶-۳ شتابهای اجسام A و B و کشش در کابل را که ناشی از اعمال نیروی ۳۰۰ نیوتنی می‌باشد، تعیین کنید. از کلیه اصطکاکها و جرم قرقره‌ها صرفنظر نمایید.



شکل مسئله ۳۶-۳

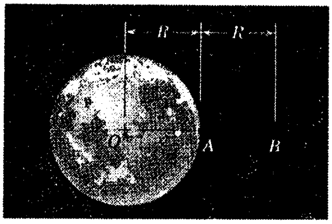
۳۷-۳ دو نوع آسانسور در شکل نشان داده شده‌اند. آسانسور A با موتور و طبلک، روی هم ۹۰۰ kg جرم دارند. آسانسور B بدون موتور و طبلک نیز دارای جرم ۹۰۰ kg می‌باشد. اگر موتورها گشتاور ثابت ۶۰۰ N.m را به مدت ۲ s به طبلکهای خود با قطر ۲۵۰ mm در هر دو حالت اعمال نماید، آسانسوری را که شتاب بیشتری ایجاد می‌کند، انتخاب کنید. سرعت آن را ۱/۲ s پس از شروع حرکت تعیین نمایید. از جرم کابلها و قرقره‌ها و کلیه اصطکاک‌ها صرفنظر کنید.

جواب حالت (a) دارای شتاب بیشتری است $v = ۷/۴۳$ m/s



شکل مسئله ۳۷-۳

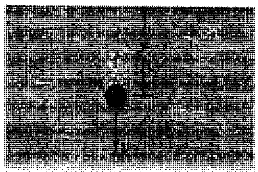
۳۸-۳ در طرح یک ماموریت فضایی در سطح کره ماه، پیش بینی شده که فضاپیمایی به جرم ۱۲۰۰ kg از نقطه A از سطح کره ماه در یک خط مستقیم از نقطه B بگذرد. اگر موتور فضاپیما رانش ثابت ۲۵۰۰ N را تولید کند، سرعت حرکت آن را هنگام عبور از نقطه B تعیین کنید. از جدول ۲- D و قانون جاذبه در فصل ۱ در صورت نیاز استفاده کنید.



شکل مسئله ۳۸-۳

۳۹-۳ در یک آزمایش مقاومت در برابر حرکت درون یک ظرف روغن، یک گلوله کوچک فولادی به جرم m از حالت سکون از سطح ($y = ۰$) رها می‌گردد. اگر مقاومت در برابر حرکت توسط رابطه $R = kv$ داده شود که در آن k عددی ثابت است. عبارتی برای عمق لازم h جهت رسیدن گلوله به v را بدست آورید.

جواب $$h = \frac{m^۲ g}{k^۲} \ln\left(\frac{۱}{۱ - kv/(mg)}\right) - \frac{mv}{k}$$

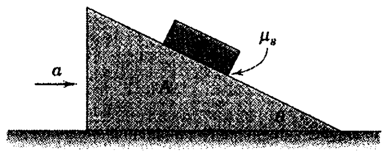


شکل مسئله ۳۹-۳

۴۰-۳ اگر گلوله فولادی مسئله ۳۹-۳ از حالت سکون از سطح مایعی که مقاومت در برابر حرکت آن $R = cv^۲$، که در آن c ثابت و v سرعت به طرف پایین گلوله است، رها گردد. عمق لازم h برای رسیدن گلوله به سرعت v را تعیین کنید.

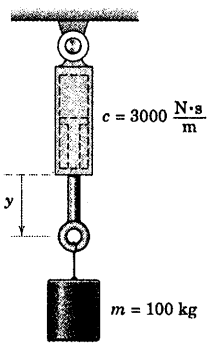
۳-۴۱ به بلوک شیبدار A شتاب ثابت a به سمت راست داده می‌شود. دامنه مقادیر θ برای بلوک B که نسبت به بلوک A لغزش ندارد را بدون توجه به بزرگی a، تعیین کنید. ضریب اصطکاک استاتیکی بین بلوکها μ_s می‌باشد.

جواب $\tan^{-1}(۱/\mu_s) \le \theta \le \pi/۲$



شکل مسئله ۳-۴۱

۳-۴۲ یک ضربه گیر (کمک فنر)، دستگاهی مکانیکی است که مقاومت در مقابل فشار یا کشش را توسط $R = cv$ ایجاد می‌کند که در آن c ضریب ثابت و v میزان تغییر طول ضربه گیر نسبت به زمان است. جهت آزمایش یک ضربه‌گیر با ثابت $c = ۳۰۰۰$ N.s/m مطابق شکل، سیلندری به جرم ۱۰۰ kg را به آن آویزان می‌کنند. مجموعه از حالت سکون رها گشته و اجازه انبساط می‌یابد. تعیین کنید: (الف) سرعت در حالت پایا، v_s را برای انتهای پایینی ضربه‌گیر و (ب) زمان t و جابجایی y را برای انتهای پایینی ضربه‌گیر، موقعی که سیلندر به ۹۰ درصد سرعت حالت پایدار خود رسیده است. از جرم پیستون و میله رابط صرفنظر کنید.



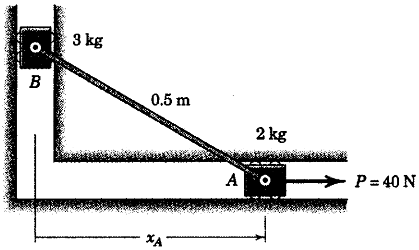
شکل مسئله ۳-۴۲

۳-۴۳ لغزنده‌های A و B توسط میله صلب سبکی به طول $l = ۰/۵$ m به یکدیگر متصل شده‌اند و با اصطکاک ناچیزی در شیارهای افقی نشان داده شده، حرکت می‌کنند. در موقعیت $x_A = ۰/٤$ m، سرعت A برابر $v_A = ۰/۹$ m/s به طرف راست می‌باشد. شتاب هر کدام از لغزنده‌ها و نیروی موجود در میله را در این لحظه تعیین کنید.

جواب $a_A = ۱/۳٦٤\ \text{m/s}^2$ به طرف راست

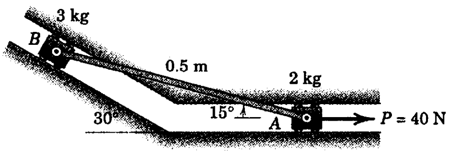
$a_B = ۹/۳۲\ \text{m/s}^2$ به طرف پایین

$T = ٤٦/٦$ N



شکل مسئله ۳-۴۳

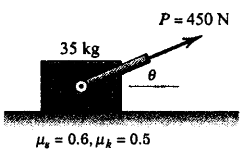
۳-٤٤ لغزنده‌های A و B توسط یک میله صلب سبک به یکدیگر متصل شده‌اند و با اصطکاک ناچیزی در شیارهایی که در صفحه افق واقع شده‌اند، حرکت می‌کنند. برای موقعیت نشان داده شده، سرعت A برابر ۰/٤ m/s به طرف راست است. شتاب هر کدام از لغزنده‌ها و نیروی موجود در میله را در این لحظه تعیین کنید.



شکل مسئله ۳-۴۴

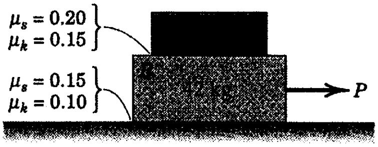
۳-٤۵ به ازای چه مقدار (مقادیر) از زاویه θ شتاب قطعه ۳۵ کیلوگرمی برابر ۹ m/s^2 به طرف راست خواهد بود؟

جواب $\theta = ۱۱/۸۸°$ و $٤۱/۳°$



شکل مسئله ۳-۴۵

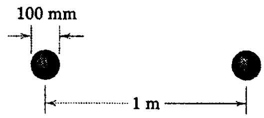
۳-٤٦ ◀ نیروی P روی قطعه‌ها که ابتدا در حالت سکون هستند به آهستگی از صفر تا ۲٦۰ N افزایش می‌یابد. شتاب هر دو جرم را بر حسب P رسم کنید.



شکل مسئله ۴۶-۳

۳-٤٧ ◀ دو کره آهنی، هر یک به قطر ۱۰۰ mm، که فاصله مراکزشان ۱ m می‌باشد، از حالت سکون رها می‌گردند. فرض کنید در فضا هیچ نیرویی غیر از نیروی جاذبه متقابل دو جسم وجود نداشته و زمان t لازم برای رسیدن دو کره به یکدیگر و سرعت مطلق v هر کره را در لحظه تماس حساب کنید.

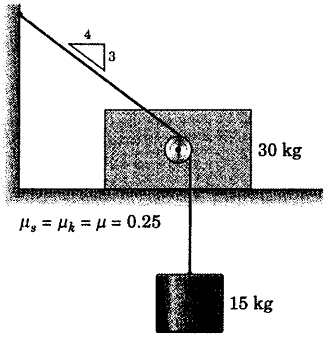
جواب $t =$ ۱۳ h۳۳ min و $v =$ ٤/۷٦(۱۰$^{-۵}$) m/s



شکل مسئله ۴۷-۳

۳-٤٨ ◀ در وضعیت نشان داده شده، مجموعه از حالت سکون رها می‌گردد. کشش T در ریسمان و شتاب a قطعه ۳۰ کیلوگرمی را محاسبه کنید. قرقره کوچک متصل به قطعه دارای جرم و اصطکاک ناچیزی است. (*پیشنهاد:* ابتدا رابطه سینماتیکی بین شتاب‌های دو جسم برقرار کنید.)

جواب $T =$ ۱۳۸/۰ N و $a =$ ۰/۷٦٦ m/s^2



شکل مسئله ۴۸-۳

۳-۵ حرکت منحنی الخط

اکنون به سینتیک ذرات که در امتداد مسیرهای منحنی الخط حرکت می‌کنند، توجه می‌کنیم. در بکارگیری قانون دوم نیوتن، رابطه ۳-۳ از توصیف سه مختصاتی که برای شتاب در حرکت منحنی الخط که در بخشهای ۲-٤ و ۲-٥ و ۲-٦ آمد، استفاده خواهیم کرد.

انتخاب دستگاه مختصات به شرایط مسئله بستگی داشته و یکی از اساسی‌ترین تصمیم گیریها در حل مسائل حرکت منحنی الخط می‌باشد. اکنون رابطه ۳-۳ را به سه صورت بازنویسی می‌کنیم و انتخاب هر یک از آنها بستگی به این دارد که کدام دستگاه مناسب‌تر است.

مختصات کارتزین: (بخش ۲-٤، شکل ۲-۷)

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma F_x &= ma_x\\ \Sigma F_y &= ma_y\end{aligned}} \qquad (۳-٦)$$

که در آن: $a_x = \ddot{x}$ و $a_y = \ddot{y}$

مختصات عمودی و مماسی (بخش ۲-٥، شکل ۲-۱۰)

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma F_n &= ma_n\\ \Sigma F_t &= ma_t\end{aligned}} \qquad (۳-۷)$$

که در آن: $a_n = \rho\dot{\beta}^2 = v^2/\rho = v\dot{\beta}\ ,\ a_t = \dot{v}\ ,\ v = \rho\dot{\beta}$

مختصات قطبی: (بخش ۲-٦، شکل ۲-۱٥)

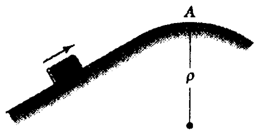
$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma F_r &= ma_r\\ \Sigma F_\theta &= ma_\theta\end{aligned}} \qquad (۳-۸)$$

که در آن: $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2\ ,\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$

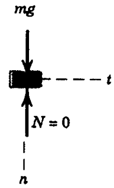
در استفاده از این معادلات حرکت، باید روش عمومی‌ای که در بخش قبلی در مورد حرکت مستقیم الخط آمد را بکار برد. بعد از تعیین حرکت و انتخاب دستگاه مختصات، ترسیمه آزاد جسم که در آن جسم به صورت ذره در نظر گرفته شده را رسم می‌کنیم. سپس جمع نیروهای مورد نظر از طریق متعارف از این ترسیمه بدست می‌آید. ترسیمه آزاد جسم باید کامل باشد تا در جمع کردن نیروها اشتباهی رخ ندهد.

به مجرد اینکه محورهای مرجع، انتخاب و تعیین شدند، روابط نیرو و شتاب باید با این محورها سازگار و موافق باشند. مثلاً در اولین معادله از روابط ۳-۷، جهت مثبت محور n *به طرف* مرکز انحنا می‌باشد و در نتیجه باید جهت مثبت جمع نیروها، ΣF_n نیز *به طرف* مرکز انحنا باشد تا با جهت مثبت شتاب $a_n = v^2/\rho$ مطابقت نماید.

مسئله نمونه ۶-۳



مطلوبست تعیین مقدار ماکزیمم سرعت υ قطعه لغزان، هنگام عبور از نقطه A بدون اینکه تماس خود را با سطح از دست بدهد.

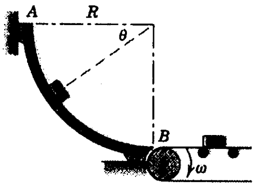


حل. شرط اینکه فقط تماس خود را با سطح از دست بدهد اینست که نیروی قائم N که از سطح بر آن وارد می‌شود، صفر گردد. جمع نیروها در جهت عمودی می‌دهد:

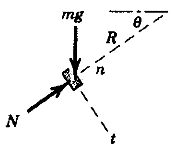
$$[\Sigma F_n = ma_n] \qquad mg = m\frac{\upsilon^2}{\rho} \qquad \upsilon = \sqrt{g\rho} \qquad \text{جواب}$$

اگر سرعت در نقطه A کمتر از $\sqrt{g\rho}$ گردد، نیروی قائم N که از سطح بر قطعه وارد می‌گردد، وجود خواهد داشت. برای اینکه سرعت قطعه در A بیشتر از $\sqrt{g\rho}$ باشد، باید نوعی قید مانند یک سطح منحنی شکل در بالای قطعه قرار داده شود تا نیروی اضافی به طرف پایین را ایجاد کند.

مسئله نمونه ۷-۳



اجسام کوچکی از حالت سکون در نقطه A رها شده و پس از لغزیدن بر روی مسیر صیقلی ربع دایره به شعاع R، روی تسمه نقاله B قرار می‌گیرند. عباراتی برای نیروی قائم N از طرف مسیر بر اجسام بر حسب θ بدست آورده و سرعت زاویه‌ای ω قرقره نقاله به شعاع r را چنان تعیین کنید که اجسام مزبور در لحظه تماس با تسمه روی آن نلغزند.



حل: ترسیمه آزاد یکی از اجسام، همراه با امتدادهای مختصات n و t در شکل نشان داده شده است. نیروی قائم N وابسته به مولفه n شتاب بوده که آن نیز به نوبه خود بستگی به سرعت دارد. سرعت جسم از شتاب مماسی a_t ناشی می‌گردد. بنابراین ابتدا a_t را برای وضعیت کلی پیدا می‌کنیم.

$$[\Sigma F_t = ma_t] \qquad mg\cos\theta = ma_t \qquad a_t = g\cos\theta$$

حالا می‌توانیم سرعت را با انتگرال گیری پیدا کنیم. ❶

$$[\upsilon d\upsilon = a_t ds] \qquad \int_0^{\upsilon} \upsilon d\upsilon = \int_0^{\theta} g\cos\theta\, d(R\theta) \qquad \upsilon^2 = 2gR\sin\theta$$

نیروی قائم از جمع‌بندی نیروها در امتداد مثبت n بدست می‌آید که در امتداد مولفه n شتاب نیز می‌باشد.

$$[\Sigma F_n = ma_n] \qquad N - mg\sin\theta = m\frac{\upsilon^2}{R} \qquad N = 3mg\sin\theta \qquad \text{جواب}$$

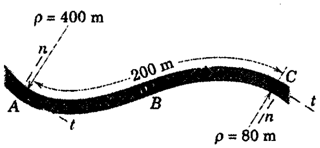
قرقره نقاله باید با سرعت $\upsilon = r\omega$ در $\theta = \pi/۲$ بچرخد. بنابراین:

جواب $\omega = \dfrac{\sqrt{2gR}}{r}$

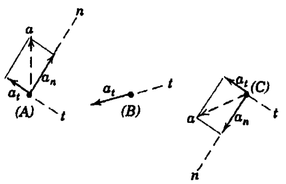
نکته مفید

❶ در اینجا لازم است که شتاب مماسی را بر حسب موقعیت بیان کنیم، به نحوی که با انتگرال گیری از معادله سینماتیکی $\upsilon\, d\upsilon = a_t\, ds$ که در آن تمام کمیتها در امتداد مسیر اندازه‌گیری می‌شوند، سرعت υ را بدست آورد.

مسئله نمونه ۸-۳

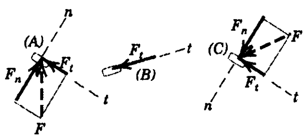


اتومبیلی به جرم ۱۵۰۰ kg وارد بخشی از یک جاده منحنی در صفحه افقی شده و سرعتش را از ۱۰۰ km/h در نقطه A با آهنگی یکنواخت به ۵۰ km/h در نقطه C کاهش می‌دهد. شعاع انحنای جاده در نقطه A برابر ۴۰۰ m و در نقطه C برابر ۸۰ m می‌باشد. کل نیروی افقی که از جاده بر تایرهای اتومبیل در موقعیتهای A، B و C وارد می‌شود را تعیین کنید. نقطه B نقطه عطف جاده می‌باشد که در آن نقطه جهت انحنای مسیر تغییر می‌یابد.



حل: اتومبیل را به صورت ذره‌ای در نظر گرفته تا بتوانیم تمام نیروهایی که از جاده بر تایرها وارد می‌شود را با یک نیرو نشان دهیم. چون حرکت در امتداد مسیر جاده صورت گرفته است، برای مشخص کردن شتاب اتومبیل از مختصات عمودی و مماسی استفاده می‌کنیم. سپس از روی شتاب نیروها را تعیین می‌کنیم.

شتاب ثابت مماسی در جهت منفی t بوده و مقدارش به صورت زیر بدست می‌آید. ❶



$$\left[\upsilon_C^2 = \upsilon_A^2 + 2a_t \Delta s\right] \qquad a_t = \left|\frac{(50/3.6)^2 - (100/3.6)^2}{2(200)}\right| = 1.447 \text{ m/s}^2$$

مولفه‌های شتاب عمودی در نقاط A، B و C برابرند با:

❷
$$\left[a_n = \upsilon^2/\rho\right] \qquad \text{در } A: a_n = \frac{(100/3.6)^2}{400} = 1.929 \text{ m/s}^2$$

$$\text{در } B: a_n = 0$$

$$\text{در } C: a_n = \frac{(50/3.6)^2}{80} = 2.41 \text{ m/s}^2$$

با استفاده از قانون دوم نیوتن در دو امتداد n و t از ترسیمه آزاد اتومبیل خواهیم داشت:

$$[\Sigma F_t = ma_t] \qquad F_t = 1500(1.447) = 2170 \text{ N}$$

❸
$$[\Sigma F_n = ma_n] \qquad \text{در } A: F_n = 1500\,(1.929) = 2890 \text{ N}$$

$$\text{در } B: F_n = 0$$

$$C \text{ در }: F_n = 1500\,(2.41) = 3620 \text{ N}$$

بنابراین، کل نیروی افقی وارد شده بر تایرها برابر است با:

جواب $$A \text{ در }: F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(2890)^2 + (2170)^2} = 3620 \text{ N}$$

جواب $$B \text{ در }: F = F_t = 2170 \text{ N}$$

جواب $$C \text{ در }: F = \sqrt{F_n^2 + F_t^2} = \sqrt{(3620)^2 + (2170)^2} = 4220 \text{ N}$$

نکات مفید

❶ *توجه کنید که مقدار عددی ضریب تبدیل از km/h به m/s برابر $\frac{۱۰۰۰}{۳۶۰۰}$ یا $\frac{۱}{۳/۶}$ می‌باشد.*

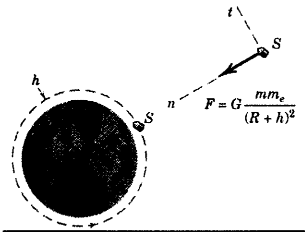
❷ *توجه داشته باشید که a_n همواره به طرف مرکز انحنا است.*

❸ *توجه کنید، جهت F_n بایستی با جهت a_n مطابقت داشته باشد.*

❹ *در صورت لزوم می‌توان زاویه $\mathbf{a}$ و $\mathbf{F}$ را با امتداد مسیر بدست آورد.*

مسئله نمونه ۹-۳

مقدار v، سرعت لازم برای اینکه فضاپیمای S در مدار مدوری در ارتفاع ۳۲۰ km از سطح زمین باقی بماند را حساب کنید.



حل: تنها نیروی خارجی که به فضاپیما وارد می‌شود، نیروی جاذبه زمین می‌باشد (وزن فضاپیما) که در ترسیمه آزاد جسم نشان داده شده است. با جمع نیروها ❶ در جهت عمودی داریم:

$$[\Sigma F_n = ma_n] \qquad G\frac{mm_e}{(R+h)^2} = m\frac{v^2}{R+h} \quad , \quad v = \sqrt{\frac{Gm_e}{R+h}} = R\sqrt{\frac{g}{R+h}}$$

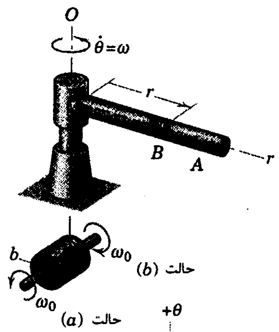
که در آن $gR^2 = G\,m_e$ را جایگزین کرده‌ایم. با قرار دادن مقادیر عددی داریم:

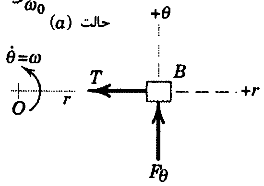
جواب: $$v = (6371)(1000)\sqrt{\frac{32.234}{(6371+320)(1000)}} = 7720 \text{ m/s}$$

نکته مفید

❶ *توجه کنید، اگر مشاهده از یک مرجع اینرسی انجام گیرد، کمیتی بنام «نیروی گریز از مرکز» که در جهت منفی n عمل کند، وجود ندارد. همچنین توجه داشته باشید که نه فضاپیما و نه سرنشینان آن «بی وزن» نیستند، زیرا در هر حالت از قانون جاذبه نیوتن وزن بدست می‌آید. در این ارتفاع وزنها حدود ۱۰ درصد مقادیرشان در سطح زمین‌اند. بالاخره عبارت «gصفر» عبارت غلطی است. تنها در حالتی«g صفر» وجود دارد که مشاهده نسبت به دستگاه مختصاتی صورت بگیرد که شتابی برابر شتاب جاذبه داشته باشد (مانند فضاپیمایی که در یک مدار می‌چرخد) و به نظر می‌رسد که در محیط «gصفر» هستیم. کمیتی که در داخل فضاپیمای مدارگرد واقعاً صفر می‌گردد، نیروی قائمی است که از طرف سطح افقی درون فضاپیما به مثلاً شیء در تماس با آن وارد می‌شود.*

مسئله نمونه ۱۰-۳





لوله A با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}=\omega$ حول محور قائم O می‌چرخد و درون آن توپی کوچک B به جرم m قرار گرفته است. توپی، توسط ریسمانی که از لوله و محور گذشته و بدور طبلکی به شعاع b پیچیده شده است، کنترل می‌گردد. مطلوب است تعیین نیروی کشش T در ریسمان و F_θ مولفه افقی نیرویی که از طرف لوله به توپی اعمال می‌گردد. چنانچه سرعت زاویه‌ای ثابت طبلک ω_0 ابتدا در جهت حالت (a) و سپس در جهت حالت (b) باشد. از اصطکاک صرفنظر کنید.

حل: چون r متغیر است از مختصات قطبی و از معادلات حرکت، رابطه ۸-۳، استفاده می‌کنیم. ترسیمه آزاد توپی B در صفحه افقی نشان داده شده است و تنها شامل نیروهای T و F_θ می‌باشد. از معادله حرکت داریم:

$$[\Sigma F_r = ma_r] \qquad -T = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)$$

$$[\Sigma F_\theta = ma_\theta] \qquad F_\theta = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$$

حالت (a): با $\dot{r}=+b\omega_0$، $\ddot{r}=0$ و $\ddot{\theta}=0$، نیروها برابرند با:

جواب $\qquad F_\theta = 2m\,b\,\omega_0\,\omega \qquad T = m\,r\omega^2$

حالت (b): با $\dot{r}=-b\omega_0$، $\ddot{r}=0$ و $\ddot{\theta}=0$، نیروها برابرند با: ❶

جواب $\qquad F_\theta = -2m\,b\,\omega_0\,\omega \qquad T = m\,r\omega^2$

نکته مفید

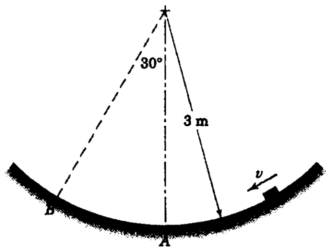
❶ علامت منفی، نشان می‌دهد که F_θ در جهت مخالف با جهت نشان داده شده در ترسیمه آزاد جسم است.

مسائل

مسائل مقدماتی

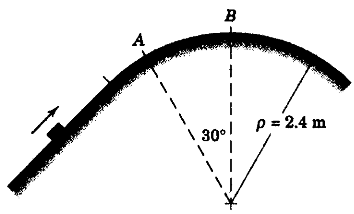
۳-٤۹ بلوک کوچکی به جرم ۰/٦ kg با اصطکاک جزئی روی مسیری مدور به شعاع ۳ m در صفحه قائم می‌لغزد. اگر سرعت بلوک هنگامی که از نقطه A می‌گذرد برابر ۵ m/s باشد و هنگامی که از نقطه B می‌گذرد ٤ m/s شود، نیروی عمودی وارده بر بلوک را از طرف سطح در این دو موقعیت محاسبه کنید.

جواب N_A = ۱۰/۸۹ N و N_B = ۸/۳۰ N



شکل مسئله ۴۹-۳

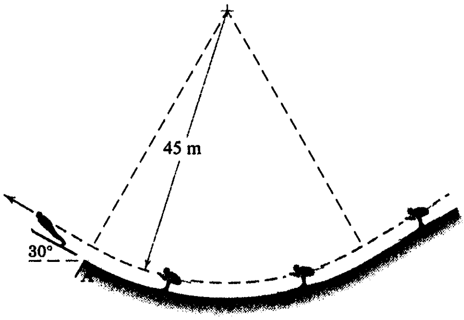
۳-۵۰ اگر قطعه نشان داده شده به جرم ۲ kg با سرعت ۳/۵ m/s از نقطه B ، بالاترین نقطه قسمت دایره‌ای مسیر بگذرد، مقدار N_B نیروی قائم وارده بر قطعه از طرف مسیر را در این نقطه محاسبه کنید. سرعت ماکزیمم v را که قطعه می‌تواند در نقطه A داشته باشد، بدون اینکه تماس خود را با مسیر از دست بدهد، تعیین کنید.



شکل مسئله ۵۰-۳

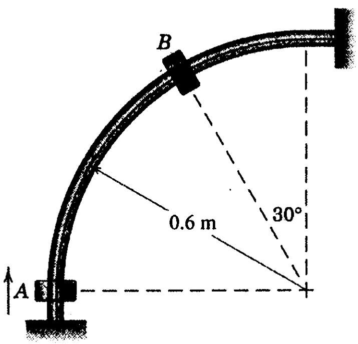
۳-۵۱ اسکی باز پرش ۸۰ کیلوگرمی در موقعیتی که بایستی پرش را انجام دهد، سرعتش را به ۲۵ m/s می‌رساند. نیروی عمودی N وارد از طرف برف به اسکی باز درست قبل از رسیدن به A را بدست آورید.

جواب N = ۱۷۹۱ N



شکل مسئله ۵۱-۳

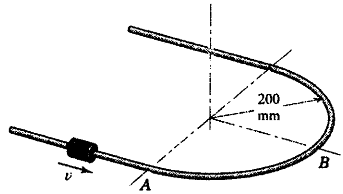
۳-۵۲ لغزندهٔ ۰/۸ کیلوگرمی از نقطه A در امتداد یک میله خمیده ثابت که در صفحه قائم قرار دارد، به بالا رانده می‌شود. اگر سرعت لغزنده هنگام عبور از نقطه B برابر ٤ m/s باشد، تعیین کنید: (الف) مقدار N ، نیروی اعمال شده از میله ثابت به لغزنده را و (ب) میزان سرعت لغزنده که کاهش یافته است. از اصطکاک صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۵۲-۳

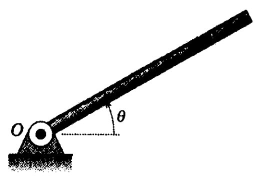
۳-۵۳ لغزنده ۱۲۰ گرمی دارای سرعت v = ۱/٤ m/s به هنگام عبور از نقطه A یک میله راهنمای صیقلی که در صفحه افق قرار دارد، می‌باشد. مقدار نیروی R که از طرف میله راهنما به لغزنده اعمال می‌شود را تعیین کنید. (الف) درست قبل از عبور از نقطه A میله راهنما و (ب) هنگامیکه از نقطه B می‌گذرد.

جواب (الف) R = ۱/۱۷۷ N و (ب) R = ۱/٦٦٤ N



شکل مسئله ۳-۵۳

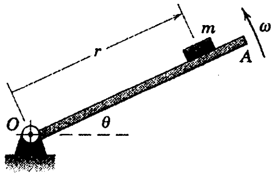
۳-۵٤ لوله توخالی که حول محور افقی که از O می‌گذرد، در صفحه قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}$ = ۳ rad/s در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند. اگر لغزندهٔ ۰/۱ کیلوگرمی در داخل لوله با سرعت ۱/۲ m/s نسبت به لوله به طرف O هنگامیکه از موقعیت θ = ۳۰° می‌گذرد، عبور کند؛ مقدار نیروی عمودی N که توسط دیواره لوله بر لغزنده در این موقعیت اعمال می‌شود را بدست آورید.



شکل مسئله ۳-۵۴

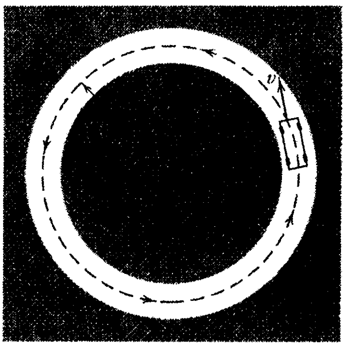
۳-۵۵ بازوی OA حول محور افقی O با سرعت زاویه‌ای ثابت ω = ۳ rad/s در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند. هنگامی که بازو به موقعیت θ = ۰ می‌رسد، قطعه‌ای کوچک به جرم m در فاصله شعاعی r = ٤۵۰ mm روی آن گذاشته می‌شود. اگر مشاهده شود که لغزش قطعه در θ = ۵۰° اتفاق می‌افتد، ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s بین قطعه و بازو را تعیین کنید.

جواب μ_s = ۰/۵٤۹



شکل مسئله ۳-۵۵

۳-۵٦ آزمایش استاندارد تعیین شتاب جانبی ماکزیمم یک اتومبیل، راندن آن روی یک دایره به قطر ٦۰ m که روی یک مسیر مسطح آسفالت شده رسم شده است، می‌باشد. راننده به آهستگی سرعت خود را افزایش می‌دهد تا جایی که دیگر نتواند هر دو زوج چرخ را روی مسیر نگهدارد. اگر این سرعت ماکزیمم برای اتومبیل ۱٤۰۰ کیلوگرمی برابر ۵۵ km/h باشد، شتاب جانبی a_n را بر حسب g و مقدار F کل نیروی اصطکاک اعمال شده از طرف زمین بر تایرها را تعیین کنید.



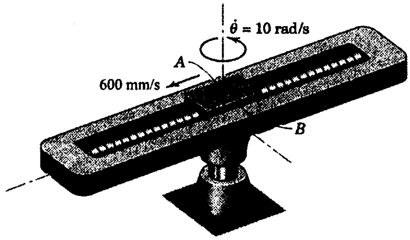
شکل مسئله ۳-۵٦

۳-۵۷ اتومبیل مسئله ۳-۵٦ که با سرعت ٤۰ km/h در حرکت است، ترمز می‌نماید و اتومبیل به حرکت خود در مسیر دایره‌ای ادامه می‌دهد. چنانچه کل نیروی اصطکاک افقی تایرها به ۱۰/٦ kN محدود شده باشد، حداکثر شتاب کند شونده چقدر خواهد بود؟

جواب $a_t = -$ ٦/۳٦ m/s^2

۳-۵۸ بازوی شیاردار حول مرکزش در صفحه افقی با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}$ = ۱۰ rad/s دوران کرده و لغزنده فنردار ۱/۵ کیلوگرمی را که به صورت آزاد درون شیار نوسان می‌کند، حمل می‌کند. اگر موقعی که لغزنده از مرکز شیار

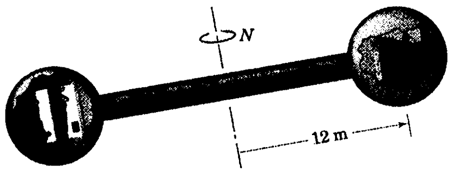
می‌گذرد، دارای سرعت ۶۰۰ mm/s نسبت به آن باشد؛ نیروی افقی P را که از طرف بازوی شیاردار و لغزنده اعمال می‌گردد، در این لحظه محاسبه نمایید. مشخص کنید کدام یک از کناره‌های A یا B از شیار، در تماس با لغزنده قرار می‌گیرد.



شکل مسئله ۵۸-۳

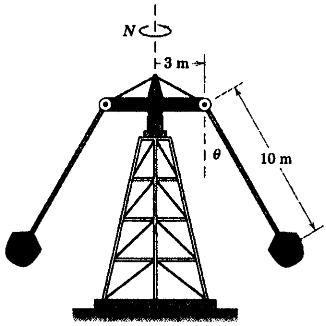
۵۹-۳ در طراحی یک ایستگاه فضایی جهت انجام ماموریت در ماورای حوزه ثقل زمین، پیش بینی شده است که ایستگاه با سرعت دورانی N حول محور تقارنش دوران نماید تا در ساکنین ایستگاه، احساسی نظیر اثر جاذبه زمین بوجود آید. اگر فاصله ساکنین تا محور دوران ۱۲ m باشد، سرعت دورانی لازمه N بر حسب دور بر دقیقه چقدر است؟

جواب N = ۸/۶۳ rev/min



شکل مسئله ۵۹-۳

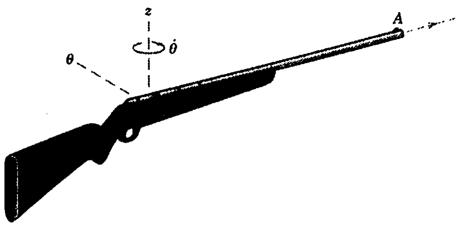
۶۰-۳ سرعت دورانی لازم N برای تاب هوایی یک پارک تفریحی را طوری حساب کنید که میله اتصال صندلی‌ها با امتداد قائم، زاویه θ = ۶۰° بسازد. از جرم میله‌های اتصال صرفنظر نموده، هر صندلی را به منزله یک ذره تلقی کنید.



شکل مسئله ۶۰-۳

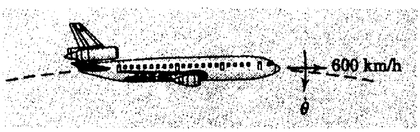
۶۱-۳ موقع شلیک گلوله ۶۰ گرمی، لوله تفنگ در صفحه افقی حول محور قائم z با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ = ۰/۵ rad/s دوران می‌کند. اگر سرعت گلوله نسبت به لوله درست قبل از اینکه به A برسد، ۶۰۰ m/s باشد، نیروی افقی رانش P که از طرف لوله به گلوله قبل از رسیدن به A اعمال می‌شود را بدست آورید. از کدام طرف لوله، این نیروی P وارد می‌گردد؟

جواب P = ۳۶ N طرف راست



شکل مسئله ۶۱-۳

۶۲-۳ جهت شبیه سازی شرایط «بی وزنی» که توسط فضانوردان در یک فضاپیما در مدار دورانی آن تجربه می‌شود، یک هواپیمای مسافربری جت خط مسیرش را با میزان $\dot{\theta}$ در مدت زمان کوتاهی افت می‌دهد. اگر سرعت هواپیما ۶۰۰ km/h باشد، $\dot{\theta}$ را تعیین کنید.

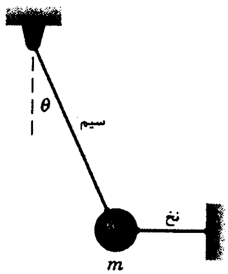


شکل مسئله ۶۲-۳

۳-۶۳ وزن جسمی که توسط یک ترازوی فنری سنجیده می‌شود، در حالت سکون بر روی زمین برابر ۲۰ N است. ترازوی فنری مزبور را در کف کابین یک هواپیما قرار می‌دهند و در حالی که هواپیما، مطابق شکل مربوط به مسئله ۳-۶۲ از بالای کمان دایره‌ای قائم می‌گذرد، همان جسم را توسط ترازو وزن می‌کنند. اگر سرعت هواپیما در ارتفاع ۶۰۰۰ m برابر v = ۸۰۰ km/h و خط دید آن با میزان ۱ درجه در هر ثانیه در حال افت کردن باشد، وزن W' ثبت شده توسط ترازو چقدر خواهد بود؟

جواب W' = ۱۲/۰۹ N

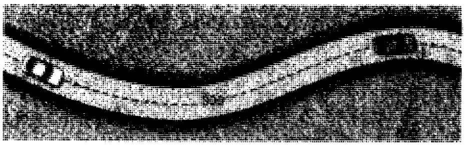
۳-۶۴ اگر نخ افقی نشان داده شده، قطع گردد؛ گوی کوچک به جرم m و سیم اتصال آن یک آونگ ساده را تشکیل خواهند داد. نسبت k کشش T در سیم اتصال بلافاصله پس از قطع نخ به کشش سیم قبل از قطع نخ چقدر است؟



شکل مسئله ۶۴-۳

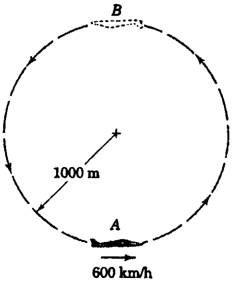
۳-۶۵ اتومبیل ۱۵۰۰ kg با سرعت ۹۶ km/h در A وارد مسیر منحنی S شکلی می‌گردد و با گرفتن ترمز، سرعتش را با میزان یکنواخت، بعد از طی مسافت ۹۰ m که در امتداد منحنی از A تا B اندازه گیری شده به ۷۲ km/h کاهش می‌دهد. شعاع انحنای اتومبیل در B برابر ۱۸۰ m می‌باشد. کل نیروی اصطکاک وارد از جاده به تایرها را در B حساب کنید. جاده در B در یک صفحه افقی قرار دارد.

جواب F = ۴۲۲۰ N



شکل مسئله ۶۵

۳-۶۶ خلبانی هواپیمایی را با سرعت ۶۰۰ km/h روی یک مسیر دایره‌ای به شعاع ۱۰۰۰ m در صفحه قائم پرواز می‌دهد. نیروی اعمال شده از صندلی به خلبان ۹۰ کیلوگرمی را در نقطه A و در نقطه B حساب کنید.

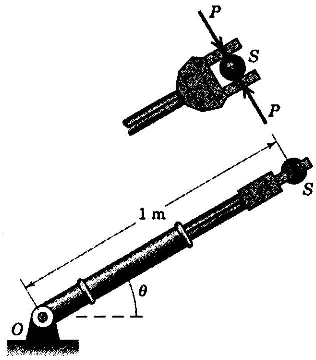


شکل مسئله ۶۶-۳

مسائل ویژه

۳-۶۷ گوی ۲ کیلوگرمی S توسط بازوی روباتی در صفحه قائم حرکت می‌کند. موقعی که θ، زاویه بازو، برابر ۳۰° است، سرعت زاویه‌ای آن حول محور افقی که از O می‌گذرد برابر ۵۰ deg/s در جهت ساعتگرد بوده و شتاب زاویه‌ای آن برابر ۲۰۰ deg/s^2 در جهت پادساعتگرد می‌باشد. به علاوه عضو هیدرولیکی با میزان ثابت ۵۰۰ mm/s کوتاه می‌گردد. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین گوی و پنجه روبات ۰/۵ باشد، حداقل نیروی لازم پنجه، P را تعیین کنید. P را با حداقل نیروی پنجه P_s، که لازم است گوی را در θ = ۳۰° در حالت تعادل استاتیکی نگهدارد، مقایسه کنید.

جواب P = ۲۷/۰ N و P_s = ۱۹/۶۲ N

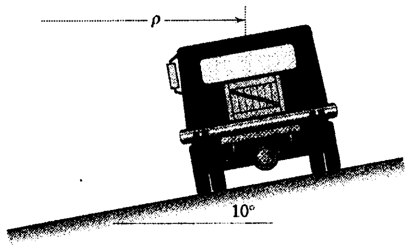


شکل مسئله ۶۷-۳

۶۸-۳ مطلوبست تعیین ارتفاع h (بر حسب کیلومتر) که دراین ارتفاع بالای سطح زمین، ماهواره‌ای در مداری مدور دارای همان پریود چرخش مطلق زمین یعنی ۲۳/۹۳۴۴ h باشد. اگر چنین مداری در صفحه استوای زمین باشد به آن حالت «همزمانی با زمین» می‌گویند زیرا در این حالت ماهواره نسبت به ناظر ثابت روی زمین، حرکتی نخواهد داشت.

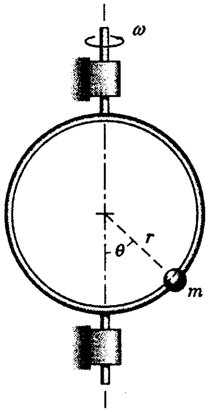
۶۹-۳ یک کامیون کفی دار، روی مسیر منحنی شکل به شعاع m ۳۰۰ که دارای شیب عرضی °۱۰ است، با سرعت km/h ۱۰۰ در حرکت است. ضریب اصطکاک استاتیکی بین کفی کامیون و جعبه ۲۰۰ کیلوگرمی که حمل می‌کند برابر ۰/۷۰ می‌باشد. نیروی اصطکاک وارد به جعبه را محاسبه کنید.

جواب $F =$ ۱۶۵/۹ N



شکل مسئله ۶۹-۳

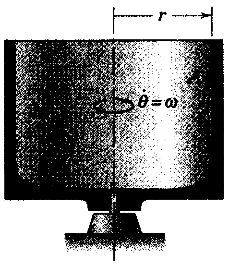
۷۰-۳ مهره‌ای کوچک به جرم m روی حلقه‌ای مدور به شعاع r که حول یک محور ثابت قائم دوران می‌کند، قرار گرفته است. نشان دهید چگونه می‌توان با مشاهده موقعیت مکانی θ مهره، سرعت زاویه‌ای ω حلقه را تعیین کرد. در تحلیل‌تان از اصطکاک صرفنظر کنید. اما فرض کنید که مقداری جزئی اصطکاک وجود دارد به نحوی که به محض رسیدن سرعت زاویه‌ای حلقه به یک مقدار ثابت، مهره موقعیت خود را حفظ نماید و نسبت به حلقه حرکت نداشته باشد. به هرگونه قیدی در حل مسئله توجه داشته باشید.



شکل مسئله ۷۰-۳

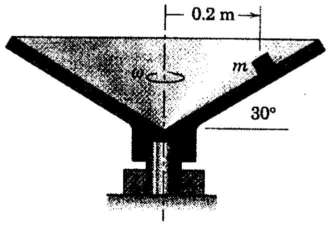
۷۱-۳ شیء کوچک A بر اثر نیروی گریز از مرکز در برابر دیواره عمودی یک محفظه استوانه‌ای چرخان به شعاع r نگه داشته شده است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین شیء و محفظه μ_s باشد، عبارتی برای حداقل سرعت زاویه‌ای محفظه $\dot{\theta} = \omega$، تعیین کنید که مانع از پایین لغزیدن شیء در جهت قائم باشد.

جواب $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{\mu_s r}}$



شکل مسئله ۷۱-۳

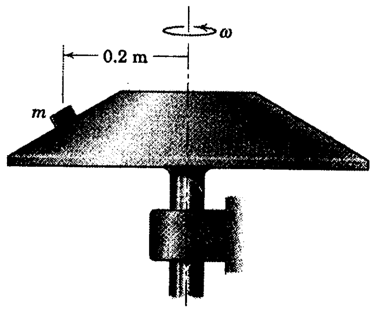
۳-۷۲ شئ کوچکی روی سطح داخلی ظرف مخروطی شکل در شعاع نشان داده شده، قرار گرفته است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین شئ و ظرف ۰/۳ باشد، در چه محدوده سرعت دورانی ω حول محور قائم، شئ مزبور موقعیت خود را حفظ نموده و نمی‌لغزد؟ فرض کنید سرعت دورانی چنان به آرامی تغییر می‌نماید که هرگونه شتاب زاویه‌ای قابل اغماض است.



شکل مسئله ۳-۷۲

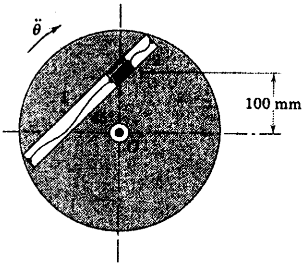
۳-۷۳ شئ کوچکی به جرم m روی سطح مخروطی شکل در شعاع نشان داده شده، قرار گرفته است. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی بین شئ و سطح دوار ۰/۸ باشد، ماکزیمم سرعت زاویه‌ای مخروط ω ، حول محور قائم را که به ازای آن نخواهد لغزید، حساب کنید. فرض کنید که تغییرات سرعت زاویه‌ای بسیار تدریجی باشد.

جواب ω = ۲/۷۳ rad/s



شکل مسئله ۲-۷۳

۳-۷۴ لغزنده ۲ کیلوگرمی داخل شیار صیقلی دیسکی که حول محور عمودی گذرنده از نقطه O دوران می‌کند، جاسازی شده است. لغزنده می‌تواند مقداری جزئی حرکت نماید تا اینکه یکی از دو سیم، کاملا کشیده شود. اگر دیسک از حالت سکون در t = ۰ با شتاب زاویه‌ای ثابت ۰/۵ rad/s² در جهت ساعتگرد شروع به حرکت کند، نمودار کشش سیمهای ۱ و ۲ و مقدار نیروی عمود بر شیار N را به صورت تابعی از t در فاصله ۰ ≤ t ≤ ۵ s رسم نمایید.



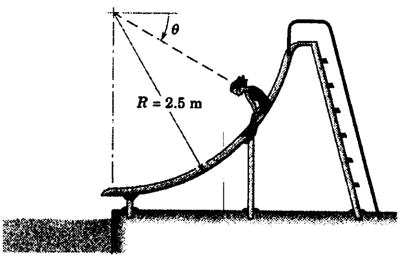
شکل مسئله ۳-۷۴

۳-۷۵ دختربچه‌ای به جرم ۳۵ kg از حالت سکون در موقعیت θ = ۲۰° با اصطکاک ناچیزی شروع به لغزیدن بر روی سرسره‌ای می‌کند که به شکل کمانی از یک دایره به شعاع ۲/۵ m ساخته شده است. شتاب مماسی و سرعت حرکت دختربچه و همچنین نیروی عمودی وارد بر او از طرف سرسره را در موقعیتهای (الف) موقعی که θ = ۳۰° و (ب) موقعی که θ = ۹۰° است، بدست آورید.

جواب

الف) a_t = ۸/۵۰ m/s² و v = ۲/۷۸ m/s و N = ۲۸۰ N

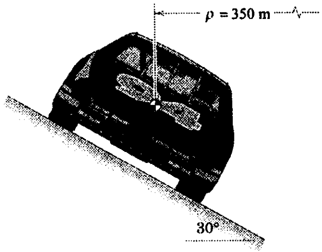
ب) a_t = ۰ m/s² و v = ۵/۶۸ m/s و N = ۷۹۵ N



شکل مسئله ۳-۷۵

۳-۷۶ سرعت v حرکت اتومبیل مسابقه را چنان تعیین کنید که اتومبیل هیچگونه تمایلی به لغزش جانبی بر روی یک مسیر شیبدار نداشته باشد. یعنی نیازی به وجود اصطکاک جهت ممانعت از لغزش نباشد. بعلاوه، حداقل و حداکثر مقدار

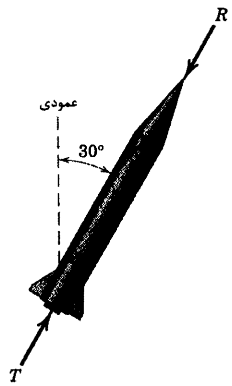
سرعت را به ازای ضریب اصطکاک استاتیکی $\mu_s = ۰/۹۰$ بدست آورید. فرضیات خود را بیان کنید.



شکل مسئله ۷۶-۳

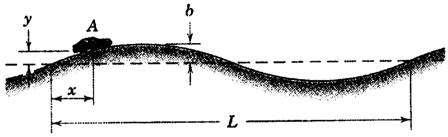
۷۷-۳ راکتی در صفحه قائم تحت نیروی رانش T برابر ۳۲ kN به جلو رانده می‌شود. این راکت همچنین تحت تاثیر نیروی مقاوم جوی R برابر ۹/۶ kN قرار می‌گیرد. اگر سرعت راکت ۳ km/s و شتاب ثقل در آن ارتفاع ۶ m/s^2 باشد، شعاع انحنای مسیر، ρ و میزان تغییرات v را نسبت به زمان در موقعیت توصیف شدهٔ فوق حساب کنید. جرم راکت در لحظه مورد نظر ۲۰۰۰ kg است.

جواب $\rho = ۳۰۰۰$ km و $\dot{v} = ۶/۰۰$ m/s^2



شکل مسئله ۷۷-۳

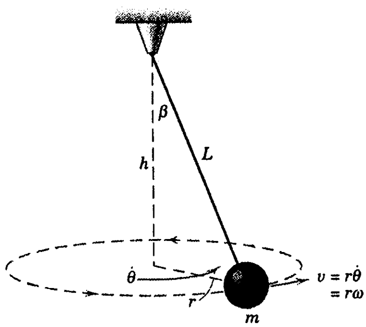
۷۸-۳ در قسمتی از یک بزرگراه، فراز و نشیبهای متوالی وجود دارد که می‌توان آن را توسط رابطه $y = b\sin(۲\pi x/L)$ بیان کرد. ماکزیمم سرعتی که اتومبیل A می‌تواند با آن در یک فراز عبور کند؛ بدون اینکه تماس خود را با جاده از دست بدهد، چقدر است؟ اگر اتومبیل این سرعت بحرانی را حفظ کند، کل عکس العمل زیر چرخها، N، در قعر یک شیب چقدر است؟ جرم اتومبیل m می‌باشد.



شکل مسئله ۷۸-۳

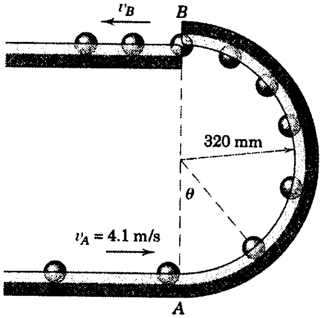
۷۹-۳ گوی کوچکی به جرم m به انتهای یک نخ سبک به طول L آویزان گشته و با سرعت مماسی v به صورت یک آونگ مخروطی در یک مسیر دایره‌ای شکل افقی حرکت می‌کند. با تعیین h، صفحه حرکت را مشخص کرده و کشش نخ T را بدست آورید. (*توجه:* از رابطه $v = r\dot{\theta} = r\omega$ استفاده کنید که در آن ω سرعت زاویه‌ای حول محور قائم می‌باشد.)

جواب $h = g/\omega^۲$ و $T = mL\omega^۲$



شکل مسئله ۷۹-۳

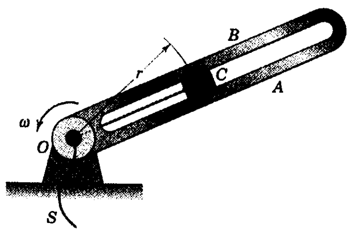
۳-۸۰ ساچمه‌های کوچک فولادی که هر کدام ۶۵ گرم جرم دارند، با سرعت افقی ۴/۱ m/s در A وارد حفره نیم دایره‌ای شکل که در صفحه قائم واقع است، می‌شوند. نیروی R را که از طرف حفره به هر کدام از ساچمه‌ها وارد می‌شود بر حسب θ پیدا کرده و سرعت v_B گلوله‌ها را در B بدست آورید. اصطکاک قابل چشم پوشی است.



شکل مسئله ۸۰-۳

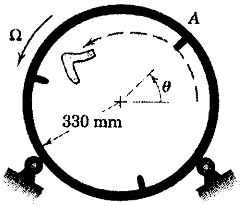
۳-۸۱ بازوی شیارداری حول محور قائمی که از O می‌گذرد، در صفحه افقی دوران می‌کند. لغزنده ۲ کیلوگرمی C که توسط نخ S کشیده می‌شود با میزان ثابت ۵۰ mm/s به طرف مرکز O حرکت می‌کند. در لحظه‌ای که r = ۲۲۵ mm است، بازو دارای سرعت زاویه‌ای ω = ۶ rad/s در جهت پادساعتگرد بوده و با میزان ۲ rad/s^2 کاهش می‌یابد. در این لحظه کشش T نخ و مقدار نیروی وارده از لبه‌های شیار صیقلی بر لغزنده را حساب کنید. مشخص کنید که لبه A از شیار با لغزنده تماس پیدا می‌کند یا لبه B.

جواب لبه B، N = ۲/۱۰ N و T = ۱۶/۲۰ N



شکل مسئله ۸۱-۳

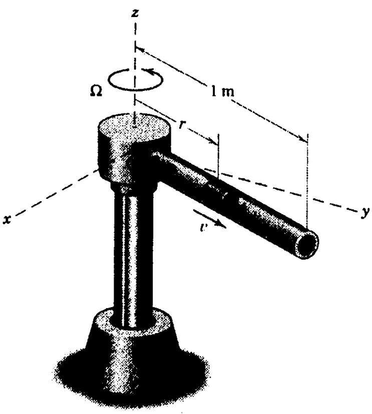
۳-۸۲ طبلک دوار یک لباس خشک کن در شکل نشان داده شده است. سرعت زاویه‌ای Ω طبلک را به نحوی تعیین کنید که در θ = ۵۰° ، تماس بین لباس و طبلک قطع گردد. فرض کنید پره‌های کوچک جهت جلوگیری از لغزیدن لباس روی طبلک تا قطع تماس می‌باشد.



شکل مسئله ۸۲-۳

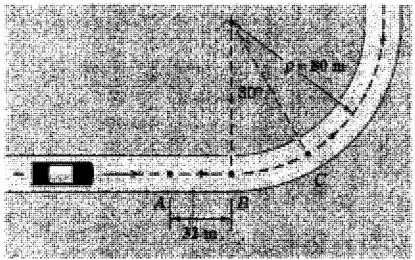
۳-۸۳ لغزنده کوچک ۱۸۰ گرمی A با اصطکاک ناچیزی در درون لوله افقی می‌لغزد. در حالیکه لوله مزبور در صفحه افقی با سرعت زاویه‌ای Ω = ۷ rad/s دوران می‌کند. لغزنده با سرعت اولیه $\dot{r}_0$ = ۲۰ m/s نسبت به لوله، در مختصات اینرسی x = ۱۵۰ mm و y = ۰ پرتاب می‌شود. مقدار نیروی افقی P که از طرف لوله به لغزنده، درست قبل از ترک لوله وارد می‌شود را بیابید.

جواب P = ۵۳/۳ N



شکل مسئله ۸۳-۳

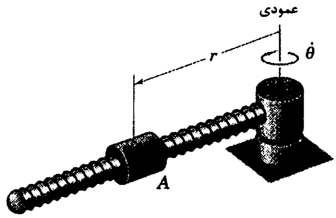
۳-۸٤ اتومبیل ۱۵۰۰ کیلوگرمی با سرعت ۱۰۰ km/h قسمتی از جاده مستقیم را می‌پیماید و سپس با کاهش سرعتش از A تا C در نقطه C متوقف می‌گردد. مقدار نیروی کل اصطکاک F که از طرف جاده به اتومبیل وارد می‌شود را پیدا کنید: (الف) درست قبل از گذشتن از نقطه B، (ب) درست بعد از گذشتن از نقطه B و (ج) درست قبل از توقف در نقطه C.



شکل مسئله ۸۴-۳

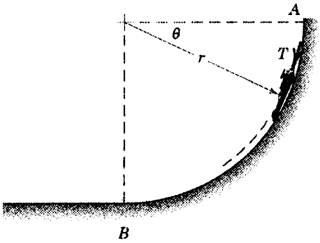
۳-۸۵ غلاف A به جرم ۰/۸ kg به همراه فنر متصل به آن در امتداد میله‌ای افقی که با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}$ = ٦ rad/s در دوران است، نوسان می‌کند. در لحظه‌ای خاص، r با میزان ۸۰۰ mm/s افزایش می‌یابد. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی بین غلاف و میله ۰/٤۰ باشد، نیروی اصطکاک وارد از میله به غلاف را در لحظه فوق حساب کنید.

جواب F = ٤/٣٩ N



شکل مسئله ۸۵-۳

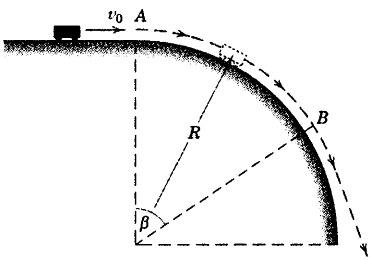
۳-۸٦ یک اتومبیل کوچک به جرم m با محرکه موشکی، بر روی مسیر دایره‌ای به شعاع موثر r تحت اثر وزنش و نیروی رانش ثابت T ناشی از موتور موشکی، به طرف پایین حرکت می‌کند. اگر اتومبیل از حالت سکون در نقطه A شروع به حرکت کرده باشد، سرعت v آنرا هنگام رسیدن به نقطه B و مقدار N، نیروی اعمال شده از مسیر بر چرخها را درست قبل از رسیدن به B تعیین کنید. از هرگونه اصطکاک و کاهش جرم موتور موشک صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۸٦-۳

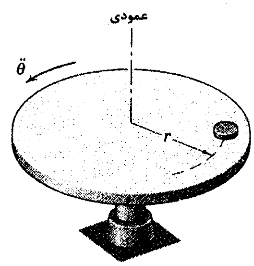
۳-۸۷ وسیله نقلیه کوچکی با سرعت افقی v_0 به A بالاترین نقطه مسیر دایره‌ای می‌رسد و بتدریج سرعتش هنگام سرازیر شدن افزایش می‌یابد. عبارتی برای زاویه β که در آن وسیله در شرف ترک مسیر و پرتاب شدن است، تعیین نمایید و عبارت را موقعی که $v_0 = ۰$ می‌باشد، معین کنید. از اصطکاک صرفنظر گردد و وسیله را به صورت یک ذره تلقی کنید.

جواب $\beta = \cos^{-1}\left(\frac{۲}{۳}+\frac{v_0^{۲}}{۳gR}\right)$ و β = ٤۸/۲°



شکل مسئله ۸۷-۳

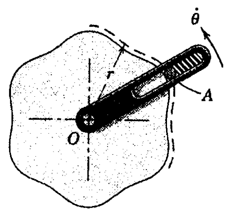
۸۸-۳ سکه کوچکی روی سطح افقی دیسکی که در حال دوران می‌باشد، قرار گرفته است. اگر دیسک در حالت سکون با شتاب زاویه‌ای ثابت $\ddot{\theta}=\alpha$ شروع به حرکت نماید، عبارتی برای N، تعداد دورهایی که دیسک قبل از لغزش سکه می‌زند، تعیین نمایید. ضریب اصطکاک استاتیکی بین سکه و دیسک، μ_s می‌باشد.



شکل مسئله ۸۸-۳

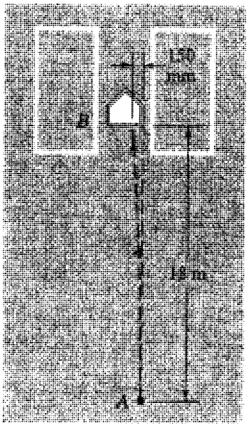
۸۹-۳ بازوی شیاردار حول محور قائمی که از O می‌گذرد، با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta}=\omega$ دوران می‌کند. بادامک چنان طراحی شده است که شعاع r مسیر حرکت مهره A طبق رابطه $r = r_\circ + b\sin N\omega t$ تغییر می‌نماید که در آن N تعداد برآمدگیهای بادامک می‌باشد و در این مسئله ٦ عدد است. اگر $\omega = ۱۲\ \text{rad/s}$، $r_\circ = ۱۰۰\ \text{mm}$ و $b = ۱۰\ \text{mm}$ و اگر نیروی فشردگی فنر از $۱۱/۵\ \text{N}$ در فرورفتگی به $۱۹/۱\ \text{N}$ در برآمدگی‌ها تغییر نماید، نیروی R بین بادامک و مهره ۱۰۰ گرمی A را در لحظه‌ای که از یک برآمدگی نشان داده شده در شکل می‌گذرد، حساب کنید. از اصطکاک صرفنظر کنید.

جواب $R = ۱۲/۳۳\ \text{N}$



شکل مسئله ۸۹-۳

۹۰-۳ پرتاب کننده راست دست در بازی بیسبال، با نشانه گیری لبه راست صفحه B، توپی را به صورت «کاد دار» پرتاب می‌کند. مسیر توپ مطابق شکل، انحرافی برابر ۱۵۰ mm پیدا می‌کند. فرض کنید سرعت افقی ثابت و برابر $v = ۳۸\ \text{m/s}$ باشد. از حرکت عمودی چشم پوشی نموده، معین کنید: (الف) شعاع انحنای متوسط مسیر توپ، ρ و (ب) نیروی عمودی R اعمال شده بر توپ بیسبال ۱٤٦ گرمی را.

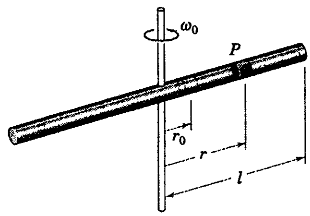


شکل مسئله ۹۰-۳

۹۱-۳ جسمی در موقعیت سکون نسبی نسبت به سطح زمین با زمین در چرخش بوده و بنابراین در مسیری دایره‌ای حول محور قطبی زمین که ثابت فرض شده است، می‌چرخد. عباراتی برای نسبت k وزن ظاهری جسم که توسط ترازوی فنری در استوا اندازه گیری شده (برای خواندن نیروی واقعی تنظیم شده) به وزن جسم که ناشی از جاذبه مطلق زمین است، بدست آورید. شتاب مطلق ناشی از جاذبه در استوا $g = ۹/۸۱۵\ \text{m/s}^2$ و شعاع زمین در استوا $R = ٦۳۷۸\ \text{km}$ و سرعت زاویه‌ای زمین $\omega = ۰/۷۲۹\ (۱۰^{-٤})\ \text{rad/s}$ است. اگر وزن حقیقی ۱۰۰ N باشد، وزن ظاهری اندازه گیری شده W' چقدر است؟

جواب $k = ۱ - \dfrac{R\omega^۲}{g}$ و $W' = ۹۹/٦۵۵\ \text{N}$

۹۲-۳ ذره P در $t=0$ از موقعیت $r=r_0$ داخل لوله صیقلی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_0 حول محور قائم دوران می‌کند، بدون سرعت نسبت به لوله رها می‌گردد. سرعت شعاعی v_r، موقعیت شعاعی r و سرعت جانبی v_θ را بر حسب زمان t تعیین کنید. توضیح دهید که چرا در غیاب نیروهای شعاعی، سرعت شعاعی با زمان افزایش می‌یابد. مسیر مطلق ذره را در مدتی که در داخل لوله می‌باشد به ازای $r_0 = 0/1\ \text{m}$، $l = 1\ \text{m}$ و $\omega_0 = 1\ \text{rad/s}$ رسم نمایید.



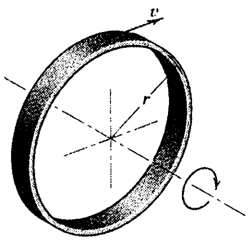
شکل مسئله ۹۲-۳

۹۳-۳ فرض صیقلی بودن سطوح را در مسئله ۹۲-۳ منتفی دانسته و فرض می‌کنیم ضریب اصطکاک سینتیکی بین ذره و لوله چرخان μ_k باشد. چنانچه ذره در $t=0$ از $r=r_0$ بدون سرعت نسبی رها گردد، موقعیت شعاعی r ذره را بر حسب زمان تعیین کنید. فرض کنید بر اصطکاک استاتیکی غلبه شده است.

جواب

$$r = \frac{r_0}{2\sqrt{\mu_k^2+1}}\left[\left(\mu_k+\sqrt{\mu_k^2+1}\right)e^{\omega_0\left(-\mu_k+\sqrt{\mu_k^2+1}\right)t} + \left(-\mu_k+\sqrt{\mu_k^2+1}\right)e^{\omega_0\left(-\mu_k-\sqrt{\mu_k^2+1}\right)t}\right]$$

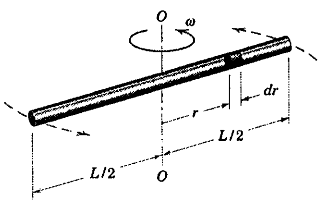
۹۴-۳ تنش مماسی یا حلقوی یک چرخ طیار را می‌توان مشابه با یک حلقه فلزی که حول محور هندسی خود دوران می‌کند، تخمین زد. رابطه‌ای که تنش حلقوی σ_t را بر حسب سرعت v حرکت حلقه، جرم بر واحد طول ρ حلقه و مساحت A سطح مقطع حلقه بیان کند، تعیین کنید. معادله حرکت را بر روی ترسیمه آزاد یک المان کوچک از حلقه، به عنوان یک ذره بکار گیرید.



شکل مسئله ۹۴-۳

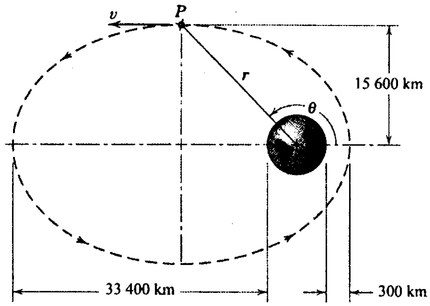
۹۵-۳ میله باریک یکنواختی به طول L، جرم m و سطح مقطع A در صفحه افق حول محور قائم مرکزی O-O با سرعت زاویه‌ای زیاد و ثابت ω دوران می‌کند. بوسیله تجزیه و تحلیل نیروهای افقی بر روی المان کوچک نشان داده شده، عبارتی برای تنش کششی σ در لوله به صورت تابعی از r بدست آورید. تنش که معمولاً به تنش گریز از مرکز تعبیر می‌شود، برابر است با نیروی کشش تقسیم بر سطح مقطع A.

جواب $\qquad \sigma = \dfrac{mL\omega^2}{2A}\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{r^2}{L^2}\right)$



شکل مسئله ۹۵-۳

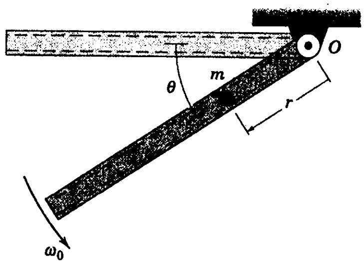
۳-۹۶ فضاپیمای P در یک مدار بیضی‌گون، مطابق شکل، قرار دارد. در لحظه نشان داده شده، سرعت فضاپیما $v = ۴۲۳۰\ m/s$ است. مقادیر متناظر $\dot{r}$، $\dot{\theta}$، $\ddot{r}$ و $\ddot{\theta}$ را بدست آورید. شتاب جاذبه در سطح زمین را $g = ۹/۸۲۵\ m/s^2$ و شعاع زمین را $R = ۶۳۷۱\ km$ در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۹۶-۳

۳-۹۷ ◀ یک لوله توخالی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_0 حول محور افقی که از O می‌گذرد، دوران می‌کند. ذره‌ای به جرم m با سرعت نسبی صفر در $r = ۰$ در موقعیت $\theta = ۰$ داخل لوله صیقلی شده به طرف خارج آن می‌لغزد. r را به صورت تابعی از θ تعیین کنید.

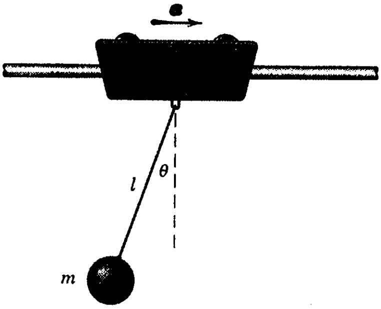
جواب $r = \dfrac{g}{۲\omega_0^۲}(\sinh\theta - \sin\theta)$



شکل مسئله ۹۷-۳

۳-۹۸ ◀ آونگ کوچکی به جرم m از سیستم نقاله‌ای که روی یک ریل افقی حرکت می‌کند، آویزان است. در $\theta = ۰$ نقاله و آونگ، ابتدا در حال سکون‌اند. اگر به نقاله شتاب ثابت $a = g$ داده شود، زاویه ماکزیمم نوسان آونگ θ_{max} را تعیین و همچنین کشش T در ریسمان را بر حسب θ پیدا کنید.

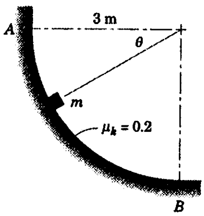
جواب $\theta_{max} = \pi/۲$ و $T = mg(۳\sin\theta + ۳\cos\theta - ۲)$



شکل مسئله ۹۸-۳

۳-۹۹ ◀ شئ کوچکی از حالت سکون از نقطه A رها شده و با اصطکاک به طرف پایین مسیر دایره‌ای می‌لغزد. اگر ضریب اصطکاک ۰/۲ باشد، سرعت شئ را در لحظه‌ای که از B می‌گذرد، تعیین کنید. (*پیشنهاد:* معادله حرکت را در امتدادهای n و t نوشته، N را حذف کرده و از رابطه $v\,dv = a_t\,r\,d\theta$ استفاده کنید. در نتیجه معادله دیفرانسیل خطی ناهمگن به شکل $dy/dx + f(x)y = g(x)$ بدست می‌آید که راه حل آن به خوبی معلوم است).

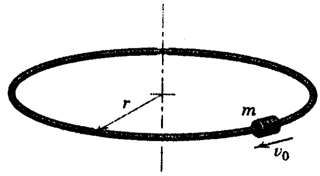
جواب $v = ۵/۵۲\ m/s$



شکل مسئله ۹۹-۳

۳-۱۰۰ ◀ به طوقه کوچکی به جرم m بر روی مسیر مدور افقی که از میله سبکی ساخته شده است، سرعت اولیه‌ای به مقدار v_0 داده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی برابر μ_k باشد، مسافتی که طوقه قبل از توقف طی می‌کند، چقدر است؟ (*تذکر:* توجه داشته باشید که نیروی اصطکاک به نیروی خالص عمودی بستگی دارد.)

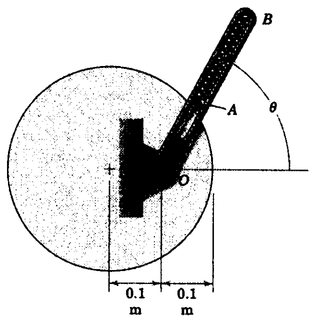
جواب $s = \dfrac{r}{۲\mu_k}\ln\left[\dfrac{v_0^۲ + \sqrt{v_0^۴ + r^۲g^۲}}{rg}\right]$



شکل مسئله ۱۰۰-۳

۱۰۱-۳ ◀ بازوی شیاردار OB در صفحه افقی حول نقطه O از یک بادامک ثابت دایره‌ای شکل با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = ۱۵$ rad/s دوران می‌کند. فنر دارای سختی ۵ kN/m بوده و موقعی که $\theta = ۰$ می‌باشد، فشردگی ندارد. غلتک صیقلی A دارای جرم ۰/۵ kg می‌باشد. نیروی عمودی N که بادامک بر غلتک اعمال می‌کند و همچنین نیروی اعمال شده R از لبه شیاردار به A را در $\theta = ۴۵°$ تعیین کنید. تمام سطوح صیقلی هستند. از قطر کوچک غلتک چشم پوشی نمایید.

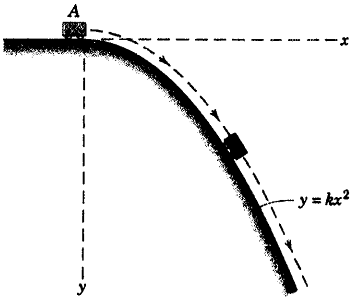
جواب $N = ۸۱/۶$ N و $R = ۳۸/۷$ N



شکل مسئله ۱۰۱-۳

۱۰۲-۳ ◀ گاری کوچکی با سرعت ناچیز از موقعیت افقی در A به طرف مسیر سهموی که در صفحه قائم واقع شده، سرازیر می‌گردد. از اصطکاک صرفنظر کرده و نشان دهید که گاری تماس خود را با مسیر برای تمام مقادیر k حفظ می‌نماید.

جواب
$$N = \frac{mg}{\left(۱ + ۴k^۲x^۲\right)^{۳/۲}} > ۰$$



شکل مسئله ۱۰۲-۳

بخش B ـ کار و انرژی

۳-۶ کار و انرژی جنبشی

در دو بخش قبلی، قانون دوم نیوتن، $\mathbf{F}=m\mathbf{a}$ را در مورد مسائل مختلف حرکت ذره بکـار بردیـم تـا رابطـه‌ای بیـن نیروی خالص وارد بر ذره و شتاب حاصل از آن بدست آید. هنگامی که تغییر سرعت یا جابجایی متناظر ذره در طی حرکت مورد نظر بود، با استفاده از معادله‌های سینماتیکی از شتاب محاسبه شده انتگرال می‌گرفتیم.

دو دسته کلی از مسائل وجود دارند که اثرات جمع پذیری نیروهای غیر متعادل بر ذره در طی حرکت، مورد توجـه می‌باشند. این دو حالت به ترتیب شامل (۱) انتگرال گیری از نیروها نسبت به جابجایی ذره و (۲) انتگرال گیـری از نیروهـا نسبت به زمان اعمال آنها می‌باشد. نتایج این انتگرال گیریها را می‌توان بـدون نیـاز بـه بدسـت آوردن شـتاب، مسـتقیماً بـا معادلات حاکم بر حرکت ترکیب نمود. انتگرال گیری نسبت به جابجایی منجر به معادلات کار و انرژی می‌شود که موضوع این بخش است. انتگرال گیری نسبت به زمان که معادلات ضربه و مومنتم را بدست می‌دهد، در بخش C بحث خواهد شد.

تعریف کار

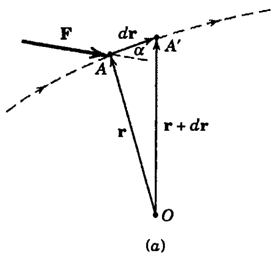
اکنون به مفهوم کمی عبارت «کار*» می‌پردازیم. شکل ۳-۲a نیروی $\mathbf{F}$ وارده بر ذره در A را نشان می‌دهد که در امتداد مسیر نشان داده شده، حرکت می‌کند. موقعیت $\mathbf{r}$ اندازه گیری شده از مبدا اختیـاری O، محـل ذره را در هنـگام عبـور از A مشخص می‌نماید و $d\mathbf{r}$ اختلاف جزئی جابجایی در حرکت از A به A' اسـت. کـار انجـام شـده توسـط نـیروی $\mathbf{F}$ در طـی جابجایی $d\mathbf{r}$ توسط رابطه زیر تعریف می‌شود:

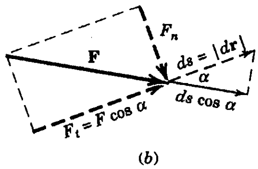
$$dU = \mathbf{F}.\,d\mathbf{r}$$

مقدار حاصلضرب داخلی این رابطه برابر $dU = F\,ds\cos\alpha$ می‌باشـد، کـه در آن α زاویـه بیـن $\mathbf{F}$ و $d\mathbf{r}$ اسـت و ds مقدار بردار $d\mathbf{r}$ می‌باشد. این عبارت را می‌توان به صورت حاصلضرب جابجایی در مولفه نیروی $F_t = F\cos\alpha$ در راسـتای جابجایی تعریف کرد که در شکل ۳-۲b با خط چین مشخص شده است. یا به طریق دیگر، کار dU می‌توانـد بـه صـورت حاصلضرب نیرو در مولفه جابجایی $ds\cos\alpha$ در امتداد نیرو تعریف شود که در شکل ۳-۲b با خط پر نشان داده شده است. با این تعریف کار، باید توجه کنیم که مولفه $F_n = F\sin\alpha$ عمود بر جابجایی، کـاری انجـام نمی‌دهـد. بنـابراین کـار dU را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$dU = F_t\,ds$$

* مفهوم کار در مطالعه کار مجازی در فصل ۷ کتاب استاتیک نیز مطرح گردید.





شکل (۲-۳)

اگر مولفه F_t در جهت جابجایی باشد کار مثبت و اگر در خلاف جهت آن باشد، منفی است. نیروهایی را که کار انجام می‌دهند، *نیروهای فعال* می‌نامند. به نیروهای مقیدی که کار انجام نمی‌دهند، *نیروهای غیر فعال* گفته می‌شود.

واحد کار

در سیستم SI، واحد کار N.m است که حاصلضرب نیرو (N) در جابجایی (m) می‌باشد. بر این واحد نام خاص *ژول* (J) را گذاشته‌اند که عبارت است از کار انجام شده توسط نیروی ۱N که در امتداد آن به اندازه ۱ m جابجا شود. با استفاده مکرر از ژول به عنوان واحد کار (و انرژی) به جای N.m ، می‌توان از اشتباه احتمالی با واحدهای گشتاور یک نیرو یا کوپل که به صورت N.m نوشته می‌شوند، جلوگیری کرد.

در سیستم متداول آمریکایی، واحد کار ft.lb است. کار و گشتاور هر دو دارای دیمانسیون یکسانی هستند. برای تشخیص آنها از یکدیگر، توصیه می‌شود که کار بر حسب فوت پوند (ft-lb) بیان شود و گشتاور بر حسب پوند فوت (lb-ft). باید توجه داشت که کار یک کمیت اسکالر است زیرا از ضرب داخلی بدست می‌آید و حاصلضرب نیرو در فاصله است که هر دو در امتداد یک خط اندازه گیری می‌شوند. در صورتیکه گشتاور یک کمیت برداریست که توسط حاصلضرب خارجی بدست می‌آید و شامل حاصلضرب نیرو در فاصله عمودی از آن می‌باشد.

محاسبه کار

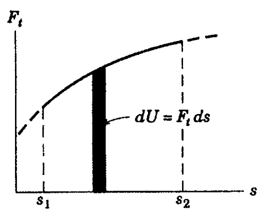
مقدار کار انجام شده توسط نیرو در طی حرکت محدود ذره تحت اثر آن برابر است با:

$$U = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

یا:

$$U = \int F_t ds$$

برای بدست آوردن این انتگرال، لازم است که رابطه بین مولفه‌های نیرو و مختصات متناظر آنها، یا رابطه بین F_t و s معلوم باشد. اگر رابطه نیرو و جابجایی به صورت عبارت ریاضی مشخص نباشد؛ اما بتوانیم آنرا به شکل داده‌های تجربی یا تقریبی مشخص کنیم، با انتگرال گیری عددی یا ترسیمی می‌توان کار انجام شده را تعیین نمود که در این صورت سطح زیر منحنی بر حسب s نشان دهنده کار می‌باشد، چنانچه در شکل ۳-۳ نشان داده شده است.

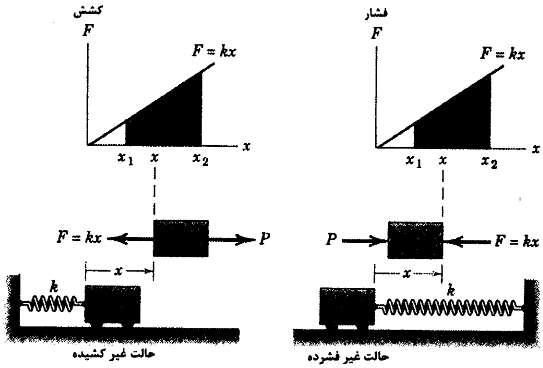


شکل ۳-۳

کار و فنرهای خطی

یک مثال معمول از کار انجام شده بر جسم توسط نیروی متغیر، کار نیروی فنر بر جسم متحرکی است که به آن متصل شده است. در اینجا فنر خطی معمولی با سختی k را در نظر می‌گیریم که در آن نیروی F فنر، کششی یا فشاری، متناسب با تغییر شکل x فنر می‌باشد، یعنی $F = kx$ است. شکل ٤-٣ دو حالتی که جسم توسط نیروی P، فنر را به اندازه x کشیده یا فشرده، نشان می‌دهد. در هر حالت نیروی وارد از فنر به جسم در جهت *مخالف* جابجایی است یعنی بر روی جسم کار *منفی* انجام می‌دهد. بنابراین، برای هر دو حالت کشیدگی یا فشردگی فنر، کار انجام شده *روی* جسم *منفی* و برابر است با:

$$U_{1-2} = -\int_{x_1}^{x_2} F dx = -\int_{x_1}^{x_2} kx\, dx = -\frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$



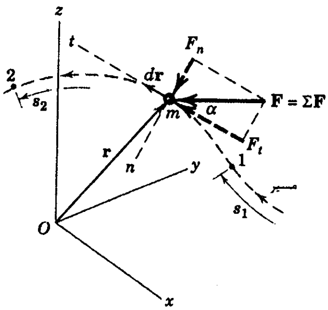
شکل (۴-۳)

هنگامی که فنر کشیده شده و رها می‌گردد یا وقتی که آن فشرده شده و آزاد می‌شود، مطابق شکل ٤-٣ برای هر دو مثال دیده می‌شود که جابجایی فنر از مقدار x_2 به مقدار کمتر x_1 تغییر می‌یابد. در هر دو حالت برای این وضعیت نیروی فنر وارده بر جسم، در همان جهت جابجایی است، و بنابراین کار انجام شده بر روی جسم مثبت است.

همانطور که در شکل ٤-٣ دیده می‌شود مقدار کار، مثبت یا منفی، برابر سطح ذوزنقه سایه خورده است. برای محاسبه کار انجام شده توسط فنر، باید به واحدهای k و x دقت شود. بنابراین اگر x بر حسب متر (یا ft) است، k باید بر حسب N/m (یا lb/ft) باشد.

در واقع رابطه $F = kx$ یک رابطه استاتیکی است و موقعی صحیح می‌باشد که اجزای فنر بدون شتاب باشند. رفتار دینامیکی فنر زمانی که جرم آن قابل ملاحظه باشد، مسئله نسبتاً پیچیده‌ای است که در اینجا بررسی نمی‌گردد. فرض می‌کنیم که جرم فنر در مقایسه با جرمهای دیگر اجزاء شتابدار سیستم، ناچیز و در نتیجه رابطه استاتیکی خطی، خطای قابل ملاحظه‌ای نخواهد داشت.

کار و حرکت منحنی الخط



شکل ۵-۳

اکنون کار انجام شده بر روی ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیریم که در امتداد یک مسیر منحنی تحت تاثیر نیروی $\mathbf{F}$ قرار دارد که برآیند $\Sigma\mathbf{F}$ کل نیروهای وارده بر ذره‌ای به جرم m است (شکل ۵-۳). موقعیت m توسط بردار موقعیت $\mathbf{r}$ مشخص شده و جابجایی آن در امتداد مسیرش در مدت زمان dt بوسیله $d\mathbf{r}$، تغییر بردار موقعیت، معین می‌شود. کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ طی یک حرکت محدود ذره از نقطه ۱ به نقطه ۲ برابر است با:

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F_t \, ds$$

که حدود انتگرال در آن، نقاط شروع و خاتمه حرکت ذره را مشخص می‌کنند. با جایگزین کردن قانون دوم نیوتن $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$، رابطه مربوط به کار کلیه نیروها به صورت زیر می‌شود.

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^2 m\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

اما $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = a_t \, ds$ است، که در آن a_t مولفه مماسی شتاب m می‌باشد. از معادله ۳-۲ داریم: $a_t ds = v dv$. بنابراین رابطه کار نیروی $\mathbf{F}$ برابر است با:

$$U_{1-2} = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv \, dv = \frac{1}{2} m\left(v_2^2 - v_1^2\right) \qquad (۳-۹)$$

که انتگرال بین ۱ و ۲ در امتداد منحنی صورت گرفته و در این نقاط سرعتها به ترتیب دارای مقادیر v_1 و v_2 می‌باشند.

اصل کار و انرژی جنبشی (سینتیک)

انرژی سینتیک ذره چنین تعریف می‌شود:

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m v^2} \qquad (۳-۱۰)$$

که برابر با کل کار انجام شده بر روی ذره است، تا آن را از حالت سکون به سرعت v برساند. انرژی سینتیک T کمیتی است اسکالر با واحد N.m یا ژول (J) در سیستم SI، در سیستم متداول آمریکایی ft-lb می‌باشد. انرژی جنبشی بدون توجه به جهت سرعت همیشه مثبت می‌باشد.

معادله ۹-۳ را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\boxed{U_{1-2} = T_2 - T_1 = \Delta T} \qquad (۳-۱۱)$$

که *رابطه کار و انرژی* برای یک ذره می‌باشد. رابطه نشان می‌دهد که *کل کار انجام شده* توسط کلیه نیروهای وارد بر ذره در مدت حرکتش از وضعیت ۱ به وضعیت ۲ برابر با تغییر *انرژی* سینتیک ذره می‌باشد. اگرچه T همواره مثبت است، اما ΔT ممکن است مثبت، منفی و یا صفر باشد. رابطه ۱۱-۳ بیان می‌کند که کار همیشه از *تغییر* انرژی جنبشی ناشی می‌گردد.

شکل دیگر معادله کار و انرژی می‌تواند به صورت انرژی جنبشی اولیه T_1 به اضافه کار انجام شده $U_{1\text{-}2}$ برابر انرژی جنبشی نهایی T_2 نیز بیان شود، یا:

$$\boxed{T_1 + U_{1\text{-}2} = T_2} \qquad (۳-۱۱\text{a})$$

هنگامی که رابطه کار ـ انرژی به فرم اخیر نوشته شود، عبارتهای تشکیل دهنده آن متناظر با ترتیب طبیعی وقوع وقایع می‌باشند. آشکار است که دو شکل معادله‌های ۱۱-۳ و ۱۱a-۳ معادل یکدیگرند.

مزایای روش کار ـ انرژی

اکنون از روی معادله ۱۱-۳ دیده می‌شود که مزیت اساسی روش کار و انرژی، عدم ضرورت محاسبه شتاب بوده و مستقیماً تغییرات سرعت بر حسب نیروهایی که کار انجام می‌دهند، را عرضه می‌کند. به علاوه، رابطه کار ـ انرژی تنها شامل آن دسته از نیروهایی است که کار انجام داده و باعث تغییر مقدار سرعت می‌شوند.

اکنون دو ذره را در نظر می‌گیریم که توسط اتصال بدون اصطکاک و غیر قابل تغییر شکل به هم متصل شده‌اند. در این اتصال نیروهای موجود به صورت زوجهای مساوی و مخالف بوده و نقاط اثر آنها دارای مولفه‌های جابجایی یکسانی در امتداد نیروها می‌باشند. در نتیجه، کار خالص انجام شده توسط نیروهای داخلی، طی هر نوع حرکت سیستم اتصالی دو ذره، برابر صفر است. بنابراین، معادله ۱۱-۳ در مورد کل سیستم بکار می‌رود که در آن $U_{1\text{-}2}$ کار کل یا خالص انجام شده توسط نیروهای خارجی روی سیستم بوده و ΔT برابر تغییر، $T_2 - T_1$ ، انرژی کل جنبشی سیستم می‌باشد. انرژی جنبشی کل، مجموع انرژیهای جنبشی هر دو عضو سیستم می‌باشد. اکنون ملاحظه می‌کنیم که مزیت دیگر روش کار ـ انرژی این است که سیستمی متشکل از چند ذره متصل به هم را می‌توان بدون نیاز به تجزیه سیستم تحلیل کرد.

در بکارگیری روش کار ـ انرژی لازم است ذره یا سیستم مورد نظر را جدا نمود. برای یک ذره منفرد باید کلیه نیروهای خارجی وارد شده بر ذره را در *ترسیمه آزاد* جسم نشان داد. برای یک سیستم ذرات که به صورت صلب بدون فنر به یکدیگر متصل شده‌اند، تنها آن نیروهای فعال خارجی که بر سیستم کار انجام می‌دهند در *ترسیمه نیروی فعال* باید نشان داده شوند*.

توان

ظرفیت هر ماشین با تغییرات کار یا انرژی نسبت به زمان سنجیده می‌شود. کل کار یا انرژی خروجی، معیاری برای نشان دادن این ظرفیت نیست؛ زیرا یک موتور، هر چقدر هم که کوچک باشد، می‌تواند مقدار زیادی انرژی را در زمان کافی تحویل دهد. از طرف دیگر، یک ماشین بزرگ و پر قدرت باید مقدار زیادی انرژی را در مدت زمانی کوتاه تحویل دهد. در نتیجه ظرفیت یک ماشین توسط *توان* آن سنجیده می‌شود که به عنوان *نرخ زمانی کار انجام شده* تعریف می‌گردد. بنابراین

* ترسیمه نیروی فعال در روش کار مجازی در استاتیک تشریح شد. فصل ۷ کتاب استاتیک را ببینید.

توان P ایجاد شده توسط نیروی **F** که به اندازه U کار انجام می‌دهد برابر است با $P=dU/dt=\mathbf{F}.\,d\mathbf{r}/dt$. چون $d\mathbf{r}/dt$ برابر سرعت **v** نقطه اثر نیرو می‌باشد، داریم:

$$\boxed{P=\mathbf{F}.\mathbf{v}} \qquad (۳-۱۲)$$

واضح است که توان یک کمیت اسکالر است و در سیستم آحاد SI دارای واحد J/s = N.m/s می‌باشد. واحد مخصوص توان *وات* (W) است که برابر یک ژول بر ثانیه (J/s) می‌باشد. در سیستم متداول آمریکایی، واحد توان مکانیکی *اسب بخار* (hp) است. این واحدها و مقادیر معادل آنها عبارتند از:

$$۱\ \text{W} = ۱\ \text{J/s}$$

$$۱\ \text{hp} = ۵۵۰\ \text{ft-lb/sec} = ۳۳۰۰۰\ \text{ft-lb/min}$$

$$۱\ \text{hp} = ۷۴۶\ \text{W} = ۰/۷۴۶\ \text{kW}$$

بازده

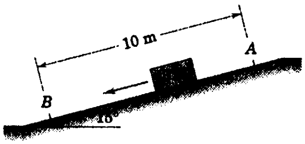
نسبت کار انجام شده *توسط* ماشین به کار انجام شده *بر روی* ماشین در طی همان فاصله زمانی، *بازده مکانیکی* ماشین e_m نامیده می‌شود. در این تعریف فرض می‌شود که ماشین به طور یکنواخت کار می‌کند. بنابراین افزایش یا کاهش انرژی در آن وجود ندارد. بازدهی همواره کمتر از واحد است. زیرا هر دستگاهی با اتلاف انرژی مواجه گشته و نیز در داخل ماشین انرژی تولید نمی‌شود. در وسایل مکانیکی که دارای قسمتهای متحرک هستند، اغلب انرژی اتلافی ناشی از کار منفی نیروهای اصطکاک جنبشی است. این کار به انرژی گرمایی تبدیل شده و سپس به محیط اطراف منتقل می‌شود. بازده مکانیکی درهر لحظه از زمان می‌تواند بر حسب توان مکانیکی P بیان شود.

$$e_m=\frac{P_{\text{خروجی}}}{P_{\text{ورودی}}} \qquad (۳-۱۳)$$

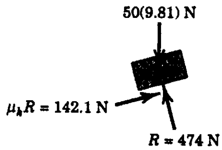
انرژی تلف شده علاوه بر اصطکاک مکانیکی، ممکن است الکتریکی یا حرارتی نیز باشد که در این حالت *بازده الکتریکی* e_e و *بازده حرارتی* e_t نیز وجود خواهد داشت. دراین صورت *بازده کلی* e برابر خواهد بود با:

$$e=e_m\,e_e\,e_t$$

مسئله نمونه ۱۱-۳



مطلوبست محاسبه سرعت جعبه‌ای به جرم ۵۰ kg موقعی که در پایین سراشیبی، به نقطه B می‌رسد، چنانچه سرعت اولیه آن در نقطه A از شیب برابر ٤ m/s باشد. ضریب اصطکاک سینتیکی ۰/۳۰ است.



حل: ترسیمه آزاد جعبه که شامل نیروی عمودی R و نیروی اصطکاک سینتیکی F که طبق روش معمول بدست آمده‌اند، در شکل نشان داده شده است. کار انجام شده توسط نیروی وزن که به طرف پایین صفحه است مثبت، ولی کار انجام شده بوسیله نیروی اصطکاک منفی است. کل کار انجام شده روی جعبه در طی حرکت برابر است با:

$$[U = F.s] \qquad U_{1\text{-}2} = [50(9.81)\sin 15° - 142.1]\, 10 = -151.9 \text{ J}$$ ❶

تغییر انرژی جنبشی برابر است با: $T_2 - T_1 = \Delta T$

$$[T = 1/2\, m v^2] \qquad \Delta T = \frac{1}{2}(50)\,(v^2 - 4^2)$$

از رابطه کار ـ انرژی داریم:

$$[U_{1\text{-}2} = \Delta T] \qquad -151.9 = 25\,(v^2 - 16)$$

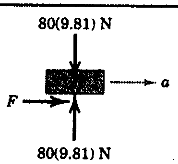
$$v^2 = 9.93 \ \ (\text{m/s})^2 \qquad v = 3.15 \ \ \text{m/s}$$ جواب

نکته مفید

چون کار خالص انجام شده منفی است در نتیجه انرژی جنبشی کاهش می‌یابد.

مسئله نمونه ۱۲-۳

کامیون کفی‌داری که جعبه‌ای به جرم ۸۰ kg را حمل می‌کند، از حالت سکون شروع به حرکت کرده و با شتاب ثابت طی مسافت ۷۵ m روی جاده‌ای مسطح، سرعتش را به ۷۲ km/h می‌رساند. مطلوبست محاسبه کاری که توسط نیروی اصطکاک روی جعبه در این مدت انجام می‌شود. در صورتیکه ضریب اصطکاک استاتیکی و سینتیکی به ترتیب برابر با (الف) ۰/۳۰ و ۰/۲۸ یا (ب) ۰/۲۵ و ۰/۲۰ باشند.



حل: اگر جعبه روی کفی نلغزد، شتابش برابر شتاب کامیون خواهد بود. یعنی:

$$[v^2 = 2\,a\,s] \qquad a = \frac{v^2}{2s} = \frac{(72/3.6)^2}{2(75)} = 2.67 \ \ \text{m/s}^2$$

حالت (الف): با این مقدار شتاب، نیروی اصطکاک بر روی جعبه برابر است با:

$$[F = ma] \qquad F = 80\,(2.67) = 213 \text{ N}$$

که این کمتر از مقدار حداکثر ممکن $\mu_s N = ۰/۳۰\,(۸۰)\,(۹/۸۱) = ۲۳۵$ N است. بنابراین جعبه لغزش نکرده و کار انجام شده توسط نیروی اصطکاک استاتیکی واقعی ۲۱۳ N برابر است با:

① $$[U = F s] \qquad U_{1\text{-}2} = 213\,(75) = 16000 \text{ J} \quad \text{یا} \quad 16 \text{ kJ}$$

حالت (ب): برای $\mu_s = ۰/۲۵$، حداکثر نیروی اصطکاک ممکن برابر ۱۹۶ N $= ۰/۲۵\,(۸۰)\,(۹/۸۱)$ است که اندکی کمتر از مقدار لازم ۲۱۳ N برای جلوگیری از لغزش است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که جعبه لغزش دارد و نیروی اصطکاک حاکم توسط ضریب سینتیکی تعیین می‌شود. $F = ۰/۲۰\,(۸۰)\,(۹/۸۱) = ۱۵۷$ N بنابراین شتاب جعبه برابر می‌شود با:

$$[F = ma] \qquad a = F/m = 157/80 = 1.962 \text{ m/s}^2$$

مسافتی که توسط جعبه و کامیون پیموده می‌شود، متناسب با شتابهایشان می‌گردد. بنــابراین، جعبــه دارای جابجایی $\left(\frac{۱/۹۶}{۲/۶۷}\right)۷۵ = ۵۵/۲$ m و کار انجام شده توسط نیروی سینتیکی برابر است با:

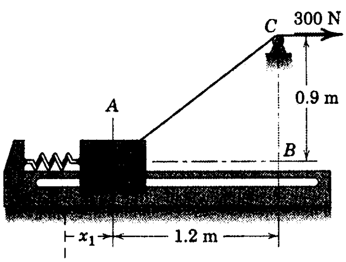
② $$[U = F s] \qquad U_{1\text{-}2} = 157\,(55.2) = 8660 \text{ J} \quad \text{یا} \quad 8.66 \text{ kJ}$$ جواب

نکات مفید

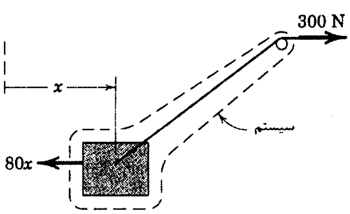
① *توجه داریم که موقعی که سطوح تماس در سکون است، کار نیروی اصطکاک استاتیکی برابر صفر است. اما وقتی مثل این مسئله حرکت می‌کنند، نیروی اصطکاک استاتیکی وارده شده بر جعبه، کار مثبت و نیروی وارد بر کفی کار منفی انجام می‌دهد.*

② *این مسئله نشان می‌دهد که وقتی شئ که مولد نیروی اصطکاک است، در حرکت باشد، نیروی اصطکاک سینتیکی می‌تواند کار مثبت انجام دهد. اگر سطح اتکا در سکون باشد، در این صورت نیروی اصطکاک سینتیکی وارده بر جسم متحرک، همواره کار منفی انجام خواهد داد.*

مسئله نمونه ۱۳-۳



قطعه ۵۰ kg در A روی غلتکهایی نصب شده به نحوی که تحت عمل نیروی ثابت ۳۰۰ N کابل، در امتداد ریل ثابت بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. قطعه در نقطه A از حالت سکون رها می‌شود و در حالی که فنر متصل به آن در ابتدا به اندازه $x_1 = ۰/۲۳۳$ m کشیده می‌شود. فنر دارای سختی $k = ۸۰$ N/m می‌باشد. سرعت v قطعه را هنگام رسیدن به موقعیت B حساب کنید.



حل: ابتدا فرض می‌کنیم که سختی فنر به اندازه کافی کوچک است کـه قطعه بتواند به نقطه B برسد.

ترسیمه نیروهای فعال برای سیستمی که شـامل قطعـه و کـابل، در یـک وضعیت کلی است، در شکل نشان داده شده است. نیروی فنر $۸۰x$ و کشش

۳۰۰ N تنها نیروهای خارجی وارد بر سیستم می‌باشند که بر روی سیستم کار انجام می‌دهند. نیروی وارد بـر قطعـه توسـط ریل، وزن قطعه و عکس العمل ناچیز قرقره روی کابل بر روی سیستم کـاری انجـام نـداده و جـزء ترسـیمه نـیروی فعـال نمی‌باشند.

وقتی قطعه از $x = ۰/۲۳۳$ m به $x = ۰/۲۳۳+۱/۲ = ۱/٤۳۳$ m حرکت می‌کند، کار انجام شده توسـط نـیروی فـنر بـر روی قطعه منفی و برابر است با:

$$\left[U = \int F dx\right] \qquad U_{1-2} = -\int_{0.233}^{1.433} 80x dx = -40x^2\Big|_{0.233}^{1.433} = -80.0 \text{ J}$$ ❶

کار انجام شده بر روی سیستم توسط نیروی ثابت ۳۰۰ N کابل برابر است با حاصلضرب نـیرو در حرکـت خـالص افقی کابل بر روی قرقره C، که برابر با $\sqrt{(۱/۲)^۲ + (۰/۹)^۲} - ۰/۹ = ۰/٦$ m می‌باشد. بنابراین، کار انجام شـده برابـر اسـت بـا $۳۰۰\ (۰/٦) = ۱۸۰$ J . اکنون رابطه کار ـ انرژی را برای سیستم بکار برده و داریم:

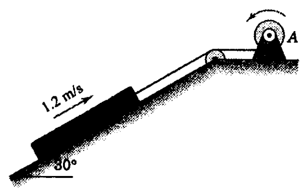
$$[U_{1-2} = \Delta T] \qquad -80.0 + 180 \qquad 50)(v^2 - 0) \qquad v = 2.0 \text{ m/s}$$ جواب

به مزیت خاص انتخاب سیستم توجه می‌کنیم. اگر قطعه به تنهایی به عنوان سیستم در نظر گرفته می‌شد، مولفه افقی کشش ۳۰۰ N کابل بر روی قطعه باید نسبت به جابجایی ۱/۲ m انتگرال گیری می‌گردید. برای انجام ایـن کـار نسـبت بـه روشی که حل کردیم به کار بیشتری نیاز می‌بود. اگر اصطکاک قابل ملاحظه‌ای بین قطعه و ریل موجود بود، می‌بایست قطعه را به تنهایی در نظر گرفته پس از محاسبه نیروی قائم متغیر، نیروی اصطکاک متغیر محاسبه می‌شد و برای بدست آوردن کار منفی، انتگرال گیری از نیروی اصطکاک نسبت به جابجایی لازم بود.

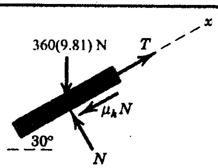
نکته مفید

اگر متغیر x از نقطه A اندازه‌گیری شده بود، نیروی فنر $(x + ۰/۲۳۳)$ ۸۰ و حدود انتگرال از صفر تا ۱/۲ m می‌بود. ❶

مسئله نمونه ۱۴-۳



وینچ انتقال قدرتی A، کُندهٔ ۳٦۰ کیلوگرمی را بر روی شیب ۳۰° بـا سـرعت ۱/۲ m/s بالا می‌کشـد. اگر تـوان خروجـی وینـچ ٤ kW باشـد، ضریـب اصطکـاک سینتیکی μ_k بین کُنده و سطح شیبدار را محاسبـه کنیـد. اگر نـاگهـان تـوان بـه ٦ kW افزایش یابد، شتاب لحظه‌ای متناظر a کُنده چقدر است؟



حل: از ترسیمه آزاد کُنده داریم: $N = ۳٦۰\,(۹/۸۱)\cos ۳۰° = ۳۰٦۰$ N و نیروی اصطکاک سینتیکی $۳۰٦۰\mu_k$ می‌شود. بـرای سـرعت ثـابت، نیروهـا در تعـادل بـوده، بنابراین:

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad T - 3060\mu_k - 360(9.81)\sin 30° = 0 \qquad T = 3060\mu_k + 1766$$

از توان خروجی وینچ، کشش در کابل برابر است با:

$$[P = Tv] \qquad T = P/v = 4000/1.2 = 3330 \text{ N}$$ ❶

با قرار دادن T داریم:

جواب $\quad 3330 = 3060\mu_k + 1766 \qquad \mu_k = 0.513$

موقعی که توان افزایش می‌یابد، ناگهان کشش برابر می‌شود با:

$$T = P/\upsilon = 6000/1.2 = 5000\ \text{N} \qquad [P = T\upsilon]$$

و شتاب متناظر به صورت زیر بدست می‌آید.

$$5000 - 3060(0.513) - 360(9.81)\sin 30° = 360\,a \qquad [\Sigma F_x = ma_x]$$

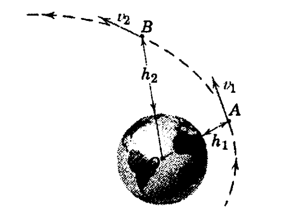
❷ جواب $\quad a = 4.63\ \text{m/s}^2$

نکات مفید

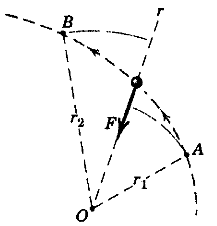
❶ *به تبدیل کیلووات به وات توجه داشته باشید. همچنین استفاده از J/s بجای N.m/s را بخاطر بسپارید.*

❷ *همانطور که سرعت افزایش می‌یابد، شتاب کاهش یافته تا سرعت به مقدار پایداری بیش از ۱/۲ m/s برسد.*

مسئله نمونه ۱۵-۳



ماهواره‌ای به جرم m در مداری بیضی شکل دور زمین مـی‌گردد. در نقطه A فاصله‌اش تا زمین $h_۱ = ۵۰۰$ km است و دارای سرعت $\upsilon_۱ = ۳۰۰۰۰$ km/h می‌باشد. سرعت $\upsilon_۲$ آنرا هنگامیکه ماهواره بـه نقطه B، در فاصلـه $h_۲ = ۱۲۰۰$ km از زمیـن می‌رسد، تعیین کنید.



حل: ماهواره در خارج از جو زمین حرکت می‌کند. بنابراین تنها نـیروی وارد بر آن جاذبه ثقل زمین است. با داشتن جرم زمین و شعاع آن که به ترتیب بـا m_e و R نشان داده می‌شود، طبق قانون جاذبه از معادله ۲-۱ داریم:

$$F = \frac{Gmm_e}{r^2} = \frac{gR^2m}{r^2}$$

که از قرار دادن $Gm_e = gR^2$ برای مقادیر $F = mg$ و $r = R$ در سطح زمین بدست می‌آید. کار انجام شده توسـط F، تنها ناشی از مولفه شعاعی حرکت در امتداد خط اثر F بوده و با افزایش r منفی می‌گردد.

$$U_{1\text{-}2} = -\int_{r_1}^{r_2} F dr = -mgR^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

از رابطه کار ـ انرژی $U_{1\text{-}2} = \Delta T$ داریم:

❶ $$mgR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{1}{2}m\left(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2\right) \qquad \upsilon_2^2 = \upsilon_1^2 + 2gR^2\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

❷ با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت:

$$\upsilon_2^2 = \left(\frac{30000}{3.6}\right)^2 + 2(9.81)\left[(6371)(10^3)\right]^2\left(\frac{10^{-3}}{6371+1200} - \frac{10^{-3}}{6371+500}\right)$$

$$= 69.44\,(10^6) - 10.72\,(10^6) = 58.73\,(10^6)\ \ (\text{m/s})^2$$

$$\upsilon_2 = 7663\ \ \text{m/s} \qquad \text{یا} \qquad \upsilon_2 = 7663\,(3.6) = 27590\ \ \text{km/h}$$

نکات مفید

❶ توجه کنید که نتیجه، به جرم ماهواره بستگی ندارد.

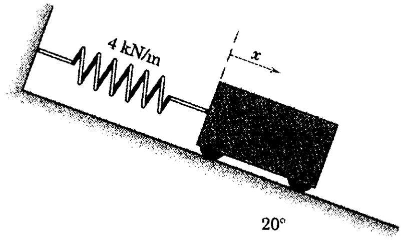
❷ برای بدست آوردن شعاع R زمین به جدول D-۲ ، پیوست D مراجعه شود.

مسائل

مسائل مقدماتی

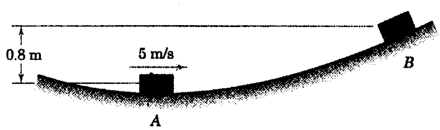
۳-۱۰۳ موقعی که $x = ۰$ می‌باشد، فنر کشیدگی ندارد. اگر جسم از موقعیت اولیه $x_1 = ۱۰۰$ mm حرکت نموده و به موقعیت نهایی $x_2 = ۲۰۰$ mm برسد، (الف) کار انجام شده توسط فنر بر روی جسم را تعیین کنید و (ب) کار انجام شده بر روی جسم توسط وزنش را بدست آورید.

جواب (الف) $U_{1-2} = -۶۰$ J و (ب) $U_{1-2} = ۲/۳۵$ J



شکل مسئله ۳-۱۰۳

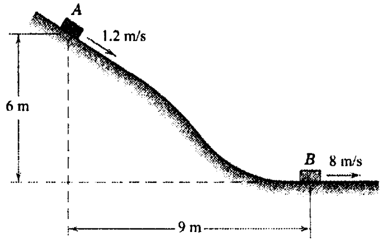
۳-۱۰٤ جسم کوچکی در نقطه A دارای سرعت $v_A = ۵$ m/s می‌باشد. از اصطکاک صرفنظر کرده، سرعت آن را در نقطه B یعنی v_B پس از اینکه ۰/۸ m بالا می‌رود، تعیین کنید. آیا اطلاعات در مورد شکل مسیر لازم است؟



شکل مسئله ۳-۱۰۴

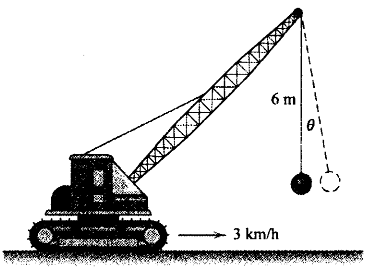
۳-۱۰۵ قطعه ۳۰ کیلوگرمی در صفحه قائم روی مسیر منحنی به طرف پایین می‌لغزد. اگر در نقطه A دارای سرعت ۱/۲ m/s به طرف پایین شیب و سرعت ۸ m/s در نقطه B باشد، مقدار کار U_f انجام شده روی قطعه ناشی از اصطکاک را در طی مسافت A تا B بدست آورید.

جواب $U_f = -۸۲۷$ J



شکل مسئله ۳-۱۰۵

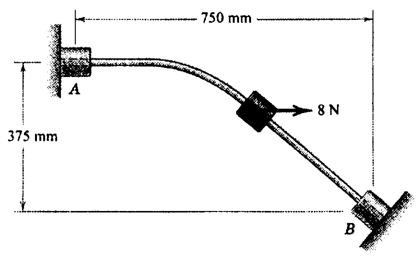
۳-۱۰٦ جرثقیل تخریب ساختمان با سرعت ثابت ۳ km/h در حال حرکت می‌باشد که ناگهان متوقف می‌شود. حداکثر زاویه θ نوسان کابل متصل به وزنه مخرب را بدست آورید.



شکل مسئله ۳-۱۰۶

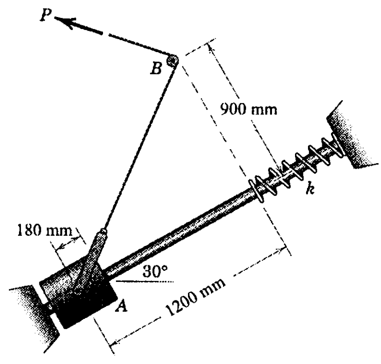
۳-۱۰۷ طوقهٔ ۰/۸ کیلوگرمی با اصطکاک ناچیز روی میله ثابتی در صفحه قائم می‌لغزد. اگر طوقه از حالت سکون در نقطه A تحت نیروی ثابت افقی ۸ N شروع به حرکت نماید، سرعت v آن را هنگامیکه در نقطه B به مانع برخورد می‌کند، محاسبه نمایید.

جواب $v = ٤/۷۳$ m/s



شکل مسئله ۳-۱۰۷

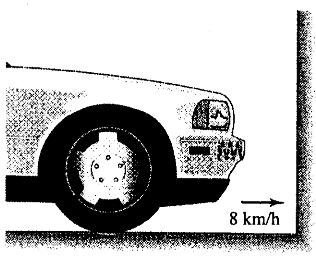
۳-۱۰۸ طوقه A به جرم ۱۵ kg از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌شود و با اصطکاک ناچیز به سوی بالای میله ثابت شیبدار ۳۰° نسبت به افق، تحت تاثیر نیروی ثابت P = ۲۰۰ N وارده به کابل می‌لغزد. سختی k لازم فنر را چنان تعیین کنید که حداکثر تغییر طول فنر ۱۸۰ mm باشد. موقعیت قرقره کوچک در B ثابت است.



شکل مسئله ۱۰۸-۳

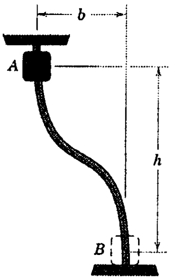
۳-۱۰۹ طراحی یک سپر فنری اتومبیل ۱۵۰۰ کیلوگرمی مورد نظر است؛ به طوریکه اتومبیل از سرعت ۸ km/h بعد از اینکه فنر به اندازه ۱۵۰ mm تغییر شکل یافت، متوقف گردد. سختی لازم k برای هر یک از دو فنر پشت سپر را مشخص کنید. در لحظه قبل از برخورد، فنرها بدون تغییر شکل هستند.

جواب k = ۱۶۴/۶ kN/m



شکل مسئله ۱۰۹-۳

۳-۱۱۰ طوقهٔ کوچکی به جرم m از حالت سکون در نقطه A رها گشته، به طرف پایین میله منحنی شکل که در صفحه قائم قرار گرفته، بدون اصطکاک می‌لغزد. سرعت v طوقه را موقع برخورد به پایه B، بر حسب شرایط داده شده بیان کنید.



شکل مسئله ۱۱۰-۳

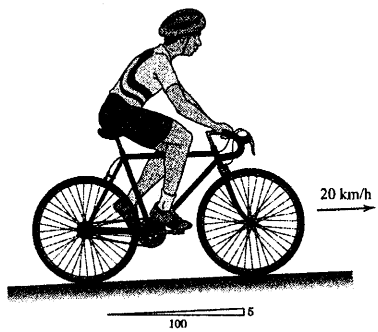
۳-۱۱۱ برای طوقه لغزنده مسئله ۱۱۰-۳، چنانچه m = ۰/۵ kg ، b = ۰/۸ m و h = ۱/۵ m باشد و در صورتیکه سرعت برخورد به پایه B پس از رها شدن طوقه از حالت سکون برابر ۴/۷ m/s باشد، کار Q نیروی اصطکاک را محاسبه کنید. انرژی از دست رفته چه می‌شود؟

جواب Q = -۱/۸۳۵ J

۳-۱۱۲ بردار موقعیت یک ذره توسط رابطه $\mathbf{r} = 8t\,\mathbf{i} + 1/2\,t^2\,\mathbf{j} - 0/5\,(t^3 - 1)\,\mathbf{k}$ داده شده که در آن، t زمان بر حسب ثانیه از شروع حرکت بوده و $\mathbf{r}$ بر حسب متر تعیین می‌گردد. در لحظه‌ای که t = ۴ s است، توان P ایجاد شده توسط نیروی $\mathbf{F} = 40\,\mathbf{i} - 20\,\mathbf{j}\;\; 36\,\mathbf{k}$ N که روی ذره اثر می‌کند را تعیین کنید.

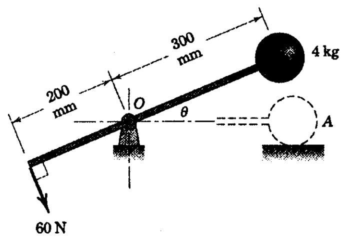
۳-۱۱۳ دوچرخه سوار و دوچرخه‌اش با هم ۹۵ kg جرم دارد. چه توان P، را بایستی دوچرخه سوار برای بالا رفتن از سطح شیب ۵ درصد و با سرعت ثابت ۲۰ km/h، مصرف کند.

جواب P = ۲۵۹ W



شکل مسئله ۱۱۳-۳

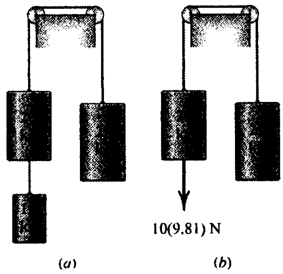
۱۱٤-۳ گوی ٤ کیلوگرمی و میله سبک اتصالی در صفحه قائم حول محور ثابت در O دوران می‌کنند. اگر مجموعه از حالت سکون در $\theta = ۰$ بر اثر نیروی ٦۰ نیوتنی که بر میله عمود باقی می‌ماند، شروع به حرکت نماید، سرعت v گوی را هنگامیکه θ به $۹۰°$ نزدیک می‌شود، تعیین کنید. گوی را به صورت یک ذره در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۱۱۴-۳

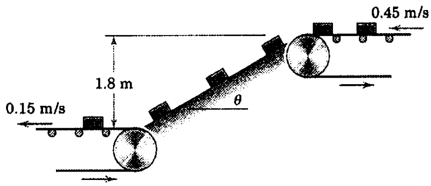
۱۱۵-۳ هر یک از دو سیم از حالت سکون رها می‌شود. سرعت هر یک از دو استوانه ۲۵ کیلوگرمی را بعد از اینکه استوانه‌های ۲۰ کیلوگرمی به اندازه ۲ m پایین آمدند، محاسبه کنید. نیروی (۹/۸۱)۱۰ نیوتنی در حالت (b) جایگزین استوانه ۱۰ کیلوگرمی در حالت (a) می‌گردد.

جواب $(a)\ v = ۱/۸۸۹$ m/s و $(b)\ v = ۲/۰۹$ m/s



شکل مسئله ۱۱۵-۳

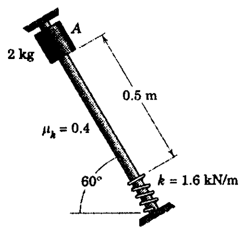
۱۱٦-۳ تسمه نقاله فوقانی، مکعبهای فلزی کوچکی را با سرعت ۰/٤٥ m/s به سرسره منتقل می‌نماید. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی بین مکعب‌ها و سرسره ۰/۳۰ باشد، زاویه θ سرسره را چنان تعیین کنید که انتقال مکعبها به تسمه نقاله تحتانی بدون لغزش انجام گیرد. سرعت نقالهٔ اخیر ۰/۱٥ m/s است.



شکل مسئله ۱۱۶-۳

۱۱۷-۳ طوقه‌ای به جرم ۲ kg از حالت سکون در نقطه A رها گشته و بر روی میله ثابت شیبداری که در صفحه قائم است، فرو می‌لغزد. ضریب اصطکاک سینتیکی برابر ۰/٤ است. حساب کنید (الف) سرعت v لغزنده را در لحظه برخورد به فنر و (ب) ماکزیمم تغییر شکل x فنر را.

جواب (الف) $v =$ ۲/٥٦ m/s و (ب) $x =$ ۹۸/۹ mm

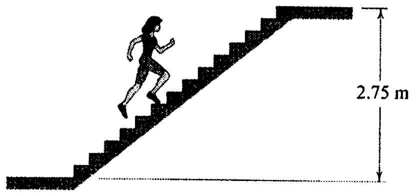


شکل مسئله ۱۱۷-۳

۳-۱۱۸ اتومبیلی به جرم ۱۲۰۰ kg در بالای یک شیب ۸ درصد با سرعت ۱۰۰ km/h وارد شیب جاده می‌گردد. راننده با گرفتن ترمز، سرعت خود را پس از طی مسافت ۰/۵ km در امتداد جاده به ۲۵ km/h می‌رساند. انرژی تلف شده Q توسط ترمزها را که به صورت گرما می‌باشد، حساب کنید. از اتلافهای اصطکاکی دیگر مثل مقاومت هوا صرفنظر کنید.

۳-۱۱۹ بانوی ٥٤ کیلوگرمی در مدت ۵ ثانیه از پلکان یک طبقه بالا می‌رود. توان متوسط او را بدست آورید.

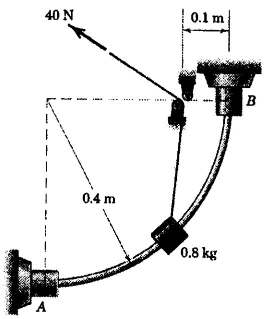
جواب P = ۲۹۱ W



شکل مسئله ۱۱۹-۳

مسائل ویژه

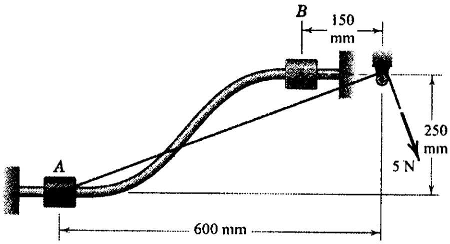
۳-۱۲۰ طوقه ۰/۸ کیلوگرمی آزادانه در امتداد میله مدور ثابتی می‌لغزد. سرعت v طوقه را در B حساب کنید، چنانچه از حالت سکون در A به وسیله نیروی ثابت ٤۰ N در ریسمان، بالا برده شود. ریسمان توسط قرقره‌های کوچک ثابتی هدایت می‌شود.



شکل مسئله ۱۲۰-۳

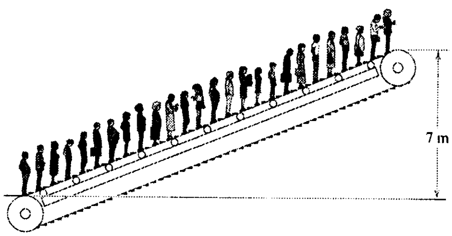
۳-۱۲۱ لغزنده ۰/۲ کیلوگرمی، آزادانه در طول یک میله منحنی شکل ثابت از A تا B در صفحه قائم تحت نیروی ثابت کشش طناب برابر ۵ N حرکت می‌کند. اگر لغزنده در نقطه A در حال سکون باشد، سرعت v آن را در موقعی که به B می‌رسد، حساب کنید.

جواب v = ٤/٤٨ m/s



شکل مسئله ۱۲۱-۳

۳-۱۲۲ پلکان برقی یک فروشگاه قابلیت حمل ۳۰ نفر در دقیقه از طبقه اول به طبقه دوم به ارتفاع ۷ m را دارد. جرم متوسط هر فرد ٦٥ kg می‌باشد. اگر توان موتور محرک ۳ kW باشد، e بازده مکانیکی سیستم را محاسبه کنید.

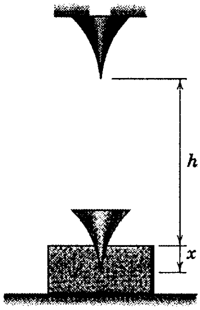


شکل مسئله ۱۲۲-۳

۳-۱۲۳ اتومبیلی به جرم ۱۵۰۰ kg از پایین یک شیب ۱۰ درصد از حالت سکون شروع به حرکت نموده و با شتاب ثابتی به طرف بالای شیب بعد از طی فاصله ۱۰۰ m به سرعت ۵۰ km/h می‌رسد. توان P داده شده توسط موتور به چرخهای محرک، هنگامیکه اتومبیل به این سرعت می‌رسد، چقدر است؟

جواب P = ٤۰/٤ kW

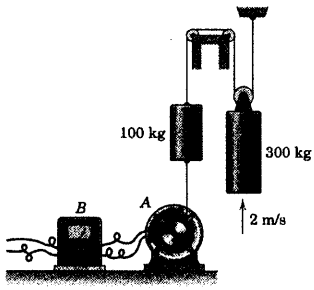
۳-۱۲٤ در آزمایش تعیین خواص شکست ماده پوششی، مخروطی فولادی به جرم m از ارتفاع h رها شده و سپس به داخل ماده نفوذ می‌کند. شعاع مخروط با مجذور فاصله نفوذ متناسب است. مقاومت R ماده در مقابل نفوذ به سطح مقطع فرو رونده بستگی دارد و بنابراین با توان چهارم فاصله x، فرو رفتگی مخروط، متناسب است یا $R = kx^4$. اگر مخروط در فاصله $x = d$ متوقف گردد، ثابت k را بر حسب شرایط آزمایش و نتایج آن تعیین کنید. تنها از رابطه کار ـ انرژی استفاده گردد.



شکل مسئله ۱۲۴-۳

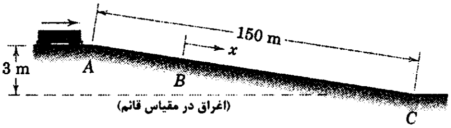
۳-۱۲۵ موتور A برای بالا بردن استوانه ۳۰۰ کیلوگرمی با سرعت ثابت ۲ m/s به کار می‌رود. اگر توان سنج B، توان الکتریکی ورودی ۲/۲۰ kW را نشان دهد، بازده ترکیبی الکتریکی ـ مکانیکی سیستم e را حساب کنید.

جواب $e = ۰/۸۹۲$



شکل مسئله ۱۲۵-۳

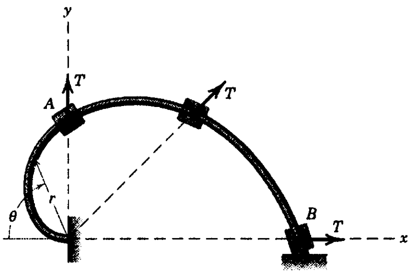
۳-۱۲٦ در محوطه تعویض واگن راه‌آهن، یک واگن باری به جرم ٦٨ Mg که با سرعت ۰/۵ m/s در A حرکت می‌کند، در نقطه B با قسمت کند کننده مسیر مواجه می‌شود که نیروی کند کننده ۳۲ kN را در خلاف جهت حرکت به آن وارد می‌کند. کند کننده بایستی تا چه فاصله x فعال باشد تا سرعت واگن در نقطه C به ۳ m/s محدود گردد؟



شکل مسئله ۱۲۶-۳

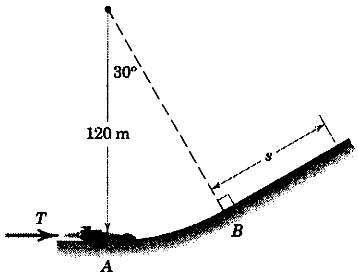
۳-۱۲۷ طوقه‌ای به جرم ۰/۵ kg با اصطکاک ناچیز در امتداد میله خمیده ثابت، در صفحه قائم می‌لغزد. انحنای میله با رابطه $r = ۰/۳\theta$ بیان می‌گردد که در آن، r بر حسب متر و θ بر حسب رادیان است. طوقه از حالت سکون در نقطه A رها شده و تحت تاثیر نیروی شعاعی $T = ۱۰\text{N}$، تا B می‌لغزد. سرعت v لغزنده را به هنگام رسیدن به B محاسبه کنید.

جواب $v = ۵/۳۰$ m/s



شکل مسئله ۱۲۷-۳

۳-۱۲۸ اتومبیل آزمایشی کوچک که با نیروی جت کار می‌کند، دارای جرم ۱۰۰ kg بوده و از حالت سکون از نقطه A در صفحه قائم، مسیری مطابق شکل را با اصطکاک ناچیز می‌پیماید. اگر موتور جت نیروی رانش ثابت T برابر ۱/۵ kN را از A تا موقعیت B که خاموش می‌شود، تامین کند؛ فاصله s را که توسط اتومبیل تا لحظه توقف در امتداد سطح شیبدار پیموده می‌شود، تعیین کنید. کاهش جرم ناشی از احتراق گازها در موتور جت ناچیز است و می‌توان از آن صرفنظر نمود.

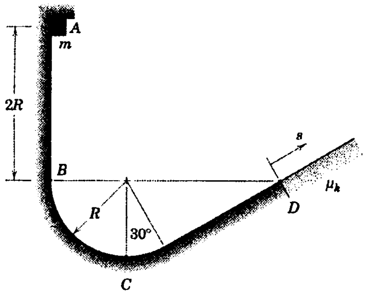


شکل مسئله ۱۲۸-۳

۳-۱۲۹ لغزنده‌ای کوچک به جرم m از حالت سکون در موقعیت A رها می‌شود و در امتداد مسیر نشان داده شده در صفحه قائم می‌لغزد. مسیر از نقطه A تا D صیقلی است و از نقطه D به بعد زبر (با ضریب اصطکاک سینتیکی μ_k) می‌باشد. مطلوبست محاسبه (الف) نیروی عمودی N_B اعمال شده توسط مسیر بر لغزنده را درست پس از عبور از نقطه B، (ب) نیروی عمودی N_C اعمال شده توسط مسیر بر لغزنده را به هنگام گذشتن از نقطه قعر C و (ج) مسافت طی شده s در امتداد سطح شیبدار از نقطه D تا توقف لغزنده را.

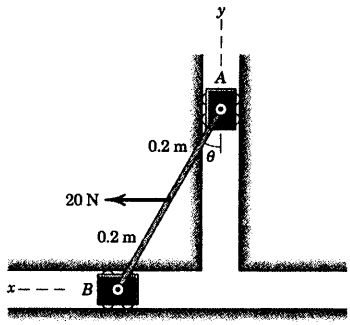
جواب (الف) $N_B = ٤\,mg$ و (ب) $N_C = ٧\,mg$

(ج) $s = \dfrac{۴R}{۱+\mu_k\sqrt{۳}}$



شکل مسئله ۱۲۹-۳

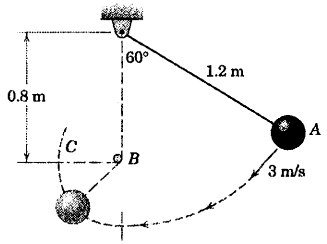
۳-۱۳۰ هر یک از لغزنده‌های A و B دارای جرم ۲ kg بوده و با اصطکاک ناچیز در راهنماهای خود حرکت می‌کنند. y در امتداد قائم می‌باشد. نیروی افقی ۲۰ N به وسط میله رابط سبک وارد شده و مجموعه از حالت سکون در $\theta = ۰°$ رها می‌گردد. سرعت برخورد v_A A را با راهنمای افقی در موقعیت $\theta = ۹۰°$ حساب کنید.



شکل مسئله ۱۳۰-۳

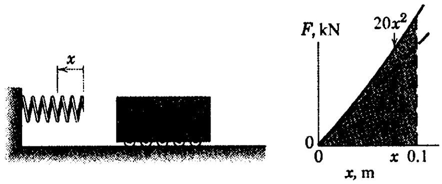
۳-۱۳۱ گوی از موقعیت A با سرعت ۳ m/s رها گشته و در صفحه قائم تاب می‌خورد. در موقعیت پایین مسیر، ریسمان با مانع ثابت B برخورد کرده و گوی به تاب خوردن خود روی قوس خط چین ادامه می‌دهد. سرعت v_C گوی را به هنگام گذشتن از موقعیت C حساب کنید.

جواب $v_C = ۳/۵۹$ m/s



شکل مسئله ۳-۱۳۱

۳-۱۳۲ سرعت افقی v ارابه ۲۰ کیلوگرمی را که بایستی به فنر برخورد نموده و آن را حداکثر ۱۰۰ mm بفشارد را تعیین کنید. فنر که به فنر «سخت شونده» معروف است، سختی خود را با تغییر طولش مطابق شکل تغییر می‌دهد.

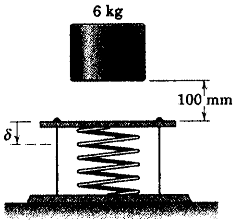


شکل مسئله ۳-۱۳۲

۳-۱۳۳ به صورت تجربی مشخص شده است که چرخهای محرک یک اتومبیل باید نیروی اصطکاک ۵۶۰ N بر سطح جاده اعمال کنند تا بر روی یک جاده افقی، سرعت پایای اتومبیل ۹۰ km/h حفظ شود. اگر بازده کلی مجموعه محرک اتومبیل $e_m = ۰/۷۰$ باشد، توان خروجی لازمه P موتور را تعیین کنید.

جواب $P = ۲۰$ kW

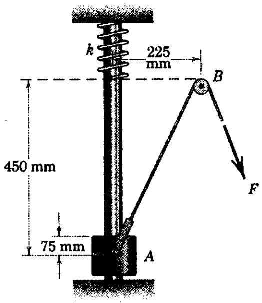
۳-۱۳۴ استوانه ٦ کیلوگرمی از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌گردد و بر روی فنری که توسط تیغه سبک و سیمهایی مقید شده که در ابتدا ۵۰ mm پیش فشردگی داشته باشد، سقوط می‌کند. اگر سختی فنر برابر ٤ kN/m باشد، تغییر طول اضافی δ ایجاد شده در فنر توسط استوانه را قبل از اینکه استوانه برگردد، محاسبه کنید.



شکل مسئله ۳-۱۳۴

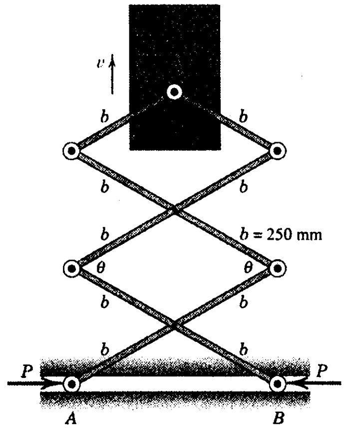
۳-۱۳۵ طوقه A به جرم ۷ kg با اصطکاک ناچیز بر روی میله قائم ثابتی می‌لغزد. موقعی که طوقه از حالت سکون در پایین محور در موقعیت نشان داده شده رها می‌گردد، تحت تاثیر نیروی ثابت کابل، $F = ۲۰۰$ N قرار گرفته و به طرف بالا حرکت می‌کند. اگر حداکثر فشردگی فنر به ۷۵ mm محدود شده باشد، سختی k را حساب کنید. موقعیت قرقره کوچک B ثابت است.

جواب $k = ۸/۷۹$ kN/m



شکل مسئله ۳-۱۳۵

۳-۱۳۶ حرکت قائم قطعه ۲۰ کیلوگرمی توسط دو نیروی P که به انتهای A و B از سیستم اهرم بندی اعمال گردیده، کنترل می‌شود که در آن A و B مقید به حرکت در راهنمای افقی می‌باشند. اگر نیروهای $P = ۱۱۰۰$ N از ابتدا در موقعیتی که سیستم اهرم بندی در حالت سکون در موقعیت $\theta = ۶۰^\circ$ است، اعمال گردد؛ سرعت رو به بالای قطعه را هنگامیکه θ به سمت ۱۸۰° میل می‌کند، تعیین کنید. از اصطکاک و جرم میله‌های رابط صرفنظر کرده و توجه کنید که P از مقدار حالت تعادل خود یعنی ۸۵۰ N $= \cot ۳۰^\circ \, (۵\frac{W}{۲})$ بزرگتر است.



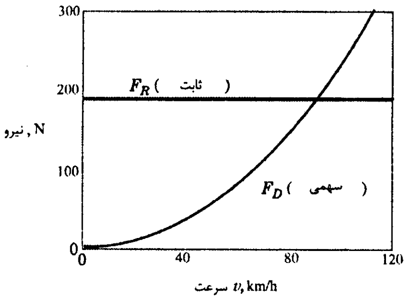
شکل مسئله ۱۳۶-۳

۳-۱۳۷ آزمایش گسترده بر روی یک اتومبیل آزمایشی ۹۰۰ کیلوگرمی، نیروی مقاومت آیرودینامیکی F_D و نیروی مقاومت غلتشی غیر آیرودینامیکی F_R را مطابق شکل رسم شده، آشکار می‌سازد. تعیین کنید: (الف) توان لازم برای سرعتهای ثابت ۵۰ و ۱۰۰ km/h بر روی جاده مسطح و (ب) توان لازم برای سرعت ثابت ۱۰۰ km/h در دو حالت بالا رفتن و پایین آمدن از شیب ۶ درصد و (ج) سرعت ثابتی که برای پایین آمدن از شیب ۶ درصد، توانی لازم ندارد.

جواب (الف) $P_{۵۰} = ۴/۳۴$ kW و $P_{۱۰۰} = ۱۳/۸۹$ kW

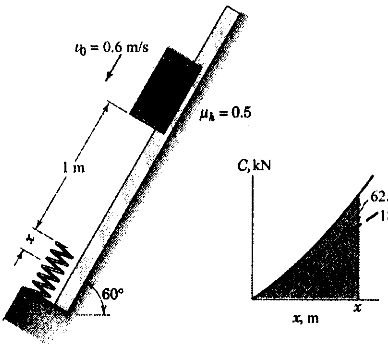
(ب) $P_{بالا} = ۲۸/۶$ kW و $P_{پایین} = -۸۰۰$ kW

(ج) $v = ۱۰۵/۶$ km/h



شکل مسئله ۱۳۷-۳

۳-۱۳۸ لغزنده ۲۵ کیلوگرمی در موقعیت نشان داده شده که دارای سرعت اولیه $v_0 = ۰/۶$ m/s می‌باشد، تحت تاثیر نیروی جاذبه و اصطکاک بر روی ریلهای شیبدار می‌لغزد. ضریب اصطکاک سینتیکی بین لغزنده و ریل برابر ۰/۵ می‌باشد. سرعت لغزنده را هنگامیکه فنر به اندازه $x = ۱۰۰$ mm فشرده می‌شود، حساب کنید. فنر مقاومت فشاری C را از خود نشان می‌دهد و به فنر «سخت شونده» معروف است. زیرا مطابق نمودار سختی آن با تغییر طول، افزایش می‌یابد.

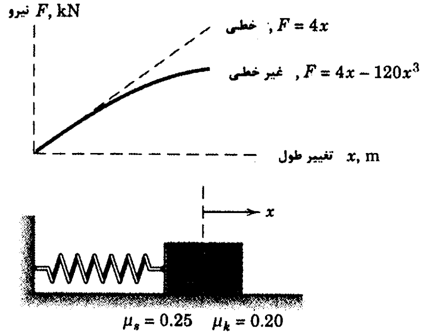


شکل مسئله ۱۳۸-۳

۳-۱۳۹ فنر متصل به جرم ۱۰ kg غیر خطی است و رابطه نیرو ـ تغییر طول آن در شکل نشان داده شده که در $x = ۰$ غیر فشرده است. اگر جرم تا موقعیت $x = ۱۰۰$ mm حرکت داده شود و از آنجا رها گردد، سرعت v را موقعی که $x = ۰$ است، تعیین کنید. سرعت متناظر v' را موقعی که فنر خطی باشد و توسط رابطه $F = ۴x$ بیان شود، بدست آورید. که

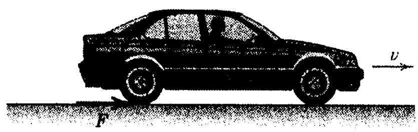
در آن x بر حسب متر و نیروی F بر حسب نیوتن است.

جواب $\quad v' = ۱/۸۹۹ \text{ m/s}$



شکل مسئله ۱۳۹-۳

۱۴۰-۳ اتومبیلی به جرم m بر روی جاده‌ای تخت، تحت اثر نیروی محرک F شتاب گرفته و در فاصله s سرعت آن از $v_۱$ به سرعت بالاتر $v_۲$ می‌رسد. اگر اتومبیل توان خروجی ثابت P را ایجاد کند، سرعت $v_۲$ را تعیین کنید. اتومبیل را به صورت ذره‌ای که تنها تحت اثر نیروی افقی F واقع شده، در نظر بگیرید.

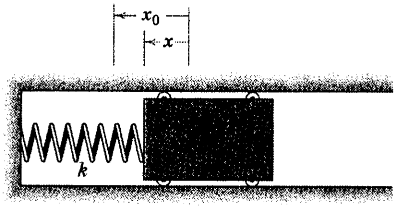


شکل مسئله ۱۴۰-۳

۱۴۱-۳ قطعه‌ای به جرم m در راهنمای خود از حالت سکون در حالیکه فنری به سختی k را به اندازه $x_۰$ فشرده کرده، رها می‌گردد. رابطه‌ای برای توان ایجاد شده توسط فنر بر حسب تغییر طول x فنر پیدا کنید. همچنین ماکزیمم توان P_{max} و مقدار متناظر x آن را بدست آورید.

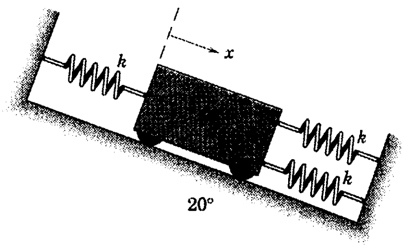
جواب $\quad P = kx\sqrt{\frac{k}{m}\left(x_۰^۲ - x^۲\right)}$

$$P_{max} = \frac{k}{۲}\sqrt{\frac{k}{m}}\, x_۰^۲ \quad \text{در} \quad x = \frac{x_۰}{\sqrt{۲}}$$



شکل مسئله ۱۴۱-۳

۱۴۲-۳ سه فنر یکسان موقعی که ارابه از حالت سکون در موقعیت $x = ۰$ رها می‌گردد، بدون کشیدگی می‌باشند. اگر $m = ۱۰ \text{ kg}$ و $k = ۱۲۰ \text{ N/m}$ باشد، تعیین کنید (الف) سرعت v ارابه را هنگامیکه $x = ۵۰ \text{ mm}$ است؛ (ب) ماکزیمم جابجایی ارابه x_{max} را و (ج) جابجایی پایدار x_{ss} که بعد از اتمام نوسانات وجود خواهد داشت.



شکل مسئله ۱۴۲-۳

۷-۳ انرژی پتانسیل

در بخش قبل در موردکار و انرژی جنبشی، یک ذره یا مجموعه‌ای از ذرات متصل به هم، مجزا شده و کار انجام شده توسط نیروی جاذبه، نیروهای فنر و بقیه نیروهای وارد شده بر ذره یا مجموعه در عبارت U از رابطه کار و انرژی تعیین گردید. در بخش حاضر کار انجام شده توسط نیروهای جاذبه و فنر را با تعریف واژه *انرژی پتانسیل* بررسی خواهیم کرد. این واژه تحلیل بسیاری از مسائل را ساده می‌کند.

انرژی پتانسیل جاذبه‌ای

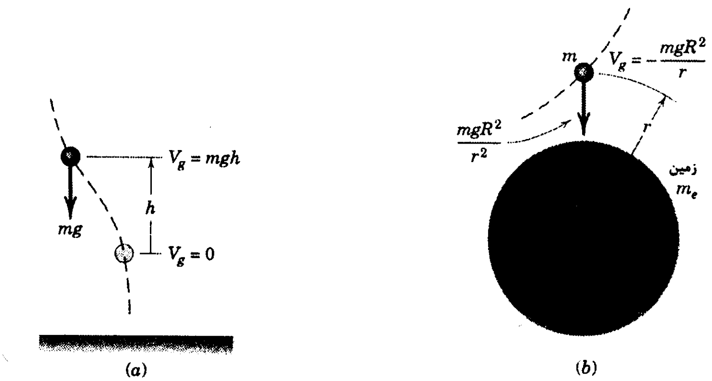
ابتدا حرکت ذره‌ای به جرم m را در نزدیکی زمین مطابق شکل ٦a-۳ در نظر می‌گیریم که در آن جاذبه ثقل (وزن) mg اساساً ثابت است. *انرژی پتانسیل جاذبه‌ای* V_g ذره به صورت کار انجام شده mgh تعریف می‌شود که *در مقابله با* جاذبه ثقل برای بالا بردن ذره به اندازه h به طرف بالای صفحه مرجع اختیاری به کار می‌رود که V_g در آنجا صفر است. بنابراین انرژی پتانسیل را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\boxed{V_g = mgh} \qquad (۳-١٤)$$

این کار، انرژی پتانسیل نامیده می‌شود زیرا اگر به ذره اجازه داده شود که هنگام برگشت به سطح مرجع اولیه پایین بر روی جسمی کار انجام دهد، این کار به انرژی تبدیل می‌گردد. هنگام رفتن از یک سطح $h=h_1$ به سطح بالاتر $h = h_2$ تغییر انرژی پتانسیل برابر است با:

$$\Delta V_g = mg\,(h_2 - h_1) = mg\,\Delta h$$

کار متناظر انجام شده توسط نیروی جاذبه بر روی ذره برابر است با $-mg\Delta h$. بنابراین کار انجام شده بوسیله نیروی جاذبه برابر منفی تغییر انرژی پتانسیل است.



شکل ۶-۳

موقعی که تغییرات ارتفاع در میدان زمین خیلی زیاد است. مطابق شکل۶b-۳، نیروی جاذبه $Gmm_e/r^2 = mgR^2/r^2$ دیگر ثابت نیست. کار انجام شده در *مقابل* این نیرو برای تغییر موقعیت شعاعی ذره از r به r' برابر است با $V'_g - V_g$، تغییر انرژی پتانسیل جاذبه‌ای، یعنی:

$$\int_r^{r'} mgR^2 \frac{dr}{r^2} = mgR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) = V'_g - V_g$$

معمول است که وقتی $r' = \infty$ است، $V'_g = 0$ فرض شود، بنابراین با این سطح مرجع داریم:

$$\boxed{V_g = -\frac{mgR^2}{r}} \qquad (۳-۱۵)$$

با رفتن از r_1 به r_2، تغییر انرژی متناظر برابر است با:

$$\Delta V_g = mgR^2\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

که دوباره برابر با کار *منفی* انجام شده توسط نیروی جاذبه است. توجه داریم که انرژی پتانسیل یک ذره معین تنها به موقعیت آن، h یا r وابسته بوده و به مسیری که برای رسیدن به آن موقعیت طی می‌کند، بستگی ندارد.

انرژی پتانسیل الاستیکی

دومین مثال انرژی پتانسیل در تغییر شکل جسم الاستیکی، مانند فنر یافت می‌شود. کاری که بر فنر انجام می‌گیرد تا به آن تغییر شکل دهد در فنر ذخیره شده و *انرژی پتانسیل الاستیک* V_e نامیده می‌شود. در هنگام تغییر شکل فنر رها شده، این انرژی به صورت کار انجام شده توسط فنر، بر جسمی که به انتهای متحرک آن متصل شده بازگشت می‌کند. برای فنر خطی یک بعدی به سختی k، که در بخش ۶-۳ شرح و در شکل ۴-۳ نشان داده شده، نیروی تحمل شده توسط فنر در هر تغییر شکل x، کششی یا فشاری، نسبت به وضعیت تغییر شکل نیافته برابر $F = kx$ می‌باشد. بنابراین، انرژی پتانسیل الاستیک فنر را به صورت کار انجام شده برای تغییر شکل آن به مقدار x تعریف می‌کنیم و داریم:

$$\boxed{V_e = \int_0^x kx\,dx = \frac{1}{2}kx^2} \qquad (۳-۱۶)$$

اگر تغییر شکل فنر، چه کششی، چه فشاری، طی حرکت از x_1 به x_2 افزایش یابد، آنگاه تغییر انرژی پتانسیل فنر برابر با مقدار نهایی منهای مقدار اولیه‌اش می‌باشد یا:

$$\Delta V_e = \frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right)$$

که مثبت است. بالعکس، اگر تغییر شکل فنر در طی حرکت کاهش یابد، آنگاه بقیه انرژی پتانسیل فنر منفی می‌شود. مقدار این تغییرات توسط مساحت ذوزنقه سایه خورده در نمودار F-x شکل ۴-۳ معرفی شده است.

چون نیروی اعمال شده *توسط* جسم متحرک *بر روی* فنر برابر و مخالف جهت نیروی F وارد شده *بر روی* جسم *توسط* فنر می‌باشد (شکل ٤-٣)، نتیجه می‌گیریم که کار انجام شده بر روی فنر، منفی کار انجام شده بر روی جسم است. بنابراین، می‌توانیم بجای کار U انجام شده توسط فنر بر روی جسم، منفی اختلاف انرژی پتانسیل فنر یعنی $-\Delta V_e$ را جایگزین نماییم، منوط به اینکه فنر را جزء سیستم به حساب آوریم.

رابطه کار ـ انرژی

با در نظر گرفتن عنصر الاستیک در یک سیستم، می‌توانیم رابطه کار ـ انرژی را بر حسب جمله‌هایی از انرژی پتانسیل اصلاح نماییم. اگر $U'_{1\text{-}2}$ را به عنوان کار کلیه نیروهای خارجی غیر از نیروهای جاذبه و فنر در نظر بگیریم، می‌توانیم رابطه ۱۱-۳ را به صورت $U'_{1\text{-}2} + (-\Delta V_g) + (-\Delta V_e) = \Delta T$ بنویسیم. یا:

$$\boxed{U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e} \tag{۳-۱۷}$$

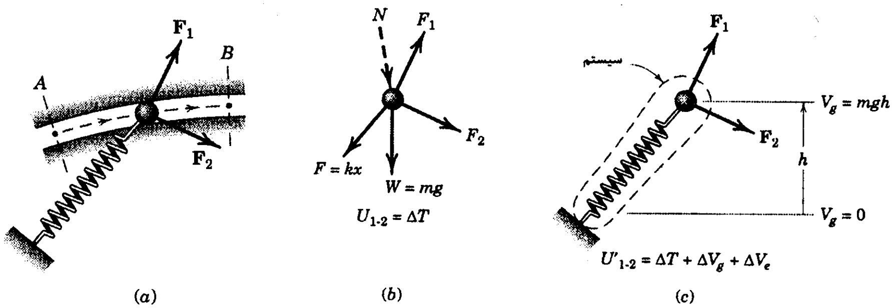
استفاده از شکل اخیر رابطه کار ـ انرژی اغلب راحت‌تر از بهره گیری از رابطه ۱۱-۳ می‌باشد، زیرا کار انجام شده توسط نیروهای جاذبه و فنر با توجه به موقعیتهای ابتدایی و انتهایی ذره و طولهای ابتدایی و انتهایی فنر، به سهولت قابل محاسبه است. مسیر طی شده بین نقاط ابتدایی و انتهایی، تاثیری در محاسبه ΔV_g و ΔV_e ندارد.

توجه کنید که رابطه ۱۷-۳ را می‌توان به شکل معادل زیر بازنویسی کرد.

$$\boxed{T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U'_{1-2} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2}} \tag{۳-۱۷a}$$

برای روشن شدن تفاوت استفاده از رابطه‌های ۱۱-۳ و ۱۷-۳، شکل ۷-۳ ذره‌ای به جرم m را به صورت شماتیک نشان می‌دهد که مقید است در امتداد مسیر ثابتی تحت اثر نیروهای F_1 و F_2، نیروی جاذبه $W = mg$، نیروی فنر F و نیروی عکس العمل N حرکت کند. در قسمت (b) شکل، ذره از محیط خود جدا و ترسیمه آزاد آن نشان داده شده است. کار انجام شده توسط هر کدام از نیروهای F_1، F_2، W و نیروی فنر $F = kx$ در طی حرکت مورد نظر، مثلاً از A تا B، حساب شده ـ با استفاده از رابطه ۱۱-۳ برابر تغییر انرژی جنبشی ΔT قرار داده می‌شود. نیروی عکس العمل N که عمود بر مسیر حرکت می‌باشد، کاری انجام نخواهد داد. در قسمت (c) شکل از روش دیگری استفاده شده و فنر به عنوان قسمتی از سیستم مجزا شده تلقی می‌گردد. کار انجام شده توسط F_1 و F_2 طی این مسیر جمله $U'_{1\text{-}2}$ از رابطه ۱۷-۳ را شامل می‌شود و تغییرات انرژیهای پتانسیل الاستیکی و جاذبه‌ای در طرف دیگر رابطه به عنوان انرژی منظور می‌گردند.

ملاحظه می‌شود که در روش اول، کار انجام شده توسط $F = kx$ مستلزم محاسبه یک انتگرال نسبتاً مشکل است و باید حین حرکت ذره تغییر امتداد و مقدار F را از A تا B منظور نمود. در حالی که در روش دوم، فقط طولهای اولیه و نهایی فنر برای محاسبه ΔV_e لازم است. که به این صورت می‌تواند محاسبه را بسیار ساده نماید.



شکل (۷-۳)

می‌توان از رابطه کار ـ انرژی، رابطه ۱۷-۳ را برای سیستم ذره و فنر به صورت زیر بازنویسی کرد.

$$U'_{1\text{-}2} = \Delta\,(T + V_g + V_e) = \Delta E \qquad (۳\text{-}۱۷b)$$

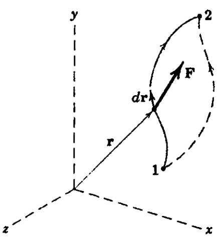
که در آن $E = T + V_g + V_e$ انرژی کل مکانیکی ذره و فنر خطی متصل به آن است. بنا به رابطه ۱۷b-۳، کار خالص انجام شده توسط کلیه نیروهای وارد بر سیستم بجز نیروهای جاذبه و الاستیک، برابر تغییر انرژی کل مکانیکی سیستم می‌باشد. برای مسائلی که تنها نیروهای جاذبه، الاستیک و نیروهای قیدی که کار انجام نمی‌دهند، مورد نظر هستند؛ جمله U' صفر بوده و رابطه انرژی به صورت زیر در می‌آید.

$$\Delta E = 0 \quad \text{یا} \quad E = \text{ثابت} \qquad (۳\text{-}۱۸)$$

هنگامی که E ثابت است و انرژی کل مکانیکی $T + V_g + V_e$ تغییر نمی‌کند، دیده می‌شود که انرژی جنبشی و پتانسیل به یکدیگر تبدیل می‌گردند. رابطه ۱۸-۳ *قانون بقای انرژی دینامیکی* را بیان می‌کند.

میدانهای نیروی کنسرواتیو*

ملاحظه کردیم که کار انجام شده در مقابل نیروی جاذبه یا نیروی الاستیک تنها به تغییر خالص موقعیت ذره بستگی دارد و نه به مسیر خاصی که در رسیدن به موقعیت جدید می‌پیماید. نیروهایی که دارای این خاصیت هستند به *میدانهای نیروی کنسرواتیو* (حافظ انرژی) مربوط می‌شوند که دارای خاصیت ریاضی مهمی می‌باشند.



شکل ۸-۳

میدانهای نیرویی را در نظر بگیرید که در آن نیروی $\mathbf{F}$ تابعی از مختصات (شکل ۸-۳) می‌باشند. کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F}$ در طی جابجایی $d\mathbf{r}$ نقطه اثرش برابر است با: $dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$. کل کار انجام شده در امتداد مسیرش از ۱ تا ۲ برابر است با:

$$U = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right)$$

* تدریس و مطالعه این بخش، اختیاری است.

انتگرال $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ یک انتگرال خطی است که به طور کلی به مسیر خاص طی شده بین نقاط ۱ و ۲ در فضا بستگی دارد. اما اگر $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ *دیفرانسیل دقیق*** $-dV$ تابعی اسکالر مانند V از مختصات باشد، آنگاه:

$$U_{1-2}=\int_{V_1}^{V_2}-dV=-(V_2-V_1) \qquad (۳-۱۹)$$

که فقط وابسته به نقاط ابتدا و انتهای حرکت بوده و *مستقل* از مسیر طی شده می‌باشد. علامت منفی قبل از dV اختیاری است. اما این علامت به این دلیل گذاشته می‌شود تا با علامت گذاری قراردادی برای تغییر انرژی پتانسیل در میدان جاذبه زمین توافق داشته باشد. اگر V وجود داشته باشد، تغییر دیفرانسیل V چنین می‌گردد:

$$dV=\frac{\partial V}{\partial x}dx+\frac{\partial V}{\partial y}dy+\frac{\partial V}{\partial z}dz$$

از مقایسه $-dV=\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=F_x\,dx+F_y\,dy+F_z\,dz$ داریم:

$$F_x=-\frac{\partial V}{\partial x} \quad , \quad F_y=-\frac{\partial V}{\partial y} \quad , \quad F_z=-\frac{\partial V}{\partial z}$$

نیرو را نیز می‌توان به صورت بردار زیر نوشت:

$$\mathbf{F}=-\nabla V \qquad (۳-۲۰)$$

که در آن نشانه ∇ به جای اپراتور برداری «del» بکار رفته که برابر است با:

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

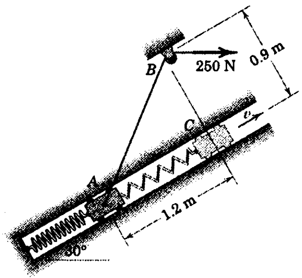
کمیت V را *تابع پتانسیل* و عبارت ∇V را *گرادیان تابع پتانسیل* می‌نامند.

موقعی که مولفه‌های نیرو از یک تابع پتانسیل که توصیف شد بدست آیند، نیرو را *کنسرواتیو* می‌نامند و کار انجام شده توسط $\mathbf{F}$ بین هر دو نقطه‌ای مستقل از مسیر طی شده است.

** یادآوری می‌شود که تابع $d\phi=P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ به شرطی یک دیفرانسیل دقیق در مختصات x-y-z است که:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\ \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$$

مسئله نمونه ۱۶-۳



لغزنده A به جرم ۱۰ kg با اصطکاک نـاچیزی بـه طـرف بـالای راهنمـای شیبداری حرکت می‌کند. فنر متصل به آن دارای سختی ٦۰ N/m بوده و در موقعیت A جایی که لغزنده از حالت سکون رها می‌گردد، به انـدازه ۰/٦ m کشـیدگی دارد. نیروی ۲۵۰ N ثابت است و قرقره مقاومت ناچیزی در مقابل حرکت ریسمان دارد. سرعت v لغزنده را موقعی که از نقطه C می‌گذرد، محاسبه کنید.

حل: برای استفاده از رابطه ۱۷-۳، لغزنده و ریسمان غیر قابل تطویل همراه فنر مجموعاً یک سیستم تحلیل می‌شوند. تنها نیروی غیر پتانسیلی که روی سیستم کار انجام می‌دهد، کشش ۲۵۰ N اعمال شده به طناب است. هنگامی که لغزنـده از A به طرف C حرکت می‌کند، نقطه اثر نیروی ۲۵۰ N فاصله $\overline{AB}-\overline{BC}$ یا ۰/٦ m = ۰/۹ − ۱/۵ را می‌پیماید.

❶ $$U'_{1\text{-}2} = 250\,(0.6) = 150\ \text{J}$$

تغییر انرژی جنبشی لغزنده برابر است با:

$$\Delta T = \frac{1}{2}m\left(v^2 - v_0^2\right) = \frac{1}{2}(10)v^2$$

که در آن سرعت اولیه v_0، صفر می‌باشد. تغییر انرژی پتانسیل ثقلی برابر است با:

❷ $$\Delta V_g = mg\,(\Delta h) = 10\,(9.81)(1.2 \sin 30°) = 58.9\ \text{J}$$

تغییر انرژی پتانسیل الاستیک برابر است با:

❸ $$\Delta V_e = \frac{1}{2}k\left(x_2^2 - x_1^2\right) = \frac{1}{2}(60)\left(\left[1.2+0.6\right]^2 - \left[0.6\right]^2\right) = 86.4\ \text{J}$$

با قرار دادن این عبارات در رابطه کار ـ انرژی داریم:

$$[U'_{1\text{-}2} = \Delta\,(T + V_g + V_e)] \qquad 150 = 1/2\,(10)\,v^2 + 58.9 + 86.4$$

جواب $$v = 0.974\ \text{m/s}$$

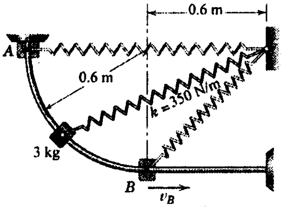
نکات مفید

❶ *عکس العمل راهنما بر روی لغزنده، عمود بر جهت حرکت بوده و کاری انجام نمی‌دهد.*

❷ *چون مرکز جرم لغزنده دارای مولفه جابجایی به طرف بالا می‌باشد، ΔV_g مثبت است.*

❸ *خیلی دقت داشته باشید که در استفاده از $\frac{1}{2}k\left(x_2 - x_1\right)^2$ جهت ΔV_e را اشتباه نکنید. اختلاف مجذورها درست می‌باشد نه مجذور اختلاف.*

مسئله نمونه ۱۷-۳



لغزنده‌ای ۳ کیلوگرمی از حالت سکون در نقطه A رها گشته و بـا اصطکـاک ناچیزی در صفحه قائم، در امتداد راهنمای دایره‌ای شکل فرو می‌لغزد. فنر متصل بـه آن دارای سختی ۳۵۰ N/m و طول آزاد ۰/٦ m می‌باشـد. سـرعت لغزنـده را هنـگام گذشتن از موقعیتB تعیین کنید.

حل: کار انجام شده توسط وزن و نیروی فنر بر روی لغزنده توسط انرژیهای پتانسیل بررسی خواهند شـد و عکـس العمل میله روی لغزنده، عمود بر حرکت بوده و کاری انجام نمی‌دهد. بنابراین $U'_{1\text{-}2}=0$ است. تغییرات انرژیهای پتانسیل و جنبشی برای سیستم لغزنده و فنر برابرند با:

$$\Delta V_e=\frac{1}{2}k\left(x_B^2-x_A^2\right)=\frac{1}{2}(350)\left\{\left(0.6\left[\sqrt{2}-1\right]\right)^2-(0.6)^2\right\}=-52.2\ \text{J} \quad ❶$$

$$\Delta V_g=W\,\Delta h=3(9.81)(-0.6)=-17.66\ \text{J}$$

$$\Delta T=\frac{1}{2}m\left(v_B^2-v_A^2\right)=\frac{1}{2}3\left(v_B^2-0\right)=1.5v_B^2$$

$$[\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e=0] \qquad 1.5v_B^2-17.66-52.2=0$$

$$v_B=6.82\ \text{m/s}$$

جواب

نکته مفید

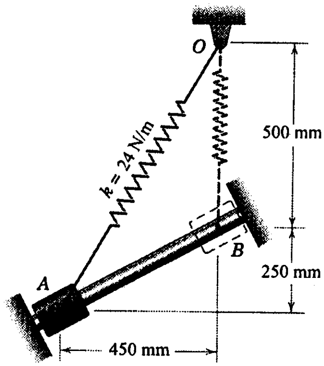
❶ *توجه کنید که اگر کار انجام شده توسط نیروی فنر، بر روی لغزنده بوسیله انتگرال $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ انجام می‌گرفت به محاسباتی طولانی نیاز داشتیم تا تغییر اندازه نیرو و تغییر زاویه بین نیرو و مماس بر مسیر را نیز منظور داریم. همچنین توجه کنید که v_B فقط بستگی به شرایط انتـهایی مسیر دارد و به داشـتن اطلاعاتی در مورد شکل مسیر نیازی نیست.*

مسائل

مسائل مقدماتی

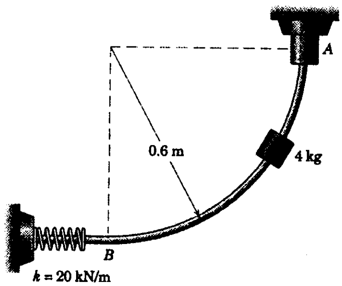
۳-۱۴۳ طوقه ۰/۹ کیلوگرمی از حالت سکون در A رها می‌شود و آزادانه به طرف بالای میله شیبداری می‌لغزد تا با سرعت v به مانع B برخورد می‌کند. فنر دارای سختی $k = ۲٤$ N/m و طول آزاد ۳۷۵ mm می‌باشد. v را حساب کنید.

جواب $v = ۱/۱٥٦$ m/s



شکل مسئله ۱۴۳-۳

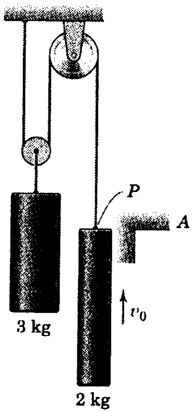
۳-۱٤٤ لغزنده‌ای به جرم ٤ kg از حالت سکون از موقعیت A رها گشته و با اصطکاک ناچیزی بر روی میله دایره‌ای شکل در صفحه قائم می‌لغزد. مطلوب است (الف) سرعت v لغزنده موقع رسیدن به نقطه B در پایین میله و (ب) ماکزیمم تغییر طول x فنر.



شکل مسئله ۱۴۴-۳

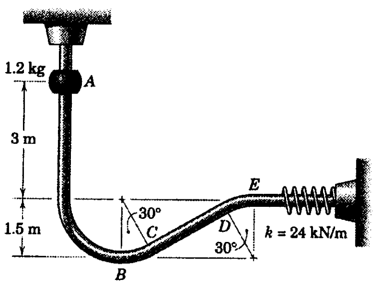
۳-۱٤٥ نقطه P روی استوانه ۲ کیلوگرمی موقعی که از موقعیت A می‌گذرد، دارای سرعت اولیه $v_\circ = ۰/۸$ m/s می‌باشد. با صرفنظر کردن از جرم قرقره‌ها و کابل، فاصله y نقطه P در زیر A را هنگامیکه استوانه ۳ کیلوگرمی سرعت رو به بالای ۰/٦ m/s را بدست می‌آورد، تعیین کنید.

جواب $y = ۰/۲۲٤$ m



شکل مسئله ۱۴۵-۳

۳-۱٤٦ لغزنده ۱/۲ kg از حالت سکون در موقعیت A رها می‌گردد و بدون اصطکاک، در امتداد میله راهنمای خود در صفحه قائم می‌لغزد. تعیین کنید: (الف) v_B لغزنده را در موقعیت B و (ب) ماکزیمم تغییر طول δ فنر را.



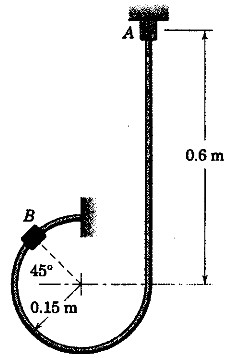
شکل مسئله ۱۴۶-۳

۳-۱۴۷ لغزنده سیستم مسئله ۱۴۶-۳ از حالت سکون در موقعیت A بدون اصطکاک در امتداد میله راهنمای خود در صفحه قائم می‌لغزد. نیروی عمودی وارد از طرف میله راهنما به لغزنده را در (الف) درست قبل از رسیدن به نقطه C؛ (ب) درست بعد از گذشتن از نقطه C و (ج) درست قبل از گذشتن از نقطه E، بدست آورید.

جواب (الف) $N_C = ۷۷/۷$ N و (ب) $N_C = ۱۰/۱۹$ N

(ج) $N_E = ۳۵/۳$ N (به طرف پایین)

۳-۱۴۸ مهره‌ای به جرم ۰/۲۵ kg از حالت سکون در نقطه A به طرف پایین و دور میله صیقلی ثابتی می‌لغزد. نیروی N بین میله و مهره را موقعی که از نقطه B می‌گذرد، تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۴۸-۳

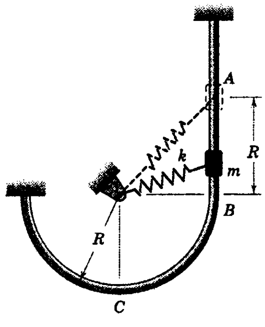
۳-۱۴۹ موقعی که لغزنده‌ای به جرم m از موقعیت B می‌گذرد، فنر با ثابت k بدون کشیدگی می‌باشد. اگر لغزنده از حالت سکون در موقعیت A رها گردد، سرعت آنرا در نقاط B و C تعیین کنید. نیروی عمودی وارد بر لغزنده توسط میله راهنما در موقعیت C چقدر است؟ از اصطکاک بین جرم و راهنمای مدور که در صفحه قائم قرار دارد، صرفنظر کنید.

جواب

$$v_B = \sqrt{2gR + \frac{kR^2}{m}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)}$$

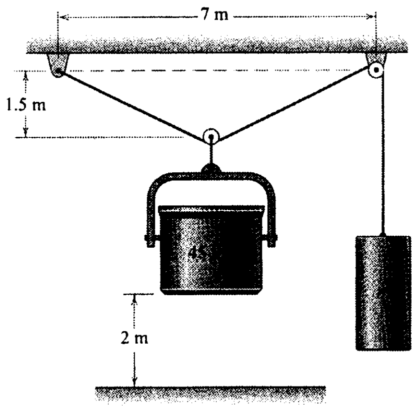
$$v_C = \sqrt{4gR + \frac{kR^2}{m}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)}$$

$$N = m\left[5g + \frac{kR}{m}\left(3 - 2\sqrt{2}\right)\right]$$



شکل مسئله ۱۴۹-۳

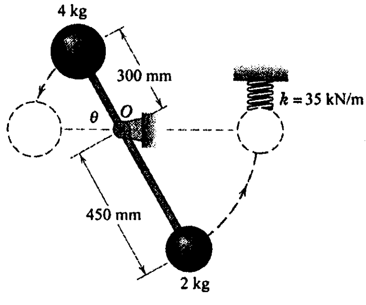
۳-۱۵۰ می‌خواهیم ظرف ۴۵ کیلوگرمی که از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌گردد، بعد از افتادن روی سطحی که ۲ m زیر آن است، سرعتی نداشته باشد. جرم مناسب m متعادل کننده را مشخص کنید.



شکل مسئله ۱۵۰-۳

۳-۱۵۱ میله سبکی در نقطه O لولا شده و ذرات ۲ و ۴ کیلوگرمی را حمل می‌کند. اگر میله از حالت سکون در $\theta = ۶۰°$ رها گردد و در صفحه قائم نوسان نماید، مطلوب است محاسبه (الف) سرعت v ذره ۲ کیلوگرمی را درست قبل از برخورد با فنر در موقعیت نقطه چین و (ب) ماکزیمم فشردگی x فنر. فرض کنید که x کوچک بوده و در نتیجه موقعیت میله هنگامیکه فشرده می‌گردد، عملا افقی است.

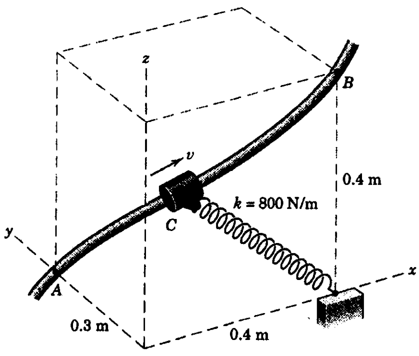
جواب (الف) $v = ۱/۱۶۲$ m/s و (ب) $x = ۱۲/۰۷$ mm



شکل مسئله ۱۵۱-۳

مسائل ویژه

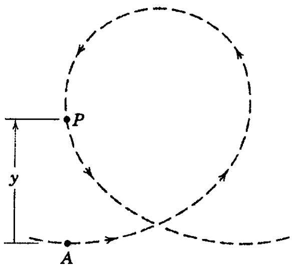
۱۵۲-۳ لغزنده C به جرم ۱/۵ kg در امتداد میله ثابتی تحت اثر فنری که طول آزاد آن ۰/۳ m است، حرکت می‌کند. اگر سرعت لغزنده در نقطه A برابر ۲ m/s و در نقطه B برابر ۳ m/s باشد، کار U_f انجام شده توسط اصطکاک بین این نقاط را محاسبه کنید. همچنین اگر طول مسیر ۰/۷۰ m باشد، میانگین نیروی اصطکاک اعمال شده بر روی لغزنده را بین A و B تعیین کنید. صفحه x-y افقی است.



شکل مسئله ۱۵۲-۳

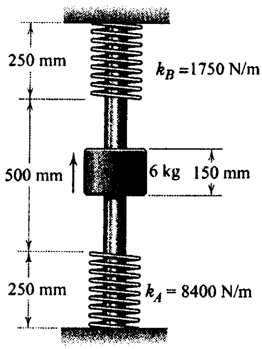
۱۵۳-۳ در طراحی یک مسیر سواری حلقوی یک پارک تفریحی، در نظر است که شتاب جانب مرکز سرتاسر حلقه یکسان باشد. فرض کنید اتلاف انرژی در طی حرکت ناچیز است و شعاع انحنای ρ مسیر را به صورت تابعی از y، ارتفاع بالای نقطه A که در آنجا سرعت و شعاع انحنا به ترتیب برابر $v_\circ$ و $\rho_\circ$ است، تعیین کنید. برای مقدار داده شده $\rho_\circ$، حداقل مقدار $v_\circ$ برای اینکه وسیله سواری مسیر را در نقطه بالای حلقه ترک نکند، چقدر است؟

جواب $\rho = \rho_\circ\left(1-\frac{2gy}{v_\circ^2}\right)$, $v_{\circ_{min}} = \sqrt{\rho_\circ g}$



شکل مسئله ۱۵۳-۳

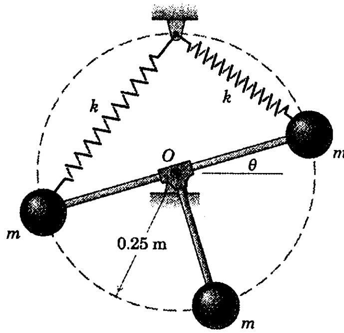
۱۵۴-۳ در موقعیت نشان داده شده، فنرها بدون تغییر طول می‌باشند. اگر غلاف ٦ کیلوگرمی از حالت سکون در موقعیتی رها شود که فنر پایینی به اندازه ۱۲۵ mm فشرده شود، حداکثر فشردگی x_B فنر بالایی را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۵۴-۳

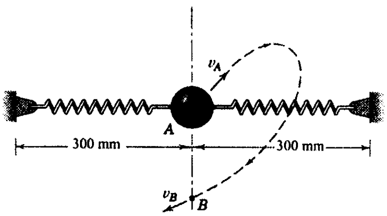
۳-۱۵۵ دو فنر هر کدام به سختی $k =$ ۱/۲ kN/m هنگامیکه $\theta =$ ۰ است دارای طولهای مساوی و بدون تغییر طول هستند. اگر مکانیزم از حالت سکون در موقعیت $\theta =$ ۲۰° رها گردد، سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ را در $\theta =$ ۰ تعیین کنید. جرم هر کدام از گوی‌ها ۳ kg است. گوی‌ها را به صورت ذره در نظر گرفته و از جرم میله‌های سبک و فنرها صرفنظر کنید.

جواب $\dot{\theta} =$ ٤/۲۲ rad/s



شکل مسئله ۱۵۵-۳

۳-۱۵٦ به گوی ۱/۵ کیلوگرمی که در موقعیت A به دو فنر افقی بدون تغییر طول متصل شده است، سرعت اولیه $v_A =$ ۲/۵ m/s در صفحه قائم داده می‌شود. گوی، مسیر خط چین نشان داده شده را طی نموده و از نقطه B که مستقیماً ۱۲۵ mm زیر A است، می‌گذرد. سرعت v_B گوی را در B محاسبه کنید. هر یک از فنرها دارای ثابت ۱۸۰۰ N/m می‌باشد.

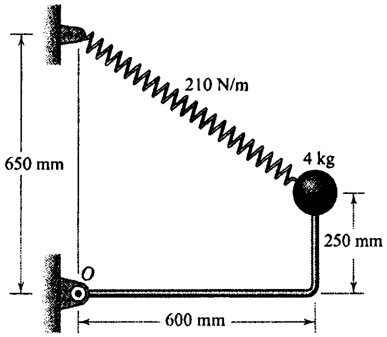


شکل مسئله ۱۵۶-۳

۳-۱۵۷ فنری دارای طول آزاد ٦۲۵ mm است. چنانچه سیستم از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها گردد، مطلوبست سرعت v گوی (الف) موقعی که به اندازه ۲۵۰ mm به صورت قائم پایین می‌آید و (ب) موقعی که میله به اندازه ۳۵° بچرخد.

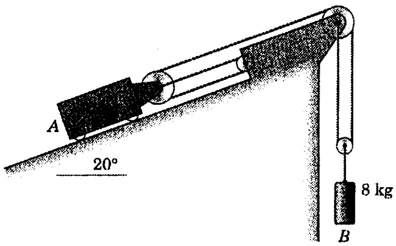
جواب (الف) $v =$ ۰/۹۱۹ m/s

(ب) $v =$ ۰/٤۷۰ m/s



شکل مسئله ۱۵۷-۳

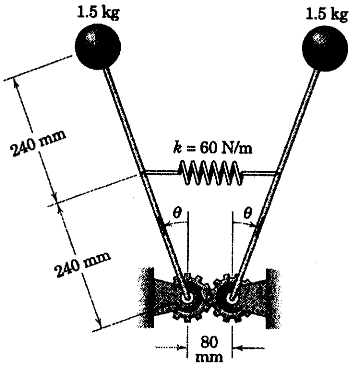
۳-۱۵۸ اگر سیستم از حالت سکون رها گردد، سرعت هر کدام از چرخها را پس از اینکه B به اندازه ۱ m حرکت کرد، تعیین کنید. از اصطکاک و جرم قرقره‌ها صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۱۵۸-۳

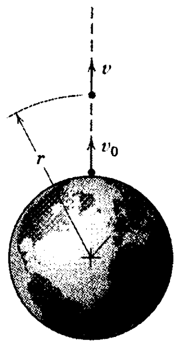
۳-۱۵۹ دو گوی، هر کدام به جرم ۱/۵ kg از حالت سکون رها می‌گردند و در موقعیت $\theta =$ ۰ به آنها ضربه‌ای ملایم به سوی بیرون زده می‌شود تا در صفحه قائم حول مراکز ثابت چرخدنده‌های متصل به آنها دوران نمایند؛ به طوریکه θ برای هر دو میله یکسان باشد. سرعت v گوی‌ها را در لحظه عبور میله‌ها از موقعیت $\theta =$ ۳۰° بدست آورید. در موقعیت $\theta =$ ۰ فنرها بدون کشیدگی هستند. از جرمهای دو میله و دو چرخدنده یکسان می‌توان صرفنظر کرد.

جواب $v =$ ۰/۳۳۱ m/s



شکل مسئله ۱۵۹-۳

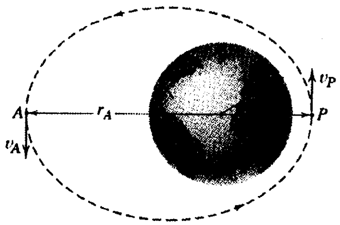
۳-۱۶۰ پرتابه‌ای از قطب شمال با سرعت v_0 به طرف بالا به صورت قائم شلیک می‌شود. حداقل سرعت v_0 را طوری تعیین کنید که پرتابه از جاذبه زمین فرار کند. فرض کنید مقاومت جوی وجود ندارد. شعاع زمین ٦٣٧١ km است. از مقدار شتاب مطلق g = ۹/۸۲۵ m/s^2 استفاده نمایید.



شکل مسئله ۱۶۰-۳

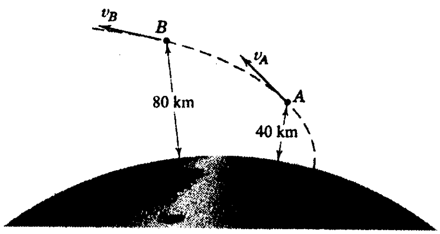
۳-۱٦۱ ماهواره‌ای در مداری بیضی شکل دور زمین قرار گرفته و سرعت آن در نقطه حضیض P برابر v_P می‌باشد. عبارتی برای سرعت v_A در نقطه اوج A تعیین کنید. شعاع در نقاط A و P به ترتیب برابر r_A و r_P می‌باشد. توجه داشته باشید که کل انرژی ثابت می‌ماند.

جواب
$$v_A = \sqrt{v_P^۲ - ۲gR^۲\left(\frac{۱}{r_P} - \frac{۱}{r_A}\right)}$$



شکل مسئله ۱۶۱-۳

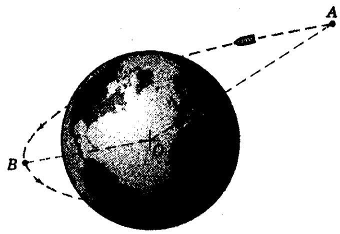
۳-۱٦۲ راکتی یک کپسول فضایی بدون قدرتی را در نقطه A با سرعت مطلق v_A =۱۳۰۰۰ km/h در ارتفاع ٤۰ km زمین پرتاب می‌کند. کپسول پس از طی مسافت ٤۰۰ km که در طول مسیر فضایی مطلقش اندازه گیری شده، در نقطه B در ارتفاع ۸۰ km زمین، سرعت ۱۲٤۰۰ km/h را پیدا می‌کند. میانگین مقاومت P جو در مقابل حرکت را بدست آورید. جرم کپسول در زمین ۲۲ kg و شعاع متوسط زمین ٦٣٧١ km است. مرکز زمین را در فضا ثابت در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۱۶۲-۳

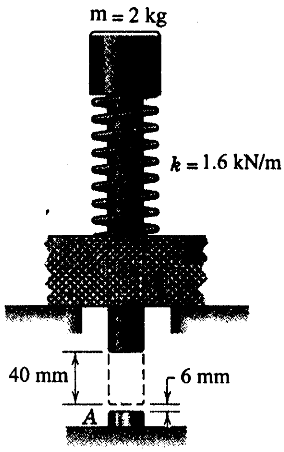
۳-۱۶۳ فضاپیمایی در مراجعت از یک ماموریت فضایی در نقطه A که فاصله‌اش تا مرکز زمین ۷۰۰۰ km می‌باشد، دارای سرعت ۲۴۰۰۰ km/h می‌باشد. مطلوبست سرعت فضاپیما در هنگام رسیدن به نقطه B که فاصله‌اش تا مرکز زمین ۶۵۰۰ km است. مسیر بین این دو نقطه خارج از محدوده اثرات جو زمین است.

جواب $v_B =$ ۲۶۳۰۰ km/h



شکل مسئله ۳-۱۶۳

۳-۱۶۴ هنگامیکه مجموعه پیستون و فنر در حالت تعادل باشند، ساق پیستون در موقعیت نقطه چین قرار می‌گیرد. جرم پیستون ۲ kg و سختی فنر $k =$ ۱/۶ kN/m می‌باشد. انتهای فوقانی فنر به پیستون و انتهای تحتانی آن به نشیمنگاه پیستون جوشکاری شده است. اگر پیستون ۴۰ mm از حالت تعادل بلند شده و بدون سرعت اولیه رها گردد، سرعت v برخورد آن با دکمه A چقدر است؟ از اصطکاک صرفنظر کنید.

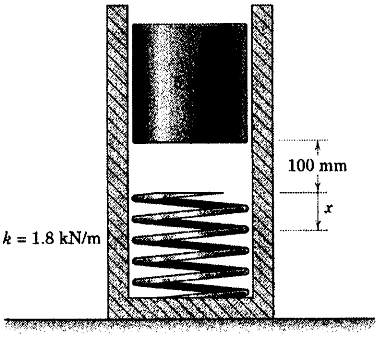


شکل مسئله ۳-۱۶۴

۳-۱۶۵ استوانه ۵ کیلوگرمی از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده، رها می‌گردد و فنری به سختی $k =$ ۱/۸ kN/m را می‌فشارد. حداکثر فشردگی x_{max} فنر و همچنین ماکزیمم سرعت v_{max} استوانه و میزان فشردگی x فنر را در این سرعت تعیین کنید.

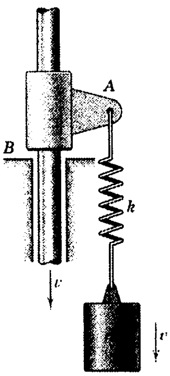
جواب $v_{max} =$ ۱/۴۹۳ m/s در $x =$ ۲۷/۲ mm

$x_{max} =$ ۱۰۵/۹ mm



شکل مسئله ۳-۱۶۵

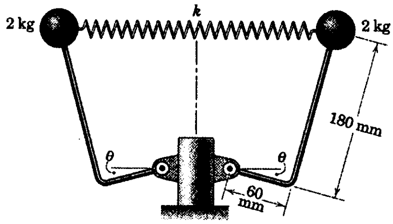
۳-۱۶۶ استوانه‌ای به جرم m توسط فنری به سختی k در نقطه A به سگدست طوقه‌ای متصل شده است. طوقه بر روی میله قائم به طور لقی جا خورده که طوقه و استوانه معلق، با سرعت ثابت v به طرف پایین حرکت می‌کنند. موقعی که طوقه به پایه B اصابت کرد، ناگهان متوقف و عملاً برنمی‌گردد. ماکزیمم تغییر طول δ فنر را پس از برخورد تعیین کنید.



شکل مسئله ۳-۱۶۶

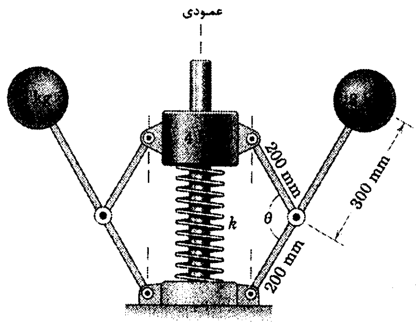
۱۶۷-۳ دو میله قائم الزاویه‌ای که به دو گوی متصل هستند از حالت سکون در موقعیت $\theta = ۰$ رها می‌گردند. اگر مشاهده شود که سیستم در $\theta = ۴۵^\circ$ به توقف می‌رسد، ثابت فنر k را تعیین کنید. فنر در $\theta = ۰$ بدون کشیدگی است. گوی‌ها را به عنوان ذره تلقی کرده و از اصطکاک صرفنظر کنید.

جواب $k = ۱۵۵/۱$ N/m



شکل مسئله ۱۶۷-۳

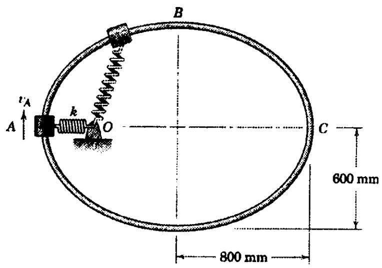
۱۶۸-۳ مکانیزم از حالت سکون در وضعیت $\theta = ۱۸۰^\circ$ که در آن فنر دارای سختی $k = ۹۰۰$ N/m و بدون کشیدگی بوده و درست با قسمت پایینی طوقه ٤ کیلوگرمی در تماس است، رها می‌گردد. زاویه θ متناظر با فشردگی ماکزیمم فنر را تعیین کنید. حرکت در صفحه قائم است و از جرم میله‌ها می‌توان صرفنظر کرد.



شکل مسئله ۱۶۸-۳

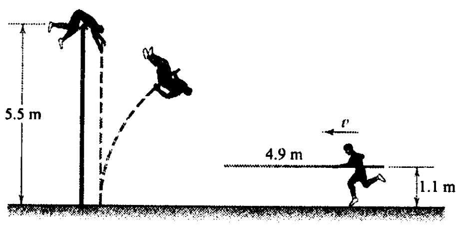
۱۶۹-۳ نقطه ثابت O در یکی از کانونهای راهنمای بیضی شکل قرار گرفته است. فنر دارای سختی ۳ N/m بوده و موقعی که لغزنده در نقطه A می‌باشد، بدون تغییر شکل است. اگر سرعت v_A طوری باشد که سرعت لغزنده ۰/٤ کیلوگرمی در C به صفر میل کند، سرعت آنرا در نقطه B تعیین کنید. راهنمای صیقلی در صفحه افق واقع شده است (در صورت نیاز برای هندسه بیضی به روابط ۳۹-۳ مراجعه کنید).

جواب $v_B = ۲/۵۱$ m/s



شکل مسئله ۱۶۹-۳

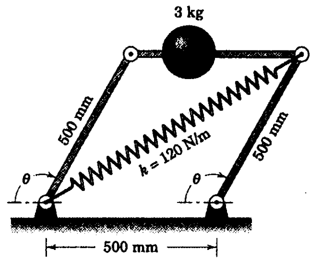
۱۷۰-۳ یک بازیکن پرش با نیزه ۸۰ کیلوگرمی، در حال حمل نیزه‌ای یکنواخت به طول ٤/۹ m و وزن ٤/۵ kg، با سرعت v به نقطه پرش می‌رسد و درست از روی میله پرش در ارتفاع ۵/۵ m می‌گذرد. هنگام عبور از مانع سرعت او و سرعت نیزه عملاً صفر هستند. حداقل مقدار v لازم را برای اینکه پرش کننده بتواند از مانع بگذرد، حساب کنید. در موقع نزدیک شدن به نقطه پرش، نیزه افقی و مرکز جرم پرش کننده هر دو در ارتفاع ۱/۱ m از سطح زمین قرار دارند.



شکل مسئله ۱۷۰-۳

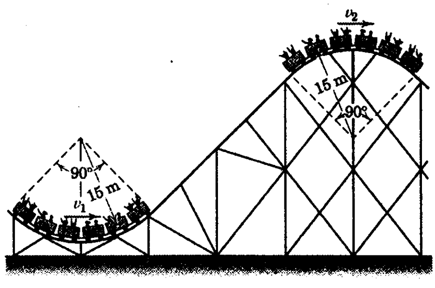
۳-۱۷۱ گوی ۳ کیلوگرمی بوسیله میله‌های رابط متوازی الاضلاعی حمل می‌شود که در آن فنر در $\theta = ۹۰^\circ$ بدون کشیدگی است. چنانچه مکانیزم از حالت سکون در $\theta = ۹۰^\circ$ رها گردد، سرعت v گوی را هنگامیکه از موقعیت $\theta = ۱۳۵^\circ$ می‌گذرد، محاسبه کنید. میله‌های رابط در صفحه قائم قرار گرفته و جرم آنها ناچیز و قابل اغماض می‌باشد.

جواب $v = ۱/۱۴۳$ m/s



شکل مسئله ۱۷۱-۳

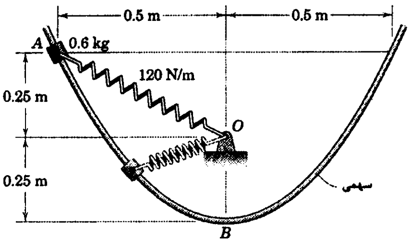
۳-۱۷۲ واگنهای سواری یک پارک تفریحی در پایین‌ترین نقطه مسیر دارای سرعت $v_۱ = ۹۰$ km/h می‌باشند. سرعت $v_۲$ آنها را در بالاترین نقطه مسیر تعیین کنید. از اتلاف انرژی مربوط به اصطکاک صرفنظر کنید. (*تذکر:* در مورد تغییر انرژی پتانسیل مجموعه واگنها دقت داشته باشید.)



شکل مسئله ۱۷۲-۳

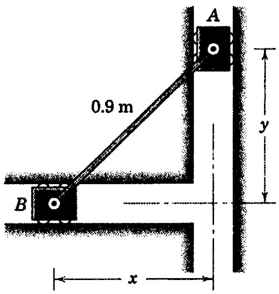
۳-۱۷۳ لغزنده ۰/۶ کیلوگرمی از حالت سکون در A رها شده و به طرف پایین راهنمای سهموی صیقلی (که در صفحه قائم قرار گرفته است) تحت اثر نیروی وزن خودش و فنری به سختی ۱۲۰ N/m می‌لغزد. سرعت لغزنده را هنگام گذشتن از نقطه B و نیروی متناظر عمودی را که از طرف راهنما بر آن اعمال می‌شود، تعیین کنید. طول آزاد فنر ۲۰۰ mm است.

جواب $v_B = ۵/۹۲$ m/s و $N = ۸۴/۱$ N



شکل مسئله ۱۷۳-۳

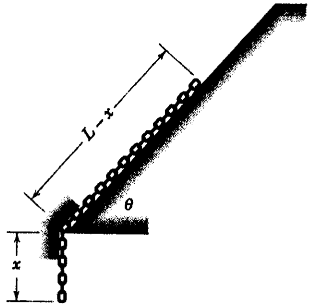
۳-۱۷۴ سرعت ماکزیمم لغزنده B را در صورتیکه سیستم از حالت سکون موقعیی که $x = y$ می‌باشد، محاسبه کنید. حرکت در صفحه قائم صورت می‌گیرد. فرض کنید اصطکاک قابل صرفنظر کردن است. لغزنده‌ها دارای جرم‌های مساوی هستند.



شکل مسئله ۱۷۴-۳

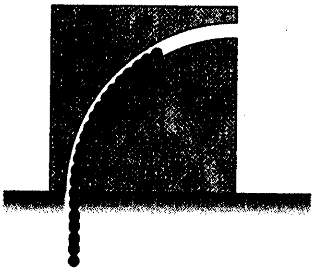
۳-۱۷۵ زنجیری به طول L از حالت سکون روی شیب صیقلی از موقعیت $x = ۰$ رها می‌گردد. سرعت v حلقه‌ها را بر حسب x بدست آورید.

جواب $$v = \sqrt{۲gx\left[\sin\theta - \frac{x}{۲L}(۱ - \sin\theta)\right]}$$



شکل مسئله ۱۷۵-۳

۱۷۶-۳ زنجیر انعطاف پذیر دوچرخه به طول $\pi r/2$ و جرم بر واحد طول ρ از حالت سکون در موقعیت $\theta = 0$ درون کانال صیقلی دایره‌ای شکل رها شده و ضمن تماس با سطح تکیه‌گاه، فرو می‌افتد. سرعت v زنجیر را هنگامیکه آخرین حلقه زنجیر، شیار را ترک می‌کند، تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۷۶-۳

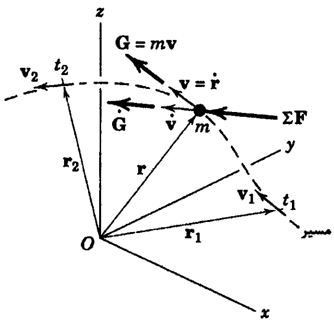
بخش C ـ ضربه و مومنتم (اندازه حرکت)

۳-۸ مقدمه

توجه ما در دو بخش قبلی بر معادلات کار و انرژی متمرکز گشته بود که این معادلات با انتگرال گیری از معادله حرکت یعنی $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ نسبت به جابجایی ذره به دست آمده‌اند. در نتیجه دریافتیم که تغییرات سرعت را مستقیماً بر حسب کار انجام شده و یا بر حسب تغییرات کلی در انرژی می‌توان بیان کرد. در دو بخش بعدی، توجه ما به سوی انتگرال معادله حرکت نسبت به زمان خواهد بود و نه نسبت به جابجایی. چنین دیدگاهی ما را به معادلات ضربه و مومنتم می‌رساند. این معادلات حل بسیاری از مسائل را که نیرو در مدت زمان فوق العاده کوتاه (نظیر مسائل برخورد) و یا در مدت زمان مشخصی اعمال می‌شود، بسیار آسان می‌کند.

۳-۹ ضربه خطی و مومنتم خطی

مطابق شکل ۳-۹، حرکت کلی و منحنی الخط ذره‌ای به جرم m را در فضا دوباره در نظر بگیرید که موقعیت ذره با بردار $\mathbf{r}$ مشخص شده و از مبدا ثابت O سنجیده می‌شود. سرعت ذره برابر با $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ بوده و به مسیرش (که با خط چین نشان داده شده) مماس می‌باشد. برآیند کلیه نیروهای وارد بر m یعنی $\Sigma\mathbf{F}$ در جهت شتاب $\dot{\mathbf{v}}$ می‌باشد. حالا می‌توانیم معادله اساسی حرکت ذره را، معادله ۳-۳، به صورت زیر بنویسیم:



شکل ۳-۹

$$\Sigma\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) \quad \text{یا} \quad \boxed{\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}} \qquad (۳-۲۱)$$

که حاصلضرب جرم و سرعت به عنوان مومنتم خطی ذره یعنی $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ تعریف می‌شود. معادله ۳-۲۱ بیان می‌کند که *برآیند تمام نیروهای وارد بر یک ذره با میزان تغییرات مومنتم خطی نسبت به زمان برابر است*. در سیستم SI واحد مومنتم خطی $m\mathbf{v}$ به صورت kg.m/s می‌باشد که با N.s معادل است. در سیستم متداول آمریکایی واحد مومنتم خطی $m\mathbf{v}$ برابر $[\text{lb}/(\text{ft}/\text{sec}^2)][\text{ft}/\text{sec}] = \text{lb}\cdot\text{sec}$ است.

از آنجاییکه معادله ۳-۲۱ یک رابطه برداری است به این نکته توجه می‌کنیم که علاوه بر برابری اندازه بردارهای $\Sigma\mathbf{F}$ و $\dot{\mathbf{G}}$، جهت برآیند نیروها با جهت میزان تغییر در مومنتم خطی که در واقع همان جهت میزان تغییر سرعت است، تطابق دارد. معادله ۳-۲۱ یکی از مفیدترین و با اهمیت‌ترین روابط دینامیکی است و تا زمانی معتبر است که جرم m ذره با زمان تغییر نکند. حالتی را که در آن جرم m با زمان تغییر می‌کند، در بخش ۷-٤ از فصل ٤ بحث خواهد شد. اکنون سه مولفه اسکالر معادله ۳-۲۱ را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\Sigma F_x = \dot{G}_x \quad , \quad \Sigma F_y = \dot{G}_y \quad , \quad \Sigma F_z = \dot{G}_z \qquad (۳-۲۲)$$

این معادلات را می‌توان مستقل از یکدیگر بکار برد.

اصل ضربه و مومنتم خطی

تمام روابطی را که بر حسب مومنتم در این بخش نوشته‌ایم شکل دیگری از قانون دوم نیوتن می‌باشند. حالا می‌توانیم با انتگرال گیری از معادله ۲۱-۳ نسبت به زمان، اثر برآیند $\Sigma\mathbf{F}$ را بر روی مومنتم خطی ذره در یک محدوده زمانی معین تشریح کنیم. با ضرب dt در معادله داریم: $\Sigma\mathbf{F}\,dt = d\mathbf{G}$ که با انتگرال گیری از زمان t_1 تا t_2 رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\Sigma\mathbf{F}\,dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1 = \Delta\mathbf{G}} \qquad (۳-۲۳)$$

در اینجا مومنتم خطی در زمان t_1 برابر با $\mathbf{G}_1 = m\mathbf{v}_1$ و در زمان t_2 برابر با $\mathbf{G}_2 = m\mathbf{v}_2$ می‌باشد. حاصلضرب نیرو و زمان موسوم به *ضربه خطی* نیرو است و معادله ۲۳-۳ بیان می‌کند که *ضربه خطی کل وارد بر m با تغییر مومنتم خطی m برابر است.*

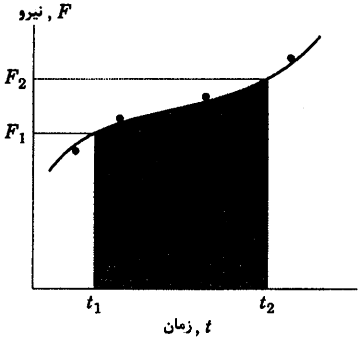
شکل دیگر معادله ۲۳-۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\mathbf{G}_1 + \int_{t_1}^{t_2}\Sigma\mathbf{F}\,dt = \mathbf{G}_2} \qquad (۳-۲۳a)$$

که بیانگر این است که مجموع مومنتم خطی اولیه جسم و ضربه خطی وارد بر آن با مومنتم خطی نهایی آن برابر است. انتگرال ضربه، برداری است که به طور کلی هم اندازه و هم جهت آن در طی مدت زمان تاثیر می‌تواند، تغییر کند. در چنین شرایطی لازم است که $\Sigma\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ را بر حسب مولفه‌هایشان بیان کرده و سپس انتگرال این مولفه‌ها را با یکدیگر ترکیب نمود. از مولفه‌های معادله ۲۳-۳ معادلات اسکالر زیر بدست می‌آیند:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Sigma F_x\,dt = (mv_x)_2 - (mv_x)_1$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\Sigma F_y\,dt = (mv_y)_2 - (mv_y)_1$$
$$\int_{t_1}^{t_2}\Sigma F_z\,dt = (mv_z)_2 - (mv_z)_1$$

این سه معادله ضربه ـ مومنتم اسکالر کاملاً مستقل از یکدیگر هستند. روابط اسکالر متناظر با معادلات برداری ۲۳a-۳ را به سادگی می‌توان از جابجایی در جملات آن بدست آورد.



شکل ۱۰-۳

گاهی اوقات نیروی وارد بر یک ذره با زمان تغییر می‌کند که چگونگی این تغییر را با اندازه گیری آزمایشی و یا سایر روشهای تقریبی می‌توان معین کرد. در چنین حالتی باید انتگرال گیری عددی و یا ترسیمی را بکار برد. اگر مثلاً نیروی F وارد بر یک ذره در یک جهت معین همانند شکل ۱۰-۳ با زمان تغییر کند، در این صورت ضربه این نیرو از t_1 تا t_2 برابر $\int_{t_1}^{t_2} F\,dt$ می‌باشد که همان سطح سایه دار زیر منحنی است.

برای ارزیابی ضربه برآیند، لازم است که اثر *کلیه* نیروهای *وارد* بر m به جز آنهایی که دارای اندازه‌ای ناچیز هستند، دخالت داده شود. در اینجا شما باید آگاه باشید که فقط با رسم *ترسیمه آزاد* جسم می‌توان روش قابل اعتمادی را برای احتساب اثر کلیه نیروهای وارد بر ذرات مورد نظر ارائه کرد.

بقای مومنتم خطی

اگر نیروی برآیند وارد بر ذره در طی زمان تاثیر آن برابر صفر باشد، می‌بینیم که معادله ۲۱-۳ ایجاب می‌کند که مومنتم خطی $\mathbf{G}$ ثابت بماند. در چنین حالتی مومنتم خطی ذره را *ابقایی* می‌نامند. مومنتم خطی می‌تواند در یک جهت نظیر x ابقایی باشد، ولی الزامی وجود ندارد که در جهت‌های y و z هم ابقایی بماند. بررسی دقیق ترسیمه آزاد ذره، صفر بودن ضربه خطی کل وارد بر آن را در یک جهت خاص مشخص می‌کند. اگر چنین بود، مومنتم خطی متناظر با آن در همان راستا بدون تغییر (ابقایی) می‌ماند.

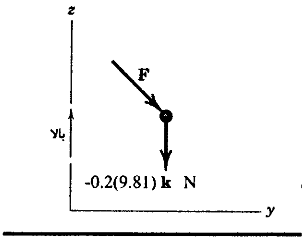
حال حرکت دو ذره a و b را در نظر بگیرید که در مدت زمان معین تحت تاثیر عمل متقابل یکدیگرند. اگر نیروهای متقابل $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ بین دو ذره تنها نیروهای موازنه نشده باشند که در مدت زمان تاثیر به ذرات وارد شوند، به آن معنی خواهد بود که ضربه خطی وارد بر ذره a قرینه ضربه خطی وارد بر ذره b است. بنابراین بنا به معادله ۲۳-۳ تغییر مومنتم خطی $\Delta\mathbf{G}_a$ ذره a با تغییر مومنتم خطی $\Delta\mathbf{G}_b$ ذره b قرینه خواهد شد. در نتیجه داریم: $\Delta\mathbf{G}_a = -\Delta\mathbf{G}_b$ و یا $\Delta(\mathbf{G}_a+\mathbf{G}_b) = \mathbf{0}$ است. بنابراین مومنتم خطی کل یعنی $\mathbf{G} = \mathbf{G}_a + \mathbf{G}_b$ برای سیستم دو ذره‌ای در طی زمان تاثیر، ثابت می‌ماند و می‌نویسیم:

$$\boxed{\Delta\mathbf{G} = \mathbf{0} \quad \text{یا} \quad \mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2} \tag{۳-۲۴}$$

معادله ۲۴-۳ بیانگر *اصل بقای مومنتم خطی* است.

مسئله نمونه ۱۸-۳

ذره ۰/۲ کیلوگرمی در صفحه قائم y-z (z بالا و y افقی) تحت تاثیر وزن خود و نیروی **F** که با زمان تغییر می‌کند، در حال حرکت است. مومنتم خطی ذره بر حسب N.s توسط رابطه $\mathbf{G}=\frac{3}{2}(t^2+3)\mathbf{j}-\frac{2}{3}(t^3-4)\mathbf{k}$ داده شده، که در آن t زمان و بر حسب ثانیه است. در لحظه $t = 2$ s نیروی **F** را بدست آورید.



حل: بردار وزن به صورت −۲k lb بیان شده است. در نتیجه معادله نیرو ـ مومنتم چنین می‌شود:

❶

$$[\Sigma\mathbf{F}=\dot{\mathbf{G}}] \qquad \mathbf{F}-0.2(9.81)\mathbf{k}=\frac{d}{dt}\left[\frac{3}{2}(t^2+3)\mathbf{j}-\frac{2}{3}(t^3-4)\mathbf{k}\right]$$

$$=3t\,\mathbf{j}-2\,t^2\,\mathbf{k}$$

در $t = 2$ s:

$$\mathbf{F}=0.2(9.81)\,\mathbf{k}+3\,(2)\,\mathbf{j}-2\,(2^2)\,\mathbf{k}=6\mathbf{j}-6.04\mathbf{k}\ \ \text{N}$$

در نتیجه

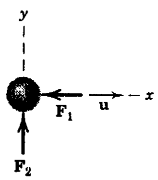
جواب $$F=\sqrt{6^2+6.04^2}=8.51\ \text{N}$$

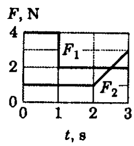
نکته مفید

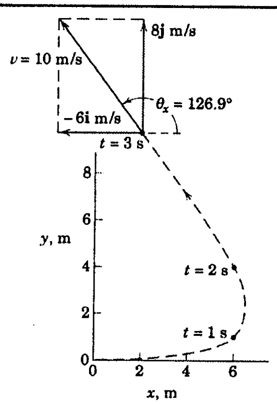
❶ *فراموش نکنید که $\Sigma\mathbf{F}$ شامل همه نیروهای وارده بر ذره است که نیروی وزن یکی از آنهاست.*

مسئله نمونه ۱۹-۳

ذره‌ای به جرم ۰/۵ kg در لحظه $t = 0$ دارای سرعت $u = 10$ m/s در جهت x می‌باشد. $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ نیروهای وارد بر ذره بوده و تغییر اندازه‌های آنها با زمان مطابق نمودار گرافیکی نشان داده شده است. سرعت **v** ذره را در انتهای ۳ s بدست آورید.







حل: معادله ضربه ـ مومنتم بر حسب مولفه‌هایش به ترتیب در جهت x و y اعمال می‌شود.

❶

$$\left[\int\Sigma F_x dt=m\Delta v_x\right] \qquad -[4\,(1)+2\,(3-1)]=0.5\,(v_x-10)$$

$$v_x=-6\ \ \text{m/s}$$

$$\left[\int\Sigma F_y dt=m\Delta v_y\right] \qquad [1\,(2)+2\,(3-2)]=0.5\,(v_y-0)$$

$$v_y=8\ \ \text{m/s}$$

در نتیجه:

$$\mathbf{v}=-6\mathbf{i}+8\mathbf{j} \quad \text{و} \quad v=\sqrt{6^2+8^2}=10\ \ \text{m/s}$$

جواب $$\theta_x = \tan^{-1}\frac{8}{-6} = 126.9°$$

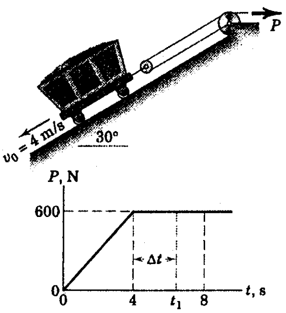
❷ با وجود عدم نیاز، مسیر ذره در ۳ ثانیه اول در شکل رسم شده است. سرعت ذره در لحظه $t = ۳$ همراه مولفه‌هایش نشان داده شده است.

نکات مفید

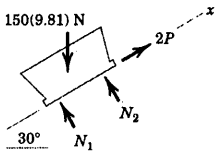
❶ *ضربه در هر جهت مساوی با سطح زیر منحنی نیرو ـ زمان می‌باشد. توجه داشته باشید که جهت نیروی F_1 در جهت منفی محور x است. بنابراین ضربه‌اش منفی خواهد شد.*

❷ *توجه به این نکته اهمیت دارد که به هنگام اعمال معادلات مومنتم، مراعات دقیق علائم جبری صورت گیرد. همچنین باید یادآور شویم که ضربه و مومنتم کمیتهای برداری‌اند، برعکس کار و انرژی که اسکالر هستند.*

مسئله نمونه ۲۰-۳



یک واگن پُر به جرم ۱۵۰ kg که با سرعت ٤ m/s به سمت پایین سطح شیبدار حرکت می‌کند، مطابق شکل در لحظه $t = ۰$ نیروی P به کابل متصل به واگن اعمال می‌شود. با افزایش زمان، نیروی P به طور یکنواخت زیاد می‌شود تا در لحظه $t = ٤$ s به ٦۰۰ N می‌رسد و در زمانهای بعدی این مقدار ثابت را حفظ می‌کند. محاسبه کنید(a) زمان t_1 که واگن در جهت معکوس برگردد؛ (b) سرعت v واگن در $t = ۸$ s. واگن را به صورت یک ذره در نظر بگیرید.



حل: نحوهٔ تغییرات P با زمان در شکل آمده و ترسیمه آزاد واگن رسم شده است.

قسمت (a) هنگامی جهت واگن معکوس می‌شود که سرعت آن صفر شود. فرض می‌کنیم که چنین حالتی در لحظه $t = ٤ + \Delta t$ s رخ دهد. با اعمال سازگار معادله ضربه ـ مومنتم در جهت مثبت x داریم:

$$\left[\int \Sigma F_x dt = m\Delta v_x\right]$$

❶ $$1/2\ (4)\ (2)\ (600) + 2\ (600)\ \Delta t - 150\ (9.81)\ \sin 30°\ (4 + \Delta t) = 150\ (0 - [-4])$$

جواب $$464\ \Delta t = 1143 \qquad \Delta t = 2.46\ \text{s} \qquad t = 4 + 2.46 = 6.46\ \text{s}$$

قسمت (b) با اعمال معادله ضربه ـ مومنتم در کل زمان تاثیر چنین داریم:

$$\left[\int \Sigma F_x dt = m\Delta v_x\right]$$

$$1/2\ (4)\ (2)\ (600) + 4\ (2)\ (600) - 150\ (9.81)\ \sin 30°\ (8) = 150\ (v - [-4])$$

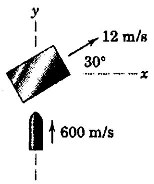
جواب $$150\ v = 714 \qquad v = 4.76\ \text{m/s}$$

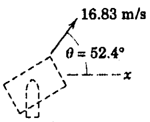
نکته مفید

ترسیمه آزاد جسم، ما را از انجام هرگونه خطایی در بکارگیری ضربه ناشی از نیروی P به جای ۲P و یا فراموش کردن ضربه مولفه وزن باز می‌دارد. اولین جمله معادله برابر است با مساحت قسمت مثلثی شکل در نمودار P-t در طی ٤ s می‌باشد که دو برابر شده تا ضربه ناشی از نیروی ۲P را برهد.

مسئله نمونه ۲۱-۳

گلوله‌ای به جرم ۵۰ گرم با سرعت ٦۰۰ m/s به مرکز بلوکی به جرم ٤ kg برخورد کرده و درون آن فرو می‌رود. اگر قبل از برخورد، بلوک با سرعت ۱۲ m/s در جهت نشان داده شده روی یک سطح صیقلی افقی بلغزد، سرعت **v** بلوک و گلوله درون آن را بلافاصله بعد از برخورد بدست آورید.





حل: از آنجاییکه نیروی برخورد در درون سیستم بلوک و گلوله صورت می‌گیرد و نیز چون در صفحه حرکت هیچگونه نیرویی به سیستم وارد نمی‌شود، سیستم دارای بقای مومنتم خطی خواهد بود. بنابراین:

$$[\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2] \qquad 0.050\,(600\,\mathbf{j}) + 4\,(12)(\cos 30°\,\mathbf{i} + \sin 30°\,\mathbf{j}) = (4 + 0.050)\mathbf{v}$$

جواب
$$\mathbf{v} = 10.26\,\mathbf{i} + 13.33\,\mathbf{j} \ \ \text{m/s}$$

سرعت نهایی و جهت آن چنین بدست می‌آید:

جواب
$$\left[\upsilon = \sqrt{\upsilon_x^2 + \upsilon_y^2}\right] \qquad \upsilon = \sqrt{(10.26)^2 + (13.33)^2} = 16.83 \ \ \text{m/s}$$

جواب
$$\left[\tan\theta = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_x}\right] \qquad \tan\theta = \frac{13.33}{10.26} = 1.299 \qquad \theta = 52.4°$$

نکته مفید

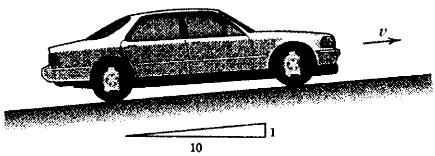
کار با شکل برداری اصل بقاء مومنتم خطی دقیقاً معادل کار با شکل مولفه‌ای آن است.

مسائل

مسائل مقدماتی

۳-۱۷۷ اتومبیلی به جرم ۱۵۰۰ kg دارای سرعت ۳۰ km/h در سطح شیبداری با شیب ۱۰ درصد بالا می‌رود. در این هنگام راننده به مدت ۸ s گاز بیشتری می‌دهد تا سبب شود سرعت اتومبیل به ۶۰ km/h برسد. متوسط زمانی نیروی کل F مماس بر جاده که در طی ۸ s بر لاستیک وارد می‌شود چقدر است؟ اتومبیل را به صورت یک ذره در نظر گرفته و از مقاومت هوا صرفنظر کنید.

جواب $F =$ ۳/۰۳ kN

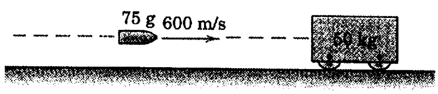


شکل مسئله ۳-۱۷۷

۳-۱۷۸ سرعت ذره‌ای به جرم ۱/۲ kg به صورت $\mathbf{v} = ۱/۵t^۳\mathbf{i} + (۲/۴ - ۳t^۲)\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$ داده شده که $\mathbf{v}$ بر حسب متر بر ثانیه و t بر حسب ثانیه می‌باشد. مومنتم خطی $\mathbf{G}$ ذره و اندازه آن G و همچنین نیروی $\mathbf{R}$ وارد بر ذره را در لحظه $t =$ ۲ s بدست آورید.

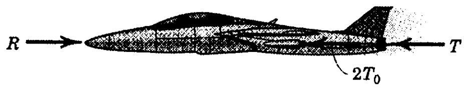
۳-۱۷۹ گلوله‌ای به جرم ۷۵ g با سرعت ۶۰۰ m/s با بلوک ساکنی به جرم ۵۰ kg برخورد کرده و در آن فرو می‌رود. اتلاف انرژی حاصل از برخورد را محاسبه کنید. جواب خود را بر حسب مقدار مطلق $|\Delta E|$ و درصد n، نسبت به انرژی اولیه E سیستم بیان کنید.

جواب $|\Delta E| =$ ۱۳۴۸۰ J و $n =$ ٪۹۹/۹



شکل مسئله ۳-۱۷۹

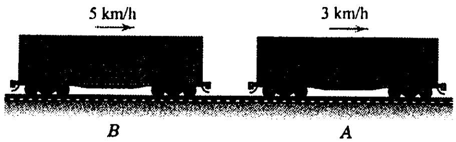
۳-۱۸۰ یک هواپیمای جت به جرم ۱۰ Mg در اثر نیروی رانش T موتور با سرعت ثابت ۱۰۰۰ km/h به طور افقی حرکت می‌کند و نیروی مقاوم هوا، R در جهت خلاف و برابر با T به هواپیما وارد می‌شود. خلبان دو راکت کمکی را روشن می‌کند. هر یک از راکتها دارای نیروی رانش $T_۰$ برابر ۸ kN برای مدت ۹ s می‌باشند. اگر سرعت هواپیما در پرواز افقی در انتهای ۹ s برابر ۱۰۵۰ km/h باشد، متوسط زمانی افزایش مقاومت هوا، ΔR را محاسبه کنید. جرم سوخت بکار رفته در راکت در مقابل جرم هواپیما ناچیز است.



شکل مسئله ۳-۱۸۰

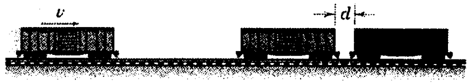
۳-۱۸۱ واگن باری A به جرم کل ۸۰ Mg با سرعت ۳ km/h بر روی ریل افقی در محل تعویض ریل در حال حرکت است. واگن باربری B به جرم ۶۰ Mg با سرعت ۵ km/h به واگن A نزدیک می‌شود. (الف) سرعت مشترک v دو واگن را پس از اتصال آنها به یکدیگر بدست آورید؛ (ب) اتلاف انرژی $|\Delta E|$ ناشی از برخورد را محاسبه کنید.

جواب (الف) $v =$ ۳/۸۶ km/h و (ب) $|\Delta E| =$ ۵۲۹۰ J



شکل مسئله ۳-۱۸۱

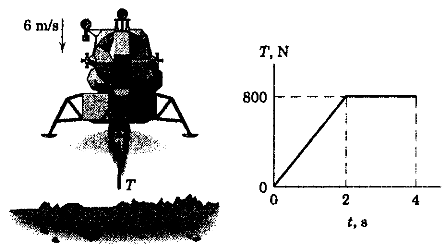
۳-۱۸۲ واگنی به جرم m با سرعت اولیه v به دو واگن یکسان برخورد می‌کند و به آنها متصل می‌شود. سرعت نهایی v' مجموعه سه واگن و همچنین کسر اتلاف انرژی n را تعیین کنید، اگر: (الف) فاصله اولیه دو واگن $d = ۰$ باشد (یعنی دو واگن ثابت در ابتدا بدون هیچگونه اتصالی به یکدیگر چسبیده‌اند) و (ب) فاصله دو واگن $d \neq ۰$ باشد به طوریکه واگنها به یکدیگر متصل نبوده و فاصله اندکی از یکدیگر داشته باشند. از مقاومت غلتشی صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۱۸۲-۳

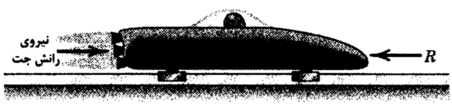
۱۸۳-۳ یک مدول ماه نشین به جرم ۲۰۰ kg به هنگام فرود بر روی سطح ماه موتورهای فرودش روشن شده و با سرعت ٦ m/s فرود می‌آید. اگر نیروی رانش T ایجاد شده توسط موتور به مدت ٤ s مطابق شکل با زمان تغییر کند و سپس خاموش شود؛ با فرض اینکه در لحظه t = ٥ s هنوز فرود نیامده باشد، سرعت فرود مدول را در این لحظه محاسبه کنید. شتاب جاذبه در سطح ماه ۱/٦۲ m/s^2 می‌باشد.

جواب v = ۲/۱۰ m/s



شکل مسئله ۱۸۳-۳

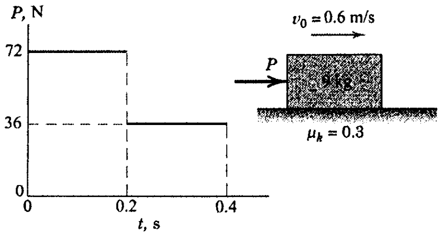
۱۸٤-۳ راکت آزمایشی سورتمه‌ای ۳ Mg توسط ٦ موتور جت که هر کدام ضربه ۱۰۰ kN-s ایجاد می‌کنند، روی ریل حرکت می‌کند. هر موتور به فاصله زمانی ۱/٤ ثانیه از هم روشن شده و مدت ۱/٥ ثانیه می‌سوزد. اگر سرعت سورتمه ۳ ثانیه پس از شروع به حرکت به ۱٥۰ m/h برسد، متوسط نیروی کل مقاومت آیرودینامیکی و مکانیکی R در مقابل حرکت را تعیین کنید. از افت جرم سوخت در مقایسه با جرم سورتمه صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۱۸٤-۳

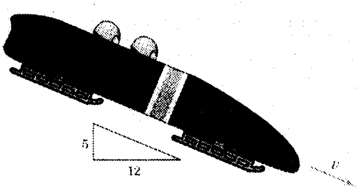
۱۸٥-۳ بلوک ۹ کیلوگرمی با سرعت ۰/٦ m/s بر روی یک سطح افقی به سمت راست حرکت می‌کند که در t = ۰ نیروی P بر آن وارد می‌شود. سرعت v بلوک را در t = ۰/٤ s محاسبه کنید. ضریب اصطکاک سینتیکی μ_k = ۰/۳ می‌باشد.

جواب v = ۱/۸۲۳ m/s



شکل مسئله ۱۸٥-۳

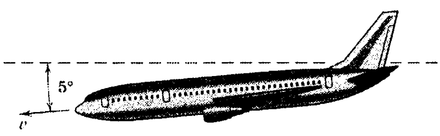
۱۸٦-۳ مقاومت حرکتی یک نوع سورتمه مسابقه، ۲ درصد نیروی قائم بر رانندههای آن است. مدت زمان لازم t سورتمه را برای رسیدن به سرعت ۱۰۰ km/h به طرف پایین شیب، در صورتیکه از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، بدست آورید.



شکل مسئله ۱۸٦-۳

۱۸۷-۳ خلبانان یک هواپیمای ٤۰ Mg که در ابتدا به صورت افقی با سرعت ٦٥۰ km/h است، موتورهای خود را خاموش کرده و با زاویه °٥ مطابق شکل دماغه‌اش را به سوی پایین منحرف می‌کند. پس از ۱۲۰ ثانیه سرعتش به ٦۰۰ km/h می‌رسد. متوسط زمانی نیروی پسا D (Drag) (نیروی مقاومت هوا در مقابل حرکت در امتداد مسیر) را حساب کنید.

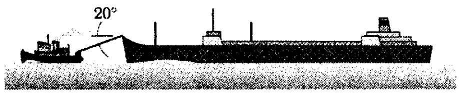
جواب D = ۳۸/۸ kN



شکل مسئله ۱۸۷-۳

مسائل ویژه

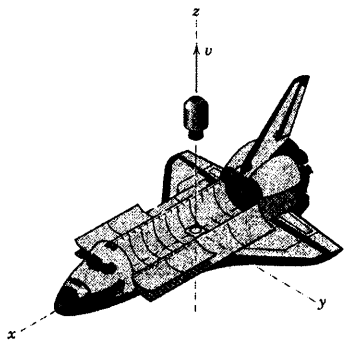
۳-۱۸۸ نفتکش بزرگی دارای ظرفیت کلی (جرم) (10^3)۱۵۰ تن متریک (یک تن متریک معادل ۱۰۰۰ kg است) توسط یدک‌کشی کشیده می‌شود. اگر نیروی کشش کابل، ثابت و برابر ۲۰۰ kN باشد، زمان لازم برای آنکه سرعت نفتکش از حال سکون به ۱ knot برسد، محاسبه کنید. در چنین سرعت پایینی، مقاومت بدنه کشتی در مقابل حرکت در آب ناچیز بوده و می‌توان از آن صرفنظر کرد. (۱ knot = ۱/۸۵۲ km/h).



شکل مسئله ۳-۱۸۸

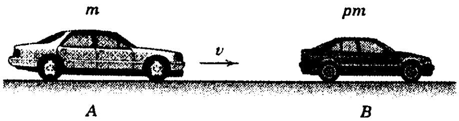
۳-۱۸۹ ماهواره‌ای بـه جـرم ۸۰۰ kg مطـابق شـکل از قسمت حمل بار یک شاتل فضـایی پرتـاب می‌شـود. مکـانیزم پرتاب شاتل فعال شده و به مدت ٤ s با ماهواره تماس یافته و به آن سرعت ۰/۳ m/s در جهت z نسبت بـه شـاتل می‌دهـد. جرم شاتل ۹۰ Mg است. مولفـه سـرعت v_f شـاتل را در اثـر پرتاب ماهواره در جهت منفی محور z بدست آورید. همچنیـن متوسط زمانی نیروی پرتاب F_{av} بدست آورید.

جواب $\quad v_f = ۰/۰۰۲٦٤$ m/s و $F_{av} = ۵۹/۵$ N



شکل مسئله ۳-۱۸۹

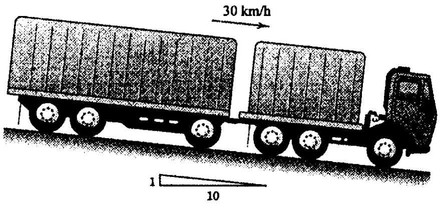
۳-۱۹۰ اتومبیل A که با سرعت v در حرکت است، بـا اتومبیل ساکن B برخورد می‌کند. اتومبیلـها بعـد از برخـورد و اتصال به یکدیگر با سرعت v' حرکت می‌کنند. جرم اتومبیل A برابر m و جرم اتومبیل B برابر pm می‌باشد که p نسبت جرمی اتومبیل B به اتومبیل A می‌باشد. اگر مـدت زمـان برخـورد Δt باشد، سرعت مشترک v' پس از برخورد و نیز شـتاب متوسـط هر اتومبیل را در حین برخورد بر حسب v، p و Δt بیان کنیـد. روابط خود را به ازای $p = ۰/۵$ بررسی کنید.



شکل مسئله ۳-۱۹۰

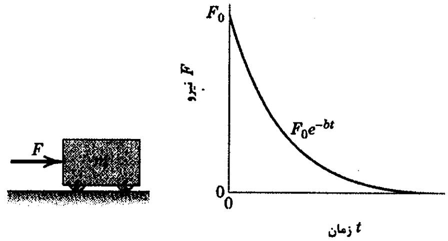
۳-۱۹۱ سیستم ترمز هیدرولیکـی کـامیون و تریلـی آن نیروهای ترمز برابری را برای هر دو واحـد تولیـد می‌کنـد. اگر مدت ترمز کردن برای متوقـف کـردن کـامیون کـه بـا سـرعت ۳۰ km/h در سرازیری شیب ۱۰ درصدی در حرکـت اسـت، ۵ ثانیه باشد. مقـدار نـیروی P متصلـه بیـن کـامیون و تریلـی را بدسـت آوریـد. جـرم کـامیون ۱۰ Mg و تریلـی آن ۷/۵ Mg است.

جواب $\quad P = ۳/۳۰$ kN (کشش)



شکل مسئله ۳-۱۹۱

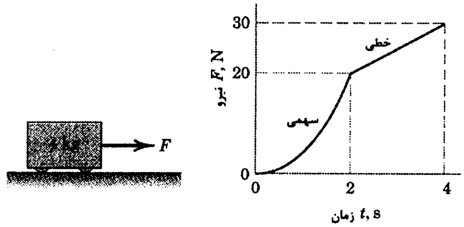
۳-۱۹۲ به ارابـه‌ای بـه جـرم m نـیروی کـاهنده F بـه صورت نمایی وارد می‌شود که مبین یک بارگذاری ضربه‌ای یـا انفجاری است. اگر در لحظه $t = ۰$ ارابه در حالت سکون باشد، سرعت v و جابجایی ارابه را به صورت تابعی از زمان بدسـت آورید. مقدار v به ازای مقادیر بزرگ t چقدر است؟



شکل مسئله ۱۹۲-۳

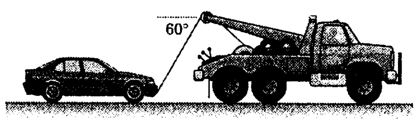
۱۹۳-۳ به ارابه‌ای که در لحظه $t = ۰$ در حالت سکون است، مطابق شکل نیرویی که با زمان تغییر می‌کند وارد می‌شود. با صرفنظر کردن از اصطکاک، سرعت ارابه را در لحظه‌های $t = ۱\ s$ و $t = ۳\ s$ بدست آورید.

جواب $\quad v_۱ = ۰/۴۱۷\ m/s$ و $v_۳ = ۸/۹۶\ m/s$



شکل مسئله ۱۹۳-۳

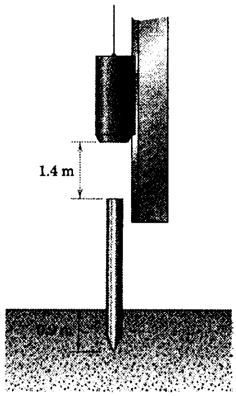
۱۹۴-۳ جرثقیلی که اتومبیلی به جرم ۱۲۰۰ kg را با خود می‌کشد به طور یکنواخت شتاب گرفته و سرعتش در طی ۱۵ s از ۳۰ km/h به ۷۰ km/h می‌رسد. مقاومت غلتشی متوسط اتومبیل در این محدودهٔ سرعت برابر ۵۰۰ N می‌باشد. با فرض اینکه زاویه ۶۰° نشان داده شده، زاویه‌ای باشد که در طی حرکت به طور متوسط ثابت باقی می‌ماند، کشش متوسط کابل که اتومبیل را می‌کشد، بدست آورید.



شکل مسئله ۱۹۴-۳

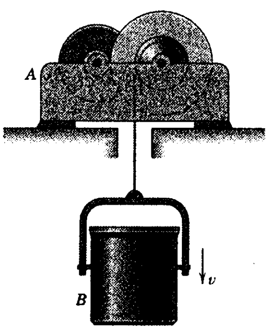
۱۹۵-۳ یک پتک شمع کوب به جرم ۴۵۰ kg از حالت سکون رها شده و پس از طی مسافت ۱/۴ m به یک شمع ۲۴۰ کیلوگرمی که به اندازه ۰/۹ m داخل زمین است، برخورد کرده و آنرا بیشتر در زمین فرو می‌برد. در حین برخورد، پتک با شمع حرکت کرده و پس‌جهش قابل توجهی ندارد. سرعت پتک و شمع را بلافاصله پس از برخورد بدست آورید. آیا می‌توانید بکارگیری اصل بقاء مومنتم را با وجود اثر وزنهای پتک و شمع در حین برخورد توجیه کنید؟

جواب $\quad v = ۳/۴۲\ m/s$



شکل مسئله ۱۹۵-۳

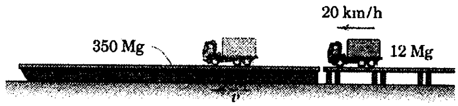
۱۹۶-۳ واحد موتوری A، ۹۰۰ kg برای بالا و پایین آوردن سطل حاوی سیمان ۶۰۰ کیلوگرمی B طراحی شده است. نیروی متوسط R را که توسط تکیه‌گاه بر واحد A در مدت ۶ ثانیه برای کاهش سرعت سطل از ۳ m/s به ۰/۵ m/s به طرف پایین لازم است، بدست آورید. تمام سیستم را به عنوان یک واحد، بدون آن که نیروی کشش در کابل را بیابید، تحلیل کنید.



شکل مسئله ۱۹۶-۳

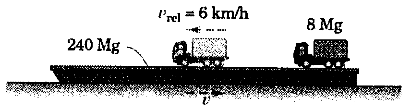
۳-۱۹۷ کامیون ۱۲ Mg که با سرعت ۲۰ km/h روی سکوی اسکله در حرکت است، روی کرجی ۳۵۰ Mg برای متوقف شدن، ترمز می‌گیرد. کرجی بر روی آب آزادانه حرکت کرده و مقاومت آب در مقابل حرکتش در آب در سرعت پایین ناچیز است. سرعت کرجی را پس از اینکه کامیون به توقف می‌رسد، بدست آورید.

جواب $v = ۰/۶۶۳$ km/h



شکل مسئله ۳-۱۹۷

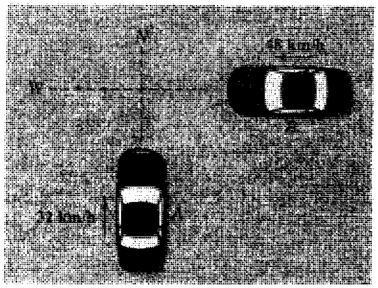
۳-۱۹۸ کامیونی به جرم ۸ Mg بر روی عرشه یک کرجی به جرم ۲۴۰ Mg به حالت سکون قرار دارد و کرجی هم بر روی آب ساکن است. اگر کامیون بر روی کرجی شروع به حرکت کرده و سرعت آن نسبت به کرجی $v_{rel} = ۶$ km/h باشد، سرعت v کرجی را محاسبه کنید. مقاومت آب در مقابل حرکت در سرعتهای پایین ناچیز است.



شکل مسئله ۳-۱۹۸

۳-۱۹۹ اتومبیل B به جرم ۱۵۰۰ kg که با سرعت ۴۸ km/h به طرف غرب حرکت می‌کند با اتومبیل A به جرم ۱۶۰۰ kg که با سرعت ۳۲ km/h به طرف شمال در حرکت است، مطابق شکل برخورد می‌کند. اگر پس از برخورد، اتومبیلها به عنوان یک مجموعه با یکدیگر حرکت کنند، اندازه سرعت v، سرعت مشترک آنها را بلافاصله پس از برخورد محاسبه کرده و زاویه θ بردار سرعت را با امتداد شمال پیدا کنید.

جواب $v = ۲۸/۵$ km/h و $\theta = ۵۴/۶°$



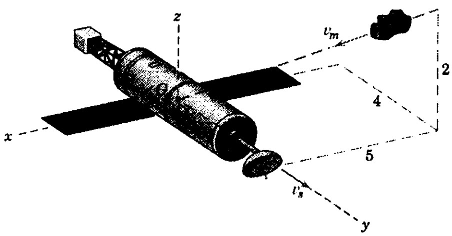
شکل مسئله ۳-۱۹۹

۳-۲۰۰ یک لوکوموتیو دیزل ـ الکتریکی، میله اتصال واگن را با نیروی ثابت ۲۷۰ kN می‌کشد. زمان لازم برای آنکه لوکوموتیو سرعت رو به بالای واگن ۱۶۰۰ Mg تنی را در یک شیب ۱ درصدی از ۳۲ km/h به ۴۸ km/h برساند، چقدر است؟ نیروی مقاوم قطار در مقابل حرکت برابر ۵۰ N در مگاگرم است.

۳-۲۰۱ فضاپیمایی به جرم ۱۰۰۰ kg که با سرعت $v_s = ۲۰۰۰$ m/s در اعماق فضا در حرکت است، با شهاب سنگی به جرم ۱۰ kg که اندازه بردار سرعت $\mathbf{v}_m$ آن در شکل نشان داده شده است (۵۰۰۰ m/s)، برخورد کرده و شهاب سنگ به درون فضاپیما فرو می‌رود. $\mathbf{v}$، سرعت نهایی مرکز جرم G فضاپیما را بدست آورید. زاویه β بین $\mathbf{v}$ و سرعت اولیه $\mathbf{v}_s$ فضاپیما را محاسبه کنید.

جواب $\mathbf{v} = ۳۶/۹\mathbf{i} + ۱۹۵۱\mathbf{j} - ۱۴/۷۶\,\mathbf{k}$ m/s

$\beta = ۱/۱۶۷°$



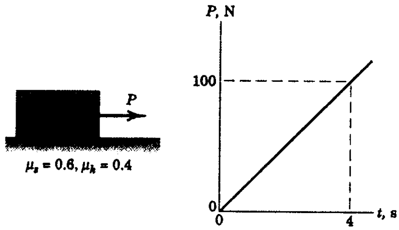
شکل مسئله ۳-۲۰۱

۳-۲۰۲ فضاپیمایی که در اعماق فضا حرکت می‌کند، طوری برنامه ریزی شده که در اثر بکار افتادن موتورهایش در مدت زمان t سرعتش به اندازه Δv افزایش یابد. پس از آنکه

۲۵ درصد راه با موتور روشن طی شد، ناگهان در اثر بد عمل کردن موتور فقط نیمی از نیروی رانش معمول ایجاد می‌شود. اگر موتور راکت در مدت زمان طراحی شده t کار می‌کرد، چه درصد n از Δv قابل دستیابی بود. زمان اضافی t' که باید موتور کار کند تا جبران خسارت ایجاد شده را بنماید، چقدر است؟

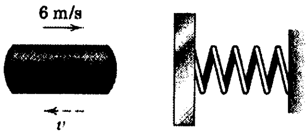
۲۰۳-۳ همانطور که نشان داده شده، نیروی P وارد بر بلوک ۱۰ کیلوگرمی که ابتدا ساکن است، به طور خطی با زمان تغییر می‌کند. اگر ضریب اصطکاک استاتیکی و سینتیکی بین بلوک و سطح افقی به ترتیب برابر ۰/۶ و ۰/٤ باشند، سرعت بلوک را در $t = ٤$ s بدست آورید.

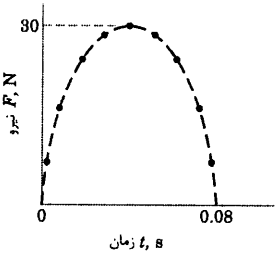
جواب $v = ٦/٦١$ m/s



شکل مسئله ۲۰۳-۳

۲۰٤-۳ اندازه گیری‌های دقیق انجام شده در طی برخورد یک استوانه فلزی به جرم ۲۰۰ g با صفحه فنردار، مطابق شکل نشان می‌دهد که بین نیروی F تماس و زمان t برخورد، یک رابطه بیضوی برقرار است. سرعت برگشتی استوانه v را در صورتی تعیین کنید که سرعت برخورد استوانه فلزی به صفحه ٦ m/s باشد.

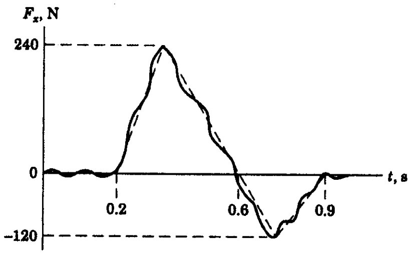




شکل مسئله ۲۰٤-۳

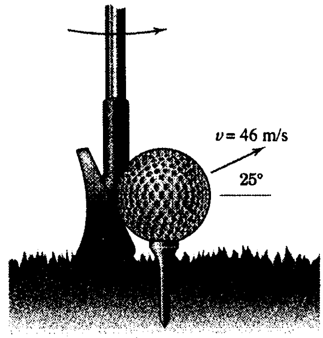
۲۰۵-۳ به یک شیء ٤ کیلوگرمی که با سرعت ۱۰ m/s در جهت منفی محور x بر روی یک سطح صیقلی در حال حرکت است، نیروی F_x که مطابق شکل با زمان تغییر می‌کند، وارد می‌شود. یافته‌های حاصل از آزمایش را که با خط‌چین مشخص شده، تقریب بزنید و سرعت جسم را در حالات زیر بدست آورید. (الف) در $t = ۰/٦$ s (ب) در $t = ۰/۹$ s.

جواب (الف) $v = ۲$ m/s و (ب) $v = -۲/۵$ m/s



شکل مسئله ۲۰۵-۳

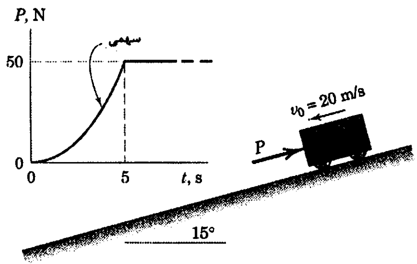
۳-۲۰۶ به توپ گلف ٤۵/۹ گرمی، ضربه‌ای توسط چوگان فلزی زده می‌شود که به آن، سرعت نشان داده شده در شکل را در مدت ۰/۰۰۱ s می‌دهد. مقدار نیروی متوسط وارده بر توپ R توسط چوگان را بیابید. مقدار شتاب a ناشی از این نیرو چقدر است و با فرض ثابت بودن شتاب، چه مسافت d را توپ در حین ضربه برای رسیدن به چنین سرعتی طی می‌کند.



شکل مسئله ۳-۲۰۶

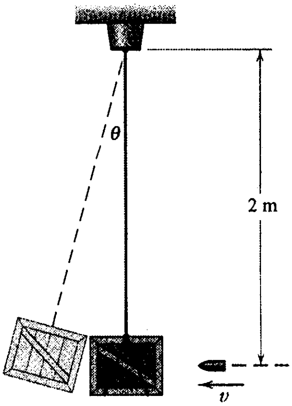
۳-۲۰۷ ارابه‌ای با سرعت v_0 = ۲۰ m/s در زمان t = ۰ در حال حرکت به طرف پایین سطح شیبدار است که ناگهان نیروی P مطابق شکل، بر آن وارد می‌شود. پس از ۵ ثانیه، نیرو به ۵۰ N می‌رسد و سپس ثابت می‌ماند. سرعت ارابه را در t = ۸ s تعیین کرده و زمان t رسیدن سرعت ارابه به صفر را بدست آورید.

جواب t = ۸/۲۵ s و به طرف پایین شیب $v_۲$ = ۱/٤۲۳ m/s



شکل مسئله ۳-۲۰۷

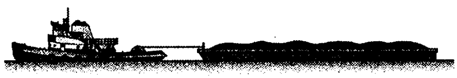
۳-۲۰۸ آونگ پرتابه‌ای، یک وسیله اندازه گیری ساده جهت سرعت v گلوله است. بدین صورت که گلوله به طرف جعبه پر از شن آونگ، شلیک شده و در آن فرو می‌رود و حداکثر زاویه θ نوسانات آونگ در اثر این عمل مورد ملاحظه قرار می‌گیرد. زاویه θ را در شرایطی حساب کنید که گلوله ٦۰ گرمی با سرعت v = ٦۰۰ m/s به صورت افقی به سمت جعبه شن معلق ۲۰ کیلوگرمی شلیک شود. همچنین درصد اتلاف انرژی در طی برخورد را بیابید.



شکل مسئله ۳-۲۰۸

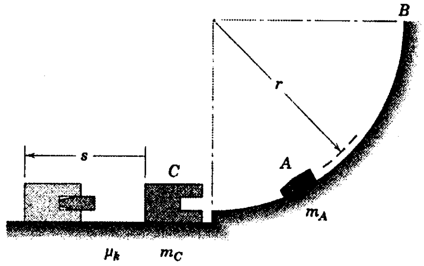
۳-۲۰۹ یدک کش ۵۰۰ ton، کرجی حامل ذغال سنگ به جرم ۹۰۰ ton را با سرعت ثابت ٦ knots با خود می‌کشد. در یک لحظه کوتاه یک جرثقیل قوی کابل را با سرعت ۰/۵ m/s می‌کشد. سرعت کاهنده v یدک کش را در این لحظه کوتاه محاسبه کنید. فرض کنید کابل افقی است (یادآوری می‌شود که ۱ knot = ۱/۸۵۲ m/s).

جواب گره v = ۵/۳۸



شکل مسئله ۳-۲۰۹

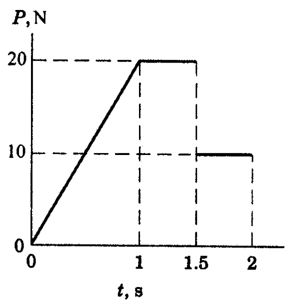
۳-۲۱۰ درپوش استوانه‌ای A به جرم m_A از حالت سکون از نقطه B رها شده و به سمت پایین راهگاه صیقلی مدور می‌لغزد. درپوش با بلوک C برخورد کرده و به درون آن فرو می‌رود. عباراتی برای جابجایی s بلوک و درپوش لغزنده تا لحظه توقف بنویسید. ضریب اصطکاک سینتیکی بین بلوک و سطح افقی μ_k است.



شکل مسئله ۲۱۰-۳

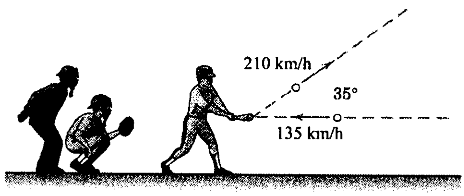
۲۱۱-۳ به جسم ۱۰ کیلوگرمی که یک مسیر افقی را با سرعت ۳ m/s طی می‌کند، نیروی افقی P به طور قائم بر راستای اولیه حرکت اعمال می‌شود. اگر نیروی P تنها نیروی وارد بر جسم در صفحه حرکتش باشد و امتداد آن ثابت مانده و طبق شکل نشان داده شده، تغییر کند؛ اندازه سرعت جسم را در $t = ۲$ s و نیز زاویه θ آن را با راستای نیروی P بدست آورید.

جواب $v = ۳/۹۱$ m/s و $\theta = ۵۰/۲°$



شکل مسئله ۲۱۱-۳

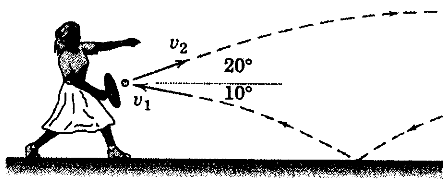
۲۱۲-۳ یک توپ بیسبال که با سرعت افقی ۱۳۵ km/h در حال حرکت است با چوگان برخورد می‌کند. مطابق شکل درست بعد از برخورد، سرعت توپ ۱٤٦ گرمی برابر ۲۱۰ km/h در امتداد زاویه ۳۵° با صفحه افق می‌باشد. مولفه‌های x و y نیروی متوسط **R** وارده از طرف چوگان به توپ را در طی ۰/۰۰۵ s برخورد بدست آورید. در حالات زیر در مورد تاثیر وزن توپ بیسبال توضیح دهید. (الف) در حین برخورد؛ (ب) چند ثانیه بعد از برخورد.



شکل مسئله ۲۱۲-۳

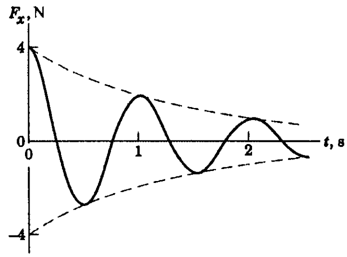
۲۱۳-۳ یک تنیس‌باز توپی را که در حال برخاستن از سطح زمین است با راکت خود می‌زند. سرعت توپ قبل از برخورد به راکت $v_۱ = ۱۵$ m/s و سرعت آن بعد از برخورد $v_۲ = ۲۲$ m/s در جهت نشان داده شده در شکل می‌باشد. اگر توپ ٦۰ g به مدت ۰/۰۵ s با راکت در تماس باشد، اندازه نیروی متوسط **R** وارده از طرف راکت بر توپ را بدست آورید. زاویه β بین نیروی **R** و افق را نیز پیدا کنید. در مورد تاثیر وزن توپ در حین برخورد توضیح دهید.

جواب $R = ٤۳/۰$ N و $\beta = ۸/٦۸°$



شکل مسئله ۲۱۳-۳

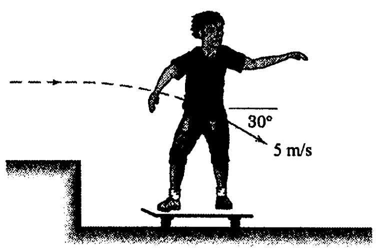
۳-۲۱۴ جسم ۰/۵ کیلوگرمی که فقط تحت تاثیر یک نیروی متناوب در جهت x می‌باشد، در امتداد محور افقی x نوسان می‌کند. دامنه این نیرو مطابق شکل با زمان کاهش می‌یابد و از رابطه $F_x = ٤e^{-t} \cos ٢\pi t$ تبعیت می‌کند که در آن F_x بر حسب نیوتن و t بر حسب ثانیه می‌باشند. اگر در $t = ٠$ سرعت جسم برابر $١/٢$ m/s در جهت منفی محور x باشد، سرعت v_x را در زمان $t = ٢$ s بدست آورید.



شکل مسئله ۳-۲۱۴

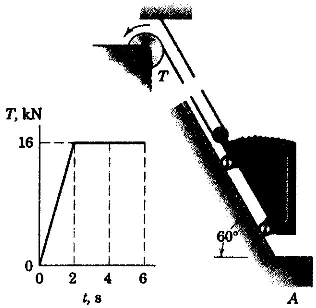
۳-۲۱۵ پسر ٤٠ کیلوگرمی، با جهش از سطح بالایی بر روی تخته اسکیت ٥ کیلوگرمی خود با سرعت ٥ m/s مطابق شکل فرود می‌آید. اگر طول مدت زمان برخورد پسر با تخته اسکیت ٠/٠٥ s باشد، سرعت نهایی v آنها بر روی سطح افقی پایین را تعیین کرده و نیروی قائم کل N وارده از طرف سطح بر چرخهای تخته اسکیت را در طی برخورد حساب کنید.

جواب $v = ٣/٨٥$ m/s و $N = ٢/٤٤$ N



شکل مسئله ۳-۲۱۵

۳-۲۱۶ جرم واگن و مواد معدنی درون آن ٣ Mg است. کشش T توسط بالابر در طناب ایجاد می‌شود که مطابق شکل با زمان تغییر می‌کند. اگر در ابتدا واگن بر روی سکوی A ساکن باشد و سپس بالابر به کار افتد، سرعت v واگن را در $t = ٦$ s تعیین کنید. از اتلاف انرژی ناشی از اصطکاک می‌توان صرفنظر کرد.

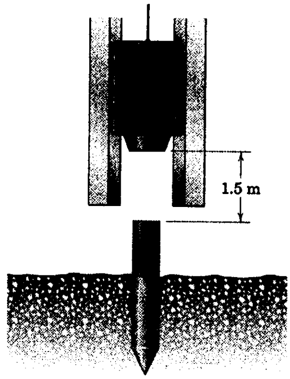


شکل مسئله ۳-۲۱۶

۳-۲۱۷ ◀ پتک یک شمع‌کوب به جرم ٤٠٠ kg چنان طراحی شده که از حالت سکون از ارتفاع ١/٥ m بر فرق شمع به جرم ٣٠٠ kg فرود آید، در حالی که شمع قبلا مقداری در زمین فرو رفته است. هر چه عمق نفوذ شمع در زمین بیشتر شود، تمایل پس‌زنش پتک بر اثر اصابت نیز بیشتر خواهد شد. سرعت v شمع را بلافاصله پس از برخورد در سه وضعیت زیر بدست آورید.

(الف) مقاومت اولیه زمین در مقابل نفوذ شمع در ابتدای کار، کم می‌باشد و مشاهده می‌شود که پتک و شمع همراه با هم به طرف پایین حرکت می‌کنند؛ (ب) مقاومت زمین در مقابل نفوذ به تدریج افزایش یافته است و مشاهده می‌شود که سرعت پتک بلافاصله پس از ضربه، صفر می‌باشد؛ (ج) مقاومت زمین در مقابل نفوذ بسیار زیاد شده و مشاهده می‌شود که بلافاصله پس از برخورد، پتک به اندازه ١٠٠ mm از شمع به سمت بالا می‌جهد. چرا می‌توان از ضربه ناشی از وزن پتک در حین برخورد صرفنظر کرد؟

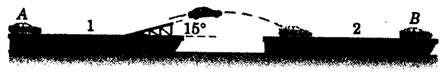
جواب (الف) $v = ٣/١٠$ m/s و (ب) $v = ٧/٢٣$ m/s
(ج) $v = ٩/١٠$ m/s



شکل مسئله ۲۱۷-۳

۲۱۸-۳ ◀ دو کرجی هر یک به جرم ۵۰۰ Mg در آب آرام لنگر انداخته‌اند. یک راننده بدل‌کار بـا اتومبیلی بـه جرم ۱۵۰۰ kg که ابتدا در نقطه A در حال سکون است، شروع بـه حرکت نموده و پس از طـی طـول عرشـه، از انتـهای سـکوی شیبدار ۱۵° با سرعت ۵۰ km/h نسبت به سکو و کرجی، آنـرا ترک می‌کند. راننده با موفقیت از فاصله بیـن دو کرجـی پـرش کرده و اتومبیلش را در نقطـه B نسبت بـه کرجی ۲ متوقـف می‌کند. $v_۲$، سرعت کرجی ۲ را درست بعد از اینکـه اتومبیـل متوقـف می‌شـود، بدسـت آوریـد. از مقـاومت آب در مقـابل حرکت، در سرعتهای پایین صرفنظر کنید.

جواب $v_۲ = ۴۰/۰$ mm/s

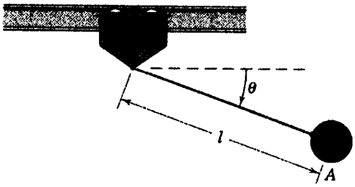


شکل مسئله ۲۱۸-۳

۲۱۹-۳ ◀ آونگ ساده A به جرم m_A و طول l از نقالـه B به جرم m_B آویزان شده است. اگر سیستم از حـالت سـکون در $\theta = ۰$ رهـا شـود، سـرعت v_B نقالـه را در $\theta = ۹۰°$ تعییـن کنید. اصطکاک ناچیز است.

جواب

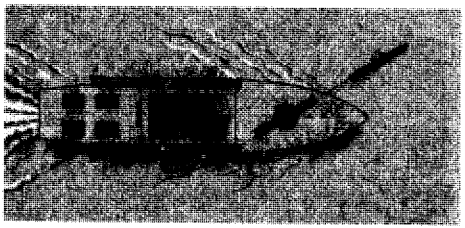
$$v_B = \frac{m_A}{m_B}\sqrt{\frac{۲gl}{۱+\dfrac{m_A}{m_B}}}$$



شکل مسئله ۲۱۹-۳

۲۲۰-۳ ◀ یک کشتی اژدر افکـن بـه ظرفیـت ۶۰ تـن متریک که با سرعت ۱۸ knots در حال حرکت اسـت، اژدری به جرم ۱۴۰ kg را به طور افقی و با زاویـه لولـه پرتـاب ۳۰°، مطابق شکل شلیک می‌کند. اگر سرعت اژدر نسبت به کشتی در هنگام خروج از لوله ۶ m/s باشد، Δv کاهش لحظه‌ای سرعت رو به جلوی کشتی را تعیین کنید. به خـاطر داشـته باشـید کـه ۱ knot = ۱/۸۵۲ km/h و ۱۰۰۰ kg = ۱ تن متریک می‌باشـد. همچنین مسئله را با ارجاع حرکت به سیستم مختصات در حال حرکت با سرعت اولیه کشتی حل کنید.

جواب $\Delta v = ۰/۰۱۲۱۰$ m/s

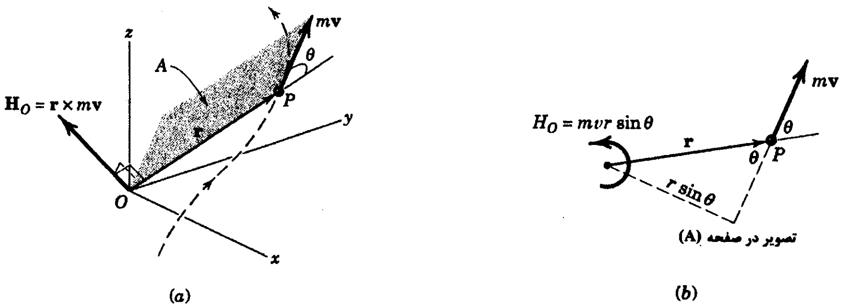


شکل مسئله ۲۲۰-۳

۳-۱۰ ضربه زاویه‌ای و مومنتم زاویه‌ای (اندازه حرکت زاویه‌ای)

علاوه بر معادلات ضربه خطی و مومنتم خطی، متناظر آنها، مجموعه‌ای از معادلات در مورد ضربه زاویه‌ای و مومنتم زاویه‌ای وجود دارند. ابتدا مومنتم زاویه‌ای را تعریف می‌کنیم. در شکل‌a۱۱-۳ ذره P به جرم m نشان داده شده که در امتداد یک منحنی در فضا حرکت می‌کند. موقعیت ذره با بردار $\mathbf{r}$ مشخص می‌شود که موقعیت آن از مبدا O در دستگاه مختصات ثابت x-y-z تعیین می‌گردد. سرعت ذره $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ بوده و مومنتم خطی آن $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ است. طبق تعریف، مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ ذره P حول نقطه O عبارت است از گشتاور بردار مومنتم خطی $m\mathbf{v}$ حول نقطه O که از رابطه ضرب خارجی برای گشتاور یک بردار بدست می‌آید:

$$\boxed{\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}} \qquad (۳-۲۵)$$



شکل (۳-۱۱)

در این صورت مومنتم زاویه‌ای، برداری است عمود بر صفحه A که توسط بردارهای $\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ تعریف شده است. $\mathbf{H}_O$ از قاعده دست راست در ضرب خارجی پیروی می‌کند.

مولفه‌های اسکالر مومنتم زاویه‌ای را می‌توان از بسط بردار آن بدست آورد.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = m\,(v_z\,y - v_y\,z)\mathbf{i} + m(v_x\,z - v_z\,x)\mathbf{j} + m(v_y\,x - v_x\,y)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{H}_O = m\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \qquad (۳-۲۶)$$

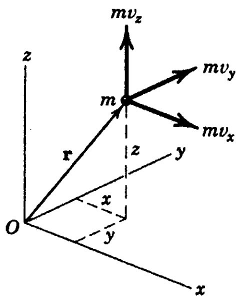
به طوری که:

$$H_x = m\,(v_z\,y - v_y\,z) \qquad H_y = m\,(v_x\,z - v_z\,x) \qquad H_z = m\,(v_y\,x - v_x\,y)$$

صحت هر یک از روابط فوق را که معرف مومنتم زاویه‌ای هستند می‌توان به سادگی به کمک شکل ۱۲-۳ بررسی کرد. شکل ۱۲-۳، سه مولفه مومنتم خطی را نشان می‌دهد که حول هر یک از محورها گشتاور ایجاد می‌کنند.

به منظور کمک به نمایش مومنتم زاویه‌ای، در شکل۱۱b-۳ نمایش دوبعدی بردارهای بخش a از شکل را در صفحه A نشان داده‌ایم. حرکت ذره P در صفحه A توسط بردارهای $\mathbf{v}$ و $\mathbf{r}$ تعریف شده است.

اندازه گشتاور بردار $m\mathbf{v}$ حول نقطه O برابر است با حاصلضرب mv در بازوی گشتاور گیری $r\sin\theta$ یعنی $mvr\sin\theta$ که برابر با اندازه ضرب خارجی $\mathbf{H}_O = \mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ می‌باشد.



شکل ۱۲-۳

مومنتم زاویه‌ای، گشتاور مومنتم خطی است و نباید با مومنتم خطی اشتباه شود. در سیستم SI ، واحدهای مومنتم زاویه‌ای عبارتند از:

$$\text{kg}\cdot(\text{m/s})\cdot\text{m} = \text{kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} = \text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}$$

در سیستم متداول آمریکایی واحد مومنتم زاویه‌ای $[\text{lb}/(\text{ft/sec}^2)][\text{ft/sec}][\text{ft}] = \text{ft-lb-sec}$ است.

میزان تغییرات مومنتم زاویه‌ای

اکنون آماده‌ایم تا گشتاور نیروهای وارد بر ذره P را به مومنتم زاویه‌ای آن ارتباط دهیم. اگر $\Sigma\mathbf{F}$ *بیانگر کلیه* نیروهای وارد بر ذره P از شکل ۱۱-۳ باشد، گشتاور $\mathbf{M}_O$ حول مبدا O برابر است با ضرب خارجی:

$$\Sigma\mathbf{M}_O = \mathbf{r}\times\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}}$$

که در آن قانون دوم نیوتن $\Sigma\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$ جایگذاری شده است. حال از معادله ۲۵-۳ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم و از قانون مربوط به مشتق ضرب خارجی استفاده می‌کنیم (بند ۹، بخش C-۷، پیوست C را ببینید) و داریم:

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \dot{\mathbf{r}}\times m\mathbf{v} + \mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{v}\times m\mathbf{v} + \mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{v}}$$

چون حاصل ضرب خارجی بردارهای موازی صفر است بنابراین جمله $\mathbf{v}\times m\mathbf{v}$ برابر صفر می‌شود. با قرار دادن در $\Sigma\mathbf{M}_O$ داریم:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O} \qquad (۳-۲۷)$$

معادله ۲۷-۳ بیان می‌کند که *گشتاور کلیه نیروهای وارد بر ذره‌ای به جرم m حول نقطه ثابت O با میزان تغییرات مومنتم زاویه‌ای m حول نقطه O برابر است.* این رابطه یکی از قویترین ابزارهای تحلیل در دینامیک محسوب می‌شود. به ویژه هنگامیکه در مورد سیستم ذرات، اعم از صلب یا غیر صلب بسط داده شود. معادله ۲۷-۳ یک معادله برداری با مولفه‌های اسکالر زیر است.

$$\Sigma M_{O_x} = \dot{H}_{O_x} \qquad \Sigma M_{O_y} = \dot{H}_{O_y} \qquad \Sigma M_{O_z} = \dot{H}_{O_z} \qquad (۳-۲۸)$$

اصل ضربه ـ مومنتم زاویه‌ای

معادله ۲۷-۳ رابطه لحظه‌ای بین گشتاور و میزان تغییرات مومنتم زاویه‌ای را می‌دهد. با انتگرال گیری از معادله ۲۷-۳ از t_1 تا t_2، اثر گشتاور $\Sigma\mathbf{M}_O$ بر مومنتم زاویه‌ای ذره در برهه‌ای از زمان بدست می‌آید. با ضرب dt در معادله داریم: $\Sigma\mathbf{M}_O\,dt = d\mathbf{H}_O$، که پس از انتگرال گیری خواهیم داشت:

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\Sigma\mathbf{M}_O\,dt = \mathbf{H}_{O_2} - \mathbf{H}_{O_1} = \Delta\mathbf{H}_O} \qquad (۳-۲۹)$$

که در آن $\mathbf{H}_{O_1} = \mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1$ و $\mathbf{H}_{O_2} = \mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2$ می‌باشد. طبق تعریف، *ضربه زاویه‌ای* عبارت از حاصلضرب گشتاور در زمان است و معادله ۲۹-۳ بیان می‌کند که *ضربه زاویه‌ای کل وارد بر m حول نقطه ثابت O برابر است با تغییر در مومنتم زاویه‌ای m حول نقطه O*. معادله ۲۹-۳ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$\boxed{\mathbf{H}_{O_1} + \int_{t_1}^{t_2}\Sigma\mathbf{M}_O\,dt = \mathbf{H}_{O_2}} \qquad (۳-۲۹a)$$

که بیان می‌کند که مجموع مومنتم زاویه‌ای اولیه ذره به اضافه ضربه زاویه‌ای وارد بر آن با مومنتم زاویه‌ای نهایی آن برابر است. واحدهای ضربه زاویه‌ای همانند مومنتم زاویه‌ای هستند که در سیستم SI، N·m·s یا kg·m²/s و در سیستم متداول آمریکایی ft-lb-sec می‌باشد.

رابطه ضربه زاویه‌ای و مومنتم زاویه‌ای همانند ضربه خطی و مومنتم خطی، یک معادله برداری است که در طی انتگرال‌گیری جهت و اندازه آن ممکن است تغییر کند. تحت چنین شرایطی، ضروری است که $\Sigma\mathbf{M}_O$ و $\mathbf{H}_O$ بر حسب مولفه‌هایشان نوشته شده و پس از انتگرال گیری ترکیب شوند. در نتیجه مولفه x معادله ۲۹-۳ چنین می‌شود:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Sigma M_{O_x}\,dt = \left(H_{O_x}\right)_2 - \left(H_{O_x}\right)_1$$
$$= m\,[(v_z\,y - v_y\,z)_2 - (v_z\,y - v_y\,z)_1]$$

که اندیسهای ۱ و ۲ معرف مقادیر متناظر با زمانهای t_1 و t_2 می‌باشند. عبارات مشابهی در مورد مولفه‌های y و z انتگرال مومنتم زاویه‌ای وجود دارد.

کاربردهای حرکت در صفحه

روابط اخیر در مورد ضربه زاویه‌ای و مومنتم زاویه‌ای برای حالت عمومی در سه بعد مورد بسط و توسعه قرار گرفتند. بیشترین کاربردهایی که مورد توجه قرار گرفته و قابل تحلیل هستند، مسائل دو بعدی در صفحه است که در آن گشتاورها حول یک محور عمود بر صفحه حرکت گرفته می‌شود. در این حالت امکان تغییر اندازه مومنتم زاویه‌ای وجود دارد ولی جهت بردار آن تغییر نمی‌کند. در نتیجه برای ذره‌ای به جرم m که در طول یک مسیر منحنی در صفحه x-y در حال حرکت است، شکل ۱۳-۳، اندازه‌های مومنتم زاویه‌ای حول نقطه O در نقاط ۱ و ۲ به ترتیب با:

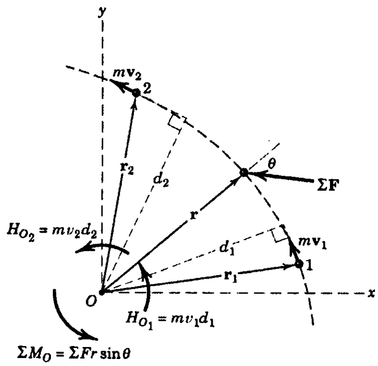
$H_{O_1} = |\mathbf{r}_1 \times m\mathbf{v}_1| = mv_1 d_1$ و $H_{O_2} = |\mathbf{r}_2 \times m\mathbf{v}_2| = mv_2 d_2$ برابر می‌باشند.

جهت H_{O_1} و H_{O_2} در تصویر در جهت پادساعتگرد نشان داده شده که با جهت گشتاور مومنتم خطی مطابقت دارد. شکل اسکالری معادله ۲۹-۳ که به حرکت بین نقاط ۱ و ۲ در فاصله زمانی t_1 و t_2 اعمال شده، چنین است:

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F\, r \sin\theta dt = mv_2 d_2 - mv_1 d_1$$

یا
$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O dt = H_{O_2} - H_{O_1}$$

این مثال بــه تشریح رابطه بین اشکال برداری و اسکالری معادلات ضربه ـ مومنتم کمک می‌کند.



شکل ۱۳-۳

معادلات ۲۱-۳ و ۲۷-۳ اطلاعات اساسی جدیدی را اضافه نمی‌کنند، زیرا فقط شکل دیــگری از قـانون دوم نیوتـن هستند. ولی در فصلهای بعدی درخواهیم یافت که معادلات حرکتی که بر حسب میزان تغییر مومنتم بیان شده‌اند، به حرکت اجسام صلب و یا غیر صلب نیز قابل اعمال می‌باشند و به این ترتیب، دیدگاهی جامع و قـوی را بـرای بسـیاری از مسـائل تشکیل می‌دهند. معمولاً شکل کلی معادله ۲۷-۳ برای تشریح حرکت یک ذره منفرد و یا حرکت صفحـه‌ای اجسـام صلـب مورد نیاز نیست ولی در تحلیل حرکت فضایی اجسام صلب که در فصل ۷ معرفی شده، کاربرد مهمی دارد.

بقاء مومنتم زاویه‌ای

اگر برآیند گشتاور کلیه نیروهای وارد بر یک ذره حول نقطه ثابت O در برهه‌ای از زمان برابر صفـر باشـد، معادلـه ۲۷-۳ ایجاب می‌کند که مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ حول آن نقطه ثابت بماند. در چنیـــن حـالتی، مومنتـم زاویـه‌ای ذره را *ابقـایی* گویند. ممکن است مومنتم زاویه‌ای حول یک محور ابقایی بوده و حول محوری دیگر ابقایی نباشد. بررسی دقیــق ترسـیمه آزاد ذره، صفر بودن گشتاور برآیند نیروی وارد بر آن را حول یک نقطه ثابت مشـخص می‌کنـد. در چنیـن حـالتی، مومنتـم زاویه‌ای حول آن نقطه بدون تغییر (ابقایی) می‌ماند.

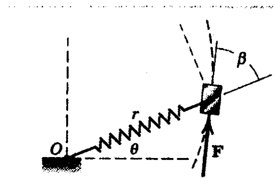
حال، حرکت ذره a و b را در نظر بگیرید که در یک مدت زمان معین تحت تاثیر عمل متقابل یکدیـگر هسـتند. اگر نیروهای متقابل $\mathbf{F}$ و $\mathbf{-F}$ بین دو ذره تنها نیروهای غیر متعادلی باشند که در طی زمان تاثیر بــه ذرات وارد می‌شـوند، نتیجـه می‌شود که گشتاور نیروها حول نقطه ثابت O ، خارج از خط اثر نیروها، با یکدیگر مساوی ولی قرینه می‌باشند. اگر معادلـه ۲۹-۳ را به ذره a و سپس به b اعمال کرده و معادلات آنها را با یکدیگر جمع کنیـم، خواهیـم داشـت: $\Delta\mathbf{H}_a + \Delta\mathbf{H}_b = \mathbf{0}$ (که همه مومنتم‌های زاویه‌ای حول نقطه O محاسبه شده‌اند). بنابراین مومنتم زاویه‌ای کل در مورد سیستم دو ذره‌ای در طی زمان تاثیر ثابت می‌ماند و می‌نویسیم:

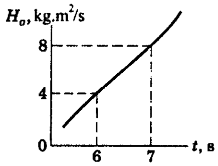
$$\boxed{\Delta\mathbf{H}_O = \mathbf{0} \quad \text{یا} \quad \mathbf{H}_{O_1} = \mathbf{H}_{O_2}} \qquad (۳-۳۰)$$

که بیانگر *اصل بقاء مومنتم زاویه‌ای* می‌باشد.

مسئله نمونه ۲۲-۳

بلوک کوچک ۲ کیلوگرمی در اثر نیروی فنر و نیروی F بر روی یک سطح صیقلی افقی می‌لغزد. مطابق نمودار نشان داده شده مومنتم زاویه‌ای بلوک حول نقطه O با زمان تغییر می‌کند. می‌دانیم که در $t = ٦/٥\ s$ داریم: $r = ١٥٠\ mm$ و $\beta = ٦٠°$. نیروی F را در این لحظه تعیین کنید.





حل: چون راستای نیروی فنر از نقطه O می‌گذرد، تنها گشتاوری که حول نقطه O ایجاد می‌شود در اثر نیروی F است. در نتیجه، $\Sigma M_O = Fr\sin\beta$. از روی نمودار، میزان H_O در $t = ٦/٥\ s$ به $(٤-٨)/(٦-٧)$ یا $\dot{H}_O = ٤\ kg.m^2/s^2$ بسیار نزدیک است. طبق رابطه گشتاور مومنتم زاویه‌ای داریم:

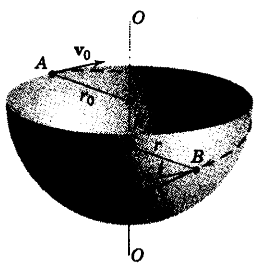
❶ $[\Sigma M_O = \dot{H}_O]$ $\quad F(0.150)\sin 60° = 4 \quad F = 30.8\ \ N$ جواب

نکته مفید

❶ *در اینجا نیازی به استفاده از شکل برداری معادله نداریم زیرا حرکت در این مسئله، صفحه‌ای است و امتداد بردار $\mathbf{H}_O$ تغییر نمی‌کند.*

مسئله نمونه ۲۳-۳

مطابق شکل، در نقطه A به ذره‌ای با جرم کوچکی، سرعت اولیه $\mathbf{v}_0$ در امتداد مماس بر لبه افقی نیم کره وارد می‌شود. شعاع نیم کره r_0 است. سرعت $\mathbf{v}$ ذره به هنگام عبور از نقطه B با مماس افقی بر نیم کره در نقطه B زاویه θ می‌سازد. نقطه B به فاصله h پایین‌تر از نقطه A بوده و به فاصله r از محور تقارن قائم نیم کره قرار دارد. زاویه θ را تعیین کنید.



حل: نیروهای وارد بر ذره عبارتند از وزن و عکس العمل وارده از طرف سطح صیقلی نیم کره. هیچ یک از نیروها حول محور O-O گشتاور ایجاد نمی‌کنند. بقاء مومنتم زاویه‌ای حول آن محور برقرار است. در نتیجه:

❶ $[(H_O)_1 = (H_O)_2]$ $\quad m v_0 r_0 = m v r\cos\theta$

همچنین، بقای انرژی نیز برقرار است $E_1 = E_2$. بنابراین:

$$[T_1 + V_{g_1} = T_2 + V_{g_2}] \qquad \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$$

با حذف v و قرار دادن $r^2 = r_0^2 - h^2$ داریم:

$$v_0 r_0 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}\sqrt{r_0^2 - h^2}\cos\theta$$

جواب

$$\theta = \cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2gh}{v_0^2}}\sqrt{1-\frac{h^2}{r_0^2}}}$$

نکته مفید

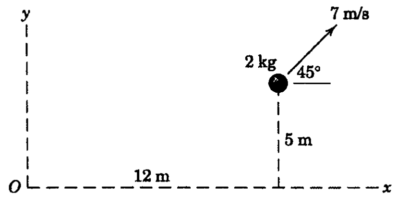
❶ زاویه θ در صفحه مماس بر سطح نیم‌کره در نقطه B اندازه گیری می‌شود.

مسائل

مسائل مقدماتی

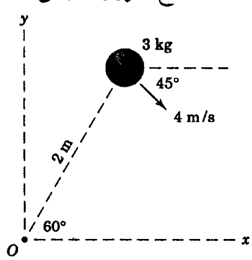
۲۲۱-۳ اندازه H_O، مومنتم زاویه‌ای کره‌ای به جرم ۲ kg حول نقطه O را در حالات (الف) با استفاده از تعریف برداری مومنتم زاویه‌ای و (ب) با استفاده از شکل اسکالر معادل آن، بدست آورید. مرکز کره در صفحه x-y قرار دارد.

جواب $H_O = ۶۹/۳\ \text{kg·m}^2/\text{s}$



شکل مسئله ۲۲۱-۳

۲۲۲-۳ یک گوی به جرم ۳ kg در صفحه x-y حرکت می‌کند و دارای سرعت نشان داده شده در شکل، در لحظه‌ای خاص می‌باشد. معین کنید: (الف) مومنتم خطی؛ (ب) مومنتم زاویه‌ای حول نقطه O و (ج) انرژی جنبشی آن را.



شکل مسئله ۲۲۲-۳

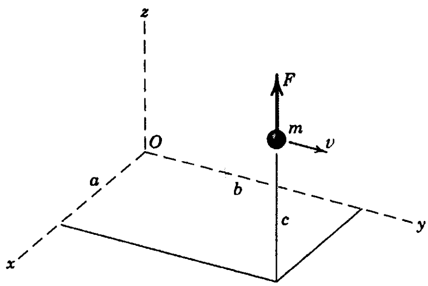
۲۲۳-۳ در یک لحظه خاص، مومنتم خطی ذره‌ای با رابطه $\mathbf{G} = -۳\,\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۳\mathbf{k}\ \text{kg.m/s}$ بردار موقعیت آن با رابطه $\mathbf{r} = ۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}-۳\mathbf{k}\ \text{m}$ داده شده است. اندازه H_O، مومنتم زاویه‌ای ذره را حول مبدا مختصات تعیین کنید.

جواب $H_O = ۸/۴۹\ \text{kg.m}^2/\text{s}$

۲۲۴-۳ بردار موقعیت ذره‌ای به جرم ۴ kg توسط رابطه $\mathbf{r} = ۳t^۲\mathbf{i} - ۲t\mathbf{j} - ۳t\mathbf{k}$ بر حسب متر داده شده است که در آن t بر حسب ثانیه است. در $t = ۳\ \text{s}$ اندازه مومنتم زاویه‌ای ذره و نیز اندازه گشتاور کلیه نیروهای وارد بر ذره، هر دو را حول مبداء مختصات تعیین کنید.

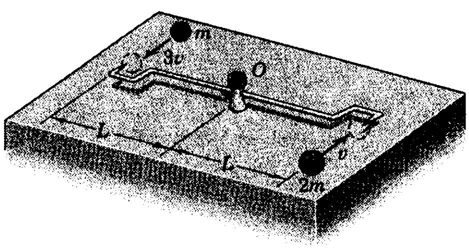
۲۲۵-۳ در لحظه‌ای خاص، ذره‌ای به جرم m دارای موقعیت و سرعت نشان داده شده در شکل و تحت تاثیر نیروی به طرف بالای F می‌باشد. مومنتم زاویه‌ای حول O و میزان تغییر مومنتم زاویه‌ای ذره را نسبت به زمان تعیین کنید.

جواب $\mathbf{H}_O = mv(-c\mathbf{i} + a\mathbf{k})$ و $\dot{\mathbf{H}}_O = F(b\mathbf{i} - a\mathbf{j})$



شکل مسئله ۲۲۵-۳

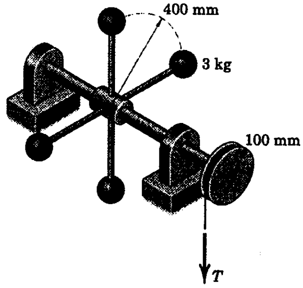
۲۲۶-۳ گوی‌های کوچک که جرم و سرعت آنها در شکل نشان داده شده به قلابهای میله‌ای که آزادانه در نقطه O لولا شده و در ابتدا ساکن است، اصابت کرده و به آنها می‌چسبند. سرعت زاویه‌ای ω مجموعه را پس از اصابت گوی‌ها بیابید. از جرم میله صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۲۲۶-۳

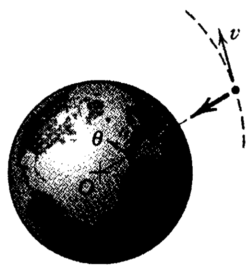
۳-۲۲۷ مجموعه نشان داده شده از حالت سکون بر اثر اعمال نیروی T برابر ۲۰ N وارده به طناب شروع به حرکت نموده و در مدت t ثانیه، سرعت زاویه‌ای آن به ۱۵۰ rev/min می‌رسد. t را تعیین کنید. جرم هر یک از گوی‌ها برابر ۳ kg بوده و می‌توان آنها را به صورت ذره در نظر گرفت. از اصطکاک و کلیه جرمها بجز جرم چهار گوی صرفنظر کنید.

جواب $t = ۱۵/۰۸\ \text{s}$



شکل مسئله ۳-۲۲۷

۳-۲۲۸ تنها نیروی وارد بر ماهواره‌ای که خارج از جو زمین می‌چرخد، جاذبه ثقلی در امتداد شعاعی می‌باشد. گشتاورهای نیرو حول مرکز زمین که ثابت در نظر گرفته می‌شود، برابر صفر است. ثابت کنید $r^2\dot{\theta}$ در طی حرکت ماهواره ثابت باقی می‌ماند.

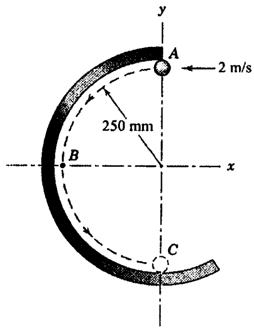


شکل مسئله ۳-۲۲۸

مسائل ویژه

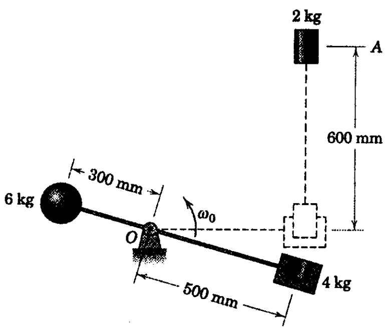
۳-۲۲۹ ذره کوچک ۱۰ گرمی با سرعت افقی ۲ m/s در موقعیت A بالای یک راهنمای صیقلی مدور ثابت در صفحه قائم، پرتاب می‌گردد. میزان تغییرات $\dot{\mathbf{H}}_B$، مومنتم زاویه‌ای نسبت به زمان را حول نقطه B موقعی که ذره از نقطه C (پایین راهنما) می‌گذرد، تعیین کنید.

جواب $\dot{\mathbf{H}}_B = ۱/۵۱۹\mathbf{k}\ \text{N.m}$



شکل مسئله ۳-۲۲۹

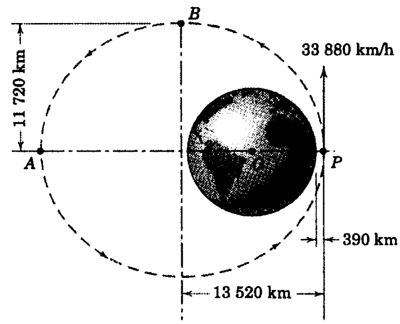
۳-۲۳۰ کره‌ای به جرم ٦ kg و بلوکی به جرم ٤ kg هر دو به میله‌ای با جرم ناچیز متصل هستند. این مجموعه در صفحه قائم حول محور افقی گذرنده از O دوران می‌کند. استوانه‌ای به جرم ۲ kg از حالت سکون در A رها شده و هنگامیکه میله به حالت افقی می‌رسد، به درون بلوک می‌افتد. قبل از افتادن استوانه به درون بلوک، سرعت زاویه‌ای میله $\omega_\circ = ۲\ \text{rad/s}$ می‌باشد. سرعت زاویه‌ای ω میله را بلافاصله بعد از جا گرفتن استوانه در بلوک بدست آورید.



شکل مسئله ۳-۲۳۰

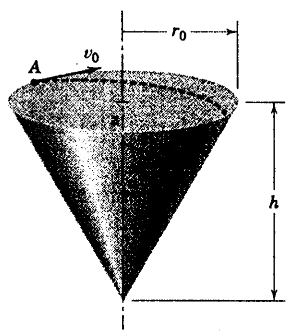
۳-۲۳۱ نیروی جاذبه مرکزی F وارد بر یک ماهواره هیچگونه گشتاوری حول O، مرکز زمین ایجاد نمی‌کند. در یک مدار بیضوی خاص که محورهای کوچک و بزرگ آن در شکل نشان داده شده‌اند، ماهواره‌ای در نقطه حضیض P به ارتفاع ۳۹۰ km از سطح زمین دارای سرعت ۳۳۸۸۰ km/h می‌باشد. سرعت ماهواره را در نقطه B و نیز در نقطه اوج، یعنی A تعیین کنید. شعاع زمین ۶۳۷۱ km می‌باشد.

جواب $v_B =$ ۱۹۵٤۰ km/h و $v_A =$ ۱۱۳۰۰ km/h



شکل مسئله ۳-۲۳۱

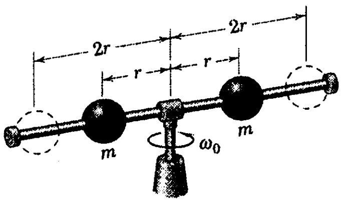
۳-۲۳۲ ذره‌ای بر روی سطح صیقلی داخلی پوسته مخروطی شکل حرکت می‌کند. در نقطه A سرعت اولیه $\mathbf{v}_0$ به ذره داده می‌شود که بر لبه افقی سطح مماس می‌باشد. سرعت $\mathbf{v}$ ذره را به هنگام عبور از نقطه B که در فاصله z زیر نقطه A قرار دارد و زاویه θ را با صفحه افقی گذرنده از B می‌سازد، بدست آورید. عباراتی برای θ و سرعت v معین کنید.



شکل مسئله ۳-۲۳۲

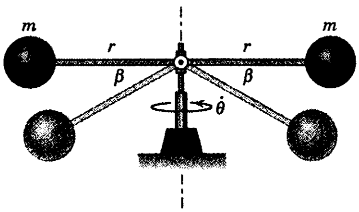
۳-۲۳۳ دو گوی به جرمهای مساوی m قادر به لغزش در امتداد محور افقی دوار می‌باشند. دو گوی ابتدا به فاصله r از محور تقارن قرار دارند و به همراه مجموعه نشان داده شده با سرعت زاویه‌ای ω_0 دوران می‌کنند. سرعت زاویه‌ای جدید ω را پس از رهایی گوی‌ها تعیین کنید. فرض می‌شود که پس از رهایی گوی‌ها، آنها در انتهای میله و به فاصله شعاعی ۲r قرار می‌گیرند. همچنین کسری از انرژی جنبشی سیستم n را که تلف می‌شود، بدست آورید. از جرم کوچک میله و محور صرفنظر کنید.

جواب $\omega = \frac{\omega_0}{۴}$ و $n = \frac{۳}{۴}$



شکل مسئله ۳-۲۳۳

۳-۲۳٤ دو گوی، هر یک به جرم m به میله‌های سبکی متصل شده‌اند. این میله‌ها با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ حول یک محور ثابت قائم در صفحه افقی دوران می‌کنند. اگر مکانیزم داخلی، میله‌ها را بدون دخالت در دوران آزاد حول محور قائم به موقعیت خط‌چین نشان داده شده، پایین بیاورد؛ سرعت زاویه‌ای جدید $\dot{\theta}'$ را در موقعیت پایین آمده، بدست آورید.

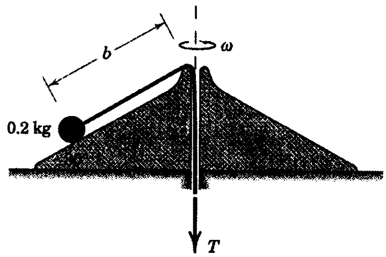


شکل مسئله ۳-۲۳۴

۳-۲۳۵ یک گوی به جرم ۰/۲ kg و ریسمان نگهدارنده آن، با سرعت زاویه‌ای ٤ rad/s حول محور قائم، روی سطح صیقلی مخروطی دوران می‌کند. گوی در موقعیت $b =$ ۳۰۰ mm با اعمال کشش T ریسمان نگهداشته شده است. اگر فاصله b بر اثر افزایش کشش T ریسمان به مقدار ثابت

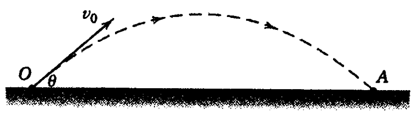
۲۰۰ mm کاهش یابد، سرعت زاویه‌ای جدید ω سیستم را بدست آورید و کار U'_{1-2} انجام شده توسط T بر روی سیستم را تعیین کنید.

جواب $\omega =$ ۹ rad/s و $U'_{1-2} =$ ۰/۲۳۳ J



شکل مسئله ۳-۲۳۵

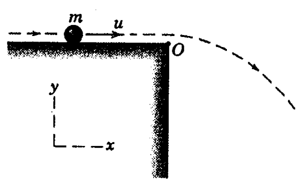
۳-۲۳۶ H_O، مومنتم زاویه‌ای پرتابه‌ای به جرم m را که با سرعت v_0 تحت زاویه θ مطابق شکل شلیک می‌شود را در حالات (الف) در لحظه پرتاب و (ب) در لحظه برخورد تعیین کنید. به لحاظ کیفی دو نتیجه را بررسی کنید. از مقاومت هوا صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۳-۲۳۶

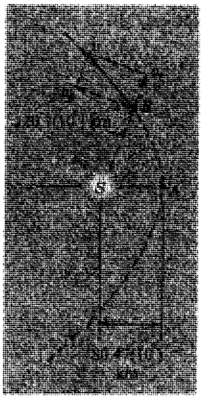
۳-۲۳۷ ذره‌ای به جرم m از نقطه O با سرعت افقی $\mathbf{u}$ در زمان $t = 0$ پرتاب می‌گردد. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ ذره را نسبت به نقطه O به صورت تابعی از زمان بدست آورید.

جواب $\mathbf{H}_O = -\frac{1}{2} mg\, u\, t^2 \mathbf{k}$



شکل مسئله ۳-۲۳۷

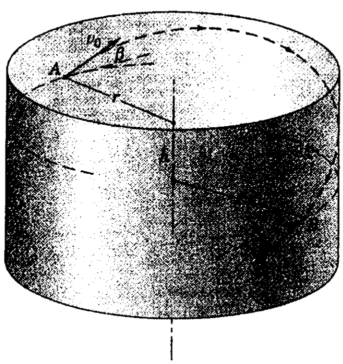
۳-۲۳۸ در نقطه A که نزدیکترین نقطه به خورشید است، سرعت ستاره دنباله‌داری برابر $v_A =$ ۵۷/۴۵(۱۰^۳) m/s می‌باشد. مولفه‌های شعاعی و جانبی سرعت v_B آنرا در نقطه B تعیین کنید. فاصله شعاعی نقطه B از خورشید ۱۲۰/۷(۱۰^۶) km می‌باشد.



شکل مسئله ۳-۲۳۸

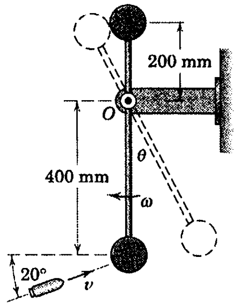
۳-۲۳۹ ذره‌ای از نقطه A واقع بر سطح صیقلی داخلی ظرف استوانه‌ای رها می‌گردد. سرعت اولیه ذره v_0 بوده و با خط مماس افقی زاویه β می‌سازد. هنگامیکه ذره به نقطه B به فاصله h زیر نقطه A می‌رسد، برای زاویه θ بین بردار و سرعت ذره با خط مماس افقی در نقطه B، رابطه‌ای بدست آورید.

جواب $\theta = \cos^{-1} \dfrac{\cos\beta}{\sqrt{1 + \dfrac{2gh}{v_0^2}}}$



شکل مسئله ۳-۲۳۹

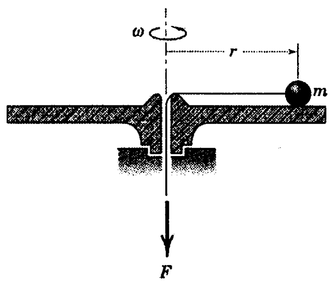
۳-۲۴۰ آونگی دارای دو جرم متمرکز هر یک به جرم ۳/۲ kg می‌باشد که مطابق شکل به میله صلب سبکی متصل شده‌اند. درست قبل از اینکه گلوله ۵۰ گرمی در جهت نشان داده شده، با سرعت v = ۳۰۰ m/s به جرم پایینی برخورد کرده و در آن فرو رود، آونگ با سرعت زاویه‌ای ω = ٦ rad/s در جهت ساعتگرد از وضعیت قائم عبور می‌کند. ω'، سرعت زاویه‌ای آونگ را بلافاصله بعد از برخورد محاسبه کرده و θ، حداکثر جابجایی زاویه‌ای آونگ را پیدا کنید.



شکل مسئله ۳-۲۴۰

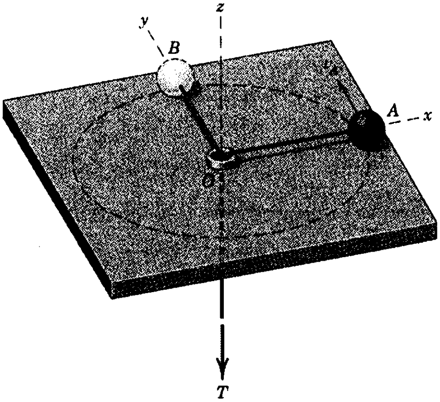
۳-۲٤۱ مطابق شکل، ذره کوچکی به جرم m به همراه طناب مهار کننده‌اش با سرعت زاویه‌ای ω بر روی سطح صیقلی افقی یک دیسک می‌چرخند. اگر از میزان نیروی F اندکی کاسته شود، r افزایش یافته و ω تغییر می‌کند. میزان تغییر ω را نسبت به r تعیین کنید و نشان دهید که کار انجام شده توسط F در ازای یک حرکت جزئی dr با تغییر انرژی جنبشی ذره برابر است.

جواب $\dfrac{d\omega}{dr} = -\dfrac{۲\omega}{r}$



شکل مسئله ۳-۲٤۱

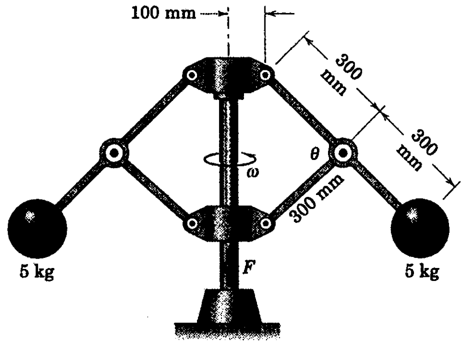
۳-۲۴۲ گوی ۵/۷ کیلوگرمی در صفحه افقی حرکت می‌کند، در حالی که حرکت آن توسط ریسمانی که از زیر میز شل و سفت می‌گردد، کنترل می‌شود. به طوری که مرکز گوی بر روی مسیری مطابق با رابطه $\left(x^۲/۲/۲۵\right)+\left(y^۲/۱/۴۴\right)=۱$ حرکت می‌نماید که در آن x و y بر حسب متر می‌باشند. اگر سرعت گوی در هنگام گذشتن از نقطه A برابر v_A = ۲ m/s باشد، کشش در ریسمان T_B را در لحظه‌ای که گوی از نقطه B می‌گذرد، بدست آورید. از اصطکاک صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۳-۲۴۲

۳-۲٤۳ ◀ مجموعه نشان داده شده که مرکب از دو گوی هر یک به جرم ۵ kg می‌باشد. در θ = ۹۰° با سرعت زاویه‌ای ٤۰ rev/min حول محور قائم دوران می‌کند. اگر در اثر افزایش نیروی F غلاف پایه، بالا آمده و زاویه θ به ٦۰° کاهش یابد، سرعت زاویه‌ای جدید ω را تعیین کنید. همچنین کار انجام شده توسط نیروی F جهت تغییر وضعیت مجموعه را تعیین کنید. فرض کنید که جرم بازوها و غلاف‌های مجموعه ناچیز هستند.

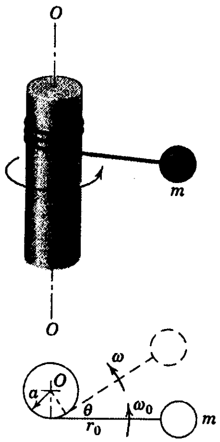
جواب ω = ۳/۰۰ rad/s و U = ۵/۳٤ J



شکل مسئله ۲۴۳-۳

۲۴۴-۳ ◀ ذره کوچک m وادار می‌شود که با سرعت اولیه زیادی در صفحه افق حول استوانه قائم ثابتی به شعاع a بپیچد. پیچش ذره کلاً در صفحه افق فرض می‌شود. در لحظه‌ای که فاصله ذره تا نقطه تماس نخ با استوانه برابر r_0 است، سرعت زاویه‌ای ω_0 می‌باشد. لحظه‌ای بعد که نخ زاویه θ را طی نمود، سرعت زاویه‌ای ω و کشش T نخ را بدست آورید. آیا هر دو اصل بقای مومنتم در اینجا صادق است؟

جواب $\omega = \dfrac{\omega_0}{1-\dfrac{a\theta}{r_0}}$, $T = m r_0 \omega_0 \omega$



شکل مسئله ۲۴۴-۳

بخش D. کاربردهای ویژه

۱۱-۳ مقدمه

اصول و روشهای اساسی مربوط به سینتیک ذره در سه بخش اول این فصل عنوان شد. این بحث شامل بکارگیری مستقیم قانون دوم نیوتن، معادلات کار و انرژی و معادلات ضربه و مومنتم بود. توجه ویژه به این مطلب معطوف بود که از روشهای فوق، مناسب‌ترین روش را برای هر مسئله ارائه کنیم.

چند مطلب تخصصی نیز در سینتیک وجود دارد که به اجمال در بخش D بررسی خواهد شد:

۱- برخورد

۲- حرکت تحت نیروی مرکزی

۳- حرکت نسبی

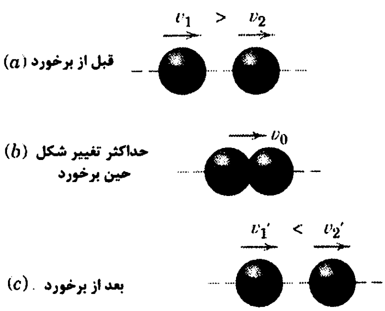
این موضوعات شامل بسط و توسعه اصول بنیادین دینامیک و کاربردهای آن می‌باشد که مطالعه آنها به شما کمک می‌کند تا زمینه‌های علمی خود را در مکانیک توسعه دهید.

۱۲-۳ برخورد

اصول ضربه و مومنتم در تشریح رفتار برخورد اجسام دارای کاربرد مهمی است. تصادم دو جسم را برخورد گویند که مشخصه آن تولید نیروهای تماسی نسبتاً بزرگ در زمانی بسیار کوتاه است. قبل از آغاز بحث باید این مطلب را تذکر داد که برخورد رویدادی بسیار پیچیده است که شامل تغییر شکل ماده و بازگشت پذیری آن و نیز ایجاد حرارت و صدا می‌باشد. تغییرات کوچک در شرایط برخورد می‌تواند موجب تغییرات بزرگی در فرآیند برخورد گردد و در نتیجه شرایط جدیدی را بلافاصله پس از برخورد بدنبال آورد. از اینرو باید مراقب باشیم که به نتایج محاسبات برخورد، نباید اعتماد زیادی کرد.

برخورد مرکزی مستقیم

به عنوان مقدمه‌ای در برخورد، دو گوی به جرمهای m_1 و m_2 را مطابق شکل ۱۴a-۳ در نظر بگیرید که حرکت آنها در یک صفحه بوده و با سرعتهای v_1 و v_2 در حال حرکت هستند. اگر v_1 بزرگتر از v_2 باشد، برخورد صورت می‌گیرد و نیروهای ضربه‌ای در راستای خط مرکزی اثر می‌کنند. به چنین حالتی برخورد مرکزی مستقیم گویند.



شکل ۱۴-۳

بدنبال برخورد اولیه، مدت کوتاهی تغییر شکل افزایش یافته و تا زمانی ادامه پیدا می‌کند که دیگر سطح تماس بین گوی‌ها افزایش نیابد. در این لحظه مطابق شکل۱٤b-۳ هر دو گوی با سرعت یکسان v_0 حرکت می‌کنند.

آنچه در طی باقیمانده برخورد صورت می‌گیرد به این قرار است که مدت زمانی صرف بازیابی شکل اولیه گوی‌ها می‌شود که در طی آن زمان، سطح تماس دو گوی کاهش یافته و نهایتاً صفر می‌شود. آخرین حالت در بخشc شکل نشان داده شده است که حالا گوی‌ها دارای سرعتهای جدید v'_1 و v'_2 هستند که لزوماً v'_1 کوچکتر از v'_2 می‌باشد. همه سرعتها به دلخواه به سمت راست مثبت فرض شده‌اند به طوریکه با این نمایش اسکالری، سرعتی که به سمت چپ باشد دارای علامت منفی خواهد شد. اگر برخورد با شدت بسیار زیاد صورت نگیرد و گوی‌ها بسیار الاستیک باشند، شکل اولیه خود را باز خواهند یافت. اگر شدت برخورد زیاد بوده و الاستیسیته اجسام کم باشد، ممکن است به تغییر شکل دائمی منجر شود.

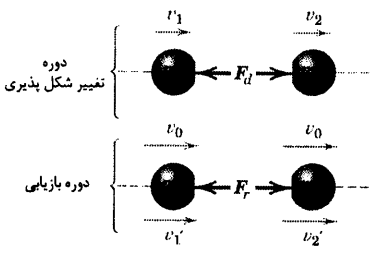
در صورتی که در طی برخورد، نیروهای ضربه‌ای با یکدیگر مساوی اما در جهت خلاف یکدیگر باشند، مومنتم خطی مجموعه بدون تغییر باقی می‌ماند، همانطور که در بخش ۹-۳ مورد بحث قرار گرفته است. در نتیجه، قانون بقای مومنتم خطی را اعمال کرده و می‌نویسیم :

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \qquad (۳-۳۱)$$

فرض می‌شود که هر نیرویی غیر از نیروهای بزرگ وارده از برخورد که به گوی‌ها اعمال می‌شود، نسبتاً کوچک بوده و در مقایسه با ضربه حاصل از هر یک از نیروهای ضربه‌ای وارده، ضربه ناچیزی را ایجاد می‌کند. علاوه بر این فرض می‌کنیم هیچ تغییر موقعیت قابل توجهی در مدت زمان کوتاه برخورد، صورت نگیرد.

ضریب بازگشت

با شرایط اولیه و جرمهای معین، معادله مومنتم دارای دو مجهول v'_1 و v'_2 می‌باشد. واضح است که قبل از یافتن سرعتهای نهایی، به یک رابطه دیگر نیاز داریم. این رابطه باید انعکاس دهنده قابلیت بازگشت پذیری اجسام برخورد کننده باشد که می‌توان این خاصیت را به صورت نسبت اندازه ضربه در حین بازیابی شکل اولیه اجسام برخورد کننده به اندازه ضربه در دوره تغییر شکل پذیری بیان کرد که با e نشان داده می‌شود. این نسبت به *ضریب بازگشت* موسوم است. اگر مطابق شکل ۱۵-۳، F_r و F_d به ترتیب معرف نیروهای برخورد در حین دوره بازیابی به دوره تغییر شکل پذیری باشند، تعریف e به همراه معادله ضربه ـ مومنتم برای ذره ۱ چنین است:



شکل ۱۵-۳

$$e = \frac{\int_{t_0}^{t} F_r\,dt}{\int_0^{t_0} F_d\,dt} = \frac{m_1[-v'_1 - (-v_0)]}{m_1[-v_0 - (-v_1)]} = \frac{v_0 - v'_1}{v_1 - v_0}$$

به طور مشابه برای ذره ۲ داریم:

$$e=\frac{\int_{t_0}^{t} F_r\,dt}{\int_{0}^{t_0} F_d\,dt}=\frac{m_2[v_2'-v_0]}{m_2[v_0-v_2]}=\frac{v_2'-v_0}{v_0-v_2}$$

باید دقت کنیم که این معادلات، تغییر مومنتم (و در نتیجه Δv) را در همان جهتی بیان می‌کنند که ضربه (و در نتیجه نیرو) اعمال می‌شود. زمان تغییر شکل t_0 و کل زمان برخورد t می‌باشد. با حذف v_0 بین دو رابطه e داریم:

$$e=\frac{v_2'-v_1'}{v_1-v_2}=\frac{|\text{سرعت نسبی وارهی}|}{|\text{سرعت نسبی همرسی}|} \tag{۳-۳۲}$$

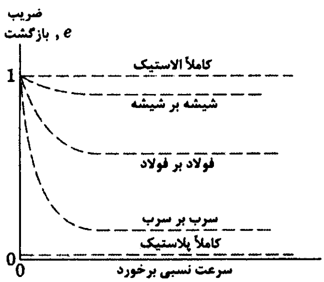
اگر ضریب بازگشت e در مورد ضربه‌ای علاوه بر شرایط اولیه، در دست باشد، در این صورت معادلات ۳۱-۳ و ۳۲-۳ دو معادله و دو سرعت نهایی مجهول را v_2' و v_1' را می‌دهد.

اتلاف انرژی در زمان برخورد

پدیده برخورد تقریباً همیشه با اتلاف انرژی همراه است که می‌توان آنرا از تفاضل انرژی جنبشی سیستم، دقیقاً بعد و قبل از برخورد بدست آورد. اتلاف انرژی می‌تواند به طرق مختلف صورت پذیرد. از جمله تولید حرارت در طی تغییر شکل غیر الاستیک و موضعی ماده، از طریق تولید امواج تنشی الاستیک در درون اجسام و از طریق ایجاد انرژی صوتی.

بر طبق این تئوری کلاسیک برخورد، مقدار $e = ۱$ به این معنی است که قابلیت بازیابی دو ذره مساوی با تغییر شکل پذیری آنها می‌باشد. چنین حالتی، یکی از موارد برخورد *الاستیکی* بدون اتلاف انرژی می‌باشد. از طرف دیگر مقدار $e = ۰$ برخورد غیر *الاستیک* یا *پلاستیک* را توصیف می‌کند که در آن، ذرات پس از برخورد، به یکدیگر چسبیده و اتلاف انرژی بیشترین مقدار خود را دارد.

کلیه حالات برخورد بین این دو حد قرار می‌گیرند. همچنین باید توجه داشت که به هر *جفت* جسم در حال برخورد باید یک ضریب بازگشت نسبت داد. ضریب بازگشت برای اجسام برخورد کننده‌ای که دارای هندسه و نیز ترکیبی معین از مواد هستند، غالباً ثابت در نظر گرفته می‌شود. این ضریب در واقع به سرعت برخورد بستگی دارد و همان طور که در شکل ۱۶-۳ نشان داده شده، هنگامی به عدد یک نزدیک می‌شود که سرعت برخورد به سمت صفر میل کند. مقادیر e که در کتب مرجع عنوان می‌شوند، معمولاً قابل اعتماد نیستند.

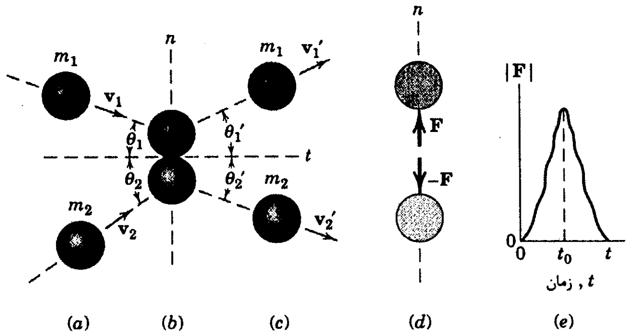


شکل ۱۶-۳

برخورد مرکزی مایل

اکنون روابط مربوط به برخورد مرکزی مستقیم را برای حالتی تعمیم می‌دهیم که مطابق شکل ۱۷-۳ سرعتهای اولیه و نهایی، موازی نباشند. در اینجا ذرات کروی با جرمهای m_1 و m_2 دارای سرعتهای v_1 و v_2 می‌باشند و در یک صفحه قرار دارند و مطابق بخش a شکل نشان داده شده با یکدیگر برخورد می‌کنند. بر اساس شکل ۱۷b-۳، سنجش جهت بردارهای سرعت از طریق خط مماس بر سطح برخورد، صورت می‌گیرد. در نتیجه، مولفه‌های سرعت اولیه در راستای محورهای n و

t چنین هستند. $(v_1)_n = -v_1 \sin\theta_1$ ،$(v_1)_t = v_1 \cos\theta_1$ و $(v_2)_n = v_2 \sin\theta_2$ ،$(v_2)_t = v_2 \cos\theta_2$. توجه داشته باشید که در این دستگاه مختصاتی خاص $(v_1)_n$ دارای مقدار منفی است و سرعتهای اولیه در شکل نشان داده شده‌اند.



شکل ۱۷-۳

شرایط نهایی مربوط به جدایی گوی‌ها در بخشc از شکل نشان داده شده است. نیروهای برخوردF و F− هستند که در بخش d از شکل دیده می‌شوند. همان طور که در بخش e از شکل آمده، t زمان برخورد است و در طی قسمت تغییر شکل برخورد، این نیروها از صفر به یک مقدار حداکثر رسیده و در طول زمان بازیابی دوباره به صفر بر می‌گردند.

در شرایط اولیه با مقادیر معلوم m_1 و m_2، $(v_1)_n$، $(v_1)_t$، $(v_2)_n$ و $(v_2)_t$ دارای چهار مجهول $(v'_1)_n$، $(v'_1)_t$، $(v'_2)_n$ و $(v'_2)_t$ هستیم. چهار معادله لازم عبارتند از:

(۱) از بقای مومنتم مجموعه در امتداد n داریم:

$$m_1 (v_1)_n + m_2 (v_2)_n = m_1 (v'_1)_n + m_2 (v'_2)_n$$

(۲) و(۳) در امتداد t ، برای هر ذره بقای مومنتم داریم. زیرا هیچ ضربه‌ای در این امتداد به دو ذره وارد نمی‌شود. در نتیجه:

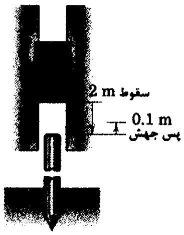
$$m_1 (v_1)_t = m_1 (v'_1)_t$$
$$m_2 (v_2)_t = m_2 (v'_2)_t$$

(٤) ضریب بازگشت مانند حالت برخورد مستقیم، دارای نسبت مثبت ضربه در دوره بازیابی به ضربه در دوره تغییر شکل پذیری است. در اینصورت معادله ۳۲-۳ را بکار برده، سپس برای مولفه‌های سرعت در امتدادn و برای نمادهای اقتباس شده از شکل ۱۷-۳ داریم:

$$e = \frac{(v'_2)_n - (v'_1)_n}{(v_1)_n - (v_2)_n}$$

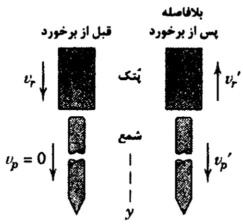
به محض اینکه چهار مولفه سرعت نهایی مشخص شدند، زوایای θ'_1 و θ'_2 از شکل ۱۷-۳ را به آسانی می‌توان تعیین کرد.

مسئله نمونه ۲۴-۳



یک پتک شمع کوب به جرم ۸۰۰ kg که به فاصله ۲ m در بالای یک شمع ۲٤۰۰ کیلوگرمی قرار گرفته، از حالت سکون رها می‌گردد. اگر پتک پس از برخورد با شمع به اندازه ۰/۱ m بجهد، محاسبه کنید: (الف) سرعت v'_p شمع بلافاصله پس از برخورد، (ب) ضریب بازگشت e و (ج) درصد اتلاف انرژی در اثر برخورد.

حل: در طی سقوط آزاد، اصل بقای انرژی، سرعتهای اولیه و نهایی پتک را از رابطه $v = \sqrt{2gh}$ می‌دهد. در نتیجه:



$$v_2 = \sqrt{2(9.81)(2)} = 6.26 \text{ m/s} \qquad v'_r = \sqrt{2(9.81)(0.1)} = 1.401 \text{ m/s}$$

(a) از اصل بقای مومنتم $(G_1 = G_2)$ برای مجموعه پتک و شمع داریم:

$$800\,(6.26) + 0 = 800\,(-1.40) + 2400\,v'_p \qquad v'_p = 2.55 \text{ m/s}$$ جواب

(b) ضریب بازگشت چنین است:

$$e = \frac{|\text{سرعت نسبی وارهی}|}{|\text{سرعت نسبی همرسی}|}$$

$$e = \frac{2.55 + 1.401}{6.26 + 0} = 0.631$$ جواب

(c) انرژی جنبشی مجموعه درست قبل از برخورد با انرژی پتانسیل پتک بالای شمع برابر بوده و چنین است:

$$T = V_g = mgh = 800\,(9.81)\,(2) = 15700 \text{ J}$$

انرژی جنبشی T' درست پس از برخورد عبارت است از:

$$T' = \frac{1}{2}\,(800)\,(1.401)^2 + \frac{1}{2}\,(2400)\,(2.55)^2 = 8620 \text{ J}$$

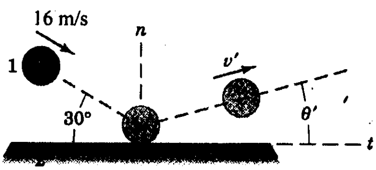
بنابراین درصد اتلاف انرژی چنین است:

$$\frac{15700 - 8620}{15700} \times 100 = 45.1\%$$

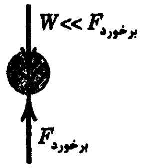
نکته مفید

ضربه‌های حاصل از وزن پتک و شمع در مقایسه با ضربه‌های نیروهای برخورد خیلی کوچک بوده و در نتیجه در حین برخورد از آن صرفنظر می‌شود.

مسئله نمونه ۲۵-۳



گویی مطابق شکل با سرعت ۱٦ m/s تحت زاویه ۳۰° بر روی یک سکوی سنگین پرتاب می‌شود. اگر ضریب بازگشت موثر ۰/۵ باشد، سرعت بازگشت v' و زاویه θ' آن را محاسبه کنید.



حل: گلوله را جسم شماره ۱ و سکو را جسم شماره ۲ فرض می‌کنیم. جرم سکوی سنگین را می‌توان نامحدود و سرعت بعد از برخورد آن را صفر نظر گرفت. ضریب بازگشت و مولفه‌های سرعت قائم بر سکو در امتداد نیروی ضربه اعمال می‌شود و داریم:

❶
$$e = \frac{(v'_2)_n - (v'_1)_n}{(v_1)_n - (v_2)_n} \qquad 0.5 = \frac{0-(v'_1)_n}{-16\sin 30^\circ - 0} \qquad (v'_1)_n = 4 \text{ m/s}$$

مومنتم گوی در امتداد t بدون تغییر می‌ماند؛ چون با فرض صیقلی بودن سطح در آن امتداد، هیچ نیرویی به گوی اعمال نمی‌شود. در نتیجه:

$$m(v_1)_t = m(v'_1)_t \qquad (v'_1)_t = (v_1)_t = 16\cos 30^\circ = 13.86 \text{ m/s}$$

سرعت بازگشت v' و زاویه θ' چنین هستند:

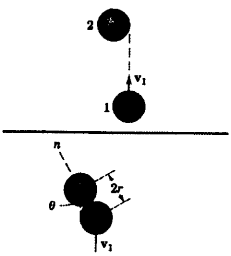
جواب
$$v' = \sqrt{(v'_1)_n^2 + (v'_1)_t^2} = \sqrt{4^2 + (13.86)^2} = 14.42 \text{ m/s}$$

جواب
$$\theta' = \tan^{-1}\left(\frac{(v'_1)_n}{(v'_1)_t}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{13.86}\right) = 16.10^\circ$$

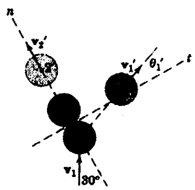
نکته مفید

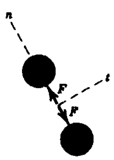
❶ *در اینجا ملاحظه می‌کنیم که در مورد جرم نامحدود هیچ روشی وجود ندارد تا بوسیله آن اصل بقای مومنتم را در امتداد n به مجموعه اعمال کرد. از ترسیمه آزاد گوی در حین برخورد متوجه می‌شویم که ضربه ناشی از وزن W ناچیز است، چون W در مقایسه با نیروی برخورد بسیار کوچک است.*

مسئله نمونه ۲۶-۳



ذره کروی شکل ۱ در جهت نشان داده شده دارای سرعت $v_1 = 6$ m/s می‌باشد و با ذره کروی شکل ۲ که جرم و قطرش با اولی برابر بوده و در حال سکون است، برخورد می‌کند. اگر در چنین شرایطی ضریب بازگشت $e = 0.6$ باشد، حرکت حاصله هر ذره را پس از برخورد تعیین کنید. همچنین، درصد اتلاف انرژی حاصل از برخورد را محاسبه کنید.





❶ **حل:** هندسه برخورد نشان می‌دهد که راستای n که به سطح برخورد عمود است، مطابق شکل با راستای v_1 زاویه $\theta = 30^\circ$ را می‌سازد. در نتیجه، مولفه‌های سرعت اولیه چنین هستند: $(v_1)_n = v_1 \cos 30^\circ = 6\cos 30^\circ = 5.20$ m/s،

$$(v_1)_t = v_1 \sin 30^\circ = 6\sin 30^\circ = 3 \text{ m/s} \quad \text{و} \quad (v_2)_n = (v_2)_t = 0$$

بقای مومنتم برای مجموعه دو ذره در امتداد n چنین است:

$$m_1(v_1)_n + m_2(v_2)_n = m_1(v'_1)_n + m_2(v'_2)_n$$

و یا با داشتن $m_1 = m_2$،

$$5.20+0=(v'_1)_n+(v'_2)_n \qquad \text{(a)}$$

رابطه ضریب بازگشت چنین است:

$$e=\frac{(v'_2)_n-(v'_1)_n}{(v_1)_n-(v_2)_n} \qquad 0.6=\frac{(v'_2)_n-(v'_1)_n}{5.20-0} \qquad \text{(b)}$$

❷ از حل همزمان معادلات (a) و (b) نتیجه می‌شود:

$$(v'_1)_n=1.039 \text{ m/s} \qquad (v'_2)_n=4.16 \text{ m/s}$$

اصل بقای مومنتم در امتداد t برای هر ذره صادق است. چون، با فرض صیقلی بودن سطح، هیچ نیرویی در این امتداد وجود ندارد. در نتیجه برای ذرات ۱ و ۲ داریم:

$$m_1(v_1)_t=m_1(v'_1)_t \qquad (v'_1)_t=(v_1)_t=3 \text{ m/s}$$

❸
$$m_2(v_2)_t=m_2(v'_2)_t \qquad (v'_2)_t=(v_2)_t=0$$

سرعت نهایی ذرات به صورت زیر هستند.

جواب
$$v'_1=\sqrt{(v'_1)_n^2+(v'_1)_t^2}=\sqrt{(1.039)^2+3^2}=3.17 \text{ m/s}$$

جواب
$$v'_2=\sqrt{(v'_2)_n^2+(v'_2)_t^2}=\sqrt{(4.16)^2+0^2}=4.16 \text{ m/s}$$

زاویه θ' که بردار سرعت v'_1 با امتداد t می‌سازد، چنین است:

جواب
$$\theta'=\tan^{-1}\left(\frac{(v'_1)_n}{(v'_1)_t}\right)=\tan^{-1}\left(\frac{1.039}{3}\right)=19.11^\circ$$

انرژی‌های جنبشی قبل و بعد از برخورد با توجه به اینکه $m=m_1=m_2$ هستند، عبارتند از:

$$T=\frac{1}{2}m_1v_1^2+\frac{1}{2}m_2v_2^2=\frac{1}{2}m(6)^2+0=18m$$

$$T'=\frac{1}{2}m_1v_1'^2+\frac{1}{2}m_2v_2'^2=\frac{1}{2}m(3.17)^2+\frac{1}{2}m(4.16)^2=13.68m$$

در اینصورت درصد اتلاف انرژی برابر است با:

جواب
$$\frac{|\Delta E|}{\Delta E}(100)=\frac{T-T'}{T}(100)=\frac{18m-13.68m}{18m}(100)=24.0\%$$

نکات مفید

❶ *دقت داشته باشید که محورهای n و t را به ترتیب، قائم و مماس بر سطح تماس بگیرید. محاسبه زاویه ۳۰° برای تمامی مراحل حل مسئله واجب است.*

❷ *توجه داشته باشید که حتی اگر برای یک مسئله استاندارد از نوع برخورد مرکزی مایل، چهار معادله و چهار مجهول بدست آوردیم؛ در واقع فقط یک جفت معادله وابسته به یکدیگرند.*

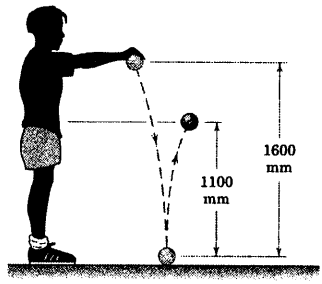
❸ *توجه داریم که ذره ۲ در امتداد t دارای هیچگونه سرعت اولیه و یا نهایی نیست. در نتیجه سرعت نهایی $\mathbf{v}'_2$ آن در امتداد n محدود شده است.*

مسائل

مسائل مقدماتی

۲۴۵-۳ توپهای تنیسی که در ارتفاع معادل با شانه یک شخص رها می‌شوند و در هنگام بازگشت به کمر شخص نمی‌رسند، معمولاً از رده خارج می‌شوند. اگر مطابق شکل، توپی آزمایش را موفقیت آمیز طی کند، ضریب بازگشت e و درصدی از انرژی اولیه n را که در طی برخورد تلف می‌شود، تعیین کنید.

جواب $e = ۰/۸۲۹$ و $n = ٪\,۳۱/۲$



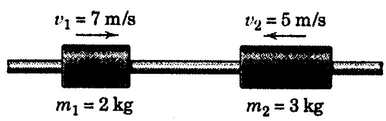
شکل مسئله ۲۴۵-۳

۲۴۶-۳ اگر ضریب بازگشت توپ تنیس مسئله ۲۴۵-۳ در حین برخورد با سطح $e = ۰/۸$ باشد و توپ از شانه‌ای به ارتفاع $۱۶۰۰\ \text{mm}$ پرتاب شود، با این فرض که توپ پس از برخورد با سطح به همان ارتفاع اولیه برسد، سرعت $v_۰$ پرتاب را تعیین کنید.

۲۴۷-۳ سرعت نهایی $v'_۱$ و $v'_۲$ بعد از برخورد دو استوانه را که بر روی محور صیقلی افقی می‌لغزد، محاسبه کنید. ضریب بازگشت $e = ۰/۶$ می‌باشد.

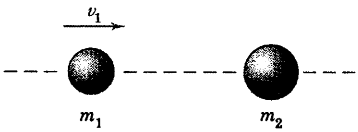
جواب $v'_۱ = ٤/٥٢\ \text{m/s}$ به طرف چپ

$v'_۲ = ۲/٦٨\ \text{m/s}$ به طرف راست



شکل مسئله ۲۴۷-۳

۲۴۸-۳ گویی به جرم $m_۱$ با سرعت $v_۱$ در جهت نشان داده شده حرکت می‌کند و با گوی دیگری به جرم $m_۲$ برخورد می‌کند. با معلوم بودن ضریب بازگشت e، نسبت جرمی $m_۱/m_۲$ را که باعث بدون حرکت ماندن $m_۱$ پس از برخورد می‌شود، تعیین کنید.

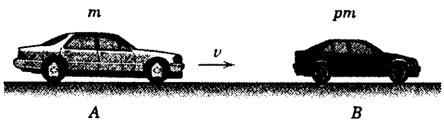


شکل مسئله ۲۴۸-۳

۲۴۹-۳ اتومبیل A که با سرعت v در حال حرکت است با اتومبیل ساکن B برخورد می‌کند. جرم اتومبیل B برابر pm و جرم اتومبیل A برابر m می‌باشد و p یک عدد ثابت و مثبت است. اگر ضریب بازگشت $e = ۰/۱$ باشد. سرعتهای v'_A و v'_B دو اتومبیل را در انتهای برخورد بر حسب p و v بیان کنید. روابط خود را به ازای $p = ۰/۵$ ارزیابی کنید.

جواب $v'_A = \left(\dfrac{۱-۰/۱p}{۱+p}\right)v\ ,\ v'_B = \dfrac{۱/۱v}{۱+p}$

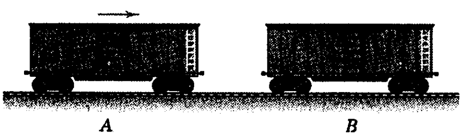
برای $p = ۰/۵ : v'_B = ۰/۷۳۳v$ و $v'_A = ۰/٦۳۳v$



شکل مسئله ۲۴۹-۳

۲۵۰-۳ واگن A به جرم m_A که در حال حرکت به سمت راست می‌باشد، با واگن B به جرم m_B که در ابتدا در حال سکون است، برخورد می‌کند. اگر در برخورد، واگنها به یکدیگر متصل شوند، نشان دهید که کسر اتلاف انرژی برابر با $m_B/(m_A+m_B)$ است.

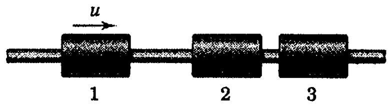
به



شکل مسئله ۲۵۰-۳

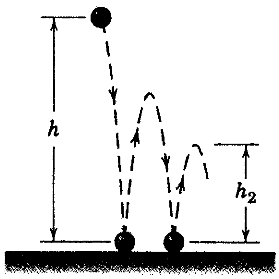
۳-۲۵۱ سه استوانه فولادی یکسان آزادانه بر روی محور افقی ثابت می‌لغزند. استوانه‌های ۲ و ۳ در حال سکون بوده و استوانه ۱ با سرعت u به آنها نزدیک می‌شود. سرعت نهایی v استوانه ۳ را بر حسب u و ضریب بازگشت e بیان کنید.

جواب $v = \frac{u}{۴}(۱+e)^{۲}$



شکل مسئله ۳-۲۵۱

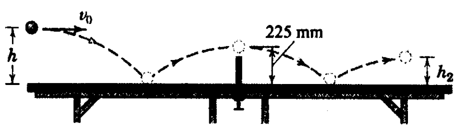
۳-۲۵۲ ضریب بازگشت یک گوی فولادی e را در صورتی تعیین کنید که ارتفاع دومین جهش گوی برابر $h_{۲}$ باشد.گوی از حالت سکون از ارتفاع h بالای سکوی فولادی سنگین و افقی رها می‌گردد.



شکل مسئله ۳-۲۵۲

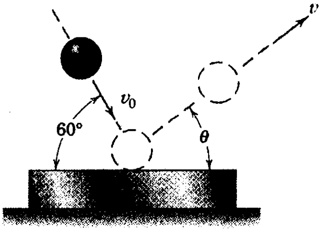
۳-۲۵۳ اگر یک توپ پینگ‌پنگ مطابق شکل درست از روی تور عبور کند، در چه ارتفاعی h توپ می‌بایست به طور افقی سرویس شود؟ همچنین $h_{۲}$ را تعیین کنید. ضریب بازگشت برای برخورد میان توپ و میز $e = ۰/۹$ و شعاع توپ $r = ۱۸/۷۵$ mm می‌باشد.

جواب $h = ۲۷۳$ mm و $h_{۲} = ۱۸۵/۸$ mm



شکل مسئله ۳-۲۵۳

۳-۲۵۴ گوی فولادی با سرعت $v_{0} = ۲٤$ m/s و زاویه °۶۰ نسبت به افق با سکوی فولادی سنگینی برخورد می‌کند. اگر ضریب بازگشت $e = ۰/۸$ باشد، سرعت v و زاویه θ توپ را به هنگام بازگشت گوی از روی سکو محاسبه کنید.



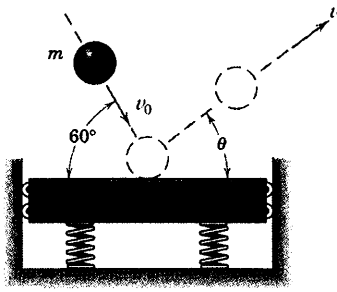
شکل مسئله ۳-۲۵۴

مسائل ویژه

۳-۲۵۵ در مسئله قبل اصلاحاتی صورت گرفته که در آن سکوی برخورد گوی دارای جرمی برابر گوی بوده و مطابق شکل به دیواره‌ها تکیه کرده است. اگر سکو در ابتدا ساکن بوده و تمامی شرایط مانند مسئله قبل باشند، سرعت نهایی هر دو جرم را بلافاصله پس از برخورد محاسبه کنید.

جواب گوی : $v'_{۱} = ۱۲/۲۰$ m/s و $\theta = -۹/۸۳°$

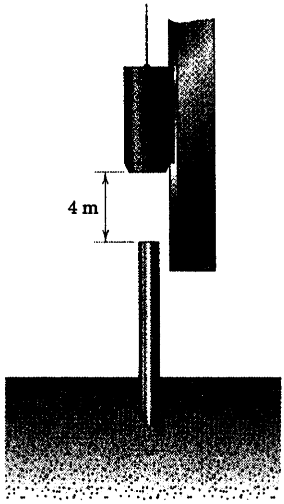
سکو : $v'_{۲} = ۱۸/۷۱$ m/s بطرف پایین



شکل مسئله ۳-۲۵۵

۳-۲۵۶ در انتخاب پتک شمع‌کوب، مطلوب آن است که پتک در هر ضربه تمام انرژی جنبشی خود را منتقل نماید. در نتیجه سرعت پتک بلافاصله پس از برخورد صفر خواهد بود. جرم شمعی که باید کوبیده شود، ۳۰۰ kg است و تجربه نشان می‌دهد که ضریب بازگشت ۰/۳ قابل قبول است. جرم

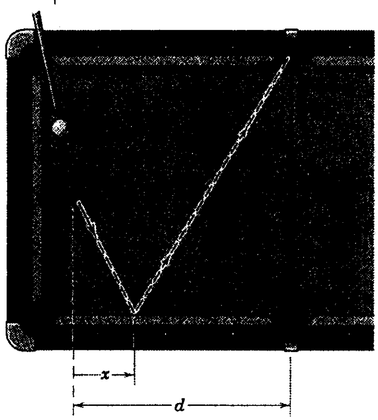
پتک m چقدر باید باشد؟ اگر پتک از ارتفاع ۴ m بر فرق شمع فرود آید، سرعت v شمع را بلافاصله پس از برخورد تعیین کنید. همچنین اتلاف انرژی ΔE ناشی از برخورد را در هر ضربه محاسبه کنید.



شکل مسئله ۳-۲۵۶

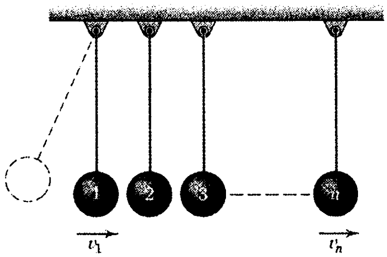
۳-۲۵۷ در نظر است توپ بیلیارد B پس از برخورد با دیواره در نقطه C به حفره D وارد شود. موقعیت x محل برخورد را با ضرایب بازگشت (الف) $e = ۱$ و (ب) $e = ۰/۸$، بیابید.

جواب (الف) $x = \frac{d}{۳}$ و (ب) $x = ۰/۲۸۶\, d$



شکل مسئله ۳-۲۵۷

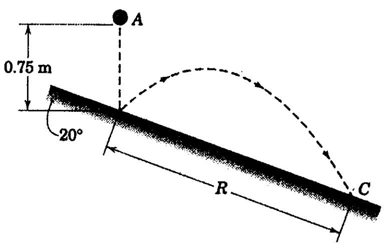
۳-۲۵۸ در شکل، n گوی به جرمهای مساوی m نشان داده شده‌اند که با سیم‌هایی هم‌طول در یک ردیف آویزان هستند؛ بطوریکه گوی‌ها تقریبا با یکدیگر در تماس می‌باشند. اگر گوی ۱ از موقعیت خط‌چین رها شده و با سرعت $v_۱$ به گوی ۲ برخورد کند، رابطه‌ای برای سرعت v_n گوی n ام بلافاصله پس از برخورد با گوی مجاور آن پیدا کنید. ضریب بازگشت مشترک گوی‌ها e می‌باشد.



شکل مسئله ۳-۲۵۸

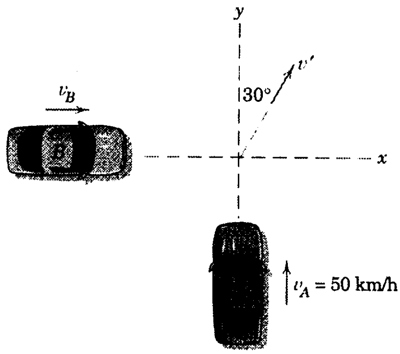
۳-۲۵۹ گویی از موقعیت A رها می‌شود و تا سطح شیبدار، فاصله ۰/۷۵ m را سقوط می‌کند. اگر ضریب بازگشت $e = ۰/۸۵$ باشد، برد R را بر روی سطح شیبدار پیدا کنید.

جواب $R = ۱/۶۱۳$ m



شکل مسئله ۳-۲۵۹

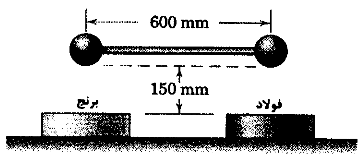
۳-۲۶۰ در تقاطع دو جاده یخ زده، دو اتومبیل به صورت عمود بر هم با یکدیگر برخورد می‌کنند. جرم اتومبیل A برابر ۱۲۰۰ kg و جرم اتومبیل B برابر ۱۶۰۰ kg است. دو اتومبیل پس از برخورد به هم متصل شده و با سرعت مشترک v' در امتداد نشان داده شده، حرکت می‌کنند. اگر سرعت اتومبیل A در لحظه وقوع برخورد برابر ۵۰ km/h باشد، سرعت اتومبیل B را درست پیش از برخورد بدست آورید.



شکل مسئله ۳-۲۶۰

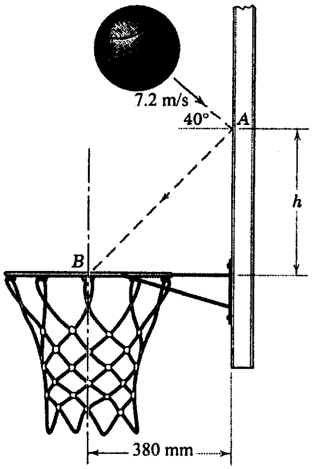
۳-۲۶۱ دو گوی فولادی یکسان توسط میله صلبی به جرم ناچیز به یکدیگر متصل شده و از حالت افقی در ارتفاع ۱۵۰ mm به سمت دو سندان سنگین برنجی و فولادی سقوط می‌کنند. اگر ضریب بازگشت بین گوی‌ها و سندان برنجی و فولادی به ترتیب ۰/۴ و ۰/۶ باشد. سرعت زاویه‌ای ω میله اتصال را بلافاصله پس از برخورد حساب کنید. فرض کنید که دو برخورد همزمان انجام می‌پذیرد.

جواب ω = ۰/۵۷۲ rad/s CCW (جهت پادساعتگرد)



شکل مسئله ۳-۲۶۱

۳-۲۶۲ توپ بسکتبال با سرعتی که در شکل نشان داده شده است، در نقطه A به تخته بسکتبال برخورد می‌کند. اگر ضریب بازگشت این برخورد e = ۰/۸۴ باشد، ارتفاع لازم h نسبت به حلقه را چنان بدست آورید که توپ در نقطه B مرکز حلقه وارد سبد گردد. مسئله را در دو حالت حل کنید (الف) با صرفنظر کردن از اثر جاذبه از نقطه A تا B، پاسخی تقریبی بدست آورید و (ب) اثر جاذبه از A تا B را در حل مسئله دخالت دهید. از قطر توپ در مقایسه با h صرفنظر کنید.

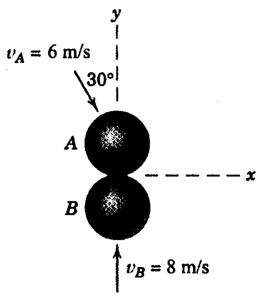


شکل مسئله ۳-۲۶۲

۳-۲۶۳ دو گوی فولادی یکسان با سرعت اولیه v_A و v_B مطابق شکل برخورد می‌کنند. اگر ضریب بازگشت e = ۰/۷ باشد، سرعت هر گوی را درست پس از برخورد بدست آورده و درصد اتلاف انرژی جنبشی n سیستم را محاسبه کنید.

جواب v'_A = ۶/۷۳ m/s در θ_A = ۶۳/۵°

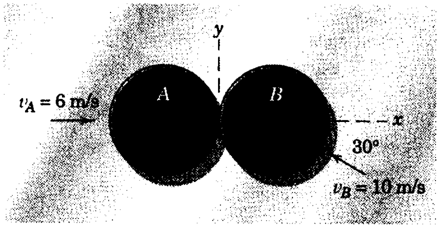
v'_B = ۳/۲۲ m/s در θ_B = ۲۷۰° و n = ٪ ۴۴/۴



شکل مسئله ۳-۲۶۳

۳-۲۶۴ دو دیسک یکسان هاکی که با سرعت‌های اولیه v_A و v_B در حرکتند، مطابق شکل با یکدیگر برخورد می‌کنند. اگر ضریب بازگشت e = ۰/۷۵ باشد، سرعت (مقدار سرعت و

امتداد θ آن را نسبت به جهت مثبت محور x) هر یک از دو دیسک را درست بعد از برخورد بدست آورید. همچنین درصد اتلاف انرژی جنبشی n مجموعه را حساب کنید.

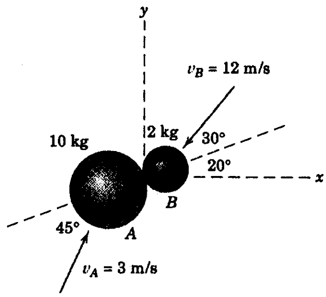


شکل مسئله ۲۶۴-۳

۲٦۵-۳ گوی A مطابق شکل با گوی B برخورد می‌کند. اگر ضریب بازگشت $e =$ ۰/۵ باشد، مولفه‌های سرعت هر گوی را بلافاصله پس از برخورد در جهت‌های x و y بدست آورید. حرکت در صفحه x-y صورت می‌گیرد.

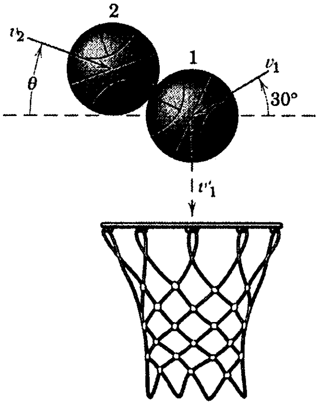
جواب $(v'_A)_x =$ −۱/٦۷۲ m/s و $(v'_A)_y =$ ۱/٦٤۹ m/s

$(v'_B)_x =$ ٦/٤۹ m/s و $(v'_B)_y =$ −۳/۸٤ m/s



شکل مسئله ۲٦۵-۳

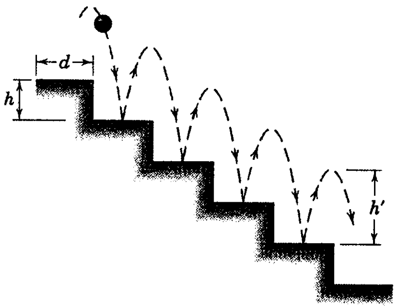
۲٦٦-۳ در یک بازی تمرینی، دو توپ بسکتبال در موقعیت نشان داده شده در بالای سبد با یکدیگر برخورد می‌کنند. درست قبل از برخورد، سرعت توپ ۱ برابر $\mathbf{v}_1$ بوده و با افق زاویه °۳۰ می‌سازد. اگر سرعت $\mathbf{v}_2$ توپ ۲ درست قبل از برخورد دارای همان اندازه $\mathbf{v}_1$ باشد، برای زاویه θ که از افق سنجیده می‌شود، دو مقدار ممکنه را بدست آورید که به ازای آنها توپ ۱ مستقیما وارد مرکز سبد می‌شود. ضریب بازگشت $e =$ ۰/۸ می‌باشد.



شکل مسئله ۲۶۶-۳

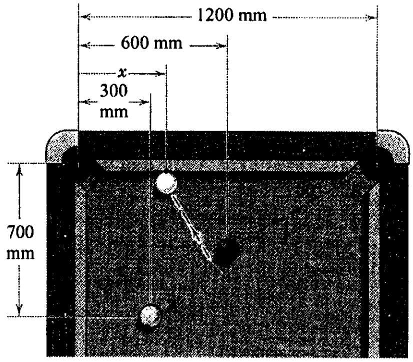
۲٦۷-۳ ضریب بازگشت e را که به توپ اجازه می‌دهد تا مطابق شکل بر روی پله‌های پایینی پرش کند، بدست آورید. ابعاد کف پله و بلندی آن به ترتیب d و h بوده و برای تمام پله‌ها یکسان است و فاصله پرش توپ از روی هر پله یکسان و برابر h' می‌باشد. سرعت افقی v_x لازم برای آنکه توپ بر وسط پله فرود آید، چقدر است؟

جواب
$$e=\sqrt{\frac{h'}{h'+h}} \quad و \quad v_x=\frac{\sqrt{\frac{g}{2}}\,d}{\sqrt{h'}+\sqrt{h'+h}}$$



شکل مسئله ۲۶۷-۳

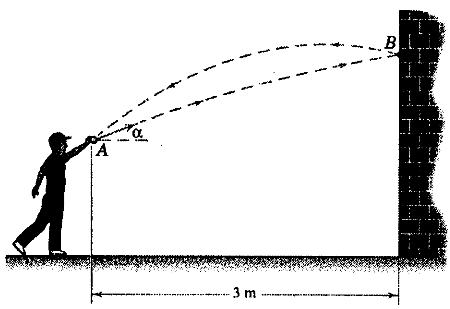
۳-۲۶۸ در یک بازی بیلیارد، توپ سفید A طوری با توپ رنگی هدف برخورد می‌کند که آن را درون حفره سمت راست B می‌کند. فاصله x را از مرکز حفره گوشه سمت چپ C تا نقطه‌ای که توپ سفید A پس از برخورد با توپ هدف به دیواره اصابت می‌کند، بدست آورید. جرم توپ‌ها یکسان و قطر آنها ۵۰ mm است و ضریب بازگشت e = ۰/۹ می‌باشد.



شکل مسئله ۳-۲۶۸

۳-۲۶۹ ◀ کودکی توپی را از موقعیت A با سرعت ۱۵ m/s پرتاب می‌کند. توپ در نقطه B به دیواره برخورد کرده و دقیقاً به نقطه A باز می‌گردد. اگر ضریب بازگشت در برخورد با دیواره e = ۰/۵ باشد، زاویه لازم پرتاب، α را بدست آورید.

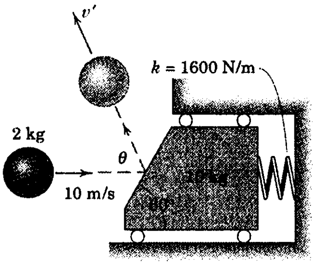
جواب α = ۱۱/۵۵° یا ۷۸/۴°



شکل مسئله ۳-۲۶۹

۳-۲۷۰ ◀ گویی به جرم ۲ kg با سرعت ۱۰ m/s به طور افقی به سوی ارابه‌ای به جرم ۱۰ kg پرتاب می‌شود. در پشت ارابه، فنری با سختی ۱۶۰۰ N/m تعبیه شده است. ارابه ابتدا در حال سکون بوده و فنر طول آزاد خود را دارد. اگر ضریب بازگشت ۰/۶ باشد، سرعت بازگشت v'، زاویه بازگشت θ و بیشترین تغییر مکان δ ارابه را بعد از برخورد بدست آورید.

جواب v' = ۶/۰۴ m/s و θ = ۸۵/۹° و δ = ۱۶۵/۰ mm



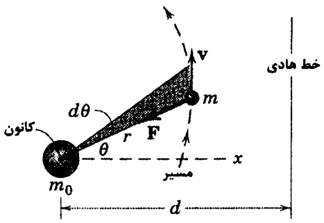
شکل مسئله ۳-۲۷۰

۱۳-۳ حرکت تحت تاثیر نیروی مرکزی

هنگامیکه ذره‌ای تحت تاثیر نیروی حاصل از جاذبه مرکزی ثابت حرکت می‌کند، به آن حرکت، *حرکت تحت تاثیر نیروی مرکزی* گویند. حرکت مداری سیاره‌ها و ماهواره‌ها از متداول‌ترین نمونه‌های حرکت تحت تاثیر نیروی مرکزی هستند. قوانین حاکم بر این نوع حرکت از رصد حرکت سیارات توسط کپلر (۱۶۳۰-۱۵۷۱) استنتاج گردیده‌اند. دینامیک حرکت تحت تاثیر نیروی مرکزی، اساس طراحی راکتهای دور پرواز، ماهواره‌های زمینی و انواع فضاپیماها را تشکیل می‌دهد.

حرکت یک جسم منفرد

مطابق شکل ۱۸-۳، ذره‌ای به جرم m را در نظر بگیرید که تحت تاثیر جاذبه مرکزی حرکت می‌کند.



شکل ۱۸-۳

$$F = G\frac{m\,m_0}{r^2}$$

که در آن m_0 جرم جسم جاذب بوده و ثابت فرض می‌شود؛ G ثابت جهانی جاذبه و r فاصله بین مراکز جرمهاست . ذره‌ای به جرم m می‌تواند معرف حرکت زمین به دور خورشید، حرکت ماه به دور زمین و نیز حرکت یک ماهواره در حرکت مداری خارج از جو به دور زمین باشد.

مناسب‌ترین دستگاه مختصات مورد استفاده، دستگاه مختصاتی قطبی در صفحه حرکت است، زیرا $\mathbf{F}$ همیشه در جهت منفی r خواهد بود و در جهت θ هیچگونه نیرویی وارد نمی‌شود.

معادلات ۸-۳ را می‌توان مستقیماً در جهت‌های r و θ اعمال کرد.

$$-G\frac{m\,m_0}{r^2} = m\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) \qquad (۳-۳۳)$$

$$0 = m\left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)$$

با ضرب r/m در معادله دوم، می‌توان رابطه $\frac{d\left(r^2\dot{\theta}\right)}{dt} = 0$ را بدست آورد که پس از انتگرال گیری داریم:

$$r^2\dot{\theta} = h \text{ ، ثابت} \qquad (۳-۳٤)$$

اهمیت فیزیکی معادله ۳٤-۳ هنگامی آشکار می‌گردد که توجه شود که اندازه مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$ جرم m حول m_0 برابر $mr^2\dot{\theta}$ می‌باشد. در نتیجه، معادله ۳٤-۳ فقط بیانگر ثابت و یا ابقایی بودن مومنتم زاویه‌ای m حول m_0 است. چنین بیانی را می‌توان از معادله ۲۷-۳ بسادگی استنتاج کرد. این معادله نشان می‌دهد که اگر هیچگونه گشتاوری حول نقطه ثابت O ذره وارد نشود، مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ ثابت (و یا ابقایی) باقی می‌ماند.

می‌بینیم که در فاصله زمانی dt ، بردار شعاعی سطح هاشور خورده شکل ۱۸-۳ را جارو می‌کند که این سطح برابر است با $dA = (\frac{1}{2}r)(rd\theta)$. بنابراین میزان سطح جارو شده توسط بردار شعاعی برابر است با: $\dot{A} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}$ که طبق معادله

۳۴-۳ ثابت می‌باشد. چنین نتیجه‌ای بیانگر *قانون دوم کپلر* در حرکت سیارات است و بیان می‌دارد که سطوح جارو شده در زمانهای مساوی با هم برابرند.

شکل مسیر طی شده توسط جرم m را می‌توان از ترکیب اولین معادله ۳۳-۳ با معادله ۳۴-۳ و حذف t در آنها بدست آورد. برای نیل به این مقصود، جایگزینی $r=\frac{1}{u}$ مفید است. در نتیجه، $\dot{r}=-\left(\frac{1}{u^2}\right)\dot{u}$ است که با توجه به معادله ۳۴-۳ به صورت $\dot{r}=-h\left(\frac{\dot{u}}{\dot{\theta}}\right)$ یا $\dot{r}=-h\left(\frac{du}{d\theta}\right)$ می‌شود. مشتق دوم زمانی برابر است با: $\ddot{r}=-h\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)\dot{\theta}$ که از ترکیب با معادله ۳۴-۳، $\ddot{r}=-h^2u^2\left(\frac{d^2u}{d\theta^2}\right)$ حاصل می‌شود. با جایگزینی در اولین معادله ۳۳-۳، داریم:

$$-Gm_0u^2=-h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}-\frac{1}{u}h^2u^4$$

و یا:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2}+u=\frac{Gm_0}{h^2} \qquad (۳-۳۵)$$

که یک معادله دیفرانسیل خطی غیر همگن است. حل این معادله آشنای درجه دوم، چنین است:

$$u=\frac{1}{r}=C\cos(\theta+\delta)+\frac{Gm_0}{h^2}$$

که در آن C و δ دو ثابت انتگرال گیری هستند. محور x را به گونه‌ای می‌توان انتخاب کرد که در $\theta=0$، r کمترین مقدار را داشته و زاویه فازی δ حذف شود. در نتیجه:

$$\frac{1}{r}=C\cos\theta+\frac{Gm_0}{h^2} \qquad (۳-۳۶)$$

مقاطع مخروطی

تفسیر معادله ۳۶-۳، نیازمند دانستن معادلات مقاطع مخروطی است. یادآوری می‌کنیم که یک مقطع مخروطی، مکان هندسی نقطه متحرکی است که نسبت e فاصله آن از یک نقطه (کانون) به فاصله همان نقطه از یک خط (هادی)، مقدار ثابتی باشد. در نتیجه، از شکل ۱۸-۳ داریم: $e=r/(d-r\cos\theta)$ که می‌توان آن را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{d}\cos\theta+\frac{1}{ed} \qquad (۳-۳۷)$$

که همانند معادله ۳۶-۳ است. بنابراین دیده می‌شود که حرکت جرم m بر روی یک مقطع مخروطی صورت می‌گیرد که مشخصات آن عبارتند از: $d=\frac{1}{C}$ و $ed=\frac{h^2}{(Gm_0)}$ و یا:

$$e=\frac{h^2C}{Gm_0} \qquad (۳-۳۸)$$

سه حالت را می‌توان مورد بررسی قرار داد. $e<۱$ (بیضی)، $e=۱$ (سهمی) و $e>۱$ (هذلولی) که هر سه مسیر در شکل ۱۹-۳ نشان داده شده است.

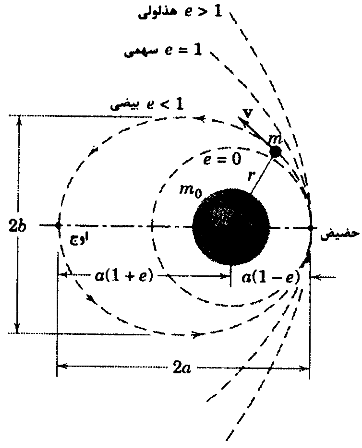
حالت اول، بیضی ($e < 1$): از معادله ۳۷-۳ دیده می‌شود که به ازای $\theta = 0$ ، r کمترین مقدار و به ازای $\theta = \pi$ بیشترین مقدار خود را دارد. در نتیجه:

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{ed}{1+e} + \frac{ed}{1-e} \quad \text{یا} \quad a = \frac{ed}{1-e^2}$$

اگر d بر حسب a بیان شود، معادله ۳۷-۳ و نیز مقادیر حداقل و حداکثر r را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e\cos\theta}{a\left(1-e^2\right)} \qquad (۳-۳۹)$$

$$r_{\min} = a\,(1-e) \qquad r_{\max} = a\,(1+e)$$



شکل ۱۹-۳

علاوه بر این، رابطه $b = a\sqrt{1-e^2}$ که از هندسه بیضی بدست می‌آید، شعاع کوچک آن را معین می‌کند. دیده می‌شود که به ازای $e = 0$ و $r = a$ بوده و بیضی به صورت دایره در می‌آید. معادله ۲۹-۳ بیانگر *قانون اول کپلر* است که می‌گوید سیاره‌ها در مدار بیضی شکل بدور خورشید حرکت کرده و خورشید در یکی از کانونهای بیضی واقع شده است.

پریود τ برای مدار بیضی عبارت است از خارج قسمت سطح کل بیضی A به میزان ثابت $\dot{A}$ سطح جارو شده از بیضی. در نتیجه از معادله ۳۴-۳ داریم:

$$\tau = \frac{A}{\dot{A}} = \frac{\pi ab}{\frac{1}{2}r^2\dot{\theta}} \quad \text{یا} \quad \tau = \frac{2\pi ab}{h}$$

به کمک معادله ۳۸-۳ و نیز استفاده از روابط $d = 1/C$، $a = \dfrac{ed}{\left(1-e^2\right)}$، $b = a\sqrt{1-e^2}$ برای بیضی و $Gm_0 = gR^2$ می‌توان $\dot{\theta}$ یا h را از روابط τ بالا حذف نمود. پس از ساده کردن خواهیم داشت:

$$\boxed{\tau = 2\pi\frac{a^{3/2}}{R\sqrt{g}}} \qquad (۳-۴۰)$$

توجه شود که در این معادله R شعاع متوسط جسم جاذب و g مقدار مطلق شتاب جاذبه در سطح جسم جاذب می‌باشد.

معادله ۴۰-۳، *قانون سوم کپلر* در حرکت سیاره‌ها را ارائه می‌کند و بیانگر آن است که مربع پریود حرکت با مکعب بلندترین شعاع مدار بیضی متناسب است.

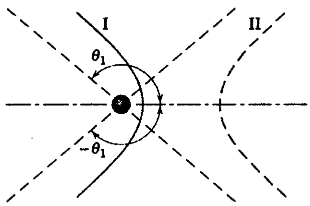
حالت دوم، سهمی ($e = 1$): معادلات ۳۷-۳ و ۳۸-۳ می‌شود:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{d}\left(1+\cos\theta\right) \quad \text{و} \quad h^2C = Gm_0$$

هنگامیکه θ به سمت π میل می‌کند، بردار شعاعی و نیز بُعد a به سمت بینهایت میل خواهد کرد.

حالت سوم، هذلولی ($e > 1$): با توجه به معادله ۳۷-۳ دیده می‌شود که به ازای دو زاویه قطبی θ_1 و $-\theta_1$ که در رابطه $\cos\theta_1 = \frac{-1}{e}$ صادق هستند، فاصله شعاعی r بینهایت می‌شود. تنها مسیری که در شکل ۲۰-۳ یک حرکت فیزیکی را امکان پذیر می‌سازد شاخه I هذلولی است که تغییرات زاویه‌ای متناظر با آن به صورت $-\theta_1 < \theta < \theta_1$ می‌باشد. شاخه II متناظر با زوایای قطاع باقیمانده (با r منفی) است. اگر بجای θ، $\theta - \pi$ و به جای r، $-r$ را جایگزین کنیم، r مثبت را برای این شاخه می‌توان بکار برد. در نتیجه، معادله ۳۷-۳ به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{1}{-r} = \frac{1}{d}\cos(\theta - \pi) + \frac{1}{ed} \quad \text{یا} \quad \frac{1}{r} = \frac{-1}{ed} + \frac{\cos\theta}{d}$$



شکل ۲۰-۳

اما این رابطه با معادله ۳۶-۳ که در آن $\frac{Gm_0}{h^2}$ الزاماً مثبت است، در تناقض می‌باشد. از اینرو، شاخه II وجود ندارد (مگر اینکه نیروهای دافعه موجود باشند).

تحلیل انرژی

حال انرژی‌های ذره m را در نظر بگیرید. از حیث نیروهای وارده، سیستم، ابقایی بوده و مجموع انرژی جنبشی T و انرژی پتانسیل V، انرژی ثابت E ذره به جرم m را تشکیل می‌دهد. انرژی جنبشی برابر است با:

$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ و نیز انرژی پتانسیل از معادله ۱۵-۳ چنین است: $V = -mgR^2/r$

یادآوری می‌شود که g شتاب مطلق جاذبه است که در سطح جسم جاذب اندازه گیری شده، R شعاع جسم جاذب و $Gm_0 = gR^2$ است. در نتیجه:

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - \frac{mgR^2}{r}$$

مقدار ثابت E را می‌توان به ازای $\theta = 0$ بدست آورد که از معادله ۳۶-۳، روابط $\frac{1}{r} = C + \frac{gR^2}{h^2}$ و $\dot{r} = 0$ و از معادله ۳۴-۳، رابطه $r\dot{\theta} = \frac{h}{r}$ حاصل می‌شود. با جایگزینی این روابط در رابطه E و ساده کردن آن نتیجه زیر بدست می‌آید.

$$\frac{2E}{m} = h^2C^2 - \frac{g^2R^4}{h^2}$$

حال معادله ۳۸-۳ را به صورت $h^2C = egR^2$ می‌نویسیم و با جایگزینی آن در رابطه فوق، C را حذف می‌کنیم و داریم:

$$e = +\sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{mg^2R^4}} \qquad (۳-۴۱)$$

چون طبق تعریف e مثبت است، بنابراین علامت مثبت در جلوی رادیکال درج گردیده است. حال می‌توان دید که برای:

مدار بیضوی $e < 1$، E منفی است.

مدار سهمی $e = 1$، E صفر است.

مدار هذلولی $e > 1$ ، E مثبت است.

البته چنین نتایجی به سطح مبنا بستگی دارد که به دلخواه برای انرژی پتانسیل صفر انتخاب شده است ($V = 0$ به ازای $r = \infty$).

از معادله انرژی رابطه‌ای برای سرعت v جرم m به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{mgR^2}{r} = E$$

از ترکیب معادلات ۴۱-۳ و ۳۸-۳ به همراه رابطه $\frac{1}{C} = d = \frac{a(1-e^2)}{e}$، انرژی کل E ذره در یک مدار بیضوی به صورت زیر حاصل می‌شود.

$$E = -\frac{gR^2m}{2a} \tag{۳-۴۲}$$

با قرار دادن رابطه فوق در معادله انرژی داریم:

$$\boxed{v^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right)} \tag{۳-۴۳}$$

که از آن می‌توان اندازه سرعت ذره را در یک مدار خاص بر حسب فاصله شعاعی r محاسبه کرد. از ترکیب معادلات ۳۹-۳ و ۴۳-۳ سرعت ذره در نقاط حضیض r_{min} و اوج r_{max} در یک مدار بیضوی بدست می‌آید.

$$\boxed{\begin{aligned} v_P &= R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{max}}{r_{min}}} \\ v_A &= R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{min}}{r_{max}}} \end{aligned}} \tag{۳-۴۴}$$

در پیوست D مقادیر بعضی از کمیتهای منظومه شمسی به طور انتخابی آمده و در مسائل مربوط به حرکت سیاره‌ای مفید واقع خواهد شد.

خلاصه‌ای از فرضیات

تحلیل اخیر بر پایه سه فرض استوار می‌باشد.

۱- هر دو جسم کروی که دارای تقارن جرمی هستند، می‌توان تمام جرم آنها را در مراکزشان متمرکز دانست. به عبارتی دیگر آنها را دو ذره تلقی کرد.

۲- غیر از نیروی جاذبه که هر جرمی به سایر جرمها وارد می‌کند، نیروی دیگری وجود ندارد.

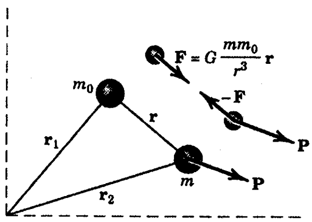
۳- جرم m_0 در فضا ثابت است.

فرضیه (۱) در مورد اجسامی است که از جسم جاذب که غالباً سنگین‌تر است، فاصله زیادی داشته باشد. فرض (۱) در مورد دسته مهمی از مسائل نظیر ماهواره‌هایی که خیلی نزدیک به سیارات شلجمی‌گون حرکت می‌کنند، از صحت کمتری

برخوردار است. به عنوان توضیح فرض (۲)، توجه داریم که نیروهای مقاومت آیرودینامیکی وارد بر یک ماهواره کم ارتفاع، نیرویی است که معمولاً در تجزیه و تحلیل مداری نمی‌توان از آن صرفنظر کرد. در مورد ماهواره‌ای که مدار حرکت آن بدور زمین است، خطای فرض (۳) ناچیز است. چون نسبت جرم ماهواره به جرم زمین خیلی کوچک است. از طرف دیگر، در صورت بکارگیری فرض (۳) در مورد مجموعه زمین ـ ماه، خطای کوچک ولی مهم بوجود می‌آید. توجه داشته باشید که جرم ماه $\frac{1}{81}$ جرم زمین است.

مسئله دو جرم آشفته

حال حرکت دو جرم را در نظر گرفته و علاوه بر نیروهای متقابل بین آن دو، حضور نیروهای دیگر را مجاز می‌دانیم و این مسئله را تحت عنوان *مسئله دو جسم آشفته* می‌نامیم. شکل ۲۱-۳ جرم بزرگتر را با m_0 نشان می‌دهد و بردار موقعیت هر یک به ترتیب $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$ است که نسبت به یک سیستم اینرسی سنجیده می‌شوند. نیروهای جاذب $\mathbf{F}$ و $-\mathbf{F}$ و نیروی $\mathbf{P}$ علاوه بر نیروی بین دو جسم، به جرم m اعمال می‌شود. نیروی $\mathbf{P}$ می‌تواند در اثر عواملی مانند نیروی مقاومت آیرودینامیکی، فشار منظومه‌ای، وجود یک جسم سوم، فعالیت‌های رانشی در عرشه، میدان گرانشی غیر کروی و یا ترکیبی از عوامل مزبور و سایر منابع نیرو باشد.



شکل ۲۱-۳

نتیجه اعمال قانون دوم نیوتن بر هر یک از دو جرم، به صورت زیر است.

$$G\frac{mm_0}{r^3}\mathbf{r} = m_0\ddot{\mathbf{r}}_1 \quad \text{و} \quad -G\frac{mm_0}{r^3}\mathbf{r} + \mathbf{P} = m\ddot{\mathbf{r}}_2$$

معادله اول را بر m_0 و معادله دوم را بر m تقسیم می‌کنیم و با کم کردن معادله اول از دومی، نتیجه می‌شود که:

$$-G\frac{(m_0+m)}{r^3}\mathbf{r} + \frac{\mathbf{P}}{m} = \ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \ddot{\mathbf{r}}$$

یا:

$$\ddot{\mathbf{r}} + G\frac{(m_0+m)}{r^3}\mathbf{r} = \frac{\mathbf{P}}{m} \qquad (۳-٤۵)$$

معادله ٤۵-۳ یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم است که در صورت حل، بردار موقعیت $\mathbf{r}$ را به صورت تابعی از زمان ارائه می‌کند. معمولاً برای انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل اسکالری معادل با رابطه برداری ٤۵-۳، روشهای عددی مورد نیاز است. به خصوص اگر $\mathbf{P}$ مخالف صفر باشد.

مسئله دو جسم محدود

اگر $m_0 >> m$ و $\mathbf{P} = 0$ باشد، به مسئله دو جسم محدود می‌رسیم و معادله حرکت چنین می‌شود:

$$\ddot{\mathbf{r}} + G\frac{m_0}{r^3}\mathbf{r} = 0 \qquad (۳-٤۵a)$$

اگر در معادله ٤۵a-۳، $\mathbf{r}$ و $\ddot{\mathbf{r}}$ بر حسب مختصات قطبی بیان شوند، داریم:

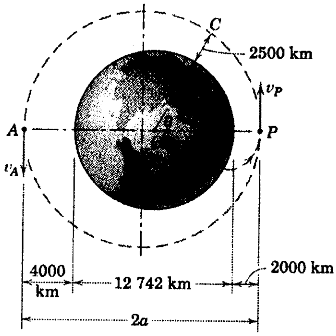
$$\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta + G\frac{m_0}{r^3}\left(r\mathbf{e}_r\right) = 0$$

در صورتی که ضرایب بردارهای یکه طرفین با یکدیگر مساوی گرفته شوند، معادلات ۳۳-۳ بدست می‌آیند.

مقایسه معادله ۴۵-۳ (با $\mathbf{P}=\mathbf{0}$) و معادله ۴۵a-۳ ما را مجاز می‌کند تا از فرض ثابت بودن جرم m_0 در فضا رهایی یابیم. اگر در عبارتی که با فرض ثابت بودن جرم m_0 حاصل شده، (m_0+m) را جایگزین m_0 کنیم. در این صورت روابطی بدست می‌آوریم که حرکت m_0 را به حساب می‌آورند. مثلاً رابطه تصحیح شده برای پریود حرکت بیضوی m حول m_0 با توجه به معادله ۴۰-۳ چنین خواهد شد:

$$\tau = 2\pi \frac{a^{3/2}}{\sqrt{G(m_0+m)}} \tag{۳-۴۵b}$$

مسئله نمونه ۲۷-۳



ماهواره‌ای از نقطه B واقع بر استوا توسط راکت حمل کننده‌اش پرتاب شده و به یک مدار بیضوی که ارتفاع نقطه حضیض آن ۲۰۰۰ km است، پرتاب می‌شود. اگر ارتفاع نقطه اوج ۴۰۰۰ km باشد، تعیین کنید: (a) سرعتهای v_P و v_A ماهواره در نقاط حضیض و اوج، (b) سرعت در نقطه C که ارتفاع ماهواره در این نقطه ۲۵۰۰ km می‌باشد و (c) پریود τ برای یک دور چرخش در مدار.

حل (a): سرعت در نقاط حضیض و اوج را می‌توان بـه کمک معادله ۴۴-۳ برای یک ارتفاع خاص بدست آورد که:

$$r_{max} = 6371 + 4000 = 10371 \text{ km}$$
$$r_{min} = 6371 + 2000 = 8371 \text{ km}$$
$$a = (r_{max} + r_{min})/2 = 9371 \text{ km}$$ ❶

در نتیجه:

$$v_P = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{max}}{r_{min}}} = 6371(10^3)\sqrt{\frac{9.825}{9371(10^3)}}\sqrt{\frac{10371}{8371}}$$

جواب $= 7261 \text{ m/s}$ یا 26140 km/h

$$v_A = R\sqrt{\frac{g}{a}}\sqrt{\frac{r_{min}}{r_{max}}} = 6371(10^3)\sqrt{\frac{9.825}{9371(10^3)}}\sqrt{\frac{8371}{10371}}$$

جواب $= 5861 \text{ m/s}$ یا 21099 km/h

(b) در ارتفاع ۲۵۰۰ km فاصله شعاعی از مرکز زمین برابر است با: $r = ۶۳۷۱+۲۵۰۰ = ۸۸۷۱$ km از معادله ۴۳-۳، سرعت نقطه C به صورت زیر بدست می‌آید.

$$v_C^2 = 2gR^2\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right) = 2(9.825)\left[(6371)(10^3)\right]^2\left(\frac{1}{8871} - \frac{1}{18742}\right)\frac{1}{10^3}$$ ❷
$$= 47.353\,(10^6)\ (\text{m/s})^2$$

جواب $v_C = 6881 \text{ m/s}$ یا 24773 km/h

(c) پریود مدار حرکت ماهواره از معادله ۴۰-۳ حاصل می‌شود.

$$\tau = 2\pi\frac{a^{3/2}}{R\sqrt{g}} = 2\pi\frac{\left[(9371)(10^3)\right]^{3/2}}{(6371)(10^2)\sqrt{9.825}} = 9026 \text{ s}$$ ❸

جواب یا $\tau = 2.507 \text{ h}$

نکات مفید

❶ از جدول D-۲ پیوست D ، شعاع متوسط زمین برابر است با $\frac{۱۲۷۴۲}{۲} = ۶۳۷۱\ \text{km}$. همچنین از بخش ۵-۱ شتاب مطلق جاذبه $g = ۹/۸۲۵\ \text{m/s}^2$ می‌باشد.

❷ در مورد واحدها باید دقت داشته باشیم. برای اطمینان، بهتر است که با واحد پایه کار شود که در اینجا متر است و بعداً تبدیلات لازم صورت گیرد.

❸ در اینجا ملاحظه می‌کنیم که از دید ناظری که در استوا قرار دارد و عبور ماهواره را در زمانهای متوالی ثبت می‌کند، این زمان از پریود محاسبه شده بیشتر است. چون ناظر در اثر دوران زمین در جهت پادساعتگرد در فضا حرکت می‌کند، چنانچه از قطب شمال ملاحظه شود.

مسائل

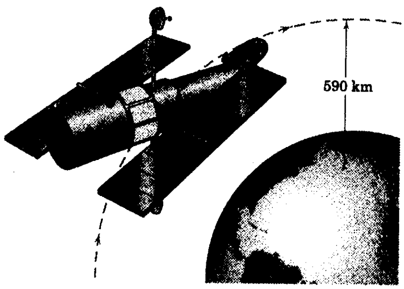
(در مسائل زیر سرعتها در دستگاه مرجع غیر دواری سنجیده می‌شودکه با مرکز جسم جاذب در حال حرکت است که در غیر اینصورت توضیح داده خواهد شد. همچنین، نیروی مقاومت آیرودینامیکی ناچیز است مگر اینکه ذکر شود. شتاب جاذبه مطلق در سطح زمین را ($۳۲/۲۳ \text{ ft/sec}^2$) $g = ۹/۸۲۵ \text{ m/s}^2$ و زمین را کره‌ای به شعاع (۳۹۵۹ mi) $R = ۶۳۷۱$ km در نظر بگیرید.)

مسائل مقدماتی

۳-۲۷۱ سرعت v زمین حول خورشید را بدست آورید. فرض کنید مدار چرخش دایره‌ای به شعاع $۱۵۰(۱۰^۶)$ کیلومتر است.

جواب $v = ۲۹/۷۵$ km/s

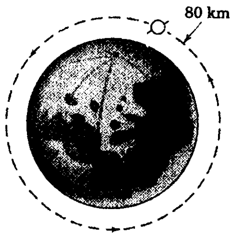
۳-۲۷۲ شاتل فضایی دارای چه سرعت v باید باشد تا بتواند تلسکوپ فضایی هابل را در یک مدار دایره‌ای به فاصله km ۵۹۰ بالای زمین قرار دهد؟



شکل مسئله ۳-۲۷۲

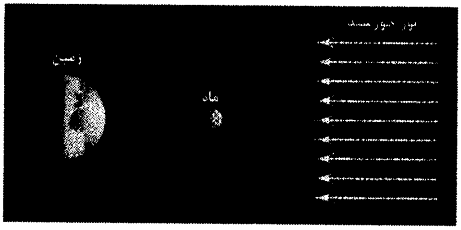
۳-۲۷۳ سرعت فضاپیمایی را که به فاصله km ۸۰ از سطح ماه، یک مدار دایره‌ای را حول آن طی می‌کند، محاسبه کنید.

جواب $v = ۱۶۴۱$ m/s



شکل مسئله ۳-۲۷۳

۳-۲۷۴ نشان دهید که در موقعیت نشان داده شده، تقعر مسیر حرکت ماه به سمت خورشید است. فرض کنید که خورشید، زمین و ماه در یک راستا قرار دارند.



شکل مسئله ۳-۲۷۴

۳-۲۷۵ فضاپیمایی در یک مدار مدور در ارتفاع H به دور زمین می‌چرخد. اگر موتور راکت به کار بیفتد و سرعت فضاپیما را ناگهان افزایش دهد، افزایش Δv لازمه را چنان تعیین کنید که فضاپیما از میدان جاذبه زمین فرار کند. اگر $H = ۳۲۰$ km باشد، Δv را تعیین کنید.

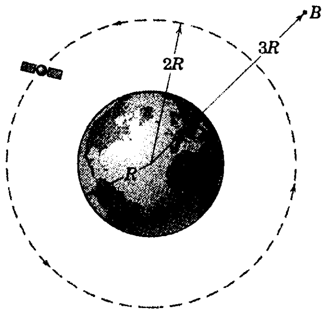
جواب $\Delta v = ۳/۲۰$ km/s

۳-۲۷۶ اگر ارتفاع حضیض یک ماهواره زمینی km ۲۴۰ و ارتفاع اوج آن km ۴۰۰ باشد، خروج از مرکز e و پریود یک چرخش کامل در فضا، τ را محاسبه کنید.

۳-۲۷۷ در یکی از مدارهای فضاپیمای آپولو به دور ماه، فاصله سفینه از سطح ماه از km ۱۰۰ به km ۳۰۰ تغییر می‌کند. حداکثر سرعت فضاپیما را در این مدار حساب کنید.

جواب $v_P = ۶۰۲۴$ km/h

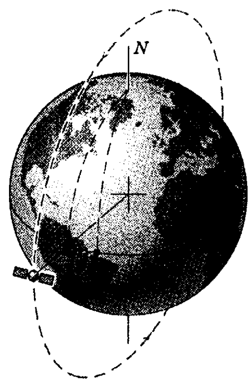
۳-۲۷۸ شعاع مدار دایره‌ای یک ماهواره به دور زمین ۲R می‌باشد که در آن R شعاع زمین است. حداقل افزایش سرعت Δv لازم جهت رسیدن به نقطه B که فاصله آن از مرکز زمین ۳R است، چقدر است؟ در چه نقطه‌ای از مدار دایره‌ای اولیه می‌بایست افزایش سرعت را اعمال کرد؟



شکل مسئله ۲۷۸-۳

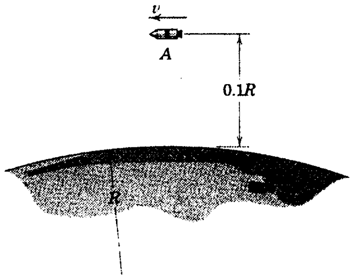
۳-۲۷۹ ماهواره‌ای در یک مدار مدور قطبی در ارتفاع ۳۰۰ km قرار دارد. فاصله d بین دو مدار تصویر شده بر روی زمین (با خط‌چین نشان داده شده) را که در دو نوبت متوالی عبور از روی استوا بوجود می‌آید، تعیین کنید.

جواب $d = ۲۵۲۰$ km



شکل مسئله ۲۷۹-۳

۳-۲۸۰ سرعت v یک ماهواره را در نقطه A مدار خود حول زمین در حالات (الف) مدار دایره‌ای، (ب) مدار بیضوی با خروج از مرکز $e = ۰/۱$، (ج) مدار بیضوی با خروج از مرکز $e = ۰/۹$ و (د) مدار سهموی بدست آورید. در حالات (ب)، (ج) و (د)، A در نقطه حضیض مدار است.

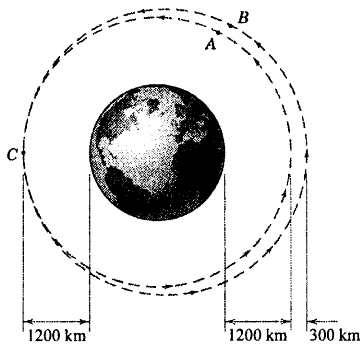


شکل مسئله ۲۸۰-۳

مسائل ویژه

۳-۲۸۱ ماهواره A که در یک مدار مدور و ماهواره B که در یک مدار بیضوی حرکت می‌کنند، در نقطه C با یکدیگر تصادم کرده و درگیر می‌شوند. اگر جرم ماهواره‌ها با هم برابر باشد، حداکثر ارتفاع h_{max} مدار مشترک حاصله را معین کنید.

جواب $h_{max} = ۱۳۴۸$ km

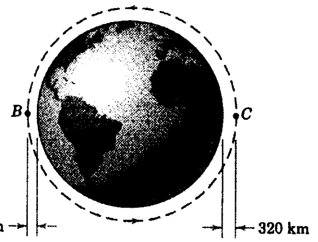


شکل مسئله ۲۸۱-۳

۳-۲۸۲ اگر زمین ناگهان سرعت مداری خود حول خورشید را از دست بدهد، زمان t را که ظرف آن مدت، زمین به مرکز خورشید «سقوط» خواهد کرد را تعیین کنید. (*راهنمایی:* زمان لازمه، یک دوم زمان تناوب حرکت در یک مدار بیضوی تحلیل رونده حول خورشید خواهد بود، در حالیکه کوچکترین قطر بیضی مذکور به سمت صفر میل کند.) برای آگاهی از پریود دقیق گردش زمین به دور خورشید، به جدول D-۲ مراجعه کنید.

۲۸۳-۲ شاتل فضایی مدارپیمای ۸۵۰۰۰ کیلوگرمی، پس از پرتاب از زمین، در مدار بیضوی نشان داده شده قرار می‌گیرد. اگر قرار باشد که مدار شاتل به یک دایره با شعاع اوج ۳۲۰ km تبدیل گردد، مدت زمان لازمه Δt که در طی آن باید دو موتور تصحیح مدار (OMS)، هر یک با نیروی رانش ۳۰ kN عمل کنند تا موقعیت اوج C حاصل شود را تعیین کنید.

جواب $\Delta t = ۳۲/۹\ \text{s}$



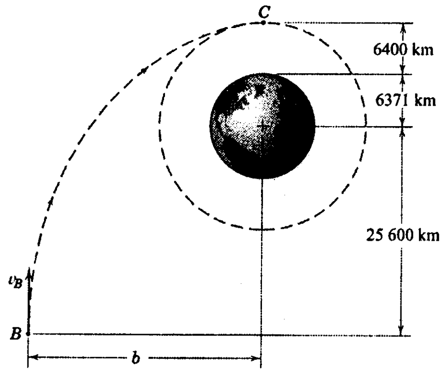
شکل مسئله ۲۸۳-۳

۲۸۴-۳ ماهواره‌ای از نوع «پسا ـ آزاد» مطابق شکل، جرم کوچکی را که در درون محفظه‌اش قرار دارد، حمل می‌کند. اگر سرعت ماهواره در اثر نیروی پسا کاهش یابد، هیچگونه تغییری در سرعت جرم کوچک ایجاد نشده و لذا، همانطور که نشان داده شده، جرم نسبت به محفظه حرکت می‌کند. حس کننده‌های الکترونیکی تغییر موقعیت، جرم را نسبت به محفظه تشخیص می‌دهند و موتورهای ماهواره به تناوب روشن شده و با ایجاد نیروی رانش، جرم را به موقعیت اولیه خود بر می‌گردانند. در این روش، اثر نیروی پسا جبران می‌شود. اگر ماهواره در یک مدار دایره‌ای در ارتفاع ۲۰۰ km از سطح زمین قرار داشته باشد و کل نیروی رانش به مدت ۳۰۰ s در طی ۱۰ دور چرخش ماهواره اعمال شود، نیروی پسا D را که به ماهواره ۱۰۰ کیلوگرمی اعمال می‌شود، بدست آورید. نیروی رانش T برابر ۲ N می‌باشد.

شکل مسئله ۲۸۴-۳

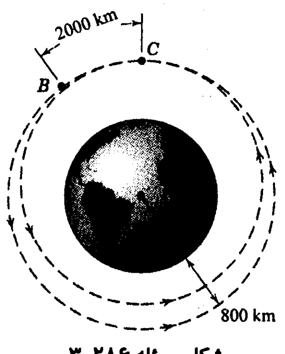
۲۸۵-۳ سرعت لازمه v_B در امتداد نشان داده شده را چنان تعیین کنید که مسیر فضاپیما مماس بر مدار مدور در نقطه C باشد. فاصله b چقدر بایستی باشد تا این مسیر امکان‌پذیر گردد؟

جواب $v_B = ۱۱۶۰۶\ \text{km/h}$ و $b = ۲۸۵۸۳\ \text{km}$



شکل مسئله ۲۸۵-۳

۲۸۶-۳ دو ماهواره B و C در ارتفاع ۸۰۰ km در یک مدار مدور قرار دارند. مطابق شکل، ماهواره B به اندازه ۲۰۰۰ km جلوتر از ماهواره C است. نشان دهید که ماهواره C می‌تواند با «ترمز گرفتن» به ماهواره B برسد. به طور مشخص، مقدار Δv چقدر باید باشد تا سرعت مدار مدور C به نحوی کاهش یابد که پس از یک دور حرکت کامل در مدار بیضوی، با ماهواره B تلاقی کند؟ کنترل کنید که ماهواره C در حرکت مدار بیضوی با زمین برخورد نکند.

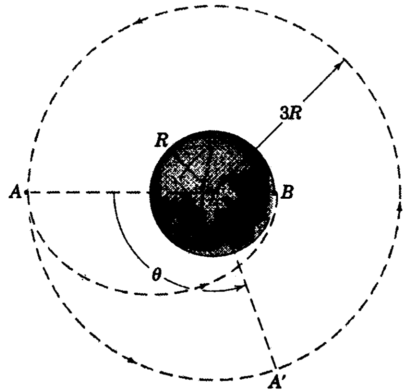


شکل مسئله ۲۸۶-۳

۲۸۷-۳ در مسئله ۲۸۶-۳، مقدار v لازمه کاهش سرعت Δv را برای ماهواره C در مدار مدورش، چنان تعیین کنید که تلاقی آن با ماهواره جلویی، نه پس از یک دور کامل بلکه بعد از دو دور کامل در مدار جدید بیضوی اتفاق افتد.

جواب $\Delta v = ۲۰۳\ \text{km/h}$

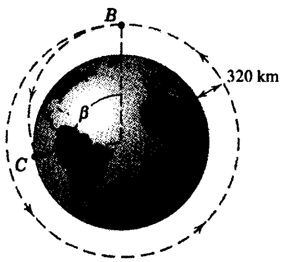
۲۸۸-۳ فضاپیمایی در یک مدار مدور به شعاع $3R$ حول کره ماه حرکت می‌کند. در نقطه A فضاپیما یک کاوشگر را به طرف ماه پرتاب می‌کند تا مطابق طرح، در نقطه B بر سطح ماه فرود آید. سرعت v_r کاوشگر را نسبت به فضاپیما، بلافاصله پس از پرتاب شدن بدست آورید. همچنین موقعیت θ فضاپیما را به هنگام رسیدن کاوشگر به نقطه B پیدا کنید.



شکل مسئله ۲۸۸-۳

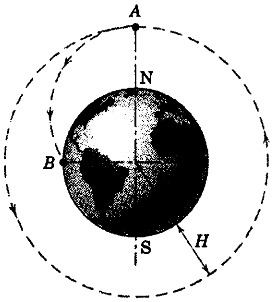
۲۸۹-۳ شاتل فضایی 80 Mg در ارتفاع 320 km در یک مدار مدور حرکت می‌کند. دو موتور تصحیح کننده مدار (OMS)، هر یک با نیروی رانش 27 kN روشن شده و به مدت ۱۵۰ ثانیه نیروی رانش معکوس ایجاد می‌کنند. زاویه β را که نشان دهنده تقاطع مسیر حرکت شاتل با سطح زمین می‌باشد، تعیین کنید. فرض کنید که در نقطه B کار سیستم OMS شاتل به اتمام رسیده و هیچگونه افت ارتفاعی در حین کار موتور رخ نمی‌دهد.

جواب $\beta = 151/3^\circ$



شکل مسئله ۲۸۹-۳

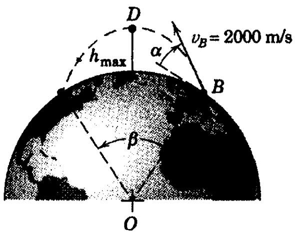
۲۹۰-۳ ماهواره‌ای در یک مدار قطبی مدور در ارتفاع H بالای زمین قرار داده می‌شود. هنگامی که ماهواره به بالای قطب شمال در نقطه A می‌رسد، موتور راکت کاهنده سرعت بکار افتاده و با ایجاد نیروی رانش منفی، سرعت را به قدری کاهش می‌دهد تا شرایط فرود در مدار استوا فراهم شود. برای کاهش سرعت Δv_A در نقطه A عبارتی بدست آورید. توجه داشته باشید که نقطه A نقطه اوج مسیر بیضی شکل می‌باشد.



شکل مسئله ۲۹۰-۳

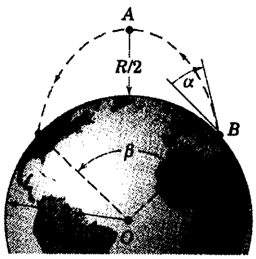
۲۹۱-۳ مطابق شکل، پرتابه‌ای از نقطه B با سرعت 2000 m/s تحت زاویه α برابر 30° پرتاب می‌شود. حداکثر ارتفاع h_{max} را تعیین کنید.

جواب $h_{max} = 53/9$ km



شکل مسئله ۲۹۱-۳

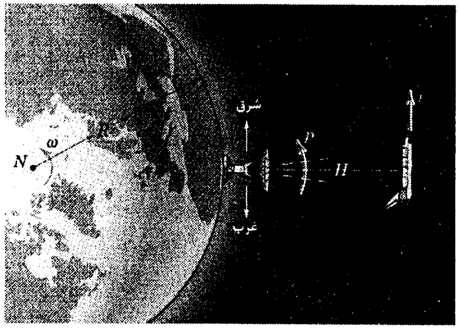
۲۹۲-۳ مقدار سرعت لازم جهت پرتاب در نقطه B را به گونه‌ای تعیین کنید که مسیر پرتابه، سطح زمین را طوری قطع کند که زاویه β برابر 90° شود. ارتفاع نقطه اوج مسیر $0/5R$ می‌باشد.



شکل مسئله ۲۹۲-۳

۳-۲۹۳ فضاپیمایی که در یک مدار استوایی از غرب به شرق حرکت می‌کند، توسط یک ایستگاه رادار واقع در استوا تعقیب می‌شود. اگر فضاپیما مستقیماً بالای ایستگاه رادار، دارای ارتفاع حضیض $H =$ ۱۵۰ km و سرعت v باشد و ارتفاع اوج ۱۵۰۰ km باشد، برای سرعت زاویه‌ای p، آنتن رادار (نسبت به زمین) عبارتی بدست آورید. p را محاسبه کنید. سرعت زاویه‌ای زمین برابر rad/s $\omega =$ ۰/۷۲۹۲(۱۰$^{-۴}$) می‌باشد.

جواب $\qquad p =$ ۰/۰۵۱٤ rad/s



شکل مسئله ۳-۲۹۳

۳-۲۹٤ ارتفاع حضیض و اوج یک ماهواره نسبت به زمین بترتیب h_p و h_a می‌باشد. رابطه‌ای که شعاع انحنای ρ_p مدار را در موقعیت حضیض بیان کند، بدست آورید. شعاع کره زمین R است.

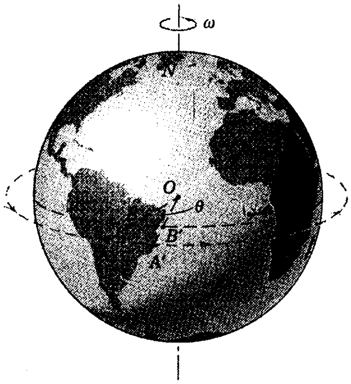
۳-۲۹۵ ماهواره همسنگ (سینکرون)، ماهواره‌ای است که سرعت حرکت آن در مدار مدورش این امکان را فراهم می‌کند که همواره در یک نقطه ثابت در بالای سطح زمین دوار قرار گیرد. فاصله H لازمه از سطح زمین تا ماهواره را تعیین کنید. موقعیت صفحه مداری ماهواره را مشخص کرده و برد زاویه‌ای β طول جغرافیایی بر روی سطح زمین را پیدا کنید که به ازای آن، ماهواره در خط مستقیم دید باشد.

جواب $\qquad H =$ ۳۵۸۰۰ km و $\beta =$ ۱٦۲/٦°

۳-۲۹٦ پریود مداری ماه را با فرض اینکه زمین ثابت است و بدون این فرض محاسبه کرده و با هم مقایسه نمایید.

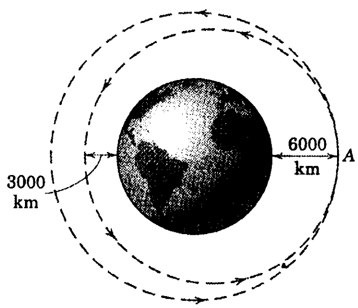
۳-۲۹۷ ماهواره A در یک مدار غرب به شرق در خط استوا در فاصله ۳۰۰ km از سطح زمین، مطابق شکل قرار دارد. ناظر B در خط استوا که ماهواره را مستقیماً بالای سر خود می‌بینند، در دور بعدی گردش ماهواره آن را مستقیماً در بالای سر خود در موقعیت B' مشاهده می‌کند. زیرا که در این مدت، زمین دوران کرده است. خط شعاعی واصل به ماهواره، در این مدت به اندازه $۲\pi+\theta$ خواهد چرخید و ناظر مزبور، پریود ظاهری τ' ماهواره را مقداری بزرگتر از پریود واقعی τ اندازه گیری خواهد کرد. مقدار τ' و $\tau'-\tau$ را محاسبه کنید.

جواب $\qquad \tau'-\tau =$ ٦ min ٤ s و $\tau' =$ ۱ h ۳٦ min ۲۵ s



شکل مسئله ۳-۲۹۷

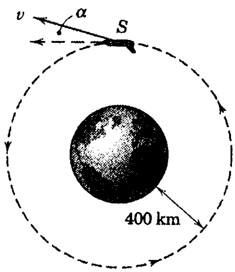
۳-۲۹۸ فضاپیمایی به جرم ۸۰۰ kg در ارتفاع ٦۰۰۰ km بالای زمین در یک مدار مدور حرکت می‌کند. می‌خواهیم مدار فضاپیما را به مدار بیضوی تغییر دهیم بطوریکه مطابق شکل، ارتفاع حضیض آن برابر ۳۰۰۰ km شود. انتقال به مدار بیضوی با روشن شدن موتور در نقطه A با نیروی رانش معکوس ۲۰۰۰ N انجام می‌شود. مدت زمان t لازم را که موتور باید روشن باشد، محاسبه کنید.



شکل مسئله ۳-۲۹۸

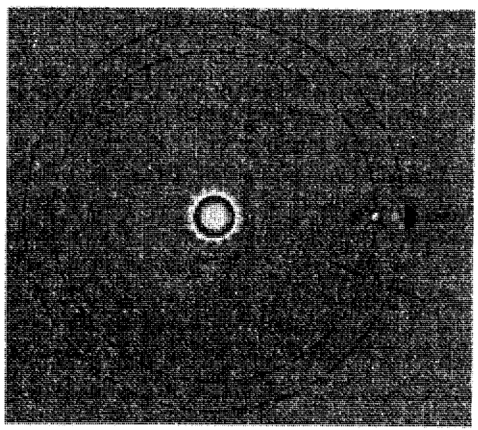
۲۹۹-۳ فضاپیمای S می‌بایست در یک مدار دایره‌ای در ارتفاع ۴۰۰ km قرار داده شود. به دلیل بد عمل کردن تجهیزات، سرعت استقرار v برای مدار مدور تصحیح می‌شود، اما سرعت اولیه $\mathbf{v}$ زاویه α را با امتداد مورد نظر می‌سازد. حداکثر خطای مجاز زاویه α برای آنکه فضاپیما با زمین برخورد نکند، چقدر است؟ از مقاومت جو صرفنظر کنید.

جواب $\alpha = \pm ۳/۳۹^\circ$



شکل مسئله ۲۹۹-۳

۳۰۰-۳ در سال ۱۹۹۵ یک فضاپیما به نام رصدخانه خورشیدی و دستگاه عکسبرداری آفتابی (SOHO) در یک مدار مدور در بین مدار زمین، گرد خورشید، مطابق شکل قرار داده شد. فاصله h را چنان تعیین کنید که پریود حرکت فضاپیما در مدار خود با پریود گردش زمین یکسان شود؛ بطوریکه فضاپیما همواره بین خورشید و زمین در یک مدار «هاله نور» باقی بماند.



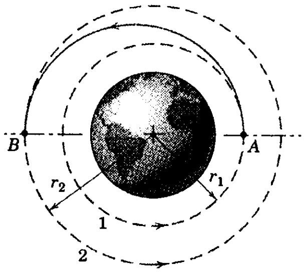
شکل مسئله ۳۰۰-۳

۳۰۱-۳ ◀ یک سفینه فضایی که در یک مدار مدور به شعاع r_1 در حال حرکت است، از طریق یک مسیر بیضی شکل از A تا B به یک مدار مدور بزرگتر به شعاع r_2 انتقال می‌یابد (این مسیر انتقال، به بیضی انتقال هومان معروف است). انتقال از طریق افزایش سرعت Δv_A در A و افزایش سرعت Δv_B در B انجام می‌شود. برای Δv_A و Δv_B عباراتی بر حسب شعاعهای نشان داده شده و شتاب جاذبه g در سطح زمین بدست آورید. اگر هر دو تغییر سرعت Δv مثبت باشد، سرعت مسیر ۲ چگونه می‌تواند کمتر از سرعت مسیر ۱ باشد؟ مقادیر Δv را به ازای $r_1 = (۶۳۷۱+۵۰۰)$ km و $r_2 = (۶۳۷۱+۳۵۸۰۰)$ km محاسبه کنید. توجه داشته باشید که r_2 به عنوان شعاع مداری انتخاب شده است که پریود آن با پریود زمین مساوی می‌باشد.

جواب

$$\Delta v_A = R\sqrt{\frac{g}{r_1}}\left(\sqrt{\frac{۲r_2}{r_1+r_2}}-۱\right) = ۲۳۷۰ \text{ m/s}$$

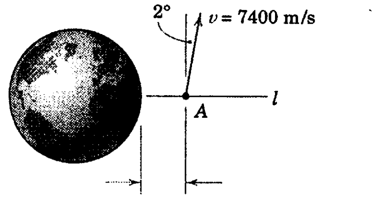
$$\Delta v_B = R\sqrt{\frac{g}{r_2}}\left(۱-\sqrt{\frac{۲r_1}{r_1+r_2}}\right) = ۱۴۴۷ \text{ m/s}$$



شکل مسئله ۳۰۱-۳

۳-۳۰۲ ◀ فضاپیمایی که در مدار بیضوی حرکت می‌کند، در یک لحظه خاص دارای سرعت و موقعیت نشان داده شده در شکل می‌باشد. طول a نیم محور کوچک مدار را تعیین کرده و زاویه حاده بین محور کوچک و خط l را پیدا کنید. آیا سرانجام فضاپیما با زمین برخورد می‌کند؟

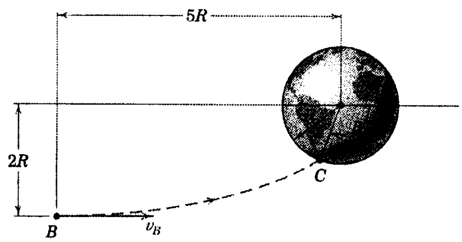
جواب خیر، $a = ۷٤٦۲\ \text{km}$ و $\alpha = ۷۲/۸^\circ$



شکل مسئله ۳-۳۰۲

۳-۳۰۳ ◀ ماهواره‌ای در نقطه B دارای سرعت $۳۲۰۰\ \text{m/s}$ در جهت نشان داده شده می‌باشد. زاویه β که معرف زاویه برخورد ماهواره با زمین در نقطه C می‌باشد را تعیین کنید.

جواب $\beta = ۱۰۹/۱^\circ$



شکل مسئله ۳-۳۰۳

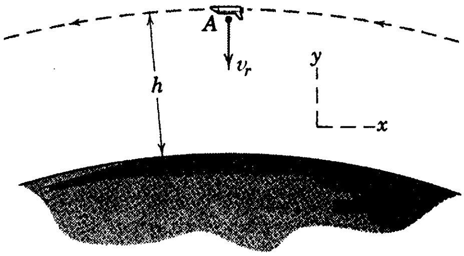
۳-۳۰٤ ◀ در لحظه‌ای که در شکل نشان داده شده، ماهواره آزمایشی A از یک شاتل مدارپیما با سرعت $v_r = ۱۰۰\ \text{m/s}$ نسبت به شاتل، مستقیماً به طرف مرکز زمین پرتاب می‌شود. شاتل در یک مدار مدور در ارتفاع $h = ۲۰۰\ \text{km}$ قرار دارد. برای مدار بیضوی حاصله ماهواره، مطلوبست: نیم محور بزرگ بیضی و موقعیت آن، پریود τ، خروج از مرکز e، سرعت اوج v_a، سرعت حضیض v_P، r_{max} و r_{min}. مدار ماهواره را ترسیم نمایید.

جواب $a = ٦۵۷۲\ \text{km}$ (موازی محور x)

$\tau = ۵۳۰۱\ \text{s}$ و $e = ۰/۰۱۲۸٤$

$v_a = ۷٦۹۰\ \text{m/s}$ و $v_P = ۷۸۹۰\ \text{m/s}$

$r_{max} = ٦/٦٦(۱۰^٦)\ \text{m}$ و $r_{min} = ٦/٤۹(۱۰^٦)\ \text{m}$



شکل مسئله ۳-۳۰٤

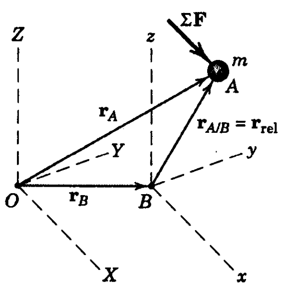
۱۴-۳ حرکت نسبی

تا اینجا، به منظور توسعه سینتیک حرکت ذره از قانون دوم نیوتن و معادلات کار ـ انرژی و ضربه ـ مومنتم در مسائلی استفاده کردیم که کلیه حرکتها نسبت به یک دستگاه مرجع ثابت مورد سنجش قرار گرفته بود. نزدیکترین مثالی که می‌توان برای دستگاه اینرسی «ثابت» عنوان کرد، عبارت است از دستگاه اینرسی اولیه یا دستگاه مرجع نجومی که شامل محورهایی است که به طور فرضی به ستارگان ثابت الصاق شده است. در اینصورت سایر دستگاههای مرجع، نظیر دستگاههایی که به زمین در حال حرکت متصل می‌شوند، دارای حرکت در فضا می‌باشند.

شتابهای نقاط الصاقی به زمین نسبت به دستگاه اینرسی اولیه کاملاً کوچک هستند و معمولاً در اغلب اندازه‌گیریها در سطح زمین از آنها صرفنظر می‌شود. مثلاً شتاب مرکز زمین در مدار نزدیک به دایره خودگرد خورشید، ثابت در نظر گرفته می‌شود و مقدار آن $۰/۰۰۵۹۳\ m/s^2$ (یا $۰/۰۱۹۴۶\ ft/sec^2$) می‌باشد و نیز شتاب در یک نقطه واقع بر استوا در سطح دریا نسبت به مرکز زمین ثابت دارای مقدار $۰/۰۳۳۹\ m/s^2$ (یا $۰/۱۱۱۳\ ft/sec^2$) است. واضح است که این شتابها در مقایسه با g و اکثر شتابهای مهم دیگر در مهندسی کوچک هستند. در نتیجه هنگامیکه فرض می‌کنیم محورهای مرجع الصاقی به زمین معادل دستگاه مرجع ثابت می‌باشند، فقط خطای کوچکی مرتکب شده‌ایم.

معادله حرکت نسبی

مطابق شکل ۲۲-۳، ذره A به جرم m رادر نظر می‌گیریم. حرکت این ذره از دید دستگاه x-y-z مورد توجه قرار گرفته که نسبت به دستگاه X-Y-Z دارای حرکت انتقالی می‌باشد. در نتیجه همیشه امتداد محورهای x-y-z با امتداد محورهای X-Y-Z موازی است. مبحث حرکت نسبی نسبت به دستگاه مرجع دوار در بخشهای ۵-۷ و ۷-۷ مطرح خواهد شد. شتاب مبدا B دستگاه x-y-z، $\mathbf{a}_B$ است. شتاب نقطه A نسبت به دستگاه x-y-z برابر است با: $\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{a}_{A/B} = \ddot{\mathbf{r}}_{A/B}$ و با توجه به اصل حرکت نسبی که در بخش ۸-۲ آمده، شتاب مطلق نقطه A چنین بدست می‌آید.



شکل ۲۲-۳

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{rel}$$

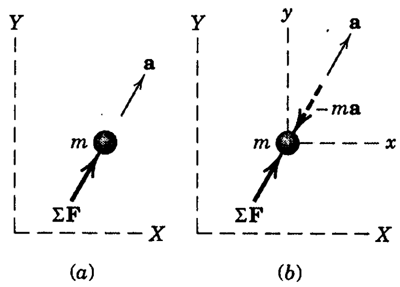
بنابراین، قانون دوم نیوتن $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_A$ چنین می‌شود:

$$\Sigma\mathbf{F} = m\,(\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{rel}) \tag{۳-۴۶}$$

طبق معمول، نیروی برآیند $\Sigma\mathbf{F}$ توسط ترسیمه آزاد کامل جسم مشخص می‌شود که از دید ناظری در دستگاه‌های x-y-z یا X-Y-Z یکسان است، به شرطی که فقط نیروهای واقعی بر ذره نمایش داده شده باشند. بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت که قانون دوم نیوتن در مورد یک سیستم شتابدار صادق نیست، چون $\Sigma\mathbf{F} \neq m\mathbf{a}_{rel}$.

اصل دالامبر

مطابق شکل ۲۳a–۳، هنگامی که یک ذره از دید دستگاه ثابت X-Y-Z مورد مشاهده قرار می‌گیرد، شتاب مطلق **a** آن اندازه گیری می‌شود و رابطه آشنای $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ اعمال می‌گردد. بر اساس شکل ۲۳b–۳، وقتی که ذره از دید دستگاه متحرکی که مبدا آن روی ذره قرار دارد، مشاهده شود، در دستگاه x-y-z ذره لزوماً در حال سکون و یا در حالت تعادل بنظر می‌رسد. در نتیجه، ناظری که به همراه دستگاه x-y-z شتاب گرفته، نتیجه گیری می‌کند که به ذره نیرویی برابر $-m\mathbf{a}$ جهت خنثی سازی $\Sigma\mathbf{F}$ اعمال می‌شود. این دیدگاه که مجوز حل مسئله دینامیکی به روش استاتیکی را می‌دهد، توسط دالامبر ارائه شده و در مقاله Trait[de dynamique در سال ۱۷٤۳ منتشر گردید.



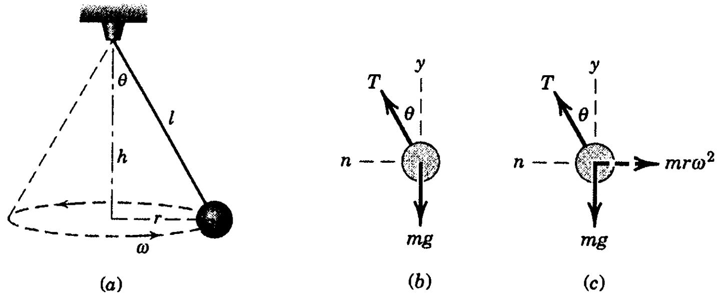
(a) (b)

شکل ۲۳–۳

در این دیدگاه، فقط کافی است که معادله به صورت $\Sigma\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$ بازنویسی شود که بیانگر آن است که در صورتی که $-m\mathbf{a}$ به عنوان یک نیرو در نظر گرفته شود، مجموع نیروهای وارده بر ذره صفر است. این نیروی فرضی به نام *نیروی اینرسی* و حالت ساختگی معادله تعادل به *تعادل دینامیکی* شناخته می‌شود. تبدیل ظاهری یک مسئله دینامیکی به استاتیکی به *اصل دالامبر* معروف شده است.

در مورد تفسیر اولیه اصل دالامبر، دیدگاههای متفاوتی مطرح است. اما جنبه تاریخی این اصل که شهرت بیشتری دارد در این کتاب مورد توجه قرار گرفته است. این اصل زمانی ارائه شد که درک و تجزیه در دینامیک فوق‌العاده محدود بود و فهم آن در قالب اصول تفکر استاتیک میسر بود. امروزه گنجینه‌ای از دانش و تجربه در زمینه پدیده‌های دینامیکی موجود است و دیدگاه تفکر دینامیکی را بجای استاتیکی قویاً مورد حمایت قرار می‌دهد. بنابراین بکارگیری حالت ساختگی معادله، موجه نبوده و مورد سئوال قرار می‌گیرد. به عنوان روش درک اصول دینامیکی، پافشاری در استفاده مداوم از اصول استاتیک به سختی مورد پذیرش قرار می‌گیرد؛ به خصوص از این دید که در حال حاضر تحقیقات مستمری برای درک و توصیف پدیده‌های فیزیکی با مستقیم‌ترین شکل آن صورت می‌گیرد.

در اینجا فقط یک مثال ساده از روش مرسوم به اصل دالامبر ذکر می‌شود. طبق شکل a ۲٤–۳، آونگ مخروطی به جرم m در صفحه افقی به شعاع r با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند. در بکارگیری مستقیم معادله حرکت $\Sigma\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_n$ در امتداد n شتاب، ترسیمه آزاد جسم در قسمت b شکل نشان می‌دهد که $T\sin\theta = m\,r\,\omega^2$ است. با نوشتن رابطه تعادل در امتداد y یعنی $T\cos\theta - mg = 0$ ، مجهولات T و θ مشخص می‌شوند. اما اگر محورهای مرجع به ذره الصاق شده باشند، تعادل نسبی ذره نسبت به این محورها نمایان خواهد شد. بنابراین، نیروی اینرسی $-m\,\mathbf{a}$ را باید افزود که مطابق قسمت c شکل، به معنای اعمال نیروی $m\,r\omega^2$ در خلاف جهت شتاب است. از این ترسیمه کاذب نتیجه می‌شود که مجموع نیروها در امتداد n صفر بوده و داریم: $T\sin\theta - m\,r\,\omega^2 = 0$ که البته همان نتیجه قبلی است.



شکل۲۴-۳

می‌توان نتیجه‌گیری کرد که فرمول‌بندی اخیر هیچگونه مزیتی را در بر ندارد. توصیه مولفین کتاب در عدم استفاده از روش اخیر است. زیرا حل مسئله را ساده نکرده و یک نیروی مجازی را به ترسیمه آزاد جسم اضافه می‌کند. در حالتی که ذره در یک مسیر مدور حرکت می‌کند، این نیروی مجازی *نیروی گریز از مرکز* نامیده می‌شود، چون جهت آن به طرف بیرون از مرکز و خلاف جهت شتاب است. شما باید بیاد داشته باشید که هیچ نیروی گریز از مرکز واقعی به ذره اعمال نمی‌شود. تنها نیروی واقعی که می‌توان آن را به درستی نیروی گریز از مرکز نامید، مولفه افقی نیروی کشش T طناب است که *توسط* ذره بر طناب متصل به آن اعمال می‌شود.

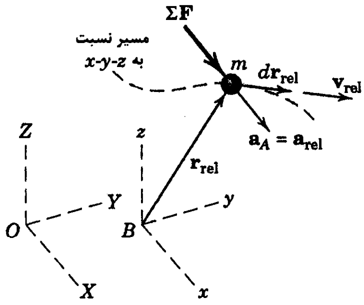
دستگاههای غیر چرخشی با سرعت ثابت

در مبحث حرکت ذره نسبت به دستگاه مرجع متحرک، توجه به حالت خاصی که دستگاه مرجع با سرعت ثابت دارای حرکت غیر چرخشی (انتقالی) است، حائز اهمیت است. اگر محورهای x-y-z شکل ۲۲-۳ دارای سرعت ثابت باشند، در اینصورت $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$ و شتاب ذره $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_{\text{rel}}$ می‌شوند. لذا معادله ٤٦-۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_{\text{rel}}} \qquad (۳-٤۷)$$

این رابطه به ما می‌گوید که قانون دوم نیوتن در مورد سنجش‌هایی درست است که در یک دستگاه متحرک با سرعت ثابت انجام می‌شوند. چنین دستگاهی به دستگاه مختصات اینرسی یا دستگاه مرجع نیوتنی موسوم است. ناظرهایی که در دستگاه متحرک و ثابت قرار دارند، قضاوتهای یکسانی را در مورد نیروی برآیند وارد بر ذره در ترسیمه آزاد جسم خواهند داشت؛ مشروط بر این که هیچیک از آنان از نیروهای موسوم به «نیروهای اینرسی» استفاده نکنند.

حال دو سئوال موازی را در مورد اعتبار معادله کار ـ انرژی و معادله ضربه ـ مومنتم در دستگاه مختصات غیر دوار متحرک با سرعت ثابت بررسی می‌کنیم. دوباره محورهای x-y-z شکل ۲۲-۳ با سرعت $\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B$ نسبت به محورهای ثابت X-Y-Z حرکت می‌کنند. مسیر ذره A نسبت به محورهای x-y-z که با $\mathbf{r}_{\text{rel}}$ معین می‌شود، به طور شماتیک در شکل ۲۵-۳ نشان داده شده است. کار انجام شده $\Sigma\mathbf{F}$ نسبت به محورهای x-y-z برابر است با: $dU_{\text{rel}} = \Sigma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_{\text{rel}}$. اما چون $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$ است، داریم: $\Sigma\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}_A = m\,\mathbf{a}_{\text{rel}}$. همچنین با توجه به رابطه $a_t\,ds = v\,dv$ که در بخش ۵-۲، حرکت منحنی الخط، مطرح شد، رابطه $\mathbf{a}_{\text{rel}}\cdot d\mathbf{r}_{\text{rel}} = \mathbf{v}_{\text{rel}}\cdot d\,\mathbf{v}_{\text{rel}}$ هم برقرار است. در نتیجه داریم:



شکل ۲۵-۳

$$dU_{rel} = m\,\mathbf{a}_{rel}\cdot d\mathbf{r}_{rel} = m\,v_{rel}\,dv_{rel} = d\left(\frac{1}{2}mv_{rel}^2\right)$$

انرژی جنبشی نسبت به محورهای x-y-z را به صورت $T_{rel} = \frac{1}{2}mv_{rel}^2$ تعیین کرده و حال داریم:

$$\boxed{dU_{rel} = dT_{rel}} \quad \text{یا} \quad \boxed{U_{rel} = \Delta T_{rel}} \qquad (۳-۴۸)$$

رابطه فوق نشان می‌دهد که در مورد سنجش‌هایی که نسبت به دستگاه متحرک با سرعت ثابت انجام می‌شود، معادله کار ـ انرژی درست است.

نسبت به محورهای x-y-z، ضربه وارده بر ذره در مدت زمان dt برابر است با:

$$\Sigma\mathbf{F}dt = m\,\mathbf{a}_A\,dt = m\,\mathbf{a}_{rel}\,dt$$

اما $m\,\mathbf{a}_{rel}\,dt = m\,d\mathbf{v}_{rel} = d(m\mathbf{v}_{rel})$ است. بنابراین:

$$\Sigma\mathbf{F}dt = d(m\,\mathbf{v}_{rel})$$

مومنتم خطی ذره را نسبت به محورهای x-y-z به صورت $\mathbf{G}_{rel} = m\mathbf{v}_{rel}$ تعریف می‌کنیم که به ما رابطه $\Sigma\mathbf{F}dt = d\mathbf{G}_{rel}$ را می‌دهد. با تقسیم این رابطه بر dt و انتگرال گیری داریم:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}_{rel}} \quad \text{و} \quad \boxed{\int\Sigma\mathbf{F}dt = \Delta\mathbf{G}_{rel}} \qquad (۳-۴۹)$$

در نتیجه معادلات ضربه ـ مومنتم که در یک دستگاه ثابت برقرار بودند، هم اکنون در مورد سنجش‌هایی که نسبت به دستگاه انتقال با سرعت ثابت انجام می‌شود نیز درست است.

نهایتاً، مومنتم زاویه‌ای نسبی ذره حول یک نقطه در دستگاه x-y-z، نظیر مبدا B، به صورت گشتاور مومنتم خطی نسبی تعریف می‌شود. در نتیجه، $\mathbf{H}_{B_{rel}} = \mathbf{r}_{rel}\times\mathbf{G}_{rel}$. با مشتق گیری از رابطه اخیر نسبت به زمان داریم:

$$\dot{\mathbf{H}}_{B_{rel}} = \dot{\mathbf{r}}_{rel}\times\mathbf{G}_{rel} + \mathbf{r}_{rel}\times\dot{\mathbf{G}}_{rel}$$

جمله اول چیزی جز $\mathbf{v}_{rel}\times m\,\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{0}$ نیست و جمله دوم نیز به صورت $\mathbf{r}_{rel}\times\Sigma\mathbf{F} = \Sigma\mathbf{M}_B$ نوشته می‌شودکه در واقع گشتاور همه نیروهای وارد بر m می‌باشد. در نتیجه داریم:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_B = \dot{\mathbf{H}}_{B_{rel}}} \qquad (۳-۵۰)$$

که نشان می‌دهد که رابطه گشتاور ـ مومنتم زاویه‌ای، در دستگاه غیر دوار با سرعت ثابت درست است.

گرچه روابط کار ـ انرژی و ضربه ـ مومنتم در دستگاه انتقالی با سرعت ثابت درست بوده، ولی روابط مستقلی که بیانگر کار، انرژی جنبشی و مومنتم در دستگاه ثابت هستند با روابط متناظر در دستگاه متحرک متفاوت هستند. در نتیجه:

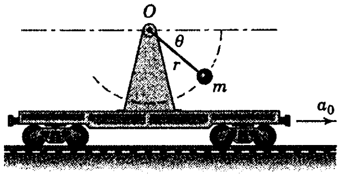
$$(dU = \Sigma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_A) \neq (dU_{\text{rel}} = \Sigma\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}_{\text{rel}})$$

$$\left(T = \frac{1}{2}mv_A^2\right) \neq \left(T_{\text{rel}} = \frac{1}{2}mv_{\text{rel}}^2\right)$$

$$(\mathbf{G} = m\mathbf{v}_A) \neq (\mathbf{G}_{\text{rel}} = m\mathbf{v}_{\text{rel}})$$

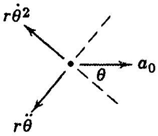
معادلات ۴۷-۳ تا ۵۰-۳، اعتبار معادلات سینتیکی نیوتن را در هر دستگاه غیر دوار که با سرعت ثابت حرکت می‌کند به اثبات رساندند. ما توانستیم این نتایج را از این واقعیت که رابطه $\Sigma\mathbf{F} = m\,\mathbf{a}$ به شتاب بستگی دارد نه به سرعت، بدست آوریم. همچنین می‌توانیم این نتیجه را بگیریم که هیچ آزمایشی وجود ندارد که بتواند در داخل و یا نسبت به یک دستگاه مرجع غیر دوار با سرعت ثابت (دستگاه مرجع نیوتن) انجام پذیرد و سرعت مطلق را مشخص کند. نتایج حاصل از هر آزمایش مکانیکی در هر دستگاه نیوتنی یکسان است.

مسئله نمونه ۲۸-۳

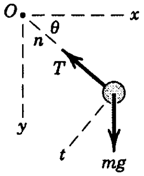


آونگ ساده‌ای به جرم m و به طول r که از واگن روباز آویزان است، مطابق شکل دارای شتاب افقی ثابت a_0 می‌باشد. اگر آونگ از موقعیت $\theta = 0$ از حالت سکون نسبت به واگن رها شود، به ازای هر مقدار θ رابطه‌ای برای کشش T موجود در میله سبک نگهدارنده آن بدست آورید. همچنین به ازای $\theta = \pi/2$ و $\theta = \pi$ کشش T را پیدا کنید.

حل: برای سهولت حل مسئله، دستگاه مختصات x-y متحرک را به مبدا O واقع بر وسیله در حال انتقال، متصل می‌کنیم. استفاده از دستگاه مختصات عمودی و مماسی n و t در مورد این سیستم طبیعی به نظر می‌رسد، زیرا در صفحه x-y حرکت بر روی مسیر دایره‌ای را داریم. شتاب جرم m به کمک معادله شتاب نسبی بدست می‌آید.



مولفه‌های شتاب



ترسیمه آزاد جسم

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_{rel}$$

که $\mathbf{a}_{rel}$ شتابی است که توسط ناظر سوار بر وسیله، مورد سنجش قرار می‌گیرد. ولی مولفه n را برابر $r\dot{\theta}^2$ و مولفه t را برابر $r\ddot{\theta}$ اندازه گیری می‌کند. سه مولفه شتاب مطلق جرم m در نمای جداگانه‌ای نشان داده شده‌اند.

ابتدا قانون دوم نیوتن را در راستای t اعمال می‌کنیم و داریم:

$$[\Sigma F_t = m a_t] \qquad mg\cos\theta = m\left(r\ddot{\theta} - a_0 \sin\theta\right)$$ ❶

$$r\ddot{\theta} = g\cos\theta + a_0 \sin\theta$$

با انتگرال گیری، $\dot{\theta}$ به صورت تابعی از θ بدست می‌آید.

$$[\dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, d\theta] \qquad \int_0^{\dot{\theta}} \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} \frac{1}{r}\left(g\cos\theta + a_0\sin\theta\right)d\theta$$

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} = \frac{1}{r}\left[g\sin\theta + a_0\left(1-\cos\theta\right)\right]$$

حال قانون دوم نیوتن را در راستای n اعمال می‌کنیم و توجه داریم که مولفه n شتاب مطلق برابر است با: $r\dot{\theta}^2 - a_0\cos\theta$.

$$[\Sigma F_n = m a_n] \qquad T - mg\sin\theta = m\left(r\dot{\theta}^2 - a_0\cos\theta\right) = m\left[2g\sin\theta + 2a_0\left(1-\cos\theta\right) - a_0\cos\theta\right]$$ ❷

جواب $\qquad T = m\left[3g\sin\theta + a_0\left(2 - 3\cos\theta\right)\right]$

به ازای $\theta = \pi/2$ و $\theta = \pi$ داریم:

جواب $\qquad T_{\pi/2} = m\left[3g(1) + a_0(2-0)\right] = m\left(3g + 2a_0\right)$

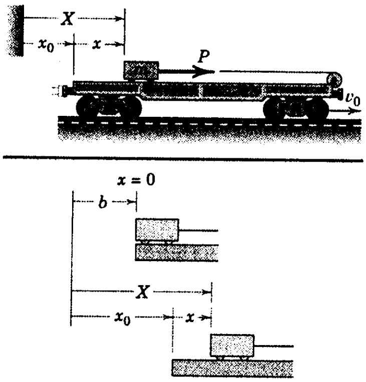
جواب $\qquad T_{\pi} = m\left[3g(0) + a_0\left(2 - 3[-1]\right)\right] = 5ma_0$

نکات مفید

❶ ابتدا راستای t را انتخاب می‌کنیم. زیرا در معادله مربوط به راستای n، مجهول T را داریم که خود بر حسب $\dot{\theta}^2$ می‌باشد و با انتگرال‌گیری از $\ddot{\theta}$ بدست می‌آید.

❷ مطمئن باشید که با تقسیم بر r^2 از رابطه $v\,dv = a_t\,ds$ به رابطه $\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\,d\theta$ می‌رسیم.

مسئله نمونه ۲۹-۳



واگن روباز با سرعت ثابت v_0 حرکت می‌کند؛ در حالی که وینچ تعبیه شده بر روی آن، کشش ثابت P را توسط کابل به ارابه کوچک اعمال می‌کند. جرم ارابه m بوده و از حالت سکون نسبت به واگن در موقعیت $x = 0$ آزادانه بر روی سطح افقی واگن حرکت می‌کند؛ در حالیکه در آن لحظه $X = x_0 = b$ است. در دو حالت، معادله کار ـ انرژی را در مورد ارابه اعمال کنید: اول، از دید ناظری که با دستگاه مرجع متصل به وسیله در حال حرکت است و دوم، از دید ناظری که بر روی زمین قرار دارد. سازگاری بین دو رابطه را نشان دهید.

حل: نسبت به ناظر واقع بر روی واگن، کار انجام شده توسط P چنین است:

❶ برای P ثابت $\qquad U_{rel} = \int_0^x P\,dx = Px$

تغییر انرژی جنبشی نسبت به واگن عبارت است از:

$$\Delta T_{rel} = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 - 0\right)$$

از دید ناظر متحرک، معادله کار ـ انرژی چنین می‌شود:

$$[U_{rel} = \Delta T_{rel}] \qquad Px = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

کار انجام شده توسط P از دید ناظر روی زمین چنین است:

$$U = \int_b^X P\,dX = P(X - b)$$

تغییر انرژی جنبشی اندازه گیری شده از روی زمین برابر است:

❷
$$\Delta T = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 - v_0^2\right)$$

معادله کار ـ انرژی از دید ناظر ثابت چنین می‌شود:

$$[U = \Delta T] \qquad P(X - b) = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 - v_0^2\right)$$

به منظور ایجاد ارتباط بین این معادله و معادله نظیر آن از دید ناظر متحرک، جایگزینی زیر را انجام می‌دهیم.

$$X = x_0 + x \quad \text{و} \quad \dot{X} = v_0 + \dot{x} \quad \text{و} \quad \ddot{X} = \ddot{x}$$

در نتیجه:

$$P(X-b) = Px + P(x_0 - b) = Px + m\ddot{x}(x_0 - b)$$
$$= Px + m\ddot{x}\upsilon_0 t = Px + m\upsilon_0 \dot{x}$$ ❸

و

$$\dot{X}^2 - \upsilon_0^2 = \left(\upsilon_0^2 + \dot{x}^2 + 2\upsilon_0\dot{x} - \upsilon_0^2\right) = \dot{x}^2 + 2\upsilon_0\dot{x}$$

حل معادله کار ـ انرژی از دید ناظر ثابت چنین می‌شود:

$$Px + m\upsilon_0\dot{x} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + m\upsilon_0\dot{x}$$

که صرفاً داریم: $Px = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ و قبلاً برای ناظر متحرک بدست آمده بود. بنابراین، می‌بینیم که تفاضل بین دو رابطه کار ـ انرژی به صورت زیر است.

$$U - U_{\text{rel}} = T - T_{\text{rel}} = m\upsilon_0\dot{x}$$

نکات مفید

❶ تنها مختصی را که ناظر در حال حرکت می‌تواند اندازه بگیرد، x است.

❷ از دیدگاه ناظر روی زمین، سرعت اولیه قطعه، υ_0 است. بنابراین انرژی جنبشی اولیه آن $\frac{1}{2}m\upsilon_0^2$ می‌باشد.

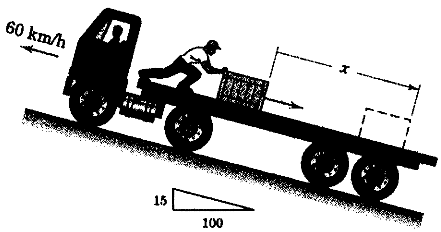
❸ نماد t بیانگر زمان حرکت از $x=0$ تا $x=x$ می‌باشد. تغییر مکان $x_0 - b$ ارابه برابر است با حاصلضرب سرعت υ_0 آن در زمان t یعنی، $\upsilon_0 t = x_0 - b$. همچنین از آنجایی که حاصلضرب شتاب ثابت در زمان، با تغییر سرعت برابر است، پس $\ddot{x}t = \dot{x}$.

مسائل

مسائل مقدماتی

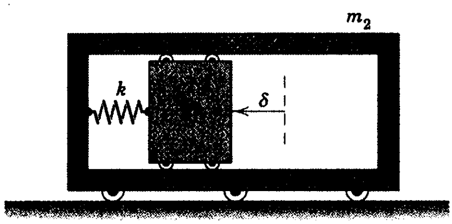
۳-۳۰۵ تریلی با سرعت ۶۰ km/h در حال حرکت به طرف بالای شیب ۱۵ درصد می‌باشد که صندوق به جرم ۱۰۰ kg به سوی عقب تریلی هل داده می‌شود و سرعت نسبی اولیه $\dot{x} = 3$ m/s را کسب می‌کند. اگر صندوق مزبور فاصله $x = 2$ m را روی کفی تریلی بپیماید و سپس متوقف شود، ضریب اصطکاک سینتیکی μ_k بین صندوق و کفی تریلی را حساب کنید.

جواب $\mu_k = ۰/۳۸۲$



شکل مسئله ۳-۳۰۵

۳-۳۰۶ اگر فنری با ثابت k به اندازه δ، مطابق شکل فشرده شده و سپس رها شود، شتاب بلوک به جرم m_1 را نسبت به قاب به جرم m_2 تعیین کنید. مجموعه ابتدا در حال سکون بوده است.



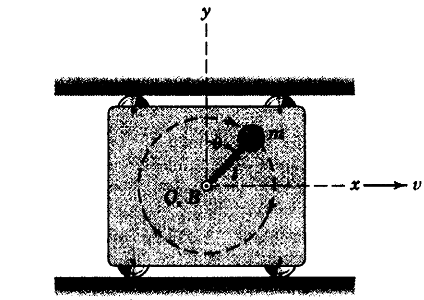
شکل مسئله ۳-۳۰۶

۳-۳۰۷ ارابه‌ای که محورهای x-y به آن الصاق شده‌اند، با سرعت $v = 2$ m/s به سمت راست حرکت می‌کند. همزمان با آن، میله سبکی به طول $l = ۰/۵$ m با سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta} = 2$ rad/s حول نقطه B ارابه در حال دوران است. اگر جرم گوی $m = 3$ kg باشد، به ازای $\theta = 0$ کمیتهای $\mathbf{G}$، $\mathbf{G}_{rel}$، T، T_{rel}، $\mathbf{H}_O$ و $\mathbf{H}_{B_{rel}}$ که اندیس rel بیانگر سنجش نسبت به محورهای x-y می‌باشد را بدست آورید. نقطه O نقطه ثابتی از ارابه است که در لحظه مورد نظر بر نقطه B منطبق شده است.

جواب $\mathbf{G} = 9\mathbf{i}$ kg·m/s و $\mathbf{G}_{rel} = 3\mathbf{i}$ kg·m/s

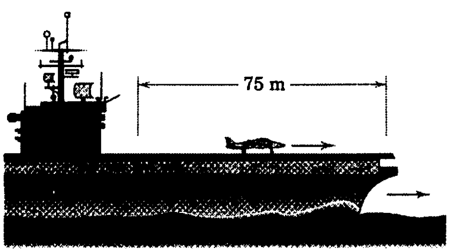
$T = ۱۳/۵$ J و $T_{rel} = ۱/۵$ J

$\mathbf{H}_O = -۴/۵\,\mathbf{k}$ kg·m²/s و $\mathbf{H}_{B_{rel}} = -۱/۵\,\mathbf{k}$ kg·m²/s



شکل مسئله ۳-۳۰۷

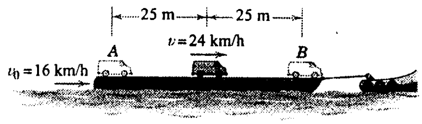
۳-۳۰۸ ناو هواپیمابر با سرعت ثابت در حال حرکت است و یک هواپیمای جت به جرم ۳ Mg پس از طی مسافت ۷۵ m بر روی عرشه، بوسیله یک پرتاب کننده موتور بخار، پرتاب می‌شود. اگر هواپیما، عرشه را با سرعت ۲۴۰ km/h نسبت به ناو ترک کند و نیز نیروی رانش جت در هنگام سرعت گیری برای برخاستن برابر مقدار ثابت ۲۲ kN باشد، نیروی ثابت P را که در طول باند ۷۵ متری از طرف موتور پرتاب کننده به هواپیمای جت وارد می‌شود، محاسبه کنید.



شکل مسئله ۳-۳۰۸

۳-۳۰۹ روی یک کرجی که با سرعت ثابت $v_{\circ}$ = ۱۶ km/h کشیده می‌شود. یک کامیونت ۲۰۰۰ کیلوگرمی از موقعیت A به موقعیت B می‌رود. کامیونت که در موقعیت A نسبت به کرجی در حال سکون است، شروع به حرکت کرده و با یک حرکت شتابدار، پس از طی مسافت ۲۵ m سرعتش به v = ۲٤ km/h می‌رسد و سپس با یک حرکت کند شونده با همان اندازه شتاب قبل، متوقف می‌شود. اندازه نیروی خالص F بین لاستیکهای کامیونت و کرجی را در طی این حرکت، تعیین کنید.

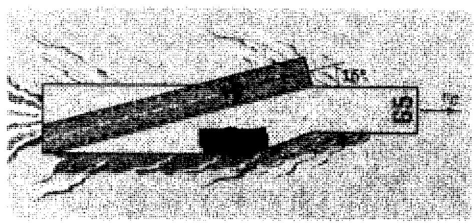
جواب F = ۱۷۷۸ N



شکل مسئله ۳-۳۰۹

مسائل ویژه

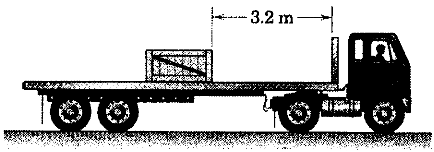
۳-۳۱۰ موتور پرتاب کننده در یک ناو هواپیمابر به هواپیمای جت به جرم ۷ Mg شتاب ثابتی را می‌دهد و آنرا به مسافت ۱۰۰ m بر روی باند زاویه‌دار، پیش می‌راند. ناو با سرعت ثابت v_C = ۱٦ m/s در حال حرکت است. اگر سرعت مطلق لازم جهت برخاستن هواپیما ۹۰ m/s باشد، نیروی خالص F که باید توسط موتور پرتاب کننده و موتورهای هواپیما تامین شود، چقدر است؟



شکل مسئله ۳-۳۱۰

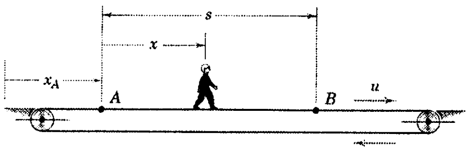
۳-۳۱۱ ضرایب اصطکاک بین کفی کامیون و صندوقچه برابر μ_s = ۰/۸ و μ_k = ۰/۷ می‌باشند. ضرایب اصطکاک سینتیکی بین چرخهای کامیون و سطح جاده ۰/۹ است. اگر کامیون که با سرعت ۱۵ m/s در حال حرکت است با حداکثر ترمز (چرخها قفل شوند) متوقف گردد، تعیین کنید که نهایتا صندوقچه در چه موقعیتی از کفی کامیون به حالت سکون می‌رسد و یا اینکه با چه سرعت v_{rel} نسبت به کامیون به دیواره جلویی کفی کامیون برخورد می‌کند.

جواب v_{rel} = ۲/٤٦ m/s



شکل مسئله ۳-۳۱۱

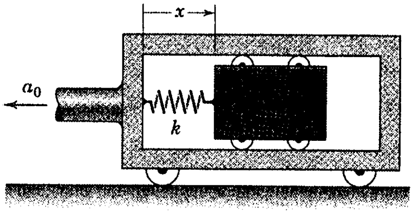
۳-۳۱۲ پسری به جرم m در ابتدا نسبت به نقاله متحرک به حالت سکون ایستاده و نقاله دارای سرعت ثابت افقی u می‌باشد. وی تصمیم می‌گیرد، سریعتر حرکت کند و از نقطه A شروع به حرکت کرده و آرام آرام به سرعتش می‌افزاید تا اینکه در هنگام رسیدن به نقطه B سرعتش نسبت به نقاله $\dot{x} = v$ می‌گردد. در مدت زمانی که سرعت پسر افزایش یافته و شتاب می‌گیرد، وی نیروی افقی متوسط F بین کفشهایش و نقاله ایجاد می‌کند. معادلات کار ـ انرژی را برای حرکتهای مطلق و نسبی پسر بنویسید و معنای جمله muv را شرح دهید.



شکل مسئله ۳-۳۱۲

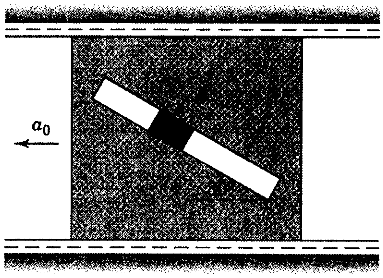
۳-۳۱۳ بلوکی به جرم m توسط فنری به سختی k به قاب متصل شده است و در امتداد افق با اصطکاک ناچیزی درون قاب حرکت می‌کند. در حالتی که در $x = x_{\circ}$ فنر بدون فشردگی باشد، قاب و بلوک در حالت سکون هستند. اگر به قاب شتاب ثابت $a_{\circ}$ اعمال شود، حداکثر سرعت بلوک نسبت به قاب $\dot{x}_{max} = (v_{rel})_{max}$ را تعیین کنید.

جواب $(v_{rel})_{max} = a_{\circ}\sqrt{m/k}$



شکل مسئله ۳۱۳-۳

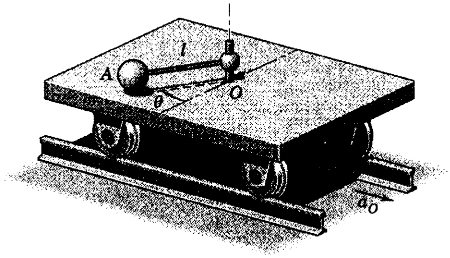
۳۱۴-۳ لغزنده A به جرم ۲ kg بـا اصطکـاک نـاچیز درون شیار ۳۰° در صفحه لغزنده قائم حرکت می‌کنـد. شـتاب افقی $a_{\circ}$ صفحه چقدر باشد تا شـتاب مطلق لغزنـده بـه طـور عمودی و به سمت پایین باشد. مقدار نـیروی متنـاظر R کـه از طرف شیار به لغزنده وارد می‌شود، چقدر است؟



شکل مسئله ۳۱۴-۳

۳۱۵-۳ گوی A به جرم ۱۰ kg به میله سبک وزنی بـه طـول $l = ۰/۸$ m متصـل شـده اسـت. جـرم ارابـه بـه تنـهایی ۲۵۰ kg می‌باشد و مطابق شکل با شتاب a_O حرکـت می‌کنـد. اگر موقعی کـه $\theta = ۹۰°$ اسـت $\dot{\theta} = ۳$ rad/s باشـد، انـــرژی جنبشـی T مجموعـه را بـه شـرطی کـه ارابـه دارای ســرعت ۰/۸ m/s در دو جهت زیـر باشـد، بدسـت آوریـد. (الـف) در جهت a_O و (ب) در خلاف جهت a_O . گوی را یک ذره تلقی کنید.

جواب (الف) $T = ۱۱۲$ J و (ب) $T = ۱۱۲$ J

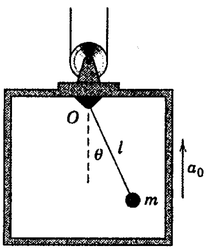


شکل مسئله ۳۱۵-۳

۳۱۶-۳ مسئله ۳۱۵-۳ را مجددا در نظر بگیرید کـه در آن جرم گوی $m = ۱۰$ kg و طول میله سبک $l = ۰/۸$ m است. مجموعه گوی ـ میله می‌تواند آزادانه حول محور قائم گذرنـده بر نقطه O دوران کند. در ابتدا ارابه، میلـه و گوی در موقعیت $\theta = ۰$ در حال سکون هستند تا اینکـه بـه ارابـه شـتاب ثـابت $a_O = ۳$ m/s^2 داده می‌شود. رابطه‌ای که کشش T در میله را بـه صورت تابعی از θ بیان کند، بدست آوریـد. همچنیـن T را در موقعیت $\theta = \pi/۲$ محاسبه کنید.

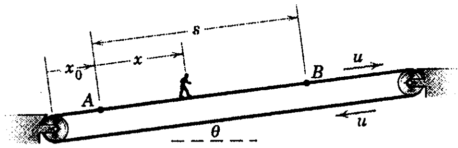
۳۱۷-۳ آونگ ساده‌ای مطابق شکل و در آسانسوری که به سمت بالا شتاب گرفته، قرار می‌گیرد. اگر آونـگ بـه انـدازه $\theta_{\circ}$ از موقعیت قائم جابجا شده و سپس از حالت سکون نسبت به آسانسور رها شود، کشش $T_{\circ}$ در میله سبک نگهدارنده را بـه ازای $\theta = ۰$ بدست آورید. جواب خود را بـه ازای $\theta_{\circ} = \pi / ۲$ مورد ارزیابی قرار دهید.

جواب $T_{\circ} = m(g + a_{\circ})(۳ - ۲\cos\theta_{\circ})$



شکل مسئله ۳۱۷-۳

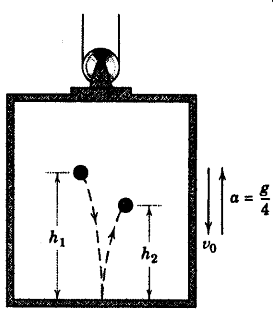
۳-۳۱۸ ◀ پسری به جرم m در ابتدا نسبت به نقاله متحرکی به حالت سکون ایستاده، در حالی که نقاله مزبور دارای شیب θ و سرعت ثابت u می‌باشد. پسر تصمیم می‌گیرد سریعتر حرکت کند و از نقطه A شروع به حرکت نموده و آرام آرام به سرعتش می‌افزاید تا اینکه در هنگام رسیدن به نقطه B سرعتش نسبت به نقاله v_r می‌گردد. در مدت زمانی که سرعت پسر افزایش یافته و شتاب مئ‌گیرد، وی نیروی افقی متوسط F بین کفشهایش و نقاله را ایجاد می‌کند. معادلات کار ـ انرژی را برای حرکت‌های مطلق و نسبی پسر، بین نقاط A و B بنویسید و معنای جمله muv را شرح دهید. اگر جرم پسر ۶۰ kg و $u = ۰/۶$ m/s ، $s = ۱۰$ m و $\theta = ۱۰°$ باشد، توان P_{rel} تولید شده توسط پسر را در حالتی که سرعت وی نسبت به نقاله ۰/۷۵ m/s است، محاسبه کنید.



شکل مسئله ۳-۳۱۸

۳-۳۱۹ ◀ توپی که در فاصله h_1 از کف آسانسوری قرار دارد، از حالت سکون نسبت به آن رها می‌شود. سرعت آسانسور در لحظه رهایی توپ، برابر v_0 می‌باشد. ارتفاع h_2 را پس از جهش در حالات زیر تعیین کنید. (الف) اگر v_0 ثابت باشد و (ب) اگر در لحظه رهایی توپ، شتاب رو به بالای آسانسور $a = g/4$ باشد. ضریب بازگشت در برخورد e می‌باشد.

جواب $h_2 = e^2 h_1$ (الف) و (ب)

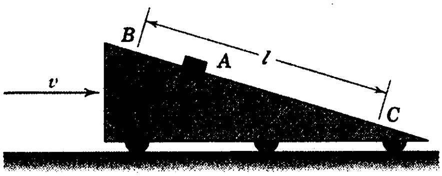


شکل مسئله ۳-۳۱۹

۳-۳۲۰ ◀ لغزنده کوچک A با اصطکاک ناچیز بر روی گوهٔ شیبداری به سمت پایین حرکت می‌کند که گوه نیز با سرعت ثابت $v = v_0$ به سمت راست و در حال حرکت است. با بکارگیری اصل کار ـ انرژی، اندازه سرعت مطلق لغزنده v_A را در لحظه عبور از نقطه C در شرایطی تعیین کنید که لغزنده از نقطه B بدون سرعت اولیه نسبت به گوه رها شود. معادله را هم به عنوان ناظر ثابت نسبت به گوه و هم به عنوان ناظر ساکن بر روی زمین اعمال کنید و سازگاری دو رابطه را بررسی کنید.

جواب

$$v_A = \left[v_0^2 + 2g\,l\sin\theta + 2v_0\cos\theta\sqrt{2g\,l\sin\theta}\right]^{\frac{1}{2}}$$

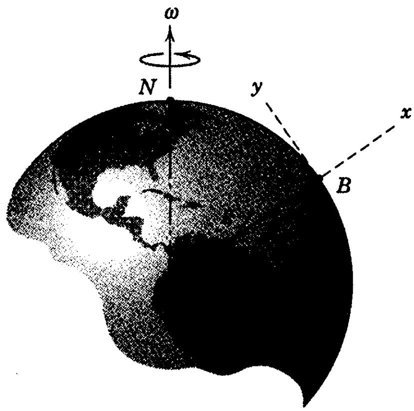


شکل مسئله ۳-۳۲۰

۳-۳۲۱ ◀ هنگامیکه ذره‌ای در عرض جغرافیایی γ از حالت سکون نسبت به سطح زمین سقوط می‌کند، شتاب ظاهری اولیه عبارت است از: شتاب نسبی ناشی از جاذبه g_{rel} می‌باشد. شتاب مطلق g ناشی از جاذبه به سمت مرکز زمین می‌باشد. برای g_{rel} رابطه‌ای بر حسب g ، R ، ω و γ بدست آورید که در آن R شعاع زمین کروی شکل و ω سرعت زاویه‌ای ثابت زمین حول محور قطبی است که ثابت در نظر گرفته می‌شود (گرچه محورهای x-y-z به زمین الصاق شده‌اند و در نتیجه دوران می‌کنند، ولی مادامیکه ذره نسبت به محورهای x-y-z دارای سرعت نباشد، می‌توان از معادله ۳-۴۶ استفاده کرد). (*راهنمایی:* برای تقریب، از دو جمله اول بسط چند جمله‌ای «بینم» استفاده کنید.)

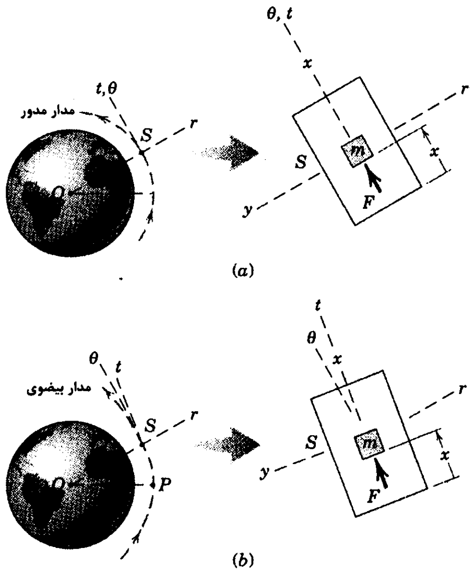
جواب

$$g_{rel} = g - R\omega^2\cos^2\gamma\left(1 - \frac{R\omega^2}{2g}\right) + \cdots$$
$$= 9/825 - 0/03382\cos^2\gamma \ \text{m/s}^2$$



شکل مسئله ۳۲۱-۳

۳۲۲-۳ ◀ شاتل فضایی S نشان داده شده در شکل در دو حالت (الف) مداری مدور دور زمین و (ب) در مدار بیضوی که در آن، P موقعیت حضیض مداری باشد، معرفی شده‌اند. تصاویر باز شده در سمت راست شکل، نشان دهنده فضای کابین است که در آنها محور x در امتداد مدار قرار دارد. فضانوردان شاتل، آزمایشی را انجام می‌دهند که در طی آن در امتدادx بر جرم کوچک m نیروی معلوم F اعمال می‌کنند. توضیح دهید چرا رابطه $F = m\ddot{x}$ در هر یک از دو حالت مذکور صادق یا غیر صادق است، در حالی که x در داخل فضاپیما سنجیده می‌گردد. فرض کنید که شاتل، بین نقاط اوج و حضیض قرار دارد، بطوریکه سرعت مداری آن نسبت به زمان تغییر می‌کند. توجه کنید که محورهای t و x مماس بر مسیر حرکت بوده و محور θ عمود بر امتداد شعاعی r است.



شکل مسئله ۳۲۲-۳

دوره فصل

در فصل ۳، سه روش اساسی حل مسائل در مبحث سینتیک ذره بسط داده شد. چنین تجربه‌ای، هسته مطالعه دینامیک را تشکیل داده و شالوده مطالعه دینامیک اجسام صلب و غیر صلب را پایه ریزی می‌نماید. این سه روش به طور اختصار عبارتند از:

۱ـ کاربرد مستقیم از قانون دوم نیوتن

ابتدا قانون دوم نیوتن $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ را برای تعیین روابط بین نیروها و شتاب ناشی از آنها بکار بردیم. با زمینه‌ای که از فصل ۲ در مورد تشخیص نوع حرکت کسب نمودیم و با کمک ترسیمه آزاد جسم که کلیه نیروهایی که باید به حساب آورده شوند، مشخص شد که می‌توانیم مسائل گوناگون زیادی را با استفاده از مختصات x-y ، n-t و r-θ برای مسائل حرکت در صفحه و مختصات x-y-z ، r-θ-z و R-θ-ϕ برای مسائل حرکت در فضا مورد تحلیل قرار دهیم.

۲ـ معادلات کار ـ انرژی

دوم اینکه با انتگرال گیری از معادله اساسی حرکت $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ نسبت به جابجایی، معادلات اسکالری کار و انرژی بدست آمدند. این معادلات سبب شدند، سرعتهای اولیه و نهایی را در برهه‌ای از حرکت، به کار انجام گرفته توسط نیروهای خارجی وارد به سیستم تعریف شده، ارتباط دهیم. ما این دیدگاه را که در برگیرنده انرژی پتانسیل (هم از نوع الاستیک و هم از نوع جاذبه‌ای) بود، مورد بسط و توسعه قرار دادیم. با چنین ابزارهایی، کشف کردیم که روش انرژی، بویژه در مورد سیستمهای کنسرواتیو (ابقایی) با ارزش است. در چنین سیستمهایی، اتلاف انرژی ناشی از اصطکاک و یا سایر موارد اتلاف، ناچیز می‌باشد.

۳ـ معادلات ضربه ـ مومنتم

بالاخره، قانون دوم نیوتن را چنین بازنویسی کردیم که نیرو، مساوی با تغییر مومنتم خطی نسبت به زمان بوده و گشتاور، معادل با تغییرات مومنتم زاویه‌ای نسبت به زمان می‌باشد. بعداً از این روابط نسبت به زمان انتگرال گرفته و معادلات ضربه و مومنتم، بدست آمد. سپس این روابط را در برهه‌هایی از حرکت به کار بردیم که در آنها نیروها تابعی از زمان بودند. همچنین روابط بین ذراتی را مورد تحقیق قرار دادیم که شرایط بقای مومنتم خطی و زاویه‌ای در مورد آنها صدق می‌کرد.

در بخش پایانی فصل ۳، سه روش اساسی در زمینه‌های کاربردهای ویژه را به صورت زیر عنوان کردیم:

۱ـ توجه کردیم که روش ضربه ـ مومنتم در بسط و توسعه روابط حاکم در برخورد ذرات مناسب است.

۲ـ ملاحظه کردیم که استفاده مستقیم از قانون دوم نیوتن اجازه می‌دهد که خواص مربوط به مسیر حرکت ذره تحت اثر نیروهای جاذبه مرکزی تعیین شود.

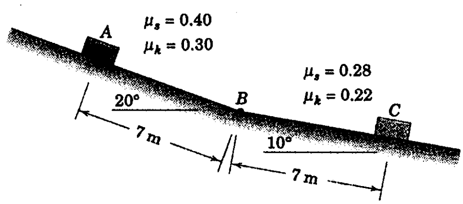
۳ـ بالاخره، دیدیم که هر سه روش اساسی را می‌توان به حرکت ذره نسبت به دستگاه مرجع در حال انتقال، اعمال کرد.

واضح است که حل موفقیت آمیز مسائل سینتیک ذره به دانش لازم درباره سینماتیک آن بستگی دارد. به عنوان مقایسه، بسط و توسعه سیستم ذرات و اجسام صلب که در ادامه مباحث *دینامیک* مطرح خواهند شد، به اصول اساسی سینتیک ذره بستگی دارند که در فصل ۳ مورد بررسی قرار گرفتند.

مسائل دوره‌ای

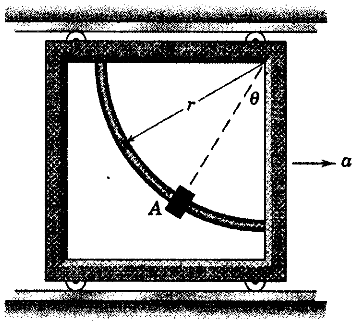
۳-۳۲۳ صندوقچه‌ای که در A در حال سکون است با یک ضربه به سمت پایین سطح شیبدار حرکت می‌کند. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی بین صندوقچه و سطح شیبدار در فاصله A تا B برابر ۰/۳۰ و از B تا C برابر ۰/۲۲ باشد، سرعت صندوقچه را در نقاط B و C بدست آورید.

جواب $v_B = ۲/۸۷$ m/s و $v_C = ۱/۵۳۳$ m/s



شکل مسئله ۳-۳۲۳

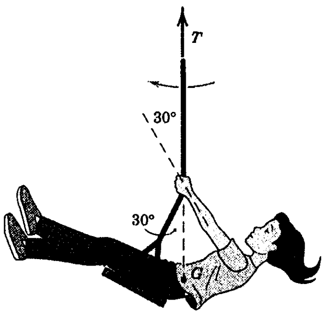
۳-۳۲۴ طوقه A می‌تواند با اصطکاک ناچیز روی میله راهنمای مدور تعبیه شده در قاب قائم، آزادانه بلغزد. زاویه θ موقعیت استقراری طوقه را در شرایطی تعیین کنید که به قاب، شتاب ثابت افقی a به سمت راست داده شده است.



شکل مسئله ۳-۳۲۴

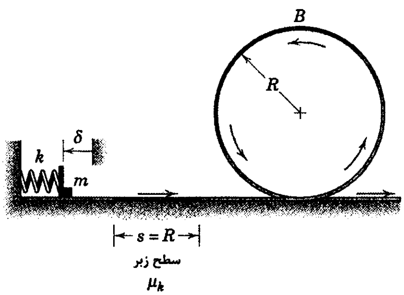
۳-۳۲۵ دختربچه ۳۰ کیلوگرمی با مرکز جرم G، در پایین‌ترین موقعیت خود در حال تاب خوردن، مطابق شکل قرار گرفته است. فاصله موثر G تا نقطه ثابت آویز طناب تاب، ٤/٥ m بوده و سرعت مرکز جرم دختربچه در این موقعیت ۳/٦ m/s می‌باشد. با صرفنظر کردن از جرم طنابها و نشیمنگاه تاب، کشش T در طناب را بدست آورید و نیروی P را که در این موقعیت توسط دو دست دختربچه در امتداد ساعد بر طناب وارد می‌شود را بیابید. همچنین نیروی متناظر R که توسط نشیمنگاه تاب بر وی وارد می‌شود را محاسبه کنید.

جواب $T = ۳۸۱$ N و $P = ۱۰۹/۹$ N و $R = ۲۲۰$ N



شکل مسئله ۳-۳۲۵

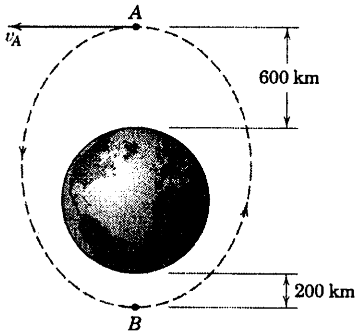
۳-۳۲٦ فنری با سختی k فشرده می‌شود و ناگهان رها شده و ذره‌ای به جرم m را در امتداد مسیر راهنما به طور لغزشی می‌فرستد. حداقل فشردگی فنر، δ را به گونه‌ای تعیین کنید که تماس ذره با مسیر حلقوی قطع نشود. به جز سطح زبر که طول آن s و برابر R است و ضریب اصطکاک سینتیکی آن μ_k می‌باشد، بقیه سطح بدون اصطکاک است.



شکل مسئله ۳-۳۲٦

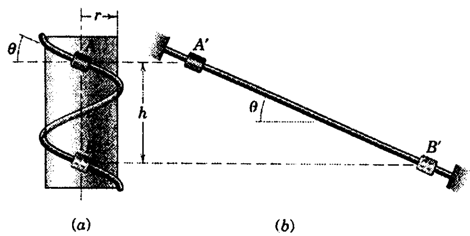
۳-۳۲۷ سرعت v_A فضاپیمایی را که مدار آن به دور زمین، بیضوی است؛ در نقطه A به گونه‌ای تعیین کنید که ارتفاع نقطه اوج B برابر ۲۰۰ km باشد. خروج از مرکز e چقدر است؟

جواب $v_A = ۷۴۵۱\ \text{m/s}$ و $e = ۰/۰۲۹۵$



شکل مسئله ۳-۳۲۷

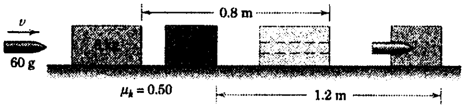
۳-۳۲۸ در شکل a، مهره‌ای از حالت سکون در A رها شده و در امتداد میله راهنمای مارپیچ فرو می‌لغزد. در شکل b، در حالی که شیب میله در حالت اخیر مساوی با زاویه مارپیچ میله در حالت اول، یعنی θ می‌باشد، میله راهنما به حالت مستقیم درآمده و آزمایش مزبور مجدداً تکرار می‌گردد. چنانچه از اصطکاک صرفنظر شود، سرعت مهره در لحظه عبور از موقعیت B یا B' چقدر است؟ اگر اصطکاک قابل اغماض نمی‌بود، آیا سرعت مهره به مسیر طی شده بستگی می‌داشت؟ اگر جواب مثبت است، در کدام حالت، مهره سرعت بیشتری کسب می‌کرد؟



شکل مسئله ۳-۳۲۸

۳-۳۲۹ به سوی دو بلوک که بر روی یک سطح با ضریب اصطکاک سینتیکی ۰/۵ به حالت سکون قرار دارند، گلوله‌ای به جرم ۶۰ g شلیک می‌شود. گلوله از بلوک ۸ کیلوگرمی عبور کرده و در بلوک ۶ کیلوگرمی فرو می‌رود. بلوکها فواصل نشان داده شده را به صورت لغزشی طی می‌کنند. سرعت اولیه v گلوله را محاسبه کنید.

جواب $v = ۷۲۰\ \text{m/s}$

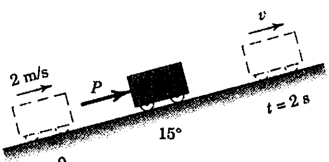


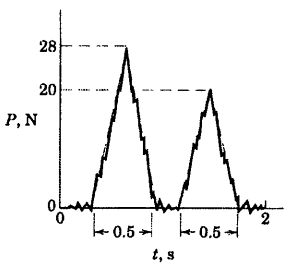
شکل مسئله ۳-۳۲۹

۳-۳۳۰ ستاره دنباله‌دار هالی دوبار در سالهای ۱۹۱۰ و ۱۹۸۶ دیده شد. فاصله نزدیکترین ملاقات آن با خورشید به طور متوسط نصف فاصله زمین و خورشید می‌باشد. حداکثر فاصله این ستاره را از خورشید بدست آورید. از اثرات جاذبه‌ای سیارات صرفنظر کنید.

۳-۳۳۱ ارابه‌ای به جرم ۲ kg با اصطکاک ناچیز در امتداد سطح شیبدار ۱۵° به طرف بالا حرکت می‌کند. نیروی P در دو ضربه جداگانه در مدت ۲ ثانیه بر ارابه اعمال می‌شود، همانطور که توسط دستگاه نیرونگار بر حسب زمان نشان داده شده است. رابطه‌ای تقریبی برای P بر حسب t پیدا کرده و سرعت ارابه را در $t = ۲\ \text{s}$ تعیین کنید.

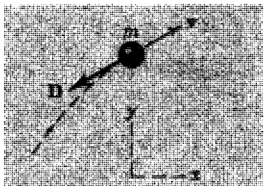
جواب $v = ۲/۹۲\ \text{m/s}$





شکل مسئله ۳-۳۳۱

۳-۳۳۲ نیروی پسای وارده بر یک جسم که در صفحه قائم در یک سیال حرکت می‌کند، توسط رابطه $\mathbf{D}=-C_D\left(\frac{۱}{۲}\rho v^{۲}\right)S\mathbf{e}_v$ به دقت مدل شده است که در آن $\mathbf{D}$ نیروی پسا، مطابق شکل بوده و C_D ضریب پسا، ρ چگالی سیال، $\mathbf{v}$ سرعت جسم نسبت به سیال، S سطح مقطع جسم در مقابل جریان سیال و $\mathbf{e}_v$ بردار یکه در امتداد $\mathbf{v}$ می‌باشد. برای جسمی به جرم m، مولفه‌های x و y شتاب را بیابید و در مورد سختی انتگرال گیری از این مولفه‌ها توضیح دهید. فرض کنید شتاب جاذبه ثابت است.



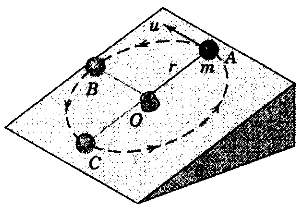
شکل مسئله ۳-۳۳۲

۳-۳۳۳ گوی کوچکی به جرم m توسط ریسمانی به محور گذرنده از نقطه O متصل شده و در دایره‌ای به شعاع r بر روی سطح شیبدار صیقلی با زاویه θ نسبت به افق حرکت می‌کند. اگر سرعت گوی در بخش فوقانی A برابر u باشد، هنگامیکه گوی تحت زاویه ۹۰° از موقعیت B و از بخش تحتانی C عبور می‌کند، کشش ریسمان را بدست آورید.

جواب

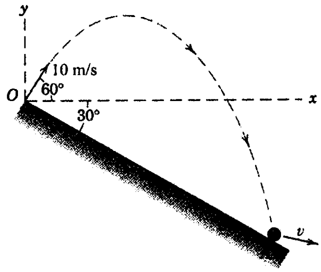
$$T_B=m\left(\frac{u^{۲}}{r}+۲g\sin\theta\right)$$

$$T_C=m\left(\frac{u^{۲}}{r}+۵g\sin\theta\right)$$



شکل مسئله ۳-۳۳۳

۳-۳۳۴ توپی از نقطه O با سرعت 10 m/s تحت زاویه ۶۰° نسبت به افق پرتاب می‌شود و در نقطه A از سطح شیبدار به بیرون می‌جهد. اگر ضریب بازگشت ۰/۶ باشد، مقدار سرعت v بازگشت در نقطه A را محاسبه کنید. از مقاومت هوا صرفنظر کنید.

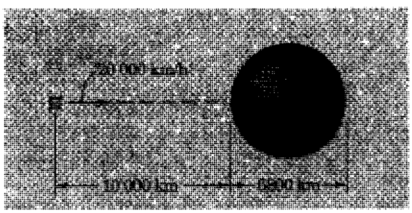


شکل مسئله ۳-۳۳۴

۳-۳۳۵ اتومبیلی به جرم m با سرعت v_r در یک اتوبان واقع روی مسیر شرق به غرب خط استوا و در سطح دریا حرکت می‌کند. اگر مسیر اتوبان بر روی انحنای زمین واقع شده باشد، برای ΔP که بیانگر تفاضل بین نیروی کل وارده از جاده به اتومبیل در حرکت به سمت شرق و نیروی کل وارده در حرکت به سمت غرب می‌باشد، رابطه‌ای بدست آورید. ΔP را به ازای m = ۱۵۰۰ kg و v_r = ۲۰۰ km/h محاسبه کنید. ω، سرعت زاویه‌ای زمین ‎rad/s ($^{-۴}$۱۰)۰/۷۲۹۲ می‌باشد. از حرکت مرکز زمین صرفنظر کنید.

جواب $\Delta P=-۴\, m\omega v_r$ و $\Delta P=-۲۴/۳$ N

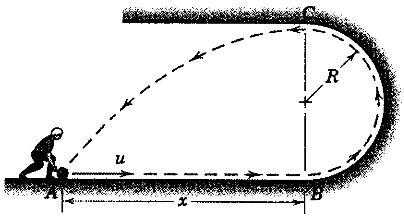
۳-۳۳۶ یک فضاپیما چنان طراحی شده است که مستقیما به سوی مرکز کره مریخ حرکت کرده و به آن برخورد کند. اگر فاصله فضاپیما از سطح مریخ ۱۰۰۰۰ km باشد و با سرعت نسبی ۲۰۰۰۰ km/h به کره مریخ نزدیک شود، سرعت v برخورد فضاپیما با کره را تعیین کنید. شتاب جاذبه در سطح مریخ ۳/۷۳ m/s^2 و قطر آن تقریبا ۶۸۰۰ km است. از هر گونه مقاومت جوی صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۳-۳۳۶

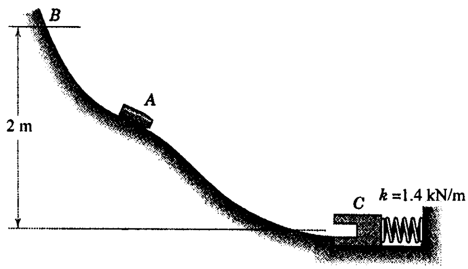
۳-۳۳۷ شخصی از نقطه A، گوی کوچکی را با سرعت u بر روی کف زمین می‌غلتاند. اگر $x = ۳R$ باشد، سرعت لازمه u را طوری تعیین کنید که گوی پس از غلتیدن بر روی سطح، نیمدایره‌ای در صفحه قائم از B تا C را پیموده و سپس از نقطه C همانند یک پرتابه، دوباره به نقطه A بازگردد. حداقل مقدار x که به ازای آن این عمل را می‌توان انجام داد و تماس گوی با سطح تا نقطه C ادامه یابد، چقدر است؟ از اصطکاک صرفنظر کنید.

جواب $u = \frac{۵}{۲}\sqrt{gR}$ و $x_{\min} = ۲R$



شکل مسئله ۳-۳۳۷

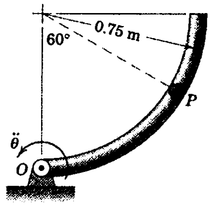
۳-۳۳۸ درپوش استوانه‌ای ۰/۸ کیلوگرمی از حالت سکون در نقطه B به سمت پایین راهگاه صیقلی می‌لغزد و سپس با بلوک ۱/۸ کیلوگرمی C برخورد کرده و به درون آن فرو می‌رود. سرعت مجموعه بلوک و درپوش استوانه‌ای را بلافاصله پس از داخل شدن بدست آورده و حداکثر تغییر طول x فنر را پیدا کنید. از اصطکاک زیر بلوک C صرفنظر کنید. چه کسری، n، از انرژی اولیه مجموعه اتلاف می‌گردد؟



شکل مسئله ۳-۳۳۸

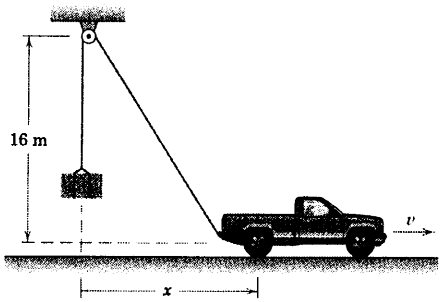
۳-۳۳۹ لوله ربع دایره توخالی با سطح مقطع دایره‌ای، در لحظه $t = ۰$ از حالت سکون خارج شده و با شتاب زاویه‌ای ثابت $\ddot{\theta} = ۲\ \text{rad/s}^2$ در جهت پادساعتگرد در یک صفحه افقی حول نقطه O دوران می‌کند. در چه زمان t، ذره P به جرم ۰/۵ kg نسبت به لوله سر می‌خورد؟ ضریب اصطکاک استاتیکی بین ذره و لوله $\mu_s = ۰/۸$ می‌باشد.

جواب $t = ۲/۰۲\ \text{s}$



شکل مسئله ۳-۳۳۹

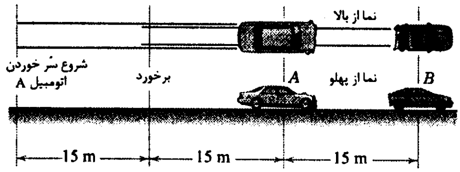
۳-۳۴۰ وانت‌باری جهت بلند کردن یک بسته علوفه ۴۰ کیلوگرمی، مطابق شکل از طناب استفاده می‌کند. اگر وانت‌بار در موقعیت $x = ۱۲$ m به سرعت ثابت $v = ۵$ m/s برسد، کشش متناظر T در طناب را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۳-۳۴۰

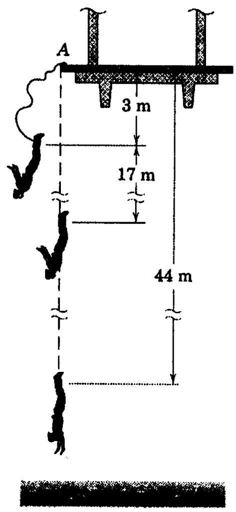
۳-۳۴۱ یک حادثه اتومبیل به صورت زیر رخ می‌دهد: اتومبیل بزرگتر (اتومبیل A، ۱۸۰۰ kg) بر روی یک جاده هموار و خشک حرکت می‌کند و به اتومبیل کوچکتر ساکن (اتومبیل B، ۹۰۰ kg) نزدیک می‌شود. درست در ۱۵ متری قبل از برخورد، راننده ترمز گرفته و همه چرخها قفل می‌شوند و اتومبیل سر می‌خورد. بعد از برخورد، اتومبیل A، ۱۵ m دیگر سر خورده و اتومبیل B نیز با ترمز کامل چرخهایش، مسافت ۳۰ m سر می‌خورد. موقعیت‌های نهایی اتومبیل‌ها در شکل نشان داده شده است. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی ۰/۹ باشد، آیا راننده اتومبیل A قبل از اینکه ترمز اولیه‌اش را بگیرد، از سرعت مجاز ۹۰ km/h تجاوز کرده بود؟

جواب $(v_A)_0 = ۱۱۵/۹$ km/h



شکل مسئله ۳-۳۴۱

۳-۳۴۲ یک شیرجه‌زن بدل کار به جرم ۸۰ kg، از نقطه A بالای پل، خود را رها می‌کند؛ در حالی که طناب مخصوص محکم به پای وی بسته شده است. قبل از آنکه طناب کشسان شیرجه که طول آن ۱۷ m است، کشیده شود، بدل کار به اندازه ۲۰ m سقوط می‌کند. ۳ m از طناب که در بالای قسمت کشسان قرار دارد، دارای کشش قابل توجهی نیست. مشاهده می‌شود قبل از آنکه بدل کار بالا بیاید، مجموعاً به اندازه ٤٤ m سقوط کرده است. با صرفنظر کردن از هر نوع اتلاف انرژی، مطلوب است: محاسبه (الف) ضریب سختی k طناب شیرجه به ازای هر متر طول آن؛ (ب) حداکثر سرعت شخص v_{max} در حین سقوطش و (ج) حداکثر شتاب a_{max} شخص را. شخص را به صورت ذره‌ای در انتهای طناب در نظر بگیرید.

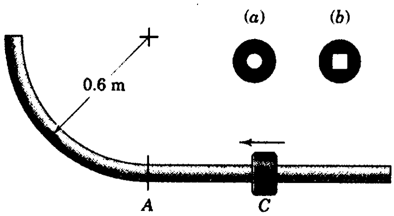


شکل مسئله ۳-۳۴۲

۳-۳٤۳ لغزنده C به هنگام عبور از نقطه A روی میله راهنما که در صفحه افقی قرار دارد، دارای سرعت ۳ m/s می‌باشد. ضریب اصطکاک سینتیکی بین لغزنده و میله راهنما برابر $\mu_k = ۰/٦$ می‌باشد. شتاب کاهنده مماسی لغزنده a_t را درست پس از عبور از نقطه A در حالات زیر محاسبه کنید: (الف) اگر سوراخ لغزنده و سطح مقطع میله راهنما هر دو دایره‌ای باشند و (ب) اگر سوراخ لغزنده و سطح مقطع میله راهنما هر دو مربعی باشند. در حالت (ب) اضلاع مربع به صورت عمودی و افقی می‌باشند. فرض کنید که بین لغزنده و میله راهنما یک لقی جزئی وجود دارد.

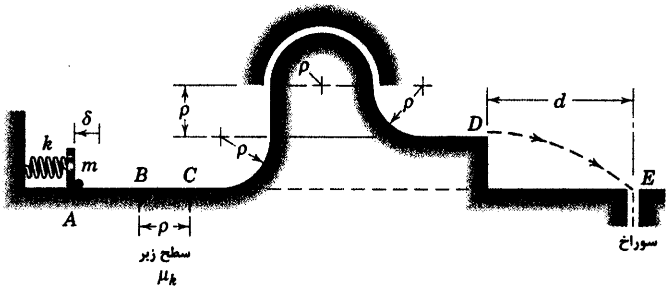
جواب (الف) $a_t = -۱۰/۷۵$ m/s^2

(ب) $a_t = -١٤/۸۹$ m/s^2



شکل مسئله ۳-۳۴۳

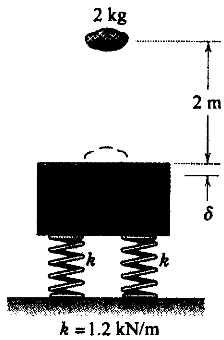
۳-۳٤٤ شکل، یک نوع بازی ساچمه پران را نشان می‌دهد که در آن ساچمه باید بدرون سوراخ E انداخته شود. هنگامی که فنر فشرده شده و ناگهان رها گردد، ساچمه در امتداد مسیر به حرکت در می‌آید. به غیر از فاصله بین نقاط B و C که سطح آن زبر بوده و دارای ضریب اصطکاک سینتیکی μ_k می‌باشد، بقیه مسیر صیقلی است. ساچمه در نقطه D به صورت یک پرتابه در می‌آید. فشردگی صحیح فنری را طوری تعیین کنید که ساچمه درون سوارخ E بیفتد. هرگونه شرطی را که ضروری به نظر می‌رسد، برای طولهای d و ρ در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۳-۳۴۴

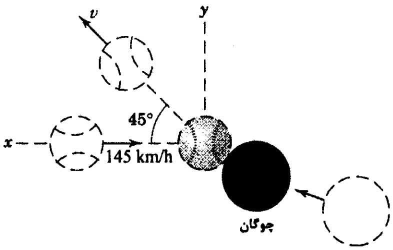
۳-۳۴۵ قطعه سنگ ۲ کیلوگرمی از فاصله ۲ m در بالای بلوک ساکن ۱۸ کیلوگرمی سقوط می‌کند. بلوک بر روی دو فنر هر یک با سختی k = ۱/۲ kN/m قرار گرفته است. فشردگی δ فنرها را که ناشی از برخورد سنگ می‌باشد، محاسبه کنید. سنگ درحین برخورد، به بلوک می‌چسبد.

جواب δ = ٦٥/٩ mm



شکل مسئله ۳-۳۴۵

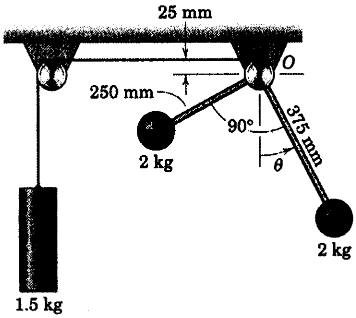
۳-۳۴٦ پرتاب کننده توپ بیسبال، توپی را با سرعت تقریبا افقی ۱٤٥ km/h پرتاب می‌کند. چوگان‌زن توپ را می‌زند و توپ تا وسط زمین بازی پرتاب می‌شود. توپ ۱٤٦ گرمی مسافت افقی ۱۱۰ m را با سرعت اولیه و در راستای ٤٥° مطابق شکل طی می‌کند. در طی زمان ۰/۰۰٥ s تماس بین توپ و چوگان، نیروی متوسط F_{av} که از سوی چوگان به توپ وارد می‌شود را بدست آورید. از مقاومت هوا در طی پرواز توپ صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۳-۳۴۶

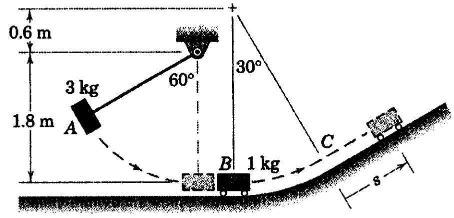
۳-۳٤٧ مجموعه از حالت سکون در θ = ۰ رها می‌گردد. طناب متصل به استوانه ۱/٥ کیلوگرمی به طور محکم در نقطه O به دور قرقره سبک به قطر ٥۰ mm پیچیده شده است و قرقره خود به میله‌های سبک و گوی‌های ۲ کیلوگرمی متصل شده است. فاصله مراکز گوی‌ها از محور گذرنده از O برابر ۲٥۰ mm و ۳۷٥ mm می‌باشد. سرعت رو به پایین استوانه ۱/٥ کیلوگرمی را در θ = ۳۰° تعیین کنید.

جواب v = ۷۱/٤ mm/s



شکل مسئله ۳-۳۴۷

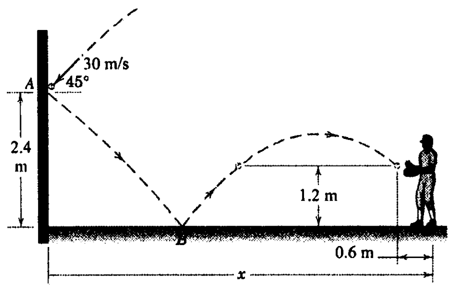
۳-۳۴۸ مطابق شکل، بلوک A به جرم ۳ kg از حالت سکون تحت زاویه ۶۰° رها می‌شود و سپس به ارابه B به جرم ۱ kg برخورد می‌کند. اگر ضریب بازگشت برای برخورد برابر $e = ۰/۷$ باشد، حداکثر جابجایی s ارابه را بعد از نقطه C تعیین کنید. از اصطکاک صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۳-۳۴۸

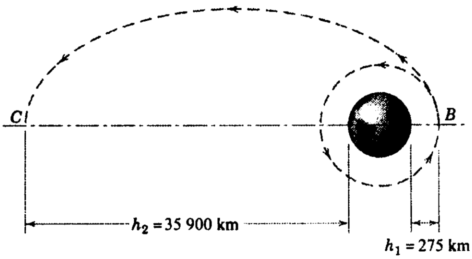
۳-۳۴۹ توپی بلند پرواز در نقطه A به دیوار برخورد می‌کند (با $e_1 = ۰/۵$) و سپس در نقطه B به زمین برخورد می‌نماید (با $e_2 = ۰/۳$). اگر بازیکن گیرنده توپ بخواهد مطابق شکل، توپ را در موقعیتی بگیرد که ۱/۲ m از زمین ارتفاع و از خودش ۰/۶ m فاصله داشته باشد، فاصله x بین بازیکن و دیوار را تعیین کنید. به دو جواب ممکن توجه داشته باشید.

جواب $x = ۴/۰۲$ m و ۱۳/۹۸ m



شکل مسئله ۳-۳۴۹

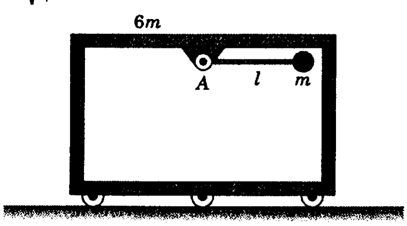
۳-۳۵۰ یکی از وظایف شاتل فضایی رها ساختن ماهواره‌های مخابراتی در ارتفاع پایین می‌باشد. راکت تقویت کننده (بوستر) در نقطه B فعال شده و ماهواره را در یک مدار انتقال بیضوی قرار می‌دهد که نقطه اوج آن، ارتفاع مورد نیاز برای یک مدار ژئوسنکرون را دارد (مدار ژئوسنکرون، مداری مدور در صفحه استوایی است که پریود آن با پریود دورانی مطلق زمین برابر است. ماهواره‌ای که در چنین مداری قرار می‌گیرد، برای ناظر ثابت روی زمین بدون حرکت بنظر می‌رسد). سپس تقویت کننده دوم در نقطه C فعال شده و مدار مدور نهایی حاصل می‌شود. در یکی از ماموریتهای پیشین شاتل فضایی، ماهواره‌ای ۷۰۰ کیلوگرمی در نقطه B که در آن $h_1 = ۲۷۵$ km است، از شاتل رها گردید. قرار بود بوستر راکت به مدت $t = ۹۰$ s فعال شده و مدار انتقال را با ارتفاع اوج $h_2 = ۳۵۹۰۰$ km ایجاد کند. راکت در حین سوختن بوستر دچار اشکال می‌شود. در همین موقع رادار کنترل ماهواره، ارتفاع اوج مدار انتقال را فقط ۱۱۲۵ km معین می‌کند. مطلوبست زمان واقعی t' که موتور راکت قبل از دچار اشکال شدن، فعال بوده است. از تغییر جرم ناچیزی که در حین فعالیت راکت بوستر صورت می‌گیرد، صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۳-۳۵۰

۳-۳۵۱ قابی به جرم $6m$ ابتدا در حال سکون است. ذره‌ای به جرم m به انتهای میله سبکی متصل است و آزادانه حول A دوران می‌کند. اگر میله از حالت سکون از موقعیت افقی نشان داده شده رها گردد، سرعت v_{rel} ذره را نسبت به قاب، موقعی که میله به حالت قائم درآمده بدست آورید.

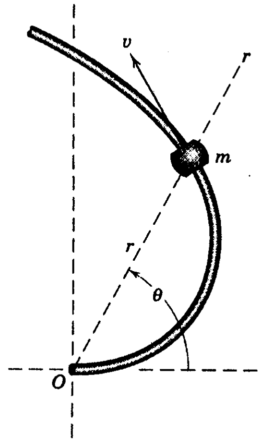
جواب $v_{rel} = \sqrt{\frac{۷}{۳} gl}$ به طرف چپ



شکل مسئله ۳-۳۵۱

۳-۳۵۲ ◀ میله خمیده ثابت با انحنای $r = k\theta$ در صفحه افقی قرار دارد. طوقه‌ای کوچک به جرم m آزادانه بر روی میله می‌لغزد و به آن سرعت v در امتداد میله که از نقطه O شروع شده، داده می‌شود. در صورت ناچیز بودن اصطکاک، انرژی جنبشی و در نتیجه سرعت، ثابت باقی می‌ماند. با استفاده از اصل بیان شده در رابطه ۳-۲۷ رابطه‌ای بیابید که نیروی P وارده بر میله را بر حسب r بیان کند.

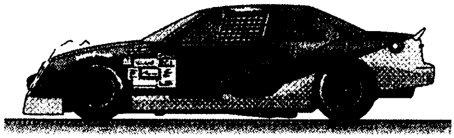
جواب $P = \dfrac{r^۲ + ۲k^۲}{(r^۲ + k^۲)^{\frac{۳}{۲}}} m v^۲$



شکل مسئله ۳-۳۵۲

۳-۳۵۳ ◀ نیروهای پس زننده‌ای که به اتومبیل مسابقه وارد شده و سبب کند شدن حرکت آن می‌گردند، عبارتند از: نیروی پسا F_D، نیروی غیر آیرودینامیکی F_R. نیروی پسا به صورت $F_D = C_D\left(\frac{۱}{۲}\rho v^۲\right)S$ می‌باشد که C_D ضریب پسا، ρ چگالی هوا، v سرعت اتومبیل و $S = ۲/۸ \text{ m}^2$ عبارت از سطح تصویر شده جلوی اتومبیل می‌باشد. نیروی غیر آیرودینامیکی F_R برابر مقدار ثابت ۹۰۰ N می‌باشد. در صورتیکه شرایط جلوبندی اتومبیل خوب باشد، ضریب پسای اتومبیل $C_D = ۰/۳$ بوده و متناظر با آن حداکثر سرعت اتومبیل $v = ۳۲۰$ km/h خواهد شد. بعد از یک برخورد جزئی، ضریب پسای اتومبیل در اثر صدمه دیدن کاپوت جلو برابر $C'_D = ۰/۴$ می‌شود. حداکثر سرعت v' اتومبیل مسابقه در چنین شرایطی چقدر خواهد شد؟

جواب $v' = ۲۹۳$ km/h

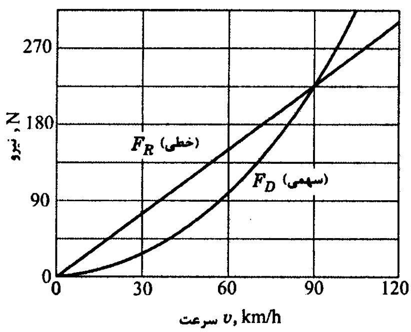


شکل مسئله ۳-۳۵۳

۳-۳۵٤ ◀ مطالعات وسیعی که بر روی اتومبیل ۱۰۰۰ کیلوگرمی در تونل باد و کاهش سرعت صورت گرفته نشان می‌دهد که نیروی آیرودینامیکی پسا F_D و غیر آیرودینامیکی مقاوم به غلتش F_R مطابق شکل با سرعت تغییر می‌کنند. مطلوب است تعیین (الف) توان P لازمه برای سرعت ثابت ٤٥ km/h و ۹۰ km/h و (ب) زمان t و مسافت s لازمه برای آنکه اتومبیل سرعت اولیه ۹۰ km/h خود را به سرعت ٥ km/h کاهش دهد. فرض کنید جاده مستقیم، هموار و بدون وزش باد است.

جواب $P_{٤٥} = ۲/۱۱$ kW و $P_{۹۰} = ۱۱/۲٥$ kW

$t = ۲٥۰$ s و $s = ۱۷۷٥$ m

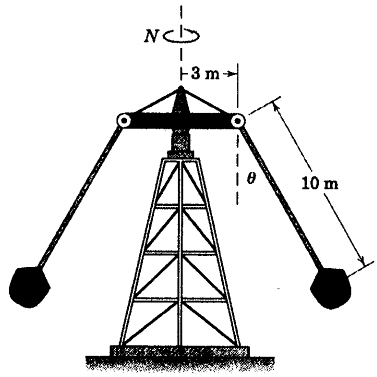


شکل مسئله ۳-۳۵٤

💻 مسائل کامپیوتری

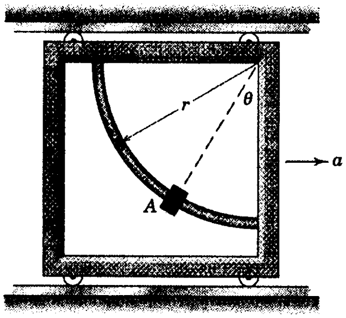
* ۳-۳۵۵ وسیله تفریحی مسئله ۶۰-۳ دوباره در اینجا نشان داده شده است. زاویه θ را به صورت تابعی از سرعت دورانی N در محدوده $0 \le N \le 10$ rev/min بدست آورده و ترسیم کنید. از جرم بازوهای متصل به صندلی‌ها صرفنظر کرده و صندلیها را به صورت ذره در نظر بگیرید. مقدار θ را به ازای $N = 8$ rev/min بدست آورید.

جواب $\theta = 29/6°$



شکل مسئله ۳۵۵-۳

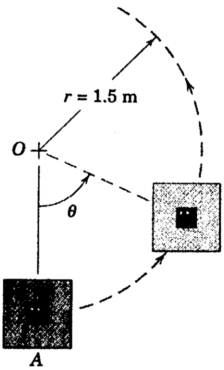
* ۳-۳۵۶ شکل مربوط به مسئله ۳۲۴-۳ مجدداً در این مسئله نشان داده شده است. اگر قاب قائم از حالت سکون با شتاب ثابت a شروع به حرکت کند و طوقه لغزنده صیقلی A در ابتدا به حالت سکون در پایین‌ترین موقعیت خود یعنی $\theta = 0$ قرار داشته باشد، $\dot{\theta}$ را به صورت تابعی از θ ترسیم کرده و حداکثر موقعیت زاویه‌ای θ_{max} محل قرار گرفتن طوقه را تعیین کنید. از مقادیر $a = g/2$ و $r = 0/3$ m استفاده کنید.



شکل مسئله ۳۵۶-۳

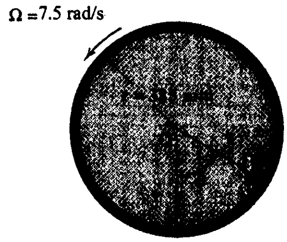
* ۳-۳۵۷ در لحظه $t = 0$ صفحه مربعی در موقعیت A در حالت سکون بوده و سپس در صفحه قائم با حرکت انتقالی مسیر مدوری را طبق رابطه $\theta = k\,t^2$ می‌پیماید که در آن $k = 1$ rad/s^2، جابجایی زاویه‌ای θ بر حسب رادیان و زمان t بر حسب ثانیه است. قطعه کوچک P به جرم $0/4$ kg به طور موقت به صفحه چسبانده شده است. نیروی برشی F را بر حسب زمان t در محدوده $0 \le t \le 5$ s ترسیم کنید. اگر چسب هنگامی کنده شود که نیروی برشی F به 30 N می‌رسد، زمان t و موقعیت زاویه‌ای θ را به هنگام کنده شدن چسب، تعیین کنید.

جواب $t = 3/40$ s و $\theta = 663°$



شکل مسئله ۳۵۷-۳

* ۳۵۸-۳ طبلک استوانه‌ای شکل ۲۶ اینچی حول محور افقی با سرعت زاویه‌ای ثابت $\Omega = ۷/۵$ rad/s می‌چرخد. قطعه کوچک A به هنگام گذشتن از پایین‌ترین نقطه طبلک در $\theta = ۰$ هیچگونه حرکتی نسبت به طبلک ندارد. ضریب اصطکاک μ_s را چنان تعیین کنید که باعث لغزش قطعه در موقعیت زاویه‌ای θ طبلک گردد. عبارت حاصله را در محدوده $۱۸۰^\circ \leq \theta \leq ۰$ رسم کنید. حداقل مقدار ضریب اصطکاک μ_{min} را چنان بدست آورید که به ازای یک دور کامل دوران طبلک، قطعه نسبت به طبلک ثابت باقی بماند و حرکت نکند. به ازای ضریب اصطکاکی با اختلاف جزئی کمتر از μ_{min}، در چه موقعیت زاویه‌ای θ، لغزش قطعه صورت می‌پذیرد.

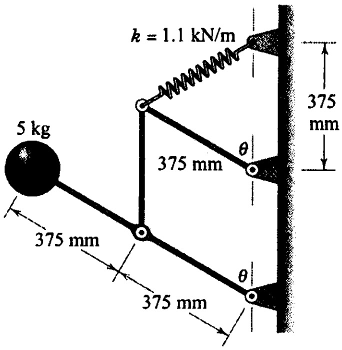


شکل مسئله ۳۵۸-۳

* ۳۵۹-۳ مکانیزم نشان داده شده در صفحه قائم قرار داشته و از حالت سکون تحت زاویه $\theta = ۶۰^\circ$ که فنر طول آزاد خود را دارد، رها می‌شود. سرعت گوی ۵ کیلوگرمی را به صورت تابعی از θ رسم کنید. همچنین مطلوب است تعیین (الف) حداکثر سرعت گوی و زاویه θ متناظر آن و (ب) حداکثر زاویه θ که میله به آن می‌رسد. اصطکاک و جرم میله‌ها ناچیز و قابل اغماض‌اند.

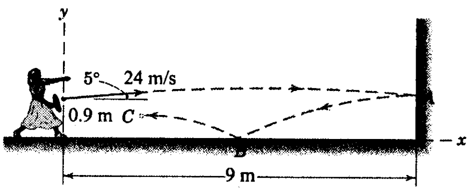
جواب (الف) $v_{max} = ۱/۵۱۵$ m/s و $\theta = ۸۲^\circ$

(ب) $\theta_{max} = ۱۰۸/۶^\circ$



شکل مسئله ۳۵۹-۳

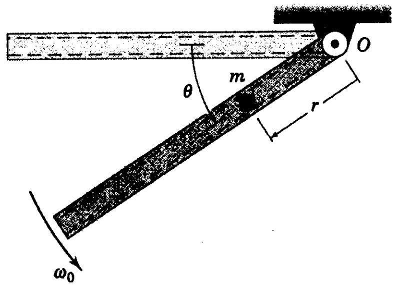
* ۳۶۰-۳ تنیس‌بازی در حال تمرین، توپ را به نقطه A دیوار مقابل می‌زند. توپ در بازگشت به نقطه B زمین بازی برخورد می‌کند و تا حداکثر ارتفاع خود در موقعیت C جهش می‌کند. برای شرایط نشان داده شده در شکل، موقعیت نقطه C را برای مقادیر ضرایب بازگشت در محدوده $۰/۹ \leq e \leq ۰/۵$ ترسیم کنید (مقدار e در نقاط A و B یکسان است). به ازای چه مقدار از e نقطه C در موقعیت $x = ۰$ واقع خواهد شد و نیز مقدار y متناظر آن چقدر است؟



شکل مسئله ۳۶۰-۳

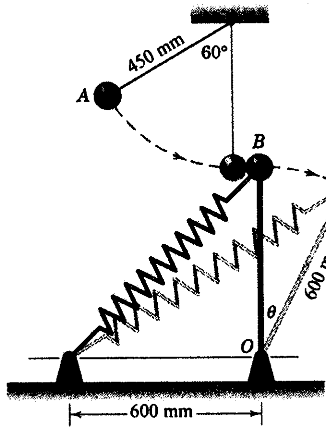
* ۳۶۱-۳ ذره‌ای به جرم m در موقعیت $r = ۰$ موقعی که $\theta = ۰$ با سرعت صفر داخل لوله قرار گرفته است. ذره داخل لوله توخالی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_0 حول محور افقی گذرنده از O دوران می‌کند، به طرف پایین می‌لغزد. اگر طول لوله l برابر ۱ m و $\omega_0 = ۰/۵$ rad/s باشد، مدت زمان پس از رها شدن t و جابجایی زاویه‌ای θ که در آن ذره از لوله خارج می‌شود را حساب کنید.

جواب $t = ۱/۰۶۹$ s و $\theta = ۳۰/۶^\circ$



شکل مسئله ۳-۳٦۱

* ۳-۳٦۲ گوی ۹ کیلوگرمی A تحت زاویه ٦۰° مطابق شکل نگهداشته شده و سپس رها می‌گردد. گوی A با گوی ٤/۵ کیلوگرمی B برخورد می‌کند. ضریب بازگشت این برخورد $e = ۰/۷۵$ می‌باشد. گوی B به انتهای میله سبکی که در نقطه O مفصل شده، متصل است. اگر فنر در ابتدا طول آزاد خود را داشته باشد و سختی آن برابر مقدار ثابت $k = ۱/۵$ kN/m باشد؛ حداکثر زاویه دوران میله سبک θ را بعد از برخورد بدست آورید.



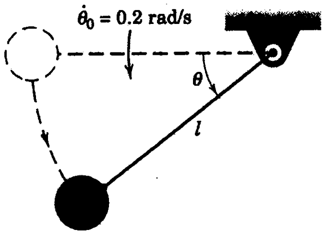
شکل مسئله ۳-۳٦۲

* ۳-۳٦۳ آونگ ساده‌ای به طول $l = ۰/۵$ m در لحظه $t = ۰$ و در موقعیت $\theta = ۰$ دارای سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}_۰ = ۰/۲$ rad/s می‌باشد. یک رابطه انتگرالی برای زمان لازم t جهت رسیدن به زاویه دلخواه θ بدست آورید. t را بر حسب θ در محدوده $۰ \le \theta \le \pi/۲$ ترسیم نموده و مقدار t را به ازای $\theta = \pi/۲$ بدست آورید.

جواب

$$t = ۰/۵\int_۰^{\theta} \frac{d\theta}{\sqrt{۹/۸۱\sin\theta + ۰/۰۱}}$$

$t = ۰/٤۰۹$ s

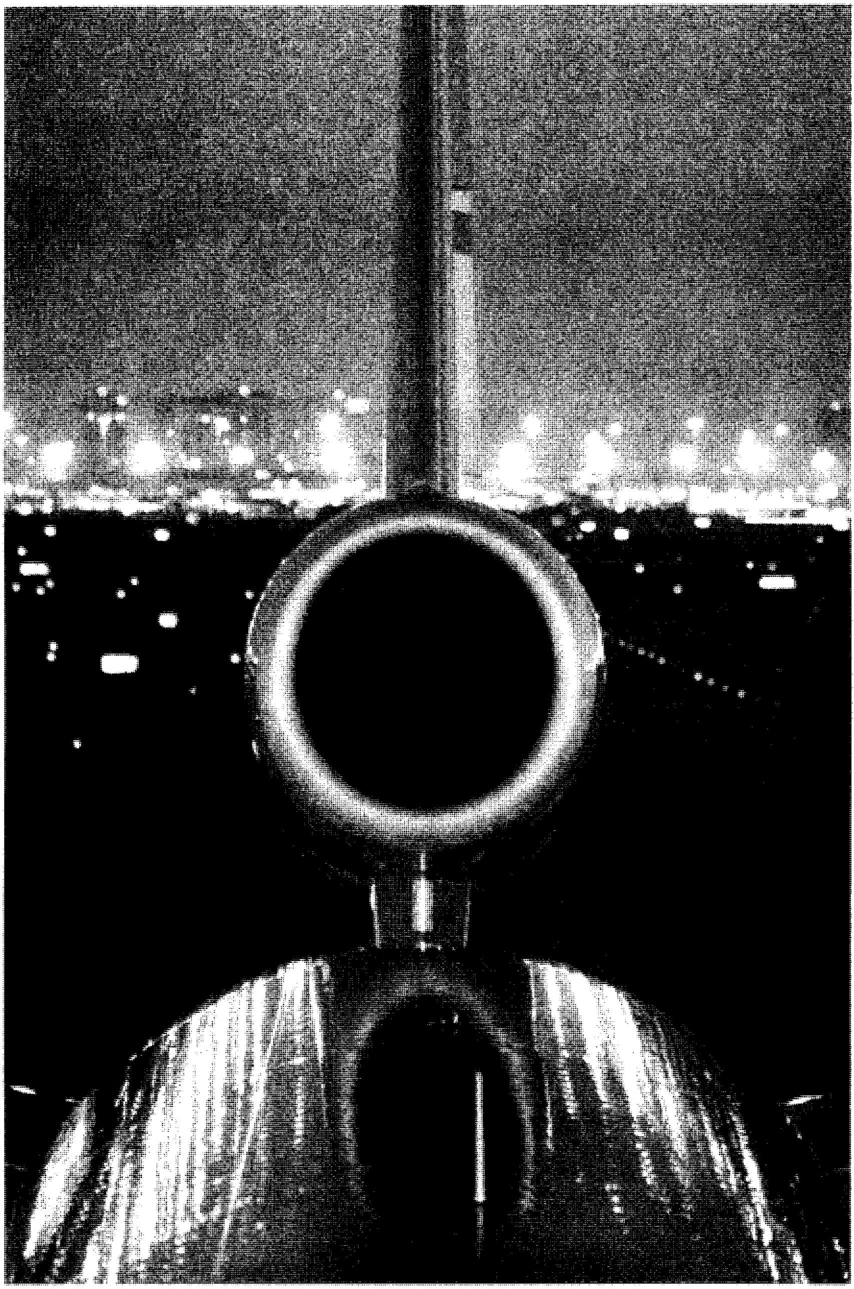


شکل مسئله ۳-۳٦۳

فصل چهارم

سینتیک سیستم ذرات

فهرست مطالب



تصور مقدار هوایی که این موتور جت در پرواز با سرعت زیاد می‌بلعد، ساده است. نیروی کنش و واکنش این سیال با قسمت‌های داخلی موتور، موضوعی است که در این فصل ارائه می‌گردد.

۴-۱ مقدمه

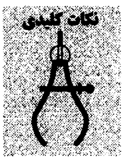
در دو فصل قبلی، اصول سینماتیک و سینتیک حرکت یک ذره مورد بحث قرار گرفتند. گرچه در فصل ۳، تمامی توجهات به سینتیک یک ذره منفرد معطوف شده بود، اما در بحث کار ـ انرژی و ضربه ـ مومنتم، به حرکت دو ذره که با هم تشکیل یک مجموعه یا سیستم را می‌دادند نیز اشاره شد.

قدم عمدهٔ بعدی در گسترش مبحث دینامیک، تعمیم این اصول (که قبلاً برای یک ذره منفرد بکار رفت)، به حرکت یک مجموعه عمومی از ذرات است. این تعمیم، شالوده فصول باقیمانده دینامیک را می‌ریزد و به خوبی ما را قادر می‌سازد که حرکت اجسام صلب و غیر صلب را مورد بحث قرار دهیم.

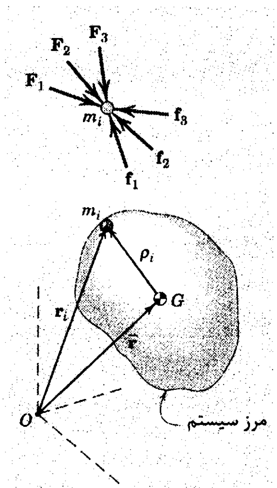
یادآوری می‌شود که یک جسم صلب عبارت است از سیستمی از ذرات جامد که اساساً فاصله بین این ذرات ثابت باقی می‌ماند. از مصادیق مربوط به مسائل اجسام صلب می‌توان به حرکت کلی ماشین‌ها، وسائل نقلیه زمینی و هوایی، راکت‌ها و فضاپیماها و بسیاری از سازه‌های متحرک، نام برد. از طرف دیگر، جسم غیر صلب، جسم جامدی است که وابستگی زمانی تغییرات شکل آن در اثر تغییر شکل الاستیک یا غیر الاستیک مورد تحقیق قرار می‌گیرد. همچنین می‌توان جسم غیر صلب را به صورت جرم مایع و یا ذرات گازی تعریف کرد که با میزان مشخص در حال جریان است. عبور جریان هوا و سوخت از توربین یک موتور هواپیما، گازهای محترق در حال خروج از شیپوره موتور یک راکت و یا عبور آب از یک پمپ دوار، مثالهایی برای اجسام غیر صلب می‌باشند.

اگرچه تعمیم معادلات حرکت ذره به سیستم ذرات به سادگی انجام می‌گیرد، اما نباید انتظار داشت که بدون توجه به مسائل تجربی بتوان کلیت و اهمیت اصول تعمیم یافته را کاملاً درک کرد. به همین دلیل قویاً توصیه می‌شود که نتایج حاصل از این فصل به هنگام مطالعه فصول باقیمانده کتاب، مکرراً مرور شود. به این طریق، شما درخواهید یافت که اصول دینامیکی چگونه بهم پیوسته هستند.

۴-۲ تعمیم قانون دوم نیوتن



هم اکنون، قانون دوم نیوتن برای حرکت را جهت سیستم عمومی جرم تعمیم می‌دهیم که به این منظور مدلی مطابق شکل ۱-٤ با n ذره مادی که در یک سطح بسته فضایی محصور شده‌اند را در نظر می‌گیریم.



مثلاً سطح محصور ممکن سطح خارجی یک جسم صلب، سطح محصور بر قطعه دلخواهی از یک جسم، سطح خارجی راکتی که شامل ذرات صلب و متحرک است و یا حجم بخصوصی از ذرات سیال باشد. در هر حالت سیستم مورد نظر عبارت از جرم مادی محتوی این سطح محصور بوده و باید کاملاً مشخص و مجزا گردد.

شکل ۱-٤، ذره‌ای به جرم m_i را به عنوان نماینده سیستمی نشان می‌دهد که نیروهای $\mathbf{F}_1$ ، $\mathbf{F}_2$ ، $\mathbf{F}_3$ و... از *خارج* و نیروهای $\mathbf{f}_1$ ، $\mathbf{f}_2$ ، $\mathbf{f}_3$ و... از طرف *داخل* به m_i وارد می‌شوند. نیروهای خارجی ناشی از تماس سیستم با اجسام خارجی یا نیروهای جاذبه، الکتریکی یا مغناطیسی می‌باشد. نیروهای داخلی، نیروهای عکس العمل بین ذره مادی m_i و سایر جرمهای موجود در درون سیستم است. ذره m_i به کمک بردار موقعیت $\mathbf{r}_i$ مشخص شده و نسبت به دستگاه مرجع نیوتنی با مبدا بدون شتاب O سنجیده می‌شود.* $\bar{\mathbf{r}}$ بردار موقعیت مرکز جرم G سیستم ذرات است. مرکز جرم طبق تعریف ارائه شده در استاتیک چنین محاسبه می‌شود:

$$m\bar{\mathbf{r}} = \Sigma m_i \mathbf{r}_i$$

که در آن $m = \Sigma m_i$ جرمی کل سیستم است. علامت مجموع Σ بیانگر مجموع $\sum_{i=1}^{n}$ ، n ذره می‌باشد. در نتیجه اعمال قانون دوم نیوتن، یعنی معادله ۳-۳، به جرم m_i داریم:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \cdots = m_i\, \ddot{\mathbf{r}}_i$$

که در آن $\ddot{\mathbf{r}}_i$ شتاب m_i می‌باشد. معادله مشابهی را برای هر یک از ذرات سیستم می‌توان نوشت. اگر این معادلات برای کل ذرات سیستم نوشته شده و سپس با یکدیگر جمع شوند، نتیجه چنین می‌شود:

$$\Sigma\mathbf{F} + \Sigma\mathbf{f} = \Sigma\, m_i\, \ddot{\mathbf{r}}_i$$

که در اینصورت $\Sigma\mathbf{F}$ جمع برداری *تمام* نیروهای وارد بر ذرات سیستم از طرف خارج از مرزهای سیستم، $\Sigma\mathbf{f}$ جمع برداری همهٔ نیروهای وارد بر ذرات در اثر عمل و عکس العمل ذرات داخل سیستم می‌باشد. از آنجاییکه کلیه نیروهای داخلی موجود در سیستم به صورت عمل و عکس العمل یک جفت نیروی مساوی ولی در جهت خلاف یکدیگر ظاهر می‌شوند، بنابراین $\Sigma\mathbf{f}$ برابر صفر خواهد بود. با دو بار مشتق‌گیری نسبت به زمان از معادله‌ای که $\bar{\mathbf{r}}$ را تعریف می‌کند، داریم: $m\ddot{\bar{\mathbf{r}}} = \Sigma m_i \ddot{\mathbf{r}}_i$. تا وقتیکه جرم m وارد و یا خارج از سیستم نشود، دارای مشتق نسبت به زمان نخواهد بود**. با جایگزینی در معادله‌های حرکت داریم:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{F} = m\ddot{\bar{\mathbf{r}}} \qquad \text{یا} \qquad \Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}} \qquad (٤-١)$$

---

* در بخش ۱۴-۳ نشان داده شده که هر دستگاه غیر دوار و غیر شتابدار، تشکیل یک سیستم مرجع نیوتنی را می‌دهد که اصول و قوانین نیوتنی در آن معتبر است.

** اگر m تابعی از زمان باشد، مسئله پیچیده‌تر خواهد شد. چنین حالتی تحت عنوان جرم متغیر در بخش ۷-۴ مورد بحث قرار گرفته است.

که $\bar{\mathbf{a}}$ عبارت از شتاب $\ddot{\bar{\mathbf{r}}}$ مربوط به مرکز جرم سیستم می‌باشد.

معادله ۱-٤، شکل تعمیم یافته قانون دوم نیوتن برای حرکت یک سیستم جرم بوده و به *معادله حرکت* m معروف است. این معادله بیان می‌کند که برآیند نیروهای خارجی وارد بر هر سیستم جرمی، بـا حـاصلضرب جـرم کـل سیسـتم در شتاب مرکز جرم برابر است. این قانون بیانگر *اصل حرکت مرکز جرم* می‌باشد.

باید توجه داشت که $\bar{\mathbf{a}}$ شتاب یک نقطه ریاضی است که در هر لحظه نشانگر موقعیت مرکز جرم n ذره می‌باشد. در مورد یک جسم غیر صلب، چنین شتابی بیانگر شتاب هیچ ذره بخصوصی نیست. باید توجه داشت که معادلـه ۱-٤ در هـر لحظه برقرار است و بنابراین یک رابطه لحظه‌ای خواهد بود. معادله ۱-٤ در مورد یک سیستم جرمی را نمی‌توان مستقیماً از معادله ۳-۳ برای حرکت یک ذره منفرد استنتاج کرد. بلکه باید آنرا به اثبات رساند.

با بکارگیری دستگاه مختصاتی مناسب می‌توان معادله ۱-٤ را بر حسب مولفه‌هایش به صورت زیر بیان کرد:

$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma F_z = m\bar{a}_z \tag{٤-۱a}$$

گرچه برداری بودن معادله ۱-٤ ایجاب می‌کند که بردار شتاب $\bar{\mathbf{a}}$ در همان جـهت نـیروی خـارجی $\Sigma\mathbf{F}$ باشـد، ولـی همانطور که بعداً نشان داده خواهد شد، الزامی وجود ندارد که $\Sigma\mathbf{F}$ از G مرکز جرم بگذرد. در حالت کلی، در واقـع $\Sigma\mathbf{F}$ از G نمی‌گذرد.

۳-۴ کار ـ انرژی

در بخش ٦-۳ رابطه کار ـ انرژی برای یک ذره مورد اشاره قرار گرفت. همچنین این رابطه به سیستمی متشکل از دو یا چند ذره اعمال شد. اکنون سیستم عمومی شکل ۱-٤ مورد توجه قرار می‌گیرد که در آن رابطه کار ـ انرژی در مـورد ذره نماینده به جرم m_i به صورت $(U_{1\text{-}2})_i = \Delta T_i$ است. در اینجا $(U_{1\text{-}2})_i$ کار انجام شده بر روی m_i توسط کلیه نیروهای خـارجی $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \cdots$ و تمامی نیروهای داخلی $\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 + \mathbf{f}_3 + \cdots$ در برهه‌ای از حرکت به سیستم می‌باشد. انـرژی جنبشی m_i برابر $T_i = \frac{1}{2}m_i v_i^2$ است که در آن v_i اندازه سرعت ذره $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ می‌باشد.

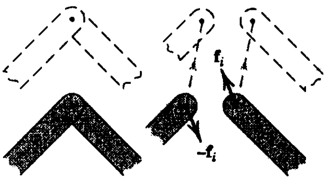
رابطه کار ـ انرژی

در مورد کل سیستم، مجموع معادلات کار ـ انرژی نوشته شده برای تمامی ذرات برابر است با: $\Sigma(U_{1\text{-}2})_i = \Sigma\Delta T_i$ کـه می‌توان آنرا همانند معادله ۱۱-۳ از بخش ٦-۳ بیان کرد.

$$\boxed{U_{1\text{-}2} = \Delta T \quad \text{یا} \quad T_1 + U_{1\text{-}2} = T_2} \tag{٤-۲}$$

که $U_{1\text{-}2} = \Sigma(U_{1\text{-}2})_i$ ، کار انجام شده توسط کلیه نیروهای وارد بر همه ذرات و ΔT عبارت از تغییر انرژی جنبشی کل $T = \Sigma T_i$ در سیستم مزبور است.

در مورد یک جسم صلب یا سیستمی از اجسام صلب که بـه صـورت ایده‌آل بدون اصطکاک به هم متصل هستند، کـار خـالصی توسط نیروهـا و گشتاورهای داخلی اتصالات انجام نمی‌شوند. مطابق شکل ۲-٤ به عنوان نمونه یک اتصال می‌بینیم به دلیل اینکه نقطه اثر زوج نیروی داخلی $\mathbf{f}_i$ و $-\mathbf{f}_i$ از این سیستم مولفه‌های تغییر مکان یکسانی داشته و نیروهـا معـادل و مخـالف یکدیگرند، بنابراین کار انجام شده توسط آنها صفر می‌شود. در چنین حـالتی، $U_{1\text{-}2}$ برابر کار انجام شده بر روی سیستم توسط نیروهای خارجی است.



شکل ۲-۴

در مورد سیستم مکانیکی غیر صلبی که اعضای الاستیک آن توانایی ذخیره انرژی را دارند، بخشی از کار انجام شـده توسط نیروهای خارجی صرف تغییر در انرژی پتانسیل الاستیکی درونی V_e می‌شود. همچنین اگر کـار انجـام شـده توسـط نیروهای جاذبه از عبارت مربوط به کار مستثنی شود و به عنوان تغییر در انـرژی پتانسـیل جاذبـه‌ای V_g تلقـی گردد، در آن صورت می‌توان در برهه‌ای از حرکت، کار انجام شده $U'_{1\text{-}2}$ بر روی سیستم را با تغییر انرژی مکانیکی ΔE سیستم برابر قرار داد. در نتیجه، $U'_{1\text{-}2} = \Delta E$ یا:

$$\boxed{U'_{1\text{-}2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e} \qquad (٤\text{-}٣)$$

$$\boxed{T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} + U'_{1\text{-}2} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2}} \qquad (٤\text{-}٣a)$$

که همان معادلات ۱۷-۳ و ۱۷a-۳ می‌باشند.

عبارت انرژی جنبشی

حال رابطه $T = \Sigma \frac{1}{2} m_i v_i^2$ را با جزئیات بیشتری برای عبارت انرژی جنبشی سیستم جرم، مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. بر اساس بحث انجام شده در بخش ۸-۲ در مورد اصل حرکت نسـبی، می‌توانیـم سـرعت ذره نمـاینده m_i را بـه صورت زیر بنویسیم.

$$\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

که $\bar{\mathbf{v}}$ سرعت مرکز جرم G و $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ سرعت m_i نسبت به یک دستگاه مرجع در حال انتقال است که بـا مرکـز جـرم G حرکت می‌کند. با دانستن اینکه $v_i^2 = \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i$ است، انرژی جنبشی سیستم را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$T = \Sigma \frac{1}{2} m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = \Sigma \frac{1}{2} m_i (\bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) \cdot (\bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i)$$
$$= \Sigma \frac{1}{2} m_i \bar{v}^2 + \Sigma \frac{1}{2} m_i |\dot{\boldsymbol{\rho}}_i|^2 + \Sigma m_i \bar{\mathbf{v}} \cdot \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

از آنجاییکه $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ نسبت به مرکز جرم اندازه‌گیری می‌شود، بنابراین $\Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i = \mathbf{0}$ است و سومین جمله به صورت $\bar{\mathbf{v}} \cdot \Sigma m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \bar{\mathbf{v}} \cdot \frac{d}{dt}\Sigma(m_i \boldsymbol{\rho}_i) = 0$. همچنین $\Sigma \frac{1}{2} m_i \bar{\upsilon}^2 = \frac{1}{2}\bar{\upsilon}^2 \Sigma m_i = \frac{1}{2} m \bar{\upsilon}^2$ است. بنابراین انرژی جنبشی کل چنین می‌شود.

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m \bar{\upsilon}^2 + \Sigma \frac{1}{2} m_i \left|\dot{\rho}_i\right|^2} \qquad (٤-٤)$$

این معادله بیانگر این حقیقت است که انرژی جنبشی کل یک سیستم جرم با مجموع انرژی حاصل از انتقال مرکز جرم کل سیستم و انرژی ناشی از حرکت کلیه ذرات نسبت به مرکز جرم برابر می‌باشد.

۴-۴ ضربه ـ مومنتم (اندازه حرکت)

اکنون مفاهیم مومنتم و ضربه را در مورد مجموعه‌ای از ذرات گسترش می‌دهیم.

مومنتم خطی

از تعریف ارائه شده در بخش ۳-۸، مومنتم خطی ذره‌ای که نماینده سیستم نشان داده شده در شکل ٤-١ می‌باشد، برابر $\mathbf{G}_i = m\,\mathbf{v}_i$ است که در آن $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$ سرعت m_i است.

طبق تعریف، مومنتم خطی سیستم با جمع برداری مومنتم خطی تمام ذرات آن برابر است با $\mathbf{G} = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$. با جایگذاری رابطه سرعت نسبی $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ و توجه مجدد به این نکته که $\Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i = m\bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$ است. داریم:

$$\mathbf{G} = \Sigma m_i\left(\bar{\mathbf{v}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right) = \Sigma m_i \bar{\mathbf{v}} + \frac{d}{dt}\Sigma m_i \boldsymbol{\rho}_i$$
$$= \bar{\mathbf{v}}\Sigma m_i + \frac{d}{dt}(\mathbf{0})$$

یا:

$$\boxed{\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}} \qquad (٤-٥)$$

در نتیجه مومنتم خطی هر سیستم مادی با جرم ثابت، برابر با حاصلضرب جرم در سرعت مرکز جرم آن است. مشتق $\mathbf{G}$ نسبت به زمان به صورت $m\dot{\bar{\mathbf{v}}} = m\bar{\mathbf{a}}$ است که با توجه به معادله ٤-١ با برآیند نیروی خارجی وارد بر سیستم برابر است. در نتیجه داریم:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}} \qquad (٤-٦)$$

که دارای همان شکل معادله ۲۱-۳ برای یک ذره منفرد می‌باشد. معادله ٦-٤ بیانگر آن است که برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم جرم، با میزان تغییر مومنتم خطی نسبت به زمان سیستم برابر می‌باشد و جایگزینی برای شکل تعمیم یافته قانون دوم حرکت یعنی معادله ١-٤ است. همانطور که در انتهای بخش اخیر توجه شد، در حالت کلی $\Sigma\mathbf{F}$ از مرکز جرم G نمی‌گذرد. در معادله ٦-٤ به هنگام مشتق گیری نسبت به زمان، جرم کلی ثابت در نظر گرفته شده است. پس این معادله به سیستم‌هایی که دارای تغییر جرم نسبت به زمان هستند، قابل اعمال نیست.

مومنتم زاویه‌ای

مطابق شکل ۳-٤، اکنون مومنتم زاویه‌ای سیستم عمومی جرم حول نقطه ثابت O و مرکز جرم G و حول یک نقطه دلخواه P تعیین خواهد شد که در حالت اخیر، نقطه P ممکن است دارای شتاب $\mathbf{a}_P = \ddot{\mathbf{r}}_P$ باشد.

حول نقطه ثابت O. مومنتم زاویه‌ای یک سیستم جرم حول نقطه ثابت O که در یک سیستم مرجع نیوتنی ثابت، به صورت جمع برداری گشتاور مومنتم خطی کلیه ذرات سیستم حول نقطه O تعریف می‌شود، به صورت زیر است.

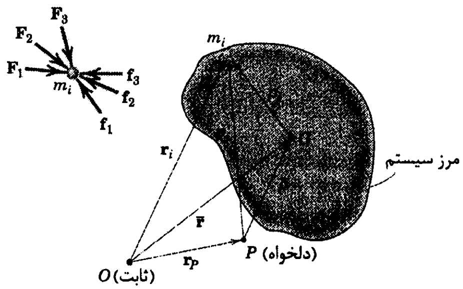
$$\mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$$

مشتق ضرب برداری رابطه فوق نسبت به زمان به صورت $\dot{\mathbf{H}}_O = \Sigma(\dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \dot{\mathbf{v}}_i)$ می‌باشد. اولین مجموع در این رابطه صفر خواهد شد. زیرا حاصلضرب خارجی دو بردار یکسان $\dot{\mathbf{r}}_i$ و $\mathbf{v}_i$ مساوی با صفر است. در مورد دومین جمله داریم: $\Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{a}_i) = \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i)$ که با جمع برداری گشتاور تمام نیروهای وارد بر ذرات سیستم برابر است. از آنجایی که نیروهای داخلی یکدیگر را حذف می‌کنند، بنابراین $\Sigma\mathbf{M}_O$ فقط بیانگر گشتاور نیروهای خارجی وارد بر سیستم است. در نتیجه جمع گشتاوری چنین می‌شود:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O} \qquad (٤\text{-}٧)$$

که دارای همان شکل رابطه ۲۷-۳ برای یک ذره منفرد می‌باشد.

معادله ٧-٤ بیان می‌کند که برآیند برداری گشتاور نیروهای خارجی وارد بر هر سیستم جرم حول هر نقطه ثابت، با میزان تغییر مومنتم زاویه‌ای سیستم حول آن نقطه ثابت برابر است. اگر جرم سیستم با زمان تغییر کند (همانند حالت مومنتم خطی)، معادله ٧-٤ را نمی‌توان به آن اعمال کرد.



شکل ۳-۴

حول مرکز جرم G. مومنتم زاویه‌ای یک سیستم جرم حول مرکز G با جمع برداری گشتاور مومنتم خطی کلیه ذرات سیستم حول مرکز جرم G برابر بوده و مساوی است با:

$$\mathbf{H}_G = \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\mathbf{r}}_i \qquad (٤\text{-}٨)$$

با نوشتن سرعت مطلق $\dot{\mathbf{r}}_i$ به صورت $\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$، $\mathbf{H}_G$ چنین می‌شود:

$$\mathbf{H}_G = \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i(\dot{\bar{\mathbf{r}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i) = \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\bar{\mathbf{r}}} + \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

اولین جمله طرف راست عبارت فوق را می‌توان به صورت $-\dot{\bar{\mathbf{r}}}\times\Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i$ نوشت. اما بنا به تعریف مرکز جرم داریم: $\Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i=\mathbf{0}$. بنابراین این جمله اخیر برابر صفر می‌شود. در نتیجه داریم:

$$\mathbf{H}_G=\Sigma\boldsymbol{\rho}_i\times\Sigma m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i \qquad (\text{٤-٨a})$$

چون در معادله ٨-٤ از سرعت مطلق $\dot{\mathbf{r}}_i$ استفاده شد، در نتیجه این عبارت، مومنتم زاویه‌ای *مطلق* نامیده می‌شود و در معادله ٨a-٤ به دلیل اینکه از سرعت نسبی $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ استفاده شده است، در نتیجه به این رابطه، مومنتم زاویه‌ای *نسبی* گفته می‌شود. با انتخاب مرکز جرم G به عنوان مرجع، مومنتم زاویه‌ای مطلق و نسبی با هم برابر خواهند شد. این یکسانی در مورد مرجع بودن نقطه دلخواه P صدق نمی‌کند. لیکن تفاوتی در مورد نقطه ثابت O به عنوان مرجع وجود ندارد.

مشتق معادله ٨-٤ نسبت به زمان چنین است:

$$\dot{\mathbf{H}}_G=\Sigma\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\times m_i\left(\dot{\bar{\mathbf{r}}}+\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right)+\Sigma\boldsymbol{\rho}_i\times m_i\ddot{\mathbf{r}}_i$$

بسط اولین مجموع به صورت $\Sigma\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\times m_i\dot{\bar{\mathbf{r}}}+\Sigma\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ است. اولین جمله را می‌توان به صورت $-\dot{\bar{\mathbf{r}}}\times\Sigma m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i=-\dot{\bar{\mathbf{r}}}\times\frac{d}{dt}\Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i$ نوشت که بنابر تعریف مرکز جرم، صفر است. اگر $\mathbf{F}_i$ بیانگر برآیند نیروهای خارجی و $\mathbf{f}_i$ بیانگر برآیند نیروهای داخلی وارد بر m_i باشد، بنا به قانون دوم نیوتن، دومین مجموع به صورت $\Sigma\boldsymbol{\rho}_i\times(\mathbf{F}_i+\mathbf{f}_i)=\Sigma\boldsymbol{\rho}_i\times\mathbf{F}_i=\Sigma\mathbf{M}_G$ در می‌آید که در واقع برآیند کلیه گشتاورهای خارجی حول نقطه G است. یادآوری می‌شود که برآیند همه گشتاورهای داخلی $\Sigma\boldsymbol{\rho}_i\times\mathbf{f}_i$ صفر می‌شود. در نتیجه، به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_G=\dot{\mathbf{H}}_G} \qquad (\text{٤-٩})$$

که به صورت مومنتم زاویه‌ای مطلق و نسبی قابل استفاده است.

معادلات ٧-٤ و ٩-٤ از قوی‌ترین معادلات حاکم بر دینامیک هستند و به هر سیستم جرم اعم از صلب یا غیر صلب قابل اعمال است.

حول نقطه دلخواه P. اکنون، مومنتم زاویه‌ای هر نقطه دلخواه P (که ممکن است دارای شتاب $\ddot{\mathbf{r}}_P$ باشد) را می‌توان با توجه به شکل ٣-٤ بیان کرد. در نتیجه:

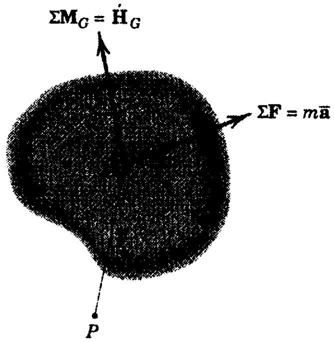
$$\mathbf{H}_P=\Sigma\boldsymbol{\rho}'_i\times m_i\dot{\mathbf{r}}_i=\Sigma\left(\bar{\boldsymbol{\rho}}+\boldsymbol{\rho}_i\right)\times m_i\dot{\mathbf{r}}_i$$

اولین جمله را می‌توان به شکل $\bar{\boldsymbol{\rho}}\times\Sigma m_i\dot{\mathbf{r}}_i=\bar{\boldsymbol{\rho}}\times\Sigma m_i\mathbf{v}_i=\bar{\boldsymbol{\rho}}+m\bar{\mathbf{v}}$ نوشت. جمله دوم هم به صورت $\Sigma\boldsymbol{\rho}_i\times m_i\dot{\mathbf{r}}_i=\mathbf{H}_G$ می‌باشد. در نتیجه، پس از مرتب کردن داریم:

$$\boxed{\mathbf{H}_P=\mathbf{H}_G+\bar{\boldsymbol{\rho}}\times m\bar{\mathbf{v}}} \qquad (\text{٤-١٠})$$

معادله ١٠-٤ بیان می‌کند که مومنتم زاویه‌ای مطلق حول هر نقطه دلخواه P برابر است با مجموع مومنتم زاویه‌ای حول G و گشتاور مومنتم خطی $m\bar{\mathbf{v}}$ سیستم مورد نظر حول نقطه P، که در G متمرکز است.

حال باید اصل مربوط به گشتاورها را بکار ببریم که در درس استاتیک تشریح شد. این اصل، مجموعه‌ای از نیروها را به یک نیروی برآیند که از هر نقطه‌ای نظیر G می‌گذرد و یک کوپل متناظر حول آن نقطه تعریف می‌کند. شکل ٤-٤ برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم را نشان می‌دهد که بر حسب برآیند نیروی $\Sigma\mathbf{F}$ که از G می‌گذرد و کوپل $\Sigma\mathbf{M}_G$ متناظر با آن بیان شده است.



شکل ۴-۴

می‌بینیم که برآیند گشتاور کلیه نیروهای خارجی وارد بر سیستم حول نقطه P باید با گشتاور برآیندهای آنها برابر باشد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\Sigma\mathbf{M}_P = \Sigma\mathbf{M}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times \Sigma\mathbf{F}$$

که با توجه به معادلات ٤-٩ و ٤-٦ چنین می‌شود.

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}}} \qquad (٤\text{-}١١)$$

معادله ٤-١١ ما را در نوشتن معادله گشتاور حول هر مرکز مناسب گشتاورگیری نظیر P یاری می‌کند و به کمک شکل ٤-٤ به آسانی قابل مشاهده است. این معادله شالوده محکم و اساسی را برای مباحث سینتیک اجسام صلب در صفحه، در فصل ٦ تشکیل می‌دهد.

همچنین با استفاده از مومنتم نسبت به نقطه P، می‌توان روابط مشابهی را نیز برای مومنتم توسعه داد. در نتیجه، از شکل ٤-٣ داریم:

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \Sigma\boldsymbol{\rho}_i' \times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i'$$

که $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i'$ سرعت m_i نسبت به نقطه P است. با قرار دادن روابط $\boldsymbol{\rho}_i' = \bar{\boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{\rho}_i$ و $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i' = \dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} + \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ در معادله فوق، می‌توان نوشت:

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \Sigma\bar{\boldsymbol{\rho}} \times m_i\dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} + \Sigma\bar{\boldsymbol{\rho}} \times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i + \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i\dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} + \Sigma\boldsymbol{\rho}_i \times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$$

اولین مجموع با $\bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{v}}_{\text{rel}}$ برابر است. دومین مجموع برابر با $\bar{\boldsymbol{\rho}} \times \frac{d}{dt}\Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i$ و سومین جمله با عبارت $-\dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} \times \Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i$ مساوی است که هر دو بنابر تعریف مرکز جرم برابر صفر هستند. چهارمین مجموع با $(\mathbf{H}_G)_{\text{rel}}$ برابر است. پس از مرتب کردن، داریم:

$$(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = (\mathbf{H}_G)_{\text{rel}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{v}}_{\text{rel}} \qquad (٤\text{-}١٢)$$

که $(\mathbf{H}_G)_{\text{rel}}$ همان $\mathbf{H}_G$ می‌باشد (معالات ٤-٨ و ٤-٨a را ببینید). بایستی به شباهت معادلات ٤-١٢ و ٤-١٠ توجه کرد.

حال می‌توان معادله گشتاور حول نقطه P را بر حسب مومنتم زاویه‌ای نسبت به P بیان کرد. با مشتق‌گیری از عبارت $(\mathbf{H}_P)_{\text{rel}} = \Sigma\boldsymbol{\rho}_i' \times m_i\dot{\boldsymbol{\rho}}_i'$ نسبت به زمان و انجام جایگزینی $\ddot{\mathbf{r}}_i = \ddot{\mathbf{r}}_P + \ddot{\boldsymbol{\rho}}_i'$ داریم:

$$\left(\dot{\mathbf{H}}_P\right)_{\text{rel}} = \Sigma\dot{\rho}_i' \times m_i\dot{\rho}_i' + \Sigma\rho_i' \times m_i\ddot{\mathbf{r}}_i - \Sigma\rho_i' \times m_i\ddot{\mathbf{r}}_P$$

اولین مجموع، به طور مشخص برابر صفر است. دومین مجموع با برآیند گشتاور تمام نیروهای خارجی حول نقطه P یعنی $\Sigma\mathbf{M}_P$ مساوی است. سومین جمله به صورت $\Sigma\rho_i' \times m_i\mathbf{a}_P = -\mathbf{a}_P \times \Sigma m_i\rho_i' = -\mathbf{a}_P \times m\bar{\rho} = \bar{\rho} \times m\mathbf{a}_P$ می‌شود. پس از جایگزینی و مرتب کردن جملات داریم:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_P = \left(\dot{\mathbf{H}}_P\right)_{\text{rel}} + \bar{\rho} \times m\mathbf{a}_P} \qquad (٤-١٣)$$

معادله ١٣-٤ دارای شکل مناسبی می‌شود که نقطه‌ای مانند P با شتاب معلوم، به عنوان مرکز گشتاورگیری مورد استفاده قرار می‌گیرد. معادله فوق به شکل ساده‌تر زیر در می‌آید.

$\Sigma\mathbf{M}_P = \left(\dot{\mathbf{H}}_P\right)_{\text{rel}}$ اگر

۱- $\mathbf{a}_P = \mathbf{0}$ (معادل با رابطه ٧-٤)

۲- $\bar{\rho} = \mathbf{0}$ (معادل با رابطه ٩-٤)

۳- $\bar{\rho}$ و $\mathbf{a}_P$ موازی هستند ($\mathbf{a}_P$ به سمت G و یا خارج از آن باشد)

۵-۴ بقای انرژی و مومنتم

تحت شرایطی، در برهه‌ای از حرکت، هیچ تغییر خالصی در انرژی مکانیکی کل یک سیستم بوجود نمی‌آید. همچنین حالتهای دیگری وجود دارد که هیچگونه تغییری در مومنتم یک سیستم ایجاد نمی‌شود. این شرایط و حالات به طور جداگانه در زیر، مورد بحث قرار می‌گیرد.

بقای انرژی

به یک سیستم جرم، *کنسرواتیو* گفته می‌شود که در اثر نیروهای اصطکاک داخلی که کار منفی انجام می‌دهند و یا در اثر حرکت تناوبی در اجزاء غیر الاستیک که موجب اتلاف انرژی می‌شوند، هیچگونه اتلاف انرژی صورت نگیرد. اگر در برهه‌ای از حرکت از طرف نیروهای خارجی (غیر از نیروهای جاذبه و پتانسیلی) کاری بر سیستم کنسرواتیو انجام نشود. در اینصورت از انرژی سیستم چیزی کاسته نخواهد شد. در این حالت $\Delta E = 0$ و یا $E_{\text{نهایی}} = E_{\text{اولیه}}$ است. بنابراین، معادله ٣-٤ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e = 0} \qquad (٤-١٤)$$

و یا:

$$\boxed{T_1 + V_{g_1} + V_{e_1} = T_2 + V_{g_2} + V_{e_2}} \qquad (٤-١٤a)$$

که *قانون بقای انرژی دینامیکی* را بیان می‌کند. این قانون فقط در حالت ایده‌آل صادق است که در آن، اصطکاک جنبشی داخلی آنقدر کوچک است که می‌توان از آن صرفنظر کرد.

بقای مومنتم

اگر در برهه خاصی از زمان، برآیند نیروهای خارجی $\Sigma\mathbf{F}$ وارد بر یک سیستم جرم کنسرواتیو و یا غیر کنسرواتیو برابر صفر باشد، معادله ٦-٤ ایجاب می‌کند که $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{0}$ باشد، به طوری که در این برهه از زمان داریم:

$$\boxed{\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2} \qquad (٤-١٥)$$

که *اصل بقای مومنتم خطی* را بیان می‌کند. در نتیجه، در غیاب ضربهٔ خارجی، مومنتم خطی یک سیستم، بدون تغییر باقی می‌ماند.

به طور مشابه اگر برآیند گشتاور تمام نیروهای وارد بر هر سیستم جرم حول نقطه ثابت O یا حول مرکز جرم G برابر صفر باشد، معادلات ٧-٤ یا ٩-٤ به ترتیب ایجاب می‌کنند که:

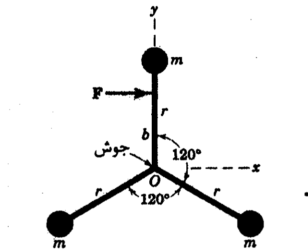
$$\boxed{(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \quad \text{یا} \quad (\mathbf{H}_G)_1 = (\mathbf{H}_G)_2} \qquad (٤-١٦)$$

این روابط *اصل بقای مومنتم زاویه‌ای* را در مورد یک سیستم عمومی جرم در غیاب یک ضربه زاویه‌ای بیان می‌کند. در نتیجه اگر حول یک نقطه ثابت (یا حول مرکز جرم) هیچ ضربه زاویه‌ای وجود نداشته باشد، مومنتم زاویه‌ای حول نقطه ثابت (یا حول مرکز جرم) بدون تغییر باقی می‌ماند.

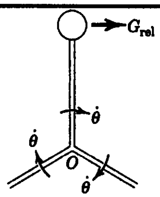
هر یک از معادلات بالا می‌توانند مستقل از دیگری باشند. در بخش ١٤-٣ ثابت شد که قوانین اساسی مکانیک نیوتنی در مورد اندازه‌گیریهایی که نسبت به دستگاه مختصات در حال انتقال با سرعت ثابت صورت می‌گیرد، صادق است. در نتیجه، به شرطی معادلات ١-٤ تا ١٦-٤ معتبرند که تمام کمیتها نسبت به محورهای انتقالی بیان شوند.

روابط ١-٤ تا ١٦-٤ از مهمترین قوانین بنیادین استخراج شده مکانیک هستند. در فصل حاضر، این قوانین به دلیل اینکه برای عمومی‌ترین سیستم جرم ثابت استخراج شد، کلیات قوانین را تثبیت کردند. هنگامی این قوانین مورد استفاده قرار می‌گیرند که برای سیستمهای جرمی خاص نظیر اجسام صلب و غیر صلب و نیز سیستمهای سیالاتی ویژه‌ای که مورد بحث در بخشهای آینده است، بکار روند. توصیه می‌شود که این قوانین به دقت مطالعه گردد و آنها را با عوامل محدود کننده‌تری که قبلاً در فصل ٣ با آن مواجه شدیم، مورد مقایسه قرار داد.

مسئله نمونه ۱-۴



هر یک از سه گوی دارای جرم m می‌باشد و به قاب سه شاخه‌ای صلب با جرم ناچیز جوش شده‌اند. کل مجموعه بر روی سطح صیقلی افقی قـرار داده می‌شـود. اگر مطابق شکل، نیروی $\mathbf{F}$ به یکی از میله‌ها به طور ناگهانی وارد شود، تعیین کنید:
(a) شتاب نقطه O و (b) شتاب زاویه‌ای $\ddot{\theta}$ قاب را.



حل، (a): نقطه O مرکز جرم مجموعه سه گوی اسـت، بطوریکـه شـتاب آن از معادله ۱-٤ بدست می‌آید.

❶ $[\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}] \qquad F\mathbf{i} = 3m\bar{\mathbf{a}} \qquad \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_O = \dfrac{F}{3m}\mathbf{i}$ جواب

(b) $\ddot{\theta}$ را از اصل گشتاورها یعنی معادله ۹-٤ بدست می‌آوریم. برای پیدا کردن $\mathbf{H}_G$ توجه می‌کنیم که سـرعت هـر یک از گوی‌ها نسبت به مرکز جرم O، هنگامیکه در دستگاه غیر دوار x-y اندازه گیری می‌شـود، برابـر است بـا $r\dot{\theta}$ کـه $\dot{\theta}$ سرعت زاویه‌ای مشترک شاخه‌ها می‌باشد. معادله ۸-٤ مومنتم زاویه‌ای مجموعه حول نقطه O با مجموع گشتاورهای حاصل از مومنتم‌های خطی نسبی برابر است. پس می‌توان آن را چنین بیان کرد:

$$H_O = H_G = 3\left(mr\dot{\theta}\right)r = 3mr^2\dot{\theta}$$

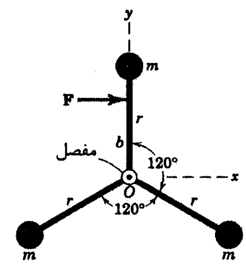
❷ حال از معادله ۹-٤ داریم:

$$[\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G] \qquad Fb = \frac{d}{dt}\left(3mr^2\dot{\theta}\right) = 3mr^2\ddot{\theta} \text{ بنابراین : } \ddot{\theta} = \frac{Fb}{3mr^2} \text{ جواب}$$

نکات مفید

❶ *توجه داریم که نتیجه فقط به مقدار و جهت نیروی $\mathbf{F}$ بستگی دارد نه به b، که محل خط اثر نیروی $\mathbf{F}$ است.*

❷ *گرچه در ابتدا $\dot{\theta}$ صفر است، اما برای بدست آوردن $\dot{H}_G$ به عبارت $H_O = H_G$ نیاز داریم. همچنین مشاهده می‌کنیم $\ddot{\theta}$ از مرکت نقطه O مستقل است.*



مسئله نمونه ۲-۴

شرایط ذکر شده در مسئله نمونه ۱-٤ را با این تفاوت در نظر بگیرید که هر یک از میله‌های رابط در نقطه O آزادانه مفصل شده‌اند. بنابراین یـک سیسـتم صلـب را تشـکیل نمی‌دهند. تفاوت بین این دو مسئله را توضیح دهید.

حل: شکل تعمیم یافته قانون دوم نیوتن در مورد هر سیستم مادی درست است. بطوریکه شتاب $\bar{\mathbf{a}}$ مرکز جرم G همانند مسئله نمونه ۱-٤ می‌باشد. یعنی:

جواب $$\bar{\mathbf{a}} = \frac{F}{3m}\mathbf{i}$$

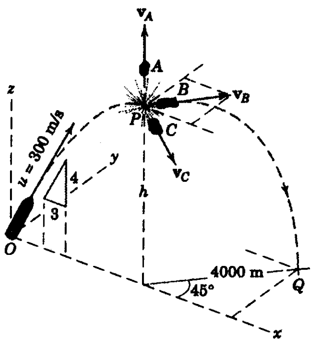
گرچه در این مسئله G بر O منطبق است، اما حرکت مفصل O همانند حرکت G نیست. زیرا هنگامیکه زاویه بین میله‌های رابط تغییر می‌کند، نقطه O دیگر مرکز جرم سیستم نخواهد بود.

● در لحظه نشان داده شده در هر دو مسئله مقادیر ΣM_G و $\dot{H}_G$ هر دو یکسان هستند. ولی حرکتهای زاویه‌ای میله‌های رابط در این مسئله همگی با یکدیگر متفاوت بوده و به آسانی قابل تعیین نیستند.

نکته مفید

● *این سیستم را می‌توان منفصل کرد و معادلات حرکت را برای هر قسمت بطور جداگانه نوشت و از این طریق یکایک مجهولات حذف می‌شوند. همچنین می‌توان معادلات لاگرانژ را اعمال کرد (بحث بیشتر را می‌توانید در کتاب دینامیک، ویرایش دوم SI ، سال ۱۹۷۵، اثر اولین مولف ببینید).*

مسئله نمونه ۳-۴



خمپاره‌ای به جرم ۲۰ kg از نقطه O با سرعت $u =$ ۳۰۰ m/s در صفحه قائم x-z و با شیب نشان داده شده، شلیک می‌شود. هنگامیکه به بالاترین نقطه مسیرش در P می‌رسد، منفجر شده و به سه قسمت A ، B و C تقسیم می‌گردد. بلافاصله پس از انفجار مشاهده می‌شود که قسمت A به اندازه ۵۰۰ m به طور قائم از نقطه P بالا می‌رود و قسمت B دارای سرعت افقی $\mathbf{v}_B$ بوده و سر انجام در نقطه Q فرود می‌آید. جرم هر یک از قسمتهای A ، B و C به ترتیب برابر ۵ kg ، ۹ kg و ٦ kg است. سرعت قسمت C را بلافاصله پس از انفجار تعیین کنید. از مقاومت جو زمین صرفنظر کنید.

حل: از روی دانسته‌هایمان در مورد حرکت پرتابه (مسئله نمونه ٦-۲)، زمان لازم برای رسیدن گلوله به نقطه اوج P و نیز ارتفاع عمودی طی شده چنین است:

$$t = \frac{u_z}{g} = 300\frac{4/5}{9.81} = 24.5 \text{ s}$$

$$h = \frac{u_z^2}{2g} = \frac{[(300)(4/5)]^2}{2(9.81)} = 2940 \text{ m}$$

سرعت قسمت A برابر است با:

$$v_A = \sqrt{2gh_A} = \sqrt{2(9.81)(500)} = 99.0 \text{ m/s}$$

بدون داشتن مولفه اولیه در جهت z ، ۲٤/۵ ثانیه لازم است که قسمت B به زمین برگردد. در نتیجه سرعت افقی آن ثابت باقی می‌ماند که چنین خواهد بود:

$$\upsilon_B = \frac{s}{t} = \frac{4000}{24.5} = 163.5 \text{ m/s}$$

از آنجاییکه نیروهای ناشی از انفجار در درون سیستم گلوله و سه قسمت، بـه صـورت داخلـی صـورت مـی‌گیـرد، مومنتم خطی سیستم در حین انفجار بدون تغییر می‌ماند.

❶ $$[\mathbf{G}_1 = \mathbf{G}_2] \qquad m\mathbf{v} = m_A\,\mathbf{v}_A + m_B\,\mathbf{v}_B + m_C\,\mathbf{v}_C$$

$$20(300)\left(\frac{3}{5}\right)\mathbf{i} = 5(99.0\mathbf{k}) + 9(163.5)(\mathbf{i}\cos 45^\circ + \mathbf{j}\sin 45^\circ) + 6\mathbf{v}_C$$

$$6\mathbf{v}_C = 2560\mathbf{i} - 1040\mathbf{j} - 495\mathbf{k}$$

$$\mathbf{v}_C = 427\mathbf{i} \quad 173.4\mathbf{j} \quad 82.5\mathbf{k} \text{ m/s}$$

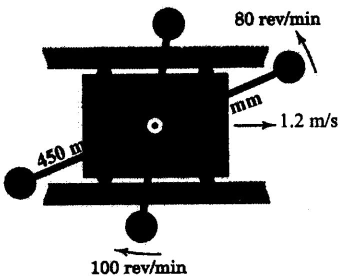
❷ $$\upsilon_C = \sqrt{(427)^2 + (173.4)^2 + (82.5)^2} = 468 \text{ m/s}$$

نکات مفید

❶ *سرعت $\mathbf{v}$ گلوله در بالاترین نقطه مسیرش، مولفه ثابت افقی سرعت اولیه خود، یعنی $\mathbf{u}$ را دارد که برابر است با $u\left(\frac{3}{5}\right)$.*

❷ *توجه داریم که مرکز جرم این سه قسمت در هنگام پرواز همان مسیری را طی می‌کند که گلوله در صورت عدم انفجار آن را طی می‌کرد.*

مسئله نمونه ۴-۴



ارابه ۱۶ کیلوگرمی A با سـرعت ۱/۲ m/s در امتـداد کشـوی راهنمـای افقی خود حرکت می‌کند و دو مجموعه از گوی‌ها و میله‌های سبک که در حال دوران حول مفصل O ارابه می‌باشند را حمل می‌کنـد. جـرم هـر یـک از چهار گوی ۱/٦ kg می‌باشـد. مجموعـه جلویـی بـا سـرعت ۸۰ rev/min در جـهت پادساعتگرد و مجموعه دیگر با سرعت ۱۰۰ rev/min در جهت ساعتگرد دوران می‌کند. در مورد کل سیستم، حساب کنید: (a) انرژی جنبشـی T، (b) انـدازه مومنتم خطی G و (c) اندازه مومنتم زاویه‌ای H_O حول نقطه O را.

حل، (a) انرژی جنبشی. سرعت گوی‌ها نسبت به نقطه O چنین است:

$$\left[|\dot{\rho}_i| = \upsilon_{\text{rel}} = r\dot{\theta}\right] \qquad (\upsilon_{\text{rel}})_{1,2} = 0.450\frac{80(2\pi)}{60} = 3.77 \text{ m/s}$$

$$(\upsilon_{\text{rel}})_{3,4} = 0.300\frac{100(2\pi)}{60} = 3.14 \text{ m/s}$$

انرژی جنبشی سیستم از معادله ٤-٤ بدست می‌آید. بخش انتقالی آن برابر است با:

❶ $$\frac{1}{2}m\bar{\upsilon}^2 = \frac{1}{2}(16 + 4(1.6))(1.2^2) = 16.13 \text{ J}$$

بخش دورانی انرژی جنبشی به مجذور سرعتهای نسبی بستگی داشته و چنین است:

❷ $$\Sigma\tfrac{1}{2}m_i|\dot{\rho}_i|^2 = 2\left[\frac{1}{2}(16)(3.77)^2\right]_{(1,2)} + 2\left[\frac{1}{2}(1.6)(3.14)^2\right]_{(3,4)}$$

$$= 22.7 + 15.79 = 3.85 \ \text{J}$$

انرژی جنبشی کل عبارت است از:

جواب $$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \Sigma \tfrac{1}{2} m_i |\dot{\rho}_i|^2 = 16.13 + 38.5 = 54.7 \ \text{J}$$

(b) **مومنتم خطی.** طبق معادله ۵-۴، مومنتم خطی سیستم برابر است با حاصلضرب جرم کل سیستم در سرعت مرکز جرم یعنی v_O. بنابراین:

جواب $$[\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}] \qquad G = (16 + 4(1.6))(1.2) = 26.9 \ \text{kg.m/s}$$ ❸

(c) **مومنتم زاویه‌ای حول O.** مومنتم زاویه‌ای حول نقطه O ناشی از گشتاورهای مومنتم خطی گوی‌هاست. با در نظر گرفتن جهت پادساعتگرد به عنوان جهت مثبت، داریم:

$$H_O = \Sigma |\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i|$$

$$H_O = [2(1.6)(0.450)(3.77)]_{(1,2)} - [2(1.6)(0.300)(3.14)]_{(3,4)}$$ ❹

جواب $$= 5.43 - 3.02 = 2.41 \ \text{kg.m}^2/\text{s}$$

نکات مفید

❶ *توجه شود که جرم کل شامل ارابه و چهار گوی فلزی است و نیز $\bar{v}$ سرعت مرکز جرم O می‌باشد که در واقع سرعت ارابه است.*

❷ *توجه شود که جهت دوران، چه ساعتگرد و چه پادساعتگرد، هیچ تفاوتی را در محاسبات مربوط به انرژی جنبشی که بستگی به مجذور سرعت دارند، ایجاد نمی‌کند.*

❸ *یک نکته انحرافی وجود دارد که ممکن است دخالت گوی‌ها را پنهان نگه دارد و آن این است که مومنتم خطی آنها نسبت به O در هر جفت، در خلاف دیگری بوده و بنابراین یکدیگر را حذف می‌کنند. ولی هر گوی دارای یک مولفه سرعت $\bar{\mathbf{v}}$ نیز می‌باشد و در نتیجه، مولفه مومنتم آن $m_i \bar{\mathbf{v}}$ می‌شود.*

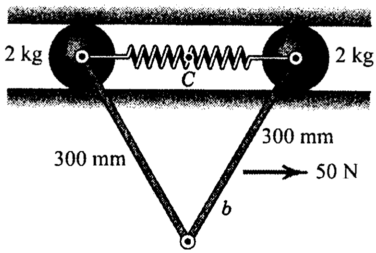
❹ *بر خلاف انرژی جنبشی که در آن جهت دوران بی‌تاثیر بود، مومنتم زاویه‌ای، یک کمیت برداری است و جهت دوران آن باید به حساب آورده شود.*

مسائل

مسائل مقدماتی

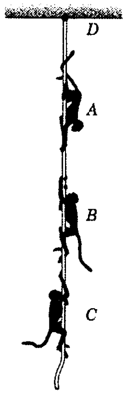
۴-۱ سیستم نشان داده شده، شامل دو گوی صیقلی، هر یک به وزن ۲ kg توسط یک فنر سبک و دو میله با جرم ناچیز به یکدیگر متصل شده‌اند. میله‌ها آزادانه از انتها مفصل شده و در صفحه قائم آویزان می‌باشند. حرکت گوی‌ها محدود به لغزش در شیار افقی صیقلی می‌باشد. اگر در موقعیت نشان داده شده، نیروی افقی $F =$ ۵۰ N به یک میله اعمال شود، شتاب نقطه C وسط فنر چقدر است؟ چرا نتیجه به ابعاد b بستگی ندارد؟

جواب $a_C =$ ۱۲/۵ m/s^2



شکل مسئله ۱-۴

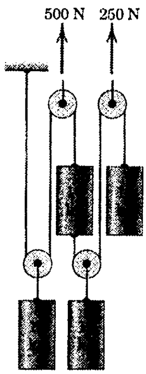
۴-۲ سه میمون A، B و C به ترتیب به جرمهای ۱۰ kg، ۱۲ kg و ۸ kg در حال بالا و پایین رفتن از طناب هستند که از نقطه D آویزان شده است. در یک لحظه خاص، A با شتاب ۱/۶ m/s^2 از طناب پایین می‌آید و C خودش را با شتاب ۰/۹ m/s^2 بالا می‌کشد. میمون B با سرعت ثابت ۰/۶ m/s در حال بالا رفتن است. با در نظر گرفتن طناب و میمون‌ها به عنوان یک سیستم کامل، کشش T طناب را در نقطه D محاسبه کنید.



شکل مسئله ۲-۴

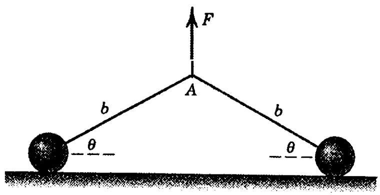
۴-۳ شتاب مرکز جرم سیستم چهار استوانه‌ای که هر یک دارای جرم ۱۰ kg می‌باشند را حساب کنید. از اصطکاک و جرم قرقره‌ها و کابل‌ها صرفنظر کنید.

جواب $\bar{a} =$ ۱۵/۱۹ m/s^2



شکل مسئله ۳-۴

۴-۴ دو گوی کوچک هر یک به جرم m توسط ریسمانی به طول $۲b$ (فاصله اندازه گیری شده از مراکز دو گوی) به یکدیگر متصل شده‌اند و در ابتدا در موقعیت نشان داده شده در حال سکون بر روی سطح صیقلی افقی قرار دارند. اگر نیروی قائمی با مقدار ثابت F به مرکز ریسمان اعمال شود، سرعت v هر گوی را در لحظه تصادم در زاویه $\theta = ۹۰°$ تعیین کنید. بیشترین مقدار F را که به ازای آن تماس گوی‌ها با سطح قطع نمی‌شود، چقدر است؟ (سیستم را بدون منفصل کردن اجزای آن تحلیل کنید.)

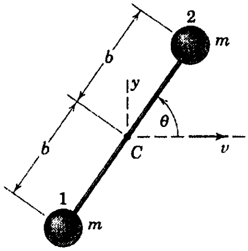


شکل مسئله ۴-۴

۴-۵ مومنتم خطی کل برای سیستمی با پنج ذره در لحظه $t = ۲/۲$ s با رابطه $\mathbf{G}_{۲/۲} = ۳/۴\mathbf{i} - ۲/۶\mathbf{j} + ۴/۶\mathbf{k}$ kg·m/s داده شده است. در لحظه $t = ۲/۴$ s مومنتم خطی با رابطه $\mathbf{G}_{۲/۴} = ۳/۷\mathbf{i} - ۲/۲\mathbf{j} + ۴/۹\mathbf{k}$ kg·m/s تغییر می‌یابد. مقدار F متوسط زمانی برآیند نیروهای خارجی وارد بر سیستم را در این بازه زمانی محاسبه کنید.

جواب $F = ۲/۹۲$ N

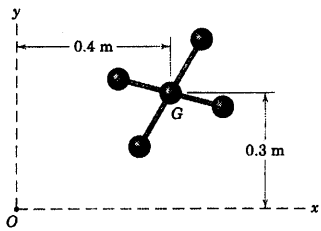
۴-۶ دو گوی کوچک هر یک به جرم m به طور صلب با میله‌ای به جرم ناچیز به یکدیگر متصل شده‌اند. مرکز C میله دارای سرعت v در جهت x بوده و میله در حال دوران با میزان ثابت $\dot{\theta}$ در جهت پادساعتگرد می‌باشد. به ازای مقدار معلوم θ مطلوب است، نوشتن روابط (الف) مومنتم خطی هر گوی (ب) مومنتم خطی $\mathbf{G}$ سیستم دو گوی را.



شکل مسئله ۴-۶

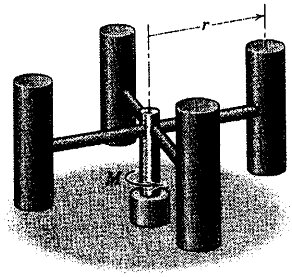
۴-۷ هر یک از پنج ذره متصل به هم دارای جرم ۰/۶ kg می‌باشد و مرکز جرم این سیستم در G قرار دارد. در یک لحظه خاص مومنتم زاویه‌ای سیستم حول G برابر $۱/۲۰\mathbf{k}$ kg·m²/s می‌باشد و مولفه‌های سرعت مرکز جرم G در جهت x و y به ترتیب برابر ۳ m/s و ۴ m/s هستند. مومنتم زاویه‌ای سیستم، $\mathbf{H}_O$ را در این لحظه خاص حول نقطه O بدست آورید.

جواب $\mathbf{H}_O = ۳/۳\,\mathbf{k}$ kg·m²/s



شکل مسئله ۴-۷

۴-۸ دستگاه سانتریفوژی (گریز از مرکزی) دارای چهار محفظه استوانه‌ای هر یک به جرم m می‌باشد که در فاصله شعاعی r از محور دوران قرار گرفته‌اند. زمان لازم را برای اینکه در اثر اعمال گشتاور ثابت M به محور دستگاه، سرعت زاویه‌ای آن از حالت سکون به ω برسد، محاسبه کنید. قطر هر محفظه در مقایسه با r کوچک بوده و جرم محور و بازوهای نگهدارنده در مقایسه با m کوچک است.

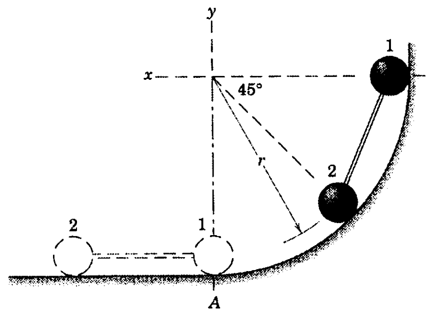


شکل مسئله ۸-۴

مسائل ویژه

۴-۹ دو گوی کوچک، هر یک به جرم m بـه صـورت صلب توسط میله‌ای به جرم ناچیز به یکدیگر متصل شـده‌اند و در موقعیت نشان داده شـده در شـکل، از حـالت سـکون رهـا می‌شوند تا روی سطح صیقلـی مـدوری در صفحـه قـائم فـرو بلغزند. سرعت مشترک v گوی‌ها را در لحظه‌ای که به موقعیت افقی خط‌چین می‌رسند، بدست آورید. همچنین نیروی R بیـن گوی و سـطح تکیـه‌گاه را درسـت قبـل از رسـیدن گوی بـه موقعیت پایین A بیابید.

جواب $v = ۱/۱۳۷\sqrt{gr}$ و $R = ۲/۲۹mg$

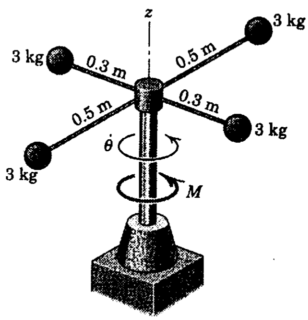


شکل مسئله ۹-۴

۴-۱۰ در لحظه $t = ۴$ s، مومنتم زاویه‌ای یک سیسـتم شـش ذره‌ای حـول نقطـه ثـابت O بـه صـورت $\mathbf{H}_۴ = ۳/۶۵\mathbf{i}+۴/۲۷\mathbf{j} -۵/۳۶\mathbf{k}$ kg·m²/s می‌باشـد. در لحظـه $t = ۴/۱$ s مومنتـم زاویـه‌ای بـه صـورت $\mathbf{H}_{۴/۱} = ۳/۶۷\mathbf{i}+۴/۳۰\mathbf{j} -۵/۲۰\mathbf{k}$ kg·m²/s است. مقدار متوسط برآیند گشتاور تمام نیروهای وارد بر ذرات سیسـتم را در بـازه زمانی ۰/۱ s حول نقطه O تعیین کنید.

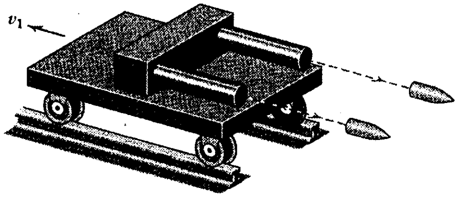
۴-۱۱ چهار گوی هر یک بـه جـرم ۳ kg بـه صـورت صلـب بـه مجموعـه قـاب و محـور دورانـی متصـل شـده‌اند، درحالیکه مجموعه در ابتدا آزادانه حول محور قائم z با مـیزان زاویه‌ای ثابت ۲۰ rad/s در جهت ساعتگرد (وقتی از بالا دیـده می‌شود) دوران می‌کند. اگر گشـتاور ثـابت $M = ۳۰$ N·m بـه محور مجموعه وارد گردد، زمان t لازمه بـرای برعکـس شـدن جهت دوران و رسیدن به سـرعت زاویـه‌ای $\dot{\theta} = ۲۰$ rad/s را در همان جهت M محاسبه کنید.

جواب $t = ۲/۷۲$ s



شکل مسئله ۱۱-۴

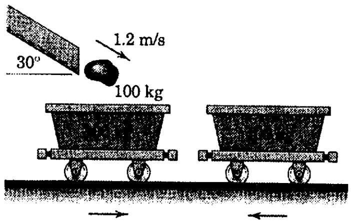
۴-۱۲ دو گلوله هر یک به جرم ۱۰ kg به طور همزمان از ارابه توپ نشان داده شـده Mg ۱ - کـه بـا سـرعت اولیـه $v_۱ = ۱/۲$ m/s در خلاف جهت شلیک حرکت می‌کند، شـلیک می‌شوند. سرعت خروجی هر یک از گلوله‌ها نسـبت بـه لولـه توپ برابر $v_r = ۱۲۰۰$ m/s می‌باشد. سرعت $v_۲$ ارابه تـوپ را پس از شلیک گلوله‌ها، محاسبه کنید.



شکل مسئله ۱۲-۴

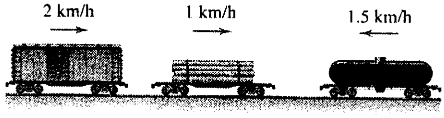
۱۳-٤ دو واگن حمل سنگ معدن به جرمهای ۳۰۰ kg و ٤۰۰ kg به ترتیب با سرعتهای ۰/٦ m/s و ۰/۳ m/s بر روی ریل افقی در خلاف جهت یکدیگر حرکت می‌کنند. بر اثر برخورد، دو واگن به هم متصل می‌شوند. در لحظه تماس دو واگن، سنگی به جرم ۱۰۰ kg از کانال انتقال رها می‌شود و با سرعت ۱/۲ m/s در جهت نشان داده شده، بدرون واگن ۳۰۰ کیلوگرمی فرو می‌افتد. سرعت v مجموعه را پس از اینکه سنگ نسبت به واگن به حالت سکون می‌رسد، محاسبه کنید. آیا اگر قبل از افتادن سنگ، واگنها به یکدیگر متصل بودند، سرعت نهایی مجموعه همین می‌شد؟

جواب $v = ۰/۲۰۵$ m/s



شکل مسئله ۱۳-۴

۱٤-٤ سه واگن باری با سرعتهای نشان داده شده، بر روی ریل افقی در حال حرکت هستند. پس از برخورد، سه واگن به یکدیگر متصل شده و همگی با سرعت مشترک v حرکت می‌کنند. وزن واگنهای بارگیری شده A، B و C به ترتیب ٦٥ Mg، ٥۰ Mg و ۷٥ Mg می‌باشد. سرعت v را تعیین کنید و درصد n انرژی اتلاف شده مجموعه در اثر اتصال واگنها را محاسبه کنید.

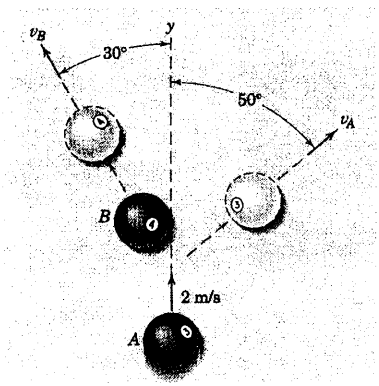


شکل مسئله ۱۴-۳

۱٥-٤ ٤۰ ثانیه طول می‌کشد تا یک پله برقی که با افق زاویه ۳۰° ساخته، شخص را از طبقه اول یک فروشگاه به طبقه دوم به فاصله عمودی ٦ m بالا ببرد. در یک لحظه خاص، ۱۰ نفر هر یک به طور متوسط به جرم ۷۰ kg بر روی پله برقی ایستاده و نسبت به پله‌های متحرک، ساکن هستند. علاوه بر این، سه پسر هر یک به طور متوسط به جرم ٥٤ kg با سرعت ۰/٦ m/s نسبت به پله‌های متحرک به سمت پایین پله برقی در حال دویدن هستند. توان خروجی P موتور متحرک را جهت ثابت نگه داشتن سرعت پله برقی محاسبه کنید. توان در حالت بدون مسافر برابر ۱/۸ kW می‌باشد که صرف غلبه بر اصطکاک موجود در مکانیزم می‌شود.

جواب $P = ۲/٥۹$ kW

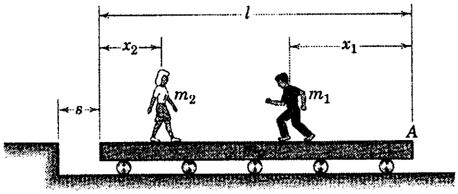
۱٦-٤ توپ بیلیارد A در جهت y با سرعت ۲ m/s در حال حرکت است که ناگهان به توپ ساکن B که هم اندازه و هم جرم است، اصابت می‌کند. پس از برخورد، مشاهده می‌شود که توپها در جهت‌های نشان داده شده، حرکت می‌کنند. سرعتهای v_A و v_B توپها را بلافاصله پس از برخورد بدست آورید. توپها را ذره تلقی کرده و از اصطکاک آنها در مقایسه با نیروی برخورد صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۱٦-۴

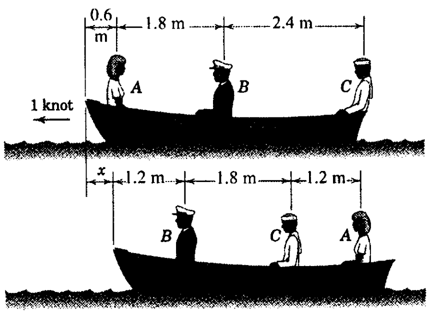
۱۷-٤ مردی به جرم m_1 و زنی به جرم m_2 در دو انتهای یک سکو به جرم m_0 مقابل هم ایستاده‌اند، در حالیکه سکو در $s = ۰$ در حالت سکون بوده و اصطکاک آن ناچیز می‌باشد. زن و مرد شروع به حرکت به سوی یکدیگر می‌کنند. رابطه‌ای برای جابجایی s سکو موقعی که دو نفر، بر حسب جابجایی x_1 مرد نسبت به سکو، به هم می‌رسند، بدست آورید.

جواب $s = \dfrac{(m_1 + m_2)x_1 - m_2 l}{m_0 + m_1 + m_2}$



شکل مسئله ۱۷-۴

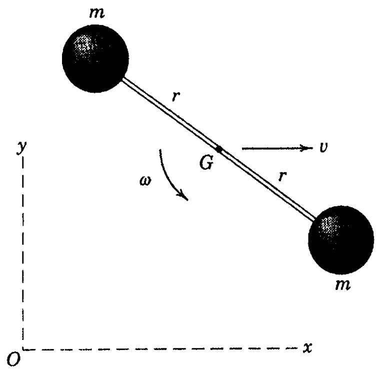
۱۸-٤ زن جوان A، کاپیتان B و ملوان C به جرم‌های ۶۰، ۹۰ و ۸۰ کیلوگرم به ترتیب در یک قایق به وزن ۱۵۰ kg که با سرعت ۱ knot در آب حرکت می‌کند، نشسته‌اند. اگر سرنشینان مطابق شکل دوم جای خود را تغییر دهند، فاصله x قایق تا موقعیتی را پیدا کنید که اگر سرنشینان جابجا نمی‌شدند، قایق در آن موقعیت قرار داشت. از هرگونه مقاومت آب در مقابل حرکت صرفنظر کنید. آیا ترتیب یا زمان تغییر موقعیت سرنشینان در نتیجه نهایی موثر است؟



شکل مسئله ۱۸-۴

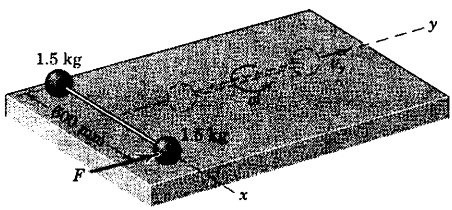
۱۹-٤ دو گوی کوچک، هر یک به جرم m و میله اتصال آنها به جرم ناچیز، حول مرکز جرم G با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کنند. در همین لحظه مرکز جرم دارای سرعت v در جهت x می‌باشد. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ مجموعه را در لحظه‌ای که G دارای مختصات x و y است، معین کنید.

جواب $\mathbf{H}_O = 2m\,(r^2\omega - v\,y)\,\mathbf{k}$



شکل مسئله ۱۹-۴

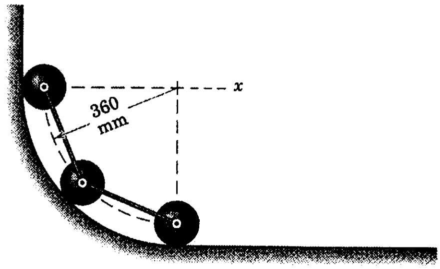
۲۰-٤ دو گوی به میله سبکی که در ابتدا در حال سکون روی سطح افقی صیقلی قرار گرفته، بطور محکم متصل شده‌اند. نیروی F ناگهان به یکی از گوی‌ها در جهت y وارد شده و ضربه ۱۰ N·s را در مدت زمان کوتاهی وارد می‌کند. هنگامیکه گوی‌ها از موقعیت خط‌چین عبور می‌کنند، مقدار سرعت هر کدام را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۲۰-۴

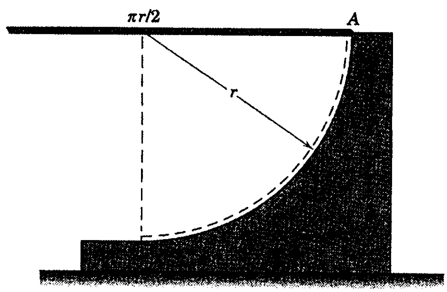
۴-۲۱ سه گوی کوچک فولادی هر کدام به جرم ۲/۷۵ kg به دو میله با طول مساوی و جرم ناچیز، متصل شده‌اند. این مجموعه از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده، در امتداد سطح راهنمای ربع دایره‌ای در صفحه قائم رها می‌شود. موقعی که گوی بالایی به موقعیت پایین می‌رسد، گوی‌ها دارای سرعت افقی ۱/۵۶۰ m/s می‌باشند. اتلاف انرژی ΔQ ناشی از اصطکاک و ضربه I_x وارده بر مجموعه سه گوی را در این مدت محاسبه کنید.

جواب $\Delta Q = ۲/۵۲\ J$ و $I_x = ۱۲/۸۷\ N\cdot s$



شکل مسئله ۴-۲۱

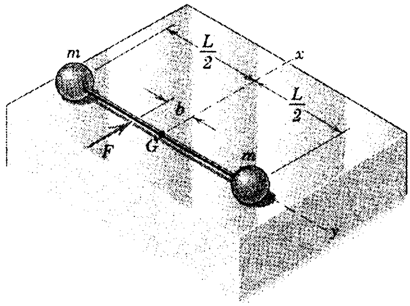
۴-۲۲ طنابی انعطاف پذیر و تغییر طول ناپذیر به طول $\pi r / ۲$ و جرم بر واحد طول ρ، در نقطه A به سطح ربع دایره‌ای بسته شده است و از حالت سکون در موقعیت افقی رها می‌شود. هنگامی که طناب در موقعیت خطچین به حالت سکون می‌رسد، سیستم انرژی از دست می‌دهد. اتلاف انرژی ΔQ را تعیین کرده و توضیح دهید که انرژی تلف شده چه شده است؟



شکل مسئله ۴-۲۲

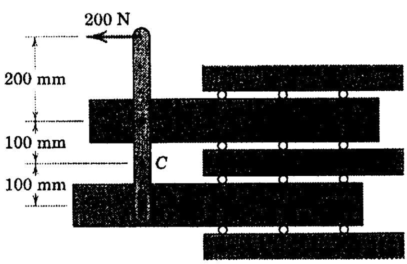
۴-۲۳ دو گوی فولادی، هر یک به جرم m به میله سبکی به طول L و جرم ناچیز که ابتدا در صفحه افقی صیقلی به حالت سکون است، جوش داده شده‌اند. مطابق شکل ناگهان نیروی افقی به مقدار F به میله وارد می‌شود. تعیین کنید: (الف) شتاب لحظه‌ای $\bar{a}$ مرکز جرم G و (ب) میزان تغییر سرعت زاویه‌ای متناظر $\ddot{\theta}$ مجموعه را نسبت به زمان حول G.

جواب (الف) $\bar{a} = \dfrac{F}{۲m}$ و (ب) $\ddot{\theta} = \dfrac{۲Fb}{mL^۲}$



شکل مسئله ۴-۲۳

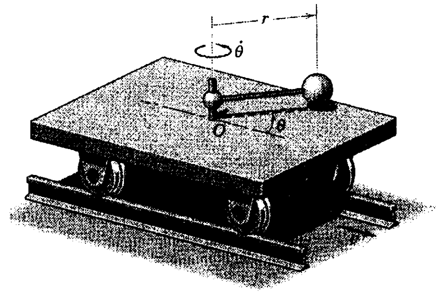
۴-۲۴ هر یک از قطعات A و B دارای جرم ۱۰ kg بوده و در شیارهای افقی خود با اصطکاک ناچیز می‌لغزند. مطابق شکل، اهرمی با جرم ناچیز به قطعات متصل شده و حرکت آنها را کنترل می‌کند. شتاب نقطه C روی اهرم را هنگامی که مطابق شکل، یک نیروی ۲۰۰ N اعمال می‌شود، محاسبه کنید. به منظور بررسی صحت نتیجه حاصله، سینتیک هر عضو را جداگانه تحلیل کرده و a_C را به کمک ملاحظات سینماتیکی حاصل از شتاب‌های محاسبه شده دو قطعه بدست آورید.



شکل مسئله ۴-۲۴

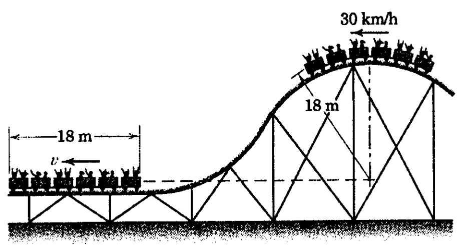
۲۵-٤ ارابه کوچکی به جرم ۲۰ kg آزادانه بر روی ریل افقی حرکت کرده و گوی به جرم ۵ kg را که به میله سبک در حال دوران به طول $r = ۰/٤$ m متصل است را با خود حمل می‌کند. یک موتور با سیستم چرخ‌دنده، سرعت زاویه‌ای میله را در $\dot{\theta} = ٤$ rad/s ثابت نگه می‌دارد. اگر در $\theta = ۰$ سرعت واگن برابر $v = ۰/٦$ m/s باشد، سرعت v را هنگامیکه $\theta = ٦۰°$ است، محاسبه کنید. از جرم چرخ‌ها و نیز هرگونه اصطکاکی صرفنظر کنید.

جواب $v = ۰/۸۷۷$ m/s



شکل مسئله ۲۵-۴

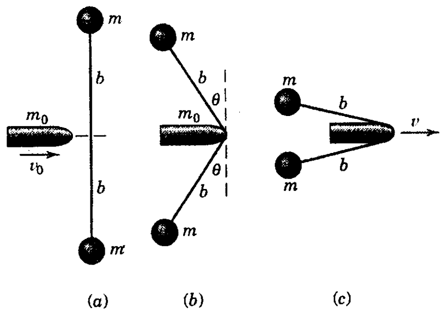
۲۶-٤ واگن‌های قطار تفریحی به هنگام عبور از بالاترین نقطه مسیر مدور خود دارای سرعت ۳۰ km/h می‌باشند. با صرفنظر کردن از هرگونه اصطکاک، سرعت v واگنها را به هنگام رسیدن به موقعیت افقی بدست آورید. در بالاترین موقعیت، شعاع مسیر مدور مرکز جرم آنها برابر ۱۸ m بوده و هر شش واگن دارای جرمهای یکسانی است.



شکل مسئله ۲۶-۴

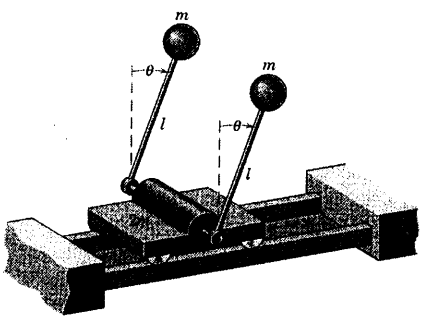
۲۷-٤ دو گوی کوچک هر یک به جرم m توسط ریسمانی به طول $۲b$ (فاصله مرکز دو گوی) به یکدیگر متصل شده و در ابتدا بر روی سطح افقی صیقلی در حالت سکون قرار دارند. گلوله‌ای به جرم $m_۰$ و سرعت $v_۰$ به طور عمود به وسط ریسمان برخورد می‌کند و سبب ایجاد تغییر شکل مطابق قسمت (b) شکل می‌شود. سرعت v جرم $m_۰$ را هنگامی که دو گوی مطابق قسمت (c) شکل در شرف تماس با زاویه θ تقریبا برابر ۹۰° هستند، تعیین کنید. $\dot{\theta}$ را نیز برای این شرط پیدا کنید.

جواب $v = \dfrac{m_۰}{m_۰ + ۲m} v_۰$ و $\dot{\theta} = \dfrac{v_۰}{b}\sqrt{\dfrac{m_۰}{m_۰ + ۲m}}$



شکل مسئله ۲۷-۴

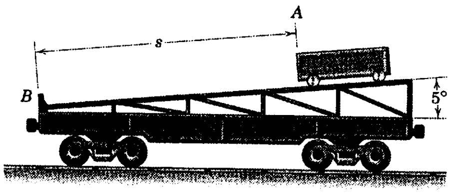
۲۸-٤ ارابه‌ای به جرم $۲m$ که می‌تواند آزادانه در امتداد ریلهای افقی حرکت کند، دو گوی هر یک به جرم m را که به میله‌هایی با جرم ناچیز و طول l متصل شده‌اند، را حمل می‌کند. محوری که به میله‌ها متصل می‌باشد، روی ارابه لولا شده و آزادانه دوران می‌کند. اگر مجموعه از حالت سکون در موقعی که میله‌ها به حالت قائم یعنی $\theta = ۰$ است، رها گردد؛ سرعت v_x ارابه و سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ میله‌ها را در $\theta = ۱۸۰°$ تعیین کنید. ارابه و گوی‌ها را ذره تلقی نمایید و از هرگونه اصطکاک صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۲۸-۴

۲۹-٤ واگن روباز Mg ۲۵، وسیله نقلیه‌ای به جرم Mg ۷/۵ را روی سطح شیبدار °۵ خود حمل می‌کند. اگر وسیله از حالت سکون نسبت به واگن که آن هم ساکن است، رها شود سرعت v واگن را هنگامیکه وسیله مسافت $s = ۱۲$ m را به سمت پایین سطح شیبدار طی کرده و در آستانه برخورد با مانع B است، تعیین کنید. از تمام اصطکاک‌ها صرفنظر کرده و وسیله و واگن را ذره در نظر بگیرید.

جواب $v = ۱/۱۸۶$ m/s



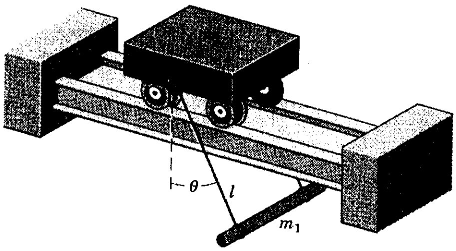
شکل مسئله ۲۹-۴

۳۰-٤ یک میله افقی به جرم $m_۱$ و با قطر کم، توسط دو سیم به طول l به ارابه‌ای به جرم $m_۲$ که آزادانه می‌تواند بر روی ریلها افقی بغلتند، آویزان است. اگر میله و ارابه از حالت سکون رها شوند، در حالیکه سیمها با راستای قائم زاویه θ بسازند، $v_{b/c}$ سرعت میله نسبت به ارابه و v_c سرعت ارابه را هنگامیکه $\theta = ۰$ است، تعیین کنید. از کلیه اصطکاک‌ها صرفنظر کرده و میله و ارابه را به عنوان ذراتی در صفحه قائم حرکت در نظر بگیرید.

جواب

$$v_{b/c} = \sqrt{\left(۱+\frac{m_۱}{m_۲}\right)۲gl(۱-\cos\theta)}$$

$$v_c = \sqrt{\frac{۲gl(۱-\cos\theta)}{\left(\frac{m_۲}{m_۱}\right)\left(۱+\frac{m_۲}{m_۱}\right)}}$$



شکل مسئله ۳۰-۴

۶-۴ جریان پایای جرم

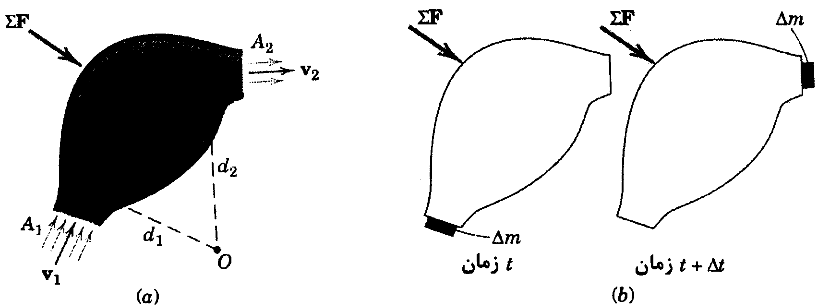
رابطه مومنتم که در بخش ٤-٤ برای یک سیستم عمومی جرم ارائه شد، مفاهیم تحلیلی روشنی از عمل جریان جرم را فراهم ساخت که در آن تغییر مومنتم صورت می‌گیرد. دینامیک جریان جرم در ماشینهای گوناگونی که با سیال کار می‌کنند، نظیر توربین‌ها، پمپ‌ها، شیپوره‌ها، موتورهای جت هواسوز و راکتها از اهمیت بالایی برخوردار است. مبحث جریان جرم در این بخش به منظور مطالعه مکانیک سیالات نیست، بلکه صرفاً اصول اساسی و معادلات مومنتمی معرفی می‌شود که در مکانیک سیالات و جریان عمومی جرم، چه مایع، چه گاز و چه ذرات ریز جامد، اهمیت زیادی دارد.

حالت جریان پایا یکی از مهمترین حالتهای جریان جرم است که در آن میزان جرم ورودی به یک حجم معین با میزان جرم خروجی از همان حجم برابر است. حجم مورد نظر ممکن است درون محفظه صلب ثابت و یا متحرکی باشد؛ نظیر شیپوره یک راکت یا یک هواپیمای جت، فضای بین پره‌های یک توربین گازی، حجم درون پوسته یک پمپ سانتریفوژ و یا حجم درون یک لوله زانویی که سیال با میزان پایا درون آن جریان دارد. طراحی چنین ماشینهایی بستگی به تجزیه و تحلیل نیروها و گشتاورهایی دارد که به سبب تغییرات مومنتم حاصل از آنها در جرم جاری بوجود می‌آید.

تشریح جریان میان محفظه صلب

محفظه صلب شکل ٤-5a را در نظر بگیرید که جرم با جریان پایا و با میزان m' از سطح مقطع ورودی A_1 به آن وارد می‌شود. جرم با همان میزان از سطح مقطع خروجی A_2 از محفظه بیرون می‌رود. به طوریکه در این فاصله هیچگونه انباشتگی و یا تخلیه در مورد جرم کل درون محفظه صورت نمی‌گیرد. سرعت جریان ورودی $\mathbf{v}_1$ عمود بر A_1 و نیز سرعت جریان خروجی $\mathbf{v}_2$ عمود بر A_2 است. اگر ρ_1 و ρ_2 چگالی‌های دو جریان ورودی و خروجی باشند، پیوستگی جریان ایجاب می‌کند که:

$$\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2 = m' \qquad (٤-١٧)$$



شکل ۵-۴

نیروهای وارده به دو صورت جداگانه تشریح شده‌اند. یکی جرم سیال درون محفظه و دیگری، کل محفظه و سیال درون آن. اگر بین محفظه و سیال مورد نظر نیرویی وجود داشته باشد، دیدگاه اول مورد استفاده قرار می‌گیرد و هنگامی دیدگاه دوم استفاده می‌شود که بدست آوردن نیروهای خارجی وارد بر محفظه مورد نظر باشد.

در مباحث اولیه از حالت اخیر استفاده می‌کنیم که در آن، *سیستم مجزا شده* شامل محفظه ثابت و نیز سیالی است که در لحظه‌ای معین در آن وجود دارد. این مجزاسازی به کمک ترسیمه آزاد جرم موجود در یک فضای حجمی بسته تشریح می‌شود که فضای مزبور بوسیله سطح خارجی محفظه و نیز سطح ورودی و خروجی تعریف می‌شود. ما باید کلیه نیروهایی را که *از خارج* به این سیستم اعمال می‌شود به حساب آوریم. در شکل ٤-٥a جمع برداری این نیروهای خارجی با $\Sigma\mathbf{F}$ مشخص شده است.

۱- مواردی که $\Sigma\mathbf{F}$ شامل آنها می‌شود، عبارتند از: نیروهای وارد بر محفظه در نقاطی از تماس آن با سایر سازه‌ها، نظیر تماس در A_1 و A_2 ؛ اگر موجود باشند.

۲- نیروهای وارد بر سیال درون محفظه در A_1 و A_2 در اثر هر نوع فشار استاتیکی که ممکن است در این مکانها در سیال موجود باشد. و

۳- وزن سازه و سیال در صورتیکه قابل توجه باشند.

برآیند تمام نیروهای خارجی $\Sigma\mathbf{F}$ باید با $\dot{\mathbf{G}}$ برابر باشد که $\dot{\mathbf{G}}$، عبارت است از تغییر مومنتم خطی سیستم مجزا نسبت به زمان؛ که بوسیله معادله ٦-٤ در بخش ٤-٤ برای هر سیستم با جرم ثابت، صلب یا غیر صلب، بیان شد.

تحلیل افزایشی

رابطه $\dot{\mathbf{G}}$ را می‌توان به کمک یک تحلیل افزایشی بدست آورد. شکل ٤-٥b سیستم را در زمان t نشان می‌دهد که جرم سیستم همان جرم درون محفظه می‌باشد و در زمانΔt ، سیستم افزایشی جرمی برابر Δm خواهد داشت. در زمان $t+\Delta t$ جرم درون محفظه همان جرم کل می‌باشد و افزایش Δm در زمان Δt از محفظه خارج می‌شود. مومنتم خطی محفظه و جرم درون آن بین دو سطح مقطع A_1 و A_2 در فاصله زمانی Δt بدون تغییر باقی می‌ماند. بطوریکه تغییر مومنتم سیستم در زمان Δt چنین می‌شود:

$$\Delta\mathbf{G} = (\Delta m)\,\mathbf{v}_2 - (\Delta m)\,\mathbf{v}_1 = \Delta m\,(\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$$

با تقسیم رابطه بالا بر Δt و سپس حدگیری نتیجه می‌شود: $\dot{\mathbf{G}} = m'\Delta\mathbf{v}$ ؛ که در آن:

$$m' = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta m}{\Delta t}\right) = \frac{dm}{dt}$$

در نتیجه از معادله ٦-٤ داریم:

$$\boxed{\Delta\mathbf{F} = m'\Delta\mathbf{v}} \qquad (\text{٤-١٨})$$

معادله ١٨-٤ رابطه بین برآیند نیروی وارد بر یک سیستم جریان پایا و میزان جریان جرم متناظر با آن و نیز افزایش برداری سرعت* را برقرار می‌کند.

از طرفی توجه می‌کنیم که میزان زمانی تغییر مومنتم خطی، عبارت از تفاوت برداری بین میزان مومنتم خطی خروجی سیستم و ورودی آن می‌باشد. در نتیجه می‌توان نوشت: $\dot{\mathbf{G}} = m'\mathbf{v}_2 - m'\mathbf{v}_1 = m'\Delta\mathbf{v}$ که با نتیجهٔ اخیر تطابق دارد.

* باید دقت داشته باشیم که dm/dt به عنوان مشتق برای جرم سیستم مجزا شده نسبت به زمان تفسیر نشود. این مشتق برابر صفر است زیرا جرم سیستم در مورد یک فرآیند جریان پایا ثابت است. برای جلوگیری از اشتباه، از m' به جای dm/dt به منظور بیان میزان جریان لازم جرم پایا استفاده شده است.

حال می‌توانیم یکی از کاربردهای مهم معادله عمومی نیرو ـ مومنتم را که در مورد هر سیستم جرم استخراج شده، ببینیم. در اینجا سیستم ما شامل ذرات صلب (محفظه نگهدارنده جرم) و ذرات در حال حرکت (جریان جرم) است. بنا به تعریف مرز سیستم، جرم درون آن در حالت جریان پایا، ثابت بوده و بنابراین می‌توان کلیات معادله ٦-٤ را بکار برد. اما در احتساب *کلیه* نیروهای خارجی وارد بر سیستم باید خیلی دقت کنیم که اگر ترسیمه آزاد جسم ما صحیح باشد، تمامی آنها آشکار می‌شوند.

مومنتم زاویه‌ای در سیستم‌های جریان پایا

فرمول‌بندی مشابهی برای حالت مومنتم زاویه‌ای در سیستم‌های جریان پایا بدست می‌آید. مطابق شکل٥a-٤، گشتاور برآیند تمام نیروهای خارجی حول نقطه ثابت O که درون سیستم و یا خارج از آن قرار دارد، با میزان تغییر مومنتم زاویه‌ای سیستم حول O برابر است. این موقعیت را می‌توان در معادله ٧-٤ مشاهده کرد که برای جریان پایا در یک صفحه بیان شده است که عبارت است از:

$$\Sigma M_O = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1) \qquad (٤-١٩)$$

هنگامیکه سرعتهای ورودی و خروجی جریان در همان صفحه نباشد، معادله مزبور را می‌توان به شکل برداری نوشت.

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M}_O = m'(\mathbf{d}_2 \times \mathbf{v}_2 - \mathbf{d}_1 \times \mathbf{v}_1)} \qquad (٤-١٩a)$$

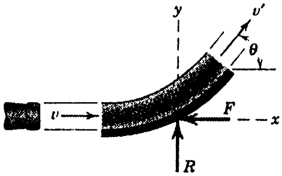
که $\mathbf{d}_1$ و $\mathbf{d}_2$ بردارهای موقعیت مراکز A_1 و A_2 از مرجع ثابت O می‌باشند. در دو رابطه مزبور می‌توان توسط خواص معادله ٩-٤، مرکز جرم G را به عنوان مرکز گشتاورگیری بکار برد.

معادلات ١٨-٤ و ١٩-٤ روابط بسیار ساده‌ای هستند که در توصیف حرکت نسبتاً پیچیده سیالات، کاربرد مهمی دارند. باید توجه داشت که این معادلات، نیروهای *خارجی* را به برآیند تغییرات مومنتم ارتباط می‌دهند ومستقل از مسیر جریان و تغییرات مومنتم درون سیستم می‌باشند.

تحلیل اخیر را همچنین می‌توان به سیستم‌هایی اعمال کرد که با سرعت ثابت در حرکت هستند و در این مورد باید توجه داشت که بنا به بحث‌های انجام شده در بخش‌های ١٢-٣ و ٤-٤، روابط اساسی $\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$ و $\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$ و یا $\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G$ به سیستم‌هایی اعمال می‌شوند که در حال حرکت با سرعت ثابت می‌باشند. محدودیت موجود فقط در مورد جرمی است که نسبت به زمان، درون سیستم ثابت باقی می‌ماند.

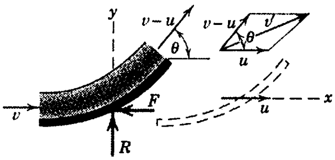
در مسائل نمونه زیر، سه مثال برای تحلیل جریان پایای جرم ارائه شده که کاربرد اصولی را نشان می‌دهد و در معادلات ١٨-٤ و ١٩-٤ تجلی یافته است.

مسئله نمونه ۵-۴



پره ثابت

پره صیقلی نشان داده شده، جریان سیالی با سطح مقطع A، چگالی ρ و سرعت v را منحرف می‌کند. (a) مولفه‌های نیروی R لازم برای ثابت نگه داشتن پره را تعیین کنید. (b) هنگامی که به پره سرعت ثابت u کمتر از v و در جهت آن داده می‌شود، نیروها را پیدا کنید.



پره متحرک

حل، قسمت (a): ترسیمه آزاد پره به همراه بخشی از سیال که سبب تغییر مومنتم می‌شود، نشان داده شده است. معادله مومنتم بـه سیستم مجزا شده بـه منظور تغییر مومنتم در دو جهت x و y اعمال می‌شود. با ثـابت بـودن پـره و نـیز صرفنظر کردن از اصطکاک سیال، مقدار سرعت v' خروجی با سرعت v ورودی برابر می‌شود. در اینصورت تغییرات مولفه‌های سرعت چنین می‌شوند.

$$\Delta v_x = v'\cos\theta - v = -v(1-\cos\theta)$$ ❶

و

$$\Delta v_y = v'\sin\theta - 0 = v\sin\theta$$

میزان جریان جرم برابر است $m' = \rho A v$ و با قرار دادن در معادله ۱۸-٤ داریم:

$$[\Sigma F_x = m'\Delta v_x] \qquad -F = \rho A v\,[-v\,(1-\cos\theta)]$$

$$F = \rho A v^2\,(1-\cos\theta)$$ جواب

$$[\Sigma F_y = m'\Delta v_y] \qquad R = \rho A v\,(v\sin\theta)$$

$$R = \rho A v^2 \sin\theta$$ جواب

قسمت (b): در حالیکه پره حرکت می‌کند، سرعت نهایی v' سیال در خروجی برابر است با جمع برداری سرعت u پره و سرعت سیال نسبت به پره یعنی $v-u$ می‌باشد. چنین ترکیبی در دیاگرام سرعت در سمت راست شکل برای شـرایط خروجی نشان داده شده است. مولفه x از v' برابر است با جمع مولفه‌های دو جزء آن. بنـابراین: $v'_x = (v-u)\cos\theta + u$. تغییر سرعت در جهت x چنین است:

$$\Delta v_x = (v-u)\cos\theta + (u-v) = -(v-u)\,(1-\cos\theta)$$

مولفه y از v' برابر است با $(v-u)\sin\theta$. بطوریکه تغییر سرعت جریان در جهتy به صورت $\Delta v_y = (v-u)\sin\theta$ می‌باشد.

میزان جریان جرم یعنی m'، عبارت از جرمی است که سبب تغییر مومنتم بر واحد زمان می‌شود. این میزان، مـیزان خروجی از شیپوره *نیست*، بلکه جرمی است که در واحد زمان از روی پره جریان می‌یابد. در نتیجه:

$$m' = \rho A\,(v-u)$$

با اعمال اصل ضربه ـ مومنتم از معادله ۱۸-٤ در جهت مثبت محورهای مختصات، داریم:

$$[\Sigma F_x = m'\Delta v_x] \qquad -F = \rho A(v-u)\,[-(v-u)(1-\cos\theta)]$$ ❷

$$F = \rho A(v-u)^2(1-\cos\theta)$$ جواب

جواب $R = \rho A\,(\upsilon - u)^{2}\sin\theta$ $[\Sigma F_y = m'\Delta\upsilon_y]$

نکات مفید

❶ هنگامیکه از معادله ۱۸-٤ استفاده می‌کنید به علامت‌های جبری توجه کنید. تغییر در υ_x برابر است با مقدار نهایی منهای مقدار اولیه که در جهت مثبت x سنجیده می‌شوند. همچنین باید در نوشتن $-F$ بجای ΣF_x دقت کرد.

❷ مشاهده می‌شود که به ازای مقادیر معلوم υ و u ، زاویه مربوط به حداکثر مقدار نیروی F برابر $\theta = ۱۸۰°$ می‌باشد.

مسئله نمونه ۶-۴

برای پره متحرک مسئله نمونه ۵-٤، سرعت بهینه u پره را به منظور ایجاد بیشترین توان حاصل از عمل سیال بر روی پره تعیین کنید.

حل: نیروی R که در شکل مسئله نمونه ۵-٤ نشان داده شده است، به سرعت پره عمود بوده و بنابراین کاری انجام نمی‌دهد. کار انجام شده توسط نیروی F منفی است. اما توان حاصل از نیروی (عکس العمل F) وارد بر پره از سوی سیال چنین است:

$$[P = F\,u] \qquad P = \rho A\,(\upsilon - u)^2\,u\,(1-\cos\theta)$$

سرعت پره جهت تولید حداکثر توان، در صورت وجود یک پره در برابر جریان، چنین مشخص می‌شود:

$$\left[\frac{dP}{du} = 0\right] \qquad \rho A\,(1-\cos\theta)\,(\upsilon^2 - 4u\upsilon + 3u^2) = 0$$

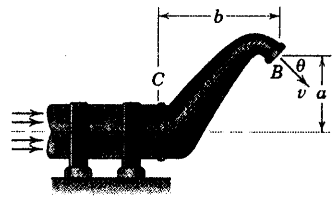
❶ جواب $u = \dfrac{\upsilon}{3}$ $(\upsilon - 3u)(\upsilon - u) = 0$

جواب دوم یعنی $u = \upsilon$ حداقل توان یعنی صفر را می‌دهد. زاویه $\theta = ۱۸۰°$ جریان را کاملاً معکوس کرده و بـه ازای هر مقدار از u ، بیشترین نیرو و توان را تولید می‌کند.

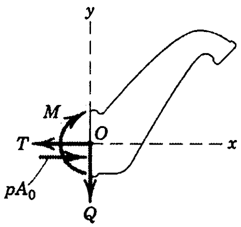
نکته مفید

❶ در اینجا نتیجه حاصل فقط به یک پره اعمال می‌شود. در حالتی که نظیر متغیرهای یک دیسک توربین که دارای چندین پره است، میزان سیال خروجی از شیپوره، همان میزانی است که سبب تغییر مومنتم می‌شود. در نتیجه $m' = \rho A\,\upsilon$ به جای $\rho A = (\upsilon - u)$ بکار می‌رود. با این تغییر، مقدار بهینه u برابر با $u = \upsilon/2$ می‌شود.

مسئله نمونه ۷-۴



شیپوره خمیده، در نقطه B دارای سطح خروجی A و در نقطه C دارای سطح ورودی A_0 می‌باشد. مایعی با فشار نسبی استاتیکی P از لوله ثابت به شیپوره ورودی وارد شده و در جهت نشان داده شده با سرعت v از آن خارج می‌شود. اگر ρ چگالی ثابت مایع باشد، عبارتی را برای نیروی کششی T، نیروی برشی P و گشتاور خمشی M در نقطه C از لوله بنویسید.



حل: ترسیمه آزاد و سیال درون آن، نشان دهنده نیروی کششی T ، نیروی برشی P و گشتاور خمشی M می‌باشد و به غلاف اتصال شیپوره که به لوله ثابت متصل است، وارد می‌گردند. PA_0 یک نیروی خارجی است که علاوه بر نیروهای فوق الذکر، در اثر وجود فشار استاتیکی، به سیال درون شیپوره نیرو وارد می‌کند.

پیوستگی جریان با چگالی ثابت ایجاب می‌کند که:

$$A v = A_0\, v_0$$

که در آن v_0 ، سرعت سیال در ورودی شیپوره است. معادله ۱۸-٤ اصل مومنتم را در دو جهت به سیستم اعمال می‌کند که داریم:

$$[\Sigma F_x = m'\Delta v_x] \qquad pA_0 - T = \rho A\, v\,(v\cos\theta - v_0)$$

❶ جواب
$$T = pA_0 + \rho A v^2\left(\frac{A}{A_0} - \cos\theta\right)$$

$$[\Sigma F_y = m'\Delta v_y] \qquad -Q = \rho A\, v\,(-v\sin\theta - 0)$$

جواب
$$Q = \rho A\, v^2 \sin\theta$$

معادله ۱۹-٤ اصل گشتاور را در جهت ساعتگرد اعمال می‌کند.

❷
$$[\Sigma M_0 = m'(v_2 d_2 - v_1 d_1)] \qquad M = \rho A v\,(v\,a\cos\theta + v\,b\sin\theta - 0)$$

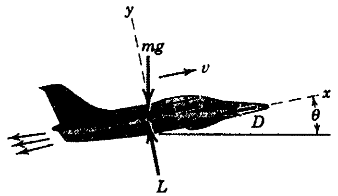
جواب
$$M = \rho A v^2\,(a\cos\theta + b\sin\theta)$$

نکات مفید

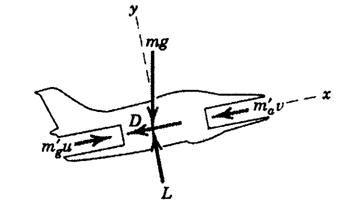
❶ مجدداً، به علامتهای جبری صحیح در دو طرف معادلات ۱۸-٤ و ۱۹-٤ توجه کنید.

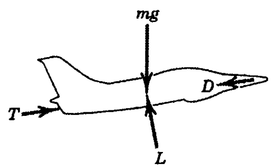
❷ نیروها و گشتاور وارد بر شیپوره با یکدیگر برابر ولی جهت نیروها و گشتاور وارد بر لوله در خلاف جهتی است که در شکل به شیپوره اعمال شده است.

مسئله نمونه ۸-۴



یک هواپیمای جت به جرم m که با سرعت ثابت v در حال پرواز است، هوا را با دبی جرمی m'_a مصرف می‌کند و گازهای احتراق یافته با دبی m'_g و با سرعت u نسبت به هواپیما خارج می‌شوند. سوخت با دبی ثابت m'_f مصرف می‌شود. کلیه نیروهای آیرودینامیکی وارد بر هواپیما عبارتند از نیروی برا (Lift) L که بر جهت پرواز عمود است و نیروی پسا (Drag) D که در خلاف جهت پرواز می‌باشد. فرض می‌شود D در برگیرنده تمام نیروهایی است که در اثر فشار استاتیکی در سطوح ورودی و خروجی ایجاد می‌شوند. معادله‌ای برای حرکت هواپیما نوشته و نیروی رانش (Thrust) T را مشخص کنید.





حل: در شکل ترسیمه آزاد هواپیما به همراه هوا، سوخت و گازهای

❶ حاصل از سوخت نشان داده شده و فقط نیروی وزن، برا و پسا را نشان می‌دهد.

❷ محورهای x-y را به هواپیما الصاق کرده و معادله مومنتم را نسبت به سیستم در حال حرکت اعمال می‌کنیم.

سوخت به عنوان جریان پایا بدون سرعت نسبت به سیستم، وارد هواپیما می‌شود و به صورت جریان خروجی با سرعت نسبی u، سیستم را ترک می‌کند. اکنون معادله ١٨-٤ را بطور جداگانه به جریان سوخت هوا و نیز نسبت به محورهای مرجع اعمال می‌کنیم. در مورد جریان هوا، تغییر سرعت در جهت x و نسبت به سیستم متحرک چنین است.

❸ $$\Delta v_a = -u - (-v) = -(u - v)$$

و تغییر سرعت جریان سوخت در جهت x و نسبت به سیستم متحرک چنین است:

$$\Delta v_f = -u - (0) = -u$$

در نتیجه داریم:

$$[\Sigma F_x = m'\Delta v_x] \qquad -mg\sin\theta - D = -m'_a(u - v) - m'_f u$$
$$= -m'_g u + m'_a v$$

که در آن جایگزینی $m'_g = m'_a + m'_f$ انجام شده است. پس از جابجایی و تغییر علامت داریم:

$$m'_g u - m'_a v = mg\sin\theta + D$$

که معادله حرکت سیستم می‌باشد.

اگر به دلیل قرار گرفتن سطوح داخلی در معرض عمل هوا و گاز مرزهای سیستم تغییر کنند، در آنصورت مدل شبیه‌سازی شده‌ای مطابق شکل خواهیم داشت که در آن، هوا نیرویی برابر $m'_a v$ را به درون توربین اعمال می‌کند و گاز خروجی نیروی $m'_g u$ را به سطوح داخلی وارد می‌نماید.

مدلی که معمولاً مورد استفاده قرار می‌گیرد، در آخرین ترسیمه نشان داده شده است که در آن، نیروی رانش شبیه‌سازی شده جایگزین اثر خالص تغییرات مومنتم هوا و گاز شده است.

❹ جواب $$T = m'_g u - m'_a v$$

که فرض می‌شود از طرف خارج به هواپیما اعمال می‌شود.

معمولاً m'_f فقط ۲ درصد کمتر از m'_a است که می‌توانیم تقریب $m'_g \cong m'_a$ را بکار برده و نیروی رانش را چنین بیان کنیم:

جواب:
$$T \cong m'_g(u-v)$$

ما حالت سرعت ثابت را مورد تحلیل قرار داده‌ایم. گرچه اصول نیوتنی در مورد محورهای شتابدار صادق نیستند. اما می‌توان نشان داد که معادله $F = ma$ در مورد مدل شبیه‌سازی شده قابل استفاده بوده و رابطه $T - mg\sin\theta - D = m\dot{v}$ را بدون هیچگونه خطایی می‌تون نوشت.

نکات مفید

❶ توجه کنید که مرز سیستم، جریان هوای ورودی و نیز جریان گاز خروجی را قطع کند.

❷ در بکارگیری محورهای متحرک که با سرعت ثابت در حال انتقال هستند، مجاز می‌باشیم. بخش‌های ۱۴-۳ و ۲-۴ را ببینید.

❸ اگر سوار هواپیما باشیم، مشاهده می‌کنیم که هوای ورودی به سیستم دارای سرعت $-v$ در جهت x بوده و با سرعت u − در همان راستا، سیستم را ترک می‌کند. تفاضل مقادیر نهایی و اولیه، رابطه $-u-(-v) = -(u-v)$ را می‌دهد.

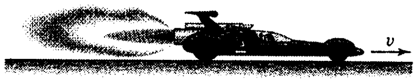
❹ اکنون می‌بینیم که «نیروی رانش» در حقیقت یک نیروی خارجی نیست که به کل هواپیما نشان داده شده در اولین شکل، اعمال می‌شود، اما می‌توان آنرا به عنوان یک نیروی خارجی مدلسازی کرد.

مسائل

مسائل مقدماتی

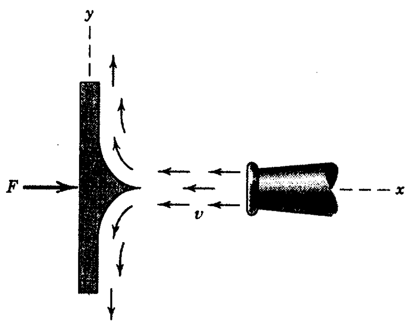
۴-۳۱ اتومبیل آزمایشی مسابقه، توسط یک موتور جت به حرکت در می‌آید و طوری طراحی شده که تحت نیروی رانش T موتور، حداکثر سرعت خود را به $v = ۵۰۰\ \text{km/h}$ برساند. آزمایشات قبلی در تونل باد، نشان داده‌اند که نیروی مقاومت جریان هوا در این سرعت برابر $۱۰۰۰\ \text{N}$ است. اگر موتور جت سوخت خود را با میزان $۱/۶\ \text{kg/s}$ به مصرف برساند، سرعت u گازهای خروجی را نسبت به اتومبیل حساب کنید.

جواب $u = ۶۲۵\ \text{m/s}$



شکل مسئله ۴-۳۱

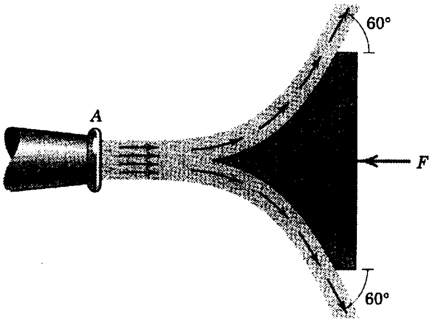
۴-۳۲ جتی از هوا با سرعت $۱۰۰\ \text{m/s}$ و با دبی حجمی $۰/۲\ \text{m}^3/\text{s}$ از شیپوره خارج شده و توسط پره قائم الزاویه‌ای منحرف می‌شود. نیروی F لازم برای ثابت نگه داشتن پره را محاسبه کنید. چگالی هوا $۱/۲۰۶\ \text{kg/m}^3$ می‌باشد.



شکل مسئله ۴-۳۲

۴-۳۳ آب شیرینی با سرعت $۳۰\ \text{m/s}$ و با دبی حجمی $۰/۰۵\ \text{m}^3/\text{s}$ از شیپوره خارج شده و توسط پره ثابتی به دو جریان مساوی تقسیم شده و مطابق شکل با زاویه ۶۰° منحرف می‌شود. نیروی F لازم برای نگه داشتن پره در جای خود را محاسبه کنید. چگالی آب $۱۰۰۰\ \text{kg/m}^3$ است.

جواب $F = ۷۵۰\ \text{N}$



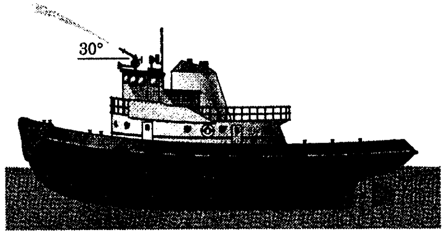
شکل مسئله ۴-۳۳

۴-۳۴ یک اسکی‌باز روی آب به هنگام اسکی کردن در آب شور به بیشترین سرعت خود یعنی $۷۰\ \text{km/h}$ می‌رسد. آب از طریق یک تونل افقی در کف بدنه وارد می‌شود؛ به طوریکه سرعت آب ورودی نسبت به اسکی $۷۰\ \text{km/h}$ است. موتور پمپ اسکی، آب را با دبی حجمی $۰/۰۸۲\ \text{m}^3/\text{s}$ از شیپوره افقی به قطر $۵۰\ \text{mm}$ تخلیه می‌کند. نیروی مقاوم آب را در مقابل بدنه اسکی در سرعت داده شده محاسبه کنید.

شکل مسئله ۴-۳۴

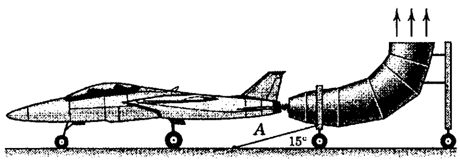
۴-۳۵ دستگاه آتش‌نشانی یک قایق یدک‌کش، جریان آب شور دریا (با چگالی ۱۰۳۰ kg/m^3) را با سرعت خروجی ۴۰ m/s با دبی حجمی ۰/۰۸۰ m^3/s از شیپوره خود می‌پاشد. نیروی رانش T پروانه قایق را چنان محاسبه کنید که در هنگام پمپ کردن آب، قایق را در موقعیتی ثابت نگهدارد.

جواب $T = ۲/۸۵$ kN



شکل مسئله ۴-۳۵

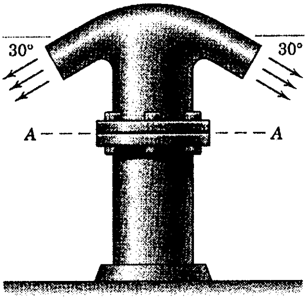
۴-۳۶ یک صدا خفه کن موتور جت، شامل لوله متحرکی است که توسط کابل A مستقیماً به اگزوز جت بسته شده است و جریان هوا را مستقیماً به سمت بالا هدایت می‌کند. در طی آزمایش بر روی زمین، موتور هوا را با دبی ۴۳ kg/s مکش کرده و سوخت را با دبی ۰/۸ kg/s محترق می‌کند. سرعت گاز خروجی ۷۲۰ m/s است. کشش T را در کابل تعیین کنید.



شکل مسئله ۴-۳۶

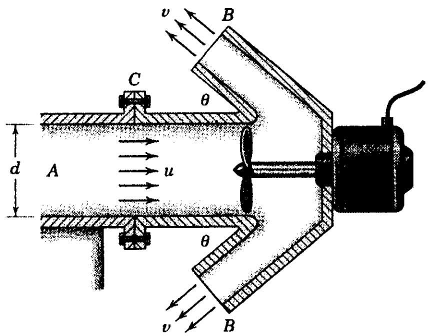
۴-۳۷ آب شور، از دو لوله خروجی خمیده °۳۰ با دبی حجمی ۳۰ m^3/min به بیرون پاشیده می‌شود. هر یک از دو شیپوره خروجی دارای قطر داخلی ۱۰۰ mm برای خروج جریان بوده و قطر لوله در مقطع اتصال A برابر ۲۵۰ mm می‌باشد. فشار آب در مقطع A-A برابر ۵۵۰ kPa است. اگر هر شش پیچ و مهره اتصال A-A تا کشش ۱۰ kN سفت شده باشند؛ فشار متوسط p وارد بر کلاهک اتصال با سطح مقطع ۲۴(۱۰^۳) mm^2 را محاسبه کنید. لوله بالای اتصال و آب درون آن، دارای جرم ۶۰ kg است.

جواب $p = ۸۴۰$ kPa



شکل مسئله ۴-۳۷

۴-۳۸ پمپ نشان داده شده، هوای با چگالی ρ را با سرعت u از لوله A به قطر d مکش کرده و آن را با سرعت زیاد v از دو خروجی B تخلیه می‌کند. در A و B جریان هوا دارای فشار جو می‌باشد. عباراتی برای نیروی کشش T وارد بر پمپ در لبهٔ C بدست آورید.

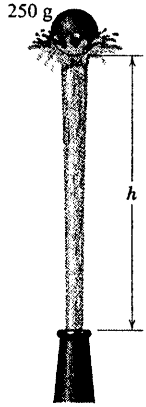


شکل مسئله ۴-۳۸

مسائل ویژه

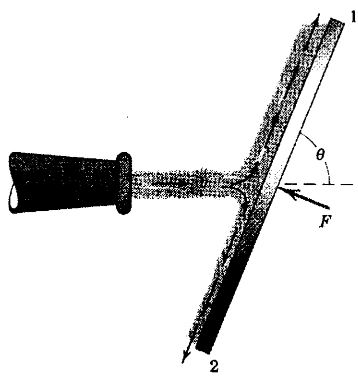
۴-۳۹ توپ ۲۵۰ گرمی در بالای فواره قائم آب شیرین نگهداشته شده، در حالیکه آب از یک شیپوره به قطر ۱۲ mm با سرعت ۱۰ m/s فوران می‌کند. ارتفاع h توپ از دهانه شیپوره را بیابید. فرض کنید جریان ثابت باقی می‌ماند و انرژی تلف شده‌ای در جریان فواره وجود ندارد.

جواب $h = ۴/۸۶$ m



شکل مسئله ۳۹-۴

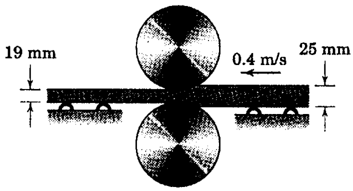
۴-۴۰ جریان سیال بـا سـطح مقطـع A و چگالـی ρ از دهانه شیپوره با سرعت v خـارج شـده و بـه نـاودانی شـیبدار برخورد می‌کند که مقطع آن نشان داده شـده اسـت. قسـمتی از جریان به هر یک از دو سـوی نـاودانی منحـرف می‌شـود. اگر سطح ناودانی صیقلی باشد، سرعت هر دو قسمت جریان همان v، باقی خواهد ماند و فقط نیروی وارده بر نـاودانی عمـود بـر سطح پایین خواهد بود. در نتیجه توسط نیروهـایی کـه برآینـد آنان F بوده و عمود بر ناودانی می‌باشد، وضعیت ناودانی حفظ خواهد شد. با نوشتن معادلات ضربـه ـ مومنتـم در امتدادهـای عمود و موازی با نـاودانی نـیروی لازم بـرای حفـظ وضعیـت ناودانی را تعیین کنید. همچنین دبی حجمی جریان Q_1 و Q_2 را برای دو جریان بیابید.



شکل مسئله ۴۰-۴

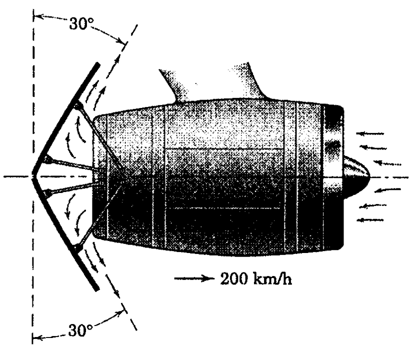
۴-۴۱ ورق فـولادی بـه ضخـامت ۲۵ mm و پـهنای ۱/۲ m وارد غلتکهایی می‌شود که دارای سرعت ۰/۴ m/s بـوده و ضخامت ورق را بـه ۱۹ mm کـاهش می‌دهنـد. T، نـیروی رانش افقی و کوچک وارد بر یاتاقانها هر یـک از دو غلتـک را محاسبه کنید.

جواب $T = ۰/۹۳$ N



شکل مسئله ۴۱-۴

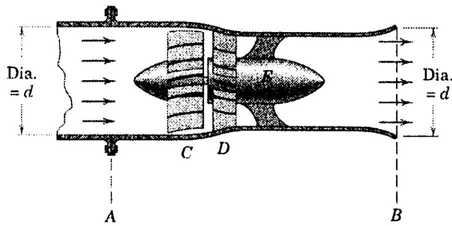
۴-۴۲ سیستم معکوس کننده جهت نیروی رانـش یـک موتور جـت بـرای کـاهش سـرعت آن از ۲۰۰ km/h پـس از فرود، شامل پره‌هایی تاشو می‌باشـد کـه مطـابق شـکل، جـهت گازهای خروجی را منحرف می‌کند. اگر مصرف هـوای موتـور جت ۵۰ kg در ثانیه و مصرف سـوخت آن ۰/۶۵ kg در ثانیه باشد، نیروی ترمز را بر حسـب کسـر n نـیروی رانـش موتـور بـدون پـره تاشـو بیـابید. گازهـای خروجـی دارای سـرعت ۶۵۰ m/s نسبت به شیپوره می‌باشد.



شکل مسئله ۴۲-۴

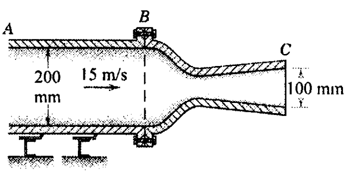
۴۳-۴ هواکش C با جریان محوری، هوا را از لوله‌ای با سطح مقطع مدور، پمپ کرده و آنرا با سرعت v از قسمت B به خارج می‌راند. چگالی هوا در A و B به ترتیب ρ_A و ρ_B و فشارهای متناظر، برابر p_A و p_B می‌باشند. پره‌های ثابت انحرافی در D، جریان محوری هوا را پس از عبور از پره‌های رانش C، حفظ می‌کند. عبارتی برای نیروی برآیند افقی R وارد بر پیچ و مهره‌های هواکش در مقطع A، بیان کنید.

جواب $R = \frac{\pi d^2}{4}\left[\rho_B\left(1-\frac{\rho_B}{\rho_A}\right)v^2 + \left(p_B - p_A\right)\right]$



شکل مسئله ۴۳-۴

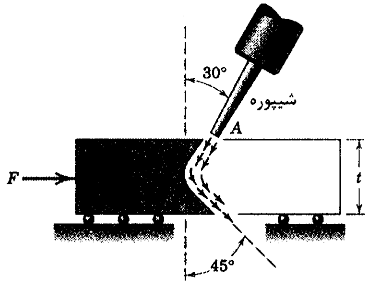
۴۴-۴ هوا با سرعت ۱۵ m/s از لوله ثابت A پمپ شده و از مقطع BC یک شیپوره آزمایشی بیرون رانده می‌شود. فشار استاتیکی متوسط نسبی در مقطع B ۱۰۵۰ kPa و چگالی هوا در این فشار و در دمای معمولی برابر ۱۳/۵ kg/m³ می‌باشد. فشار استاتیکی متوسط نسبی در مقطع C برابر ۱۴ kPa و چگالی هوای متناظر با آن، ۱/۲۱۷ kg/m³ اندازه گیری شده است. نیروی T وارد بر لبه B شیپوره توسط پیچ و مهره‌های موجود را جهت ثابت نگه داشتن شیپوره محاسبه کنید.



شکل مسئله ۴۴-۴

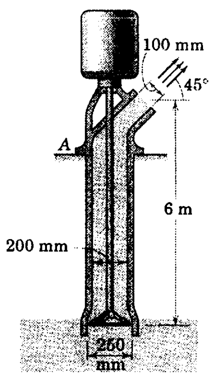
۴۵-۴ یکی از پیشرفته‌ترین روشهای برش ورق‌های فلزی بکارگیری جت آب با سرعت بالا می‌باشد که آب، نوعی پودر سنگ سمباده را به همراه دارد. جت از شیپوره A با قطر ۰/۲۵ mm خارج شده و مسیر نشان داده شده را در ضخامت t ورق طی می‌کند. هنگامیکه ورق به آرامی به سمت راست حرکت داده می‌شود، جت شیار باریک و ظریفی را در ورق ایجاد می‌کند. مخلوط آب و ماده ساینده دارای وزن مخصوص ۱۱۰۰ kg/m³ بوده و در دبی حجمی پایین $2(10^{-3})$ m³/min استفاده می‌شود. آب با سرعتی معادل ۶۰ درصد سرعت آب خروجی از شیپوره، از انتهای ورق خارج می‌شود. نیروی افقی لازم F برای نگه داشتن ورق در مقابل جت آب را محاسبه کنید.

جواب $F = 23/0$ N



شکل مسئله ۴۵-۴

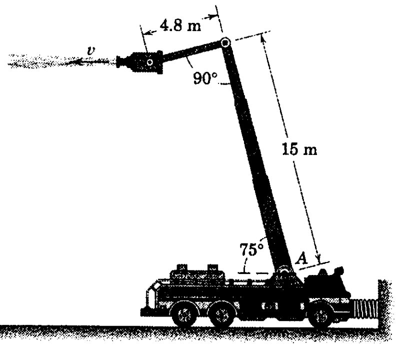
۴۶-۴ پمپ آب دارای جرم خالص ۳۱۰ kg بوده و آب شیرین را تا ارتفاع ۶ m با دبی حجمی ۰/۱۲۵ m³/s پمپ می‌کند. نیروی قائم R بین تکیه‌گاه و لبه A پمپ را در حین کار پمپ تعیین کنید. جرم آب داخل پمپ را می‌توان معادل ستونی از آب به قطر ۲۰۰ mm و ارتفاع ۶ m در نظر گرفت.



شکل مسئله ۴۶-۴

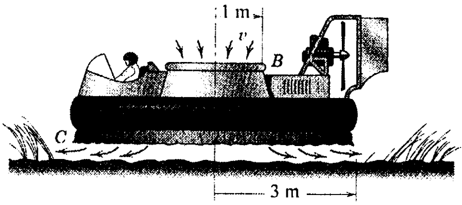
۴-۴۷ در یک آزمایش مربوط به عملکرد یک ماشین آتش‌نشانی، تجهیزات موجود می‌توانند آزادانه حرکت کنند. در موقعیت نشان داده شده، مشاهده می‌شود که فنر متصل به ماشین با سختی $k = ۱۵$ kN/m، به دلیل نیروی افقی وارد از طرف جریان آب خروجی از شیپوره در هنگام پمپ کردن، به اندازه ۱۵۰ mm تغییر مکان می‌یابد. اگر قطر خروجی از شیپوره ۳۰ mm باشد، سرعت v جریان آب در هنگام خروج از شیپوره را تعیین کنید. همچنین هنگامیکه پمپ به همراه شیپوره مربوطه در موقعیت نشان داده شده در حال کار است، گشتاور M را که مفصل A بایستی تحمل کند، محاسبه کنید.

جواب $v = ۵۶/۴$ m/s و $M = ۲۹/۸$ kN.m



شکل مسئله ۴-۴۷

۴-۴۸ هاورکرافت آزمایشی که در خشکی عمل می‌کند، دارای جرم ۲/۲ Mg است. این هاورکرافت بوسیله پمپ کردن هوا در فشار جو از طریق مجرای ورودی B با مقطع مدور و تخلیه آن از سطح زیرین در ناحیه C، خود را در ارتفاعی از سطح زمین نگه می‌دارد. اگر سرعت ورودی هوا برابر ۴۵ m/s باشد، فشار متوسط هوای زیر این دستگاه به قطر ۶ m را در سطح زمین محاسبه کنید. جرم مخصوص هوا ۱/۲۰۶ kg/m^3 می‌باشد.

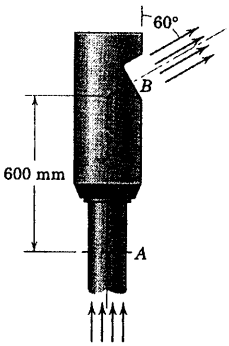


شکل مسئله ۴-۴۸

۴-۴۹ هوا از مقطع A لوله با دبی ۶ kg/s تحت فشار نسبی ۱۴۰۰ kPa وارد شده و با فشار جو از شکاف سوت B خارج می‌شود. سرعت هوای ورودی در A برابر ۴۵ m/s و سرعت هوای خروجی در B برابر ۳۶۰ m/s می‌باشد. نیروی کشش T، برش V و گشتاور خمشی M را در مقطع A لوله حساب کنید. سطح مقطع جریان در A برابر ۷۵۰۰ mm^2 می‌باشد.

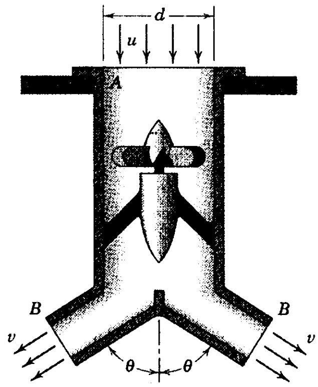
جواب $T = ۹/۶۹$ kN و $V = ۱/۸۷۱$ kN

$M = ۱/۱۲۲$ kN.m



شکل مسئله ۴-۴۹

۴-۵۰ هواکش داخل کانال به جرم کل m در مقطع A به حالت قائم قرار گرفته است. هوا با چگالی ρ و سرعت u از دهانه ورودی A مکیده شده و با سرعت v از دهانه خروجی B به بیرون رانده می‌شود. هر دو دهانه ورودی و خروجی در فشار جو قرار گرفته‌اند. رابطه‌ای برای نیروی R وارد شده بر لبه نگهدارنده هواکش توسط تکیه‌گاه بدست آورید.

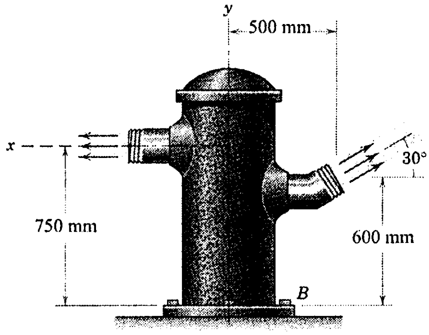


شکل مسئله ۴-۵۰

۴-۵۱ شیر آتش‌نشانی، تحت فشار بالای تانک آب شهر مورد آزمایش قرار می‌گیرد. کل جریان با دبی حجمی ۰/۲۸۰ m^3/s بین دو خروجی، هر یک با سطح مقطع ۳۸۰۰ mm^2 به طور مساوی تقسیم می‌شود. سطح مقطع ورودی در پایه برابر mm^2 $(۱۰^۴)$۶/۸۰ می‌باشد. با صرفنظر کردن از وزن شیر آتش‌نشانی و آب درون آن، نیروی کشش T، برش V و گشتاور خمشی M را در پایه تانک آب در B بدست آورید. چگالی آب ۱۰۰۰ kg/m^3 است. فشار استاتیکی آب ورودی به پایه در B برابر ۸۰۰ kPa^2 می‌باشد.

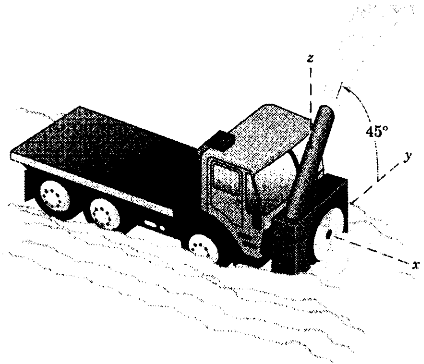
جواب $T = ۵۳/۰$ kN و $V = ۰/۶۹۱$ kN

$M = ۲/۴۸$ kN.m



شکل مسئله ۴-۵۱

۴-۵۲ یک دستگاه برف‌روب دورانی که بر روی یک کامیون بزرگ تعبیه شده است، با سرعت ثابت ۲۰ km/h بر روی جاده مسطح، راه خود را از میان توده برف باز می‌کند. برف‌روب در هر دقیقه ۶۰ Mg برف را از لوله خروجی °۴۵ خود با سرعت ۱۲ m/s نسبت به دستگاه بیرون می‌ریزد. نیروی رانش P چرخها در امتداد حرکت برای پیش بردن برف‌روب را حساب کرده و نیروی جانبی متناظر R بین چرخها و جاده را بدست آورید.

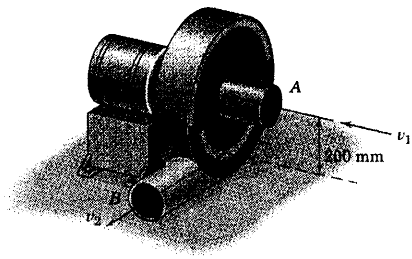


شکل مسئله ۴-۵۲

۴-۵۳ دمندهٔ صنعتی، هوا را با سرعت v_1 از دهانه محوری A مکش کرده و آن را تحت دما و فشار جو با سرعت v_2 از لوله B به قطر ۱۵۰ mm تخلیه می‌کند. دمنده، ۱۶ m^3 هوا را در دقیقه از طریق موتور خود که با سرعت دورانی ۳۴۵۰ rev/min کار می‌کند، جابجا می‌کند. اگر توان مورد نیاز موتور در شرایط بی‌باری (هر دو لوله ورودی و خروجی بسته

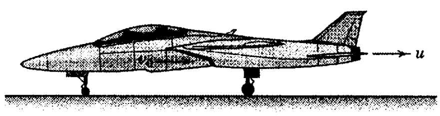
باشند)، برابر ۰/۳۲ kW باشد، توان P مصرفی را هنگامیکه هوا پمپ می‌شود، محاسبه کنید.

جواب $P = ۰/۶۷۱ \text{ kW}$



شکل مسئله ۵۳-۴

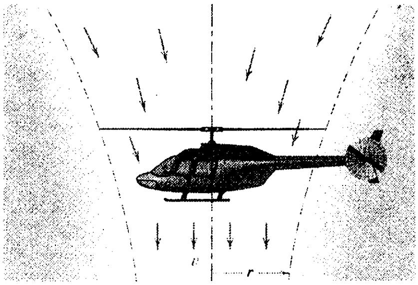
۵۴-۴ یک هواپیمای جت نظامی به جرم ۱۰ Mg آماده پرواز به هنگام دور برداشتن موتور جهت دستیابی بـه حداکثر توان، به کمک سیستم ترمز در حالت توقف بـاقی می‌ماند. در چنین شرایطی هوا با چگالـی ۱/۲۰۶ kg/m^3 و دبی ۴۸ kg/s در فشـار اسـتاتیکی نسـبی ۲/۰ kPa- از طریـق لولـه ورودی مکش می‌شود. مجموع سطح مقطع لوله‌های ورودی هـوا (کـه هر کدام در یـک طـرف هـواپیمـا قـرار گرفتـه‌اند) ۱/۱۶۰ m^2 می‌باشد. نسبت هوا به سوخت برابر ۱۸ بـوده و سرعت u گاز خروجی ۹۴۰ m/s است که فشـار نسـبی بـرگشـتی در دهانـه شیپوره خروجی صفر می‌باشد. شـتاب اولیـه هـواپیمـا a را در لحظه رها شدن ترمزها محاسبه کنید.



شکل مسئله ۵۴-۴

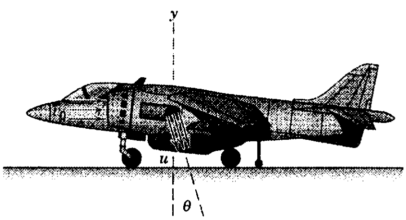
۵۵-۴ هلیکوپتر نشان داده شده، دارای جرم m بـوده و با تامین مومنتم برای یک ستون هوا به سمت پایین، خود را در موقعیت نشان داده شده در هوا ثابت نگه مـی‌دارد. در حالیکـه مرز جریان هوا نیز نشان داده شده است. سرعت v بـه سـمت پایین را که توسط پره‌های هلیکوپتر برای هوا تـامین شـده، در زیر پره‌ها تعیین کنید؛ در حالیکه شعاع مقطع جریـان r بـوده و فشار جو حاکم باشد. همچنین توان P لازم برای موتور را پیـدا کنید. از انرژی جنبشی دورانی هوا و هرگونه افزایش‌های ناشی از اصطکاک هوا و هرگونه تغییـر در چگالـی هـوا ρ صرفنظر کنید.

جواب $v = \frac{۱}{r}\sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}$ و $P = \frac{mg}{۲r}\sqrt{\frac{mg}{\pi\rho}}$



شکل مسئله ۵۵-۴

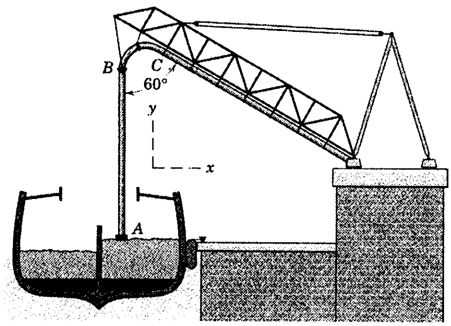
۵۶-۴ یک هواپیمای نظامی از نوع VTOL (نشسـت و برخاست عمودی) قادر است در اثر شـتاب ناشـی از گازهـای جت خروجی به طـور قـائم از زمیـن بلنـد شـود کـه راسـتای شیپوره خروجی می‌تواند از زاویه $\theta \cong ۰$ جهت برخاسـتن و معلق ماندن تا زاویه $\theta = ۹۰°$ جهت پرواز به سمت جلو تغییر کند. جرم هواپیما بارگیری شـده برابـر ۸۶۰۰ kg می‌باشـد. در هنگام برخاستن که هواپیما از حداکـثر تـوان اسـتفاده می‌کنـد، موتور جت آن که مجهز بـه توربوفـن اسـت، هـوا را بـا دبی ۹۰ kg/s مصرف می‌کند و نسبت هوا به سوخت در این موتور برابر ۱۸ می‌باشد. سرعت گاز در شیپوره خروجـی ۱۰۲۰ m/s و فشـار آن برابـر بـا فشـار جـو می‌باشـد. هـوا بـا چگالـی ۱/۲۰۶ kg/m^3 و بـا فشـار نسـبی ۲ kPa- از طریـق دریچـه ورودی که مساحت کل آن ۱/۱۰ m^2 می‌باشد، مکش می‌شـود. زاویه θ را برای حالت برخاستن عمودی و نیز شـتاب متناظر هواپیما، a_y را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۵۶-۴

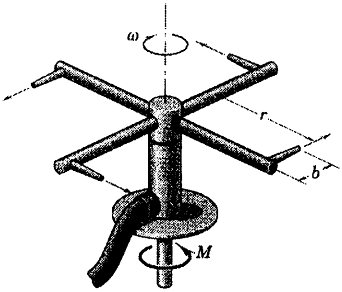
۴-۵۷ یک ترمینال دریایی به منظور تخلیه حجم عمده‌ای از گندم از یک کشتی، مجهز به لولهٔ قائمی به همراه یک شیپوره در A می‌باشد که گندم را از لوله مکش کرده و به انبار منتقل می‌کند. مولفه‌های نیروی $\mathbf{R}$ را در جهت x و y که برای تغییر مومنتم جریان جرم گذرنده از ناحیه خمیده مدور لازم است، محاسبه کنید. کلیه نیروهای خارجی وارد بر بخش خمیده و نیز جرم درون آن را مشخص کنید. هوا از لوله‌ای به قطر ۳۵۰ mm با دبی ۱۶ Mg در ساعت و تحت خلاء ۲۳۰ mm جیوه ($p = -۳۰/۷$ kPa) جریان یافته و ۱۳۵ Mg گندم را در ساعت با سرعت ۴۰ m/s با خود انتقال می‌دهد.

جواب $R_x = ۱/۴۵۳$ kN و $R_y = -۲/۵۲$ kN



شکل مسئله ۴-۵۷

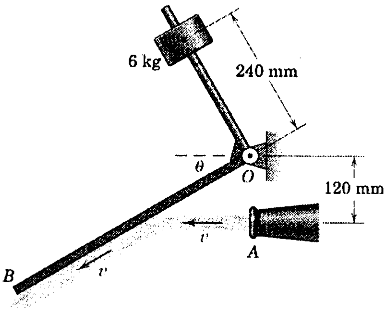
۴-۵۸ آب‌پاشی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω چرخیده و آب را با دبی حجمی Q پخش می‌کند. سطح خروجی هر یک از چهار شیپوره برابر A است. رابطه‌ای برای گشتاور M وارده بر محور آب‌پاش بیابید که حرکت مذکور را حفظ کند. به ازای یک فشار معین و نیز دبی جریان معلوم Q، در چه سرعت زاویه‌ای ω_0 آب‌پاش بدون اعمال هیچگونه گشتاوری کار خواهد کرد؟ چگالی آب را ρ در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۴-۵۸

۴-۵۹ جت پر سرعت هوا، از دهانه شیپوره A به قطر ۴۰ mm با سرعت v برابر ۲۴۰ m/s دمیده می‌شود و به پره OB که مقطع آن نشان داده شده است، برخورد می‌کند. پره و دنباله قائم الزاویه آن دارای جرمی ناچیز در مقایسه با جرم ۶ kg استوانه متصل به آن می‌باشد و مجموعه آزادانه حول محور افقی گذرنده از O مفصل شده است. زاویه θ پره نسبت به امتداد افق را حساب کنید. چگالی هوا تحت شرایط مذکور ۱/۲۰۶ kg/m^3 می‌باشد. فرضیات دیگری را نیز در نظر بگیرید.

جواب $\theta = ۳۸/۲°$

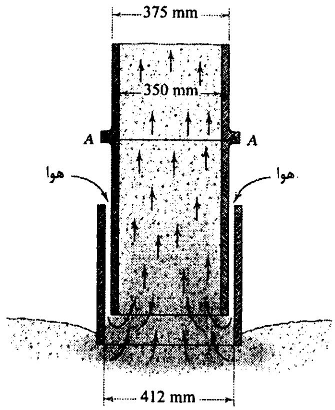


شکل مسئله ۴-۵۹

۴-۶۰ ◀ مقطع محوری شیپوره مکشی A که جهت تخلیه حجم عمده‌ای از گندم به کار می‌رود، در شکل نشان داده شده است. اتصال لولهٔ خارجی و داخلی از طریق ورقه‌های فلزی طولی می‌باشد؛ بطوریکه در مقابل جریان هوا مقاومتی ندارند. خلاء ۲۳۰ mm جیوه ($p = -۳۰/۷$ kPa نسبی) در لولهٔ درونی ایجاد شده و فشار در انتهای لوله خارجی برابر فشار جو ($p = ۰$) می‌باشد. هوا با چگالی

$1/206\ kg/m^3$ و دبی $16\ Mg/h$ در فشار جو از فضای بین دو لوله وارد شده و $135\ Mg$ گندم را در ساعت با سرعت $40\ m/s$ از طریق لوله درونی با خود بالا می‌برد. اگر وزن شیپوره‌ای که در قسمت زیرین مقطع A-A واقع شده برابر $30\ kg$ باشد، فشار C موجود در اتصال مقطع A-A را محاسبه کنید.

جواب $C = 265\ N$

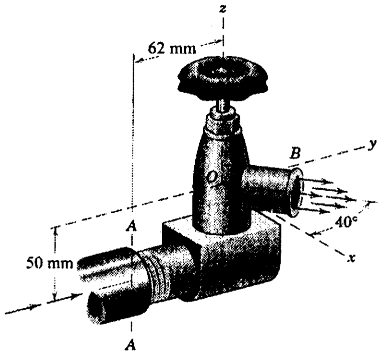


شکل مسئله ۶۰-۴

۶۱-۴ ◀ شیر فلکه‌ای که به لوله ثابت در مقطع A-A پیچ شده، چنان طراحی شده است که آب شیرین را با دبی حجمی $1/30\ m^3/min$ در صفحه x-y مطابق شکل، در فشار جو بیرون بریزد. فشار آب در مقطع A-A برابر $1000\ kPa$ (gage نسبی) می‌باشد. قطر سطح مقطع جریان در A-A برابر با $50\ mm$ و قطر دهنه تخلیه در B برابر با $25\ mm$ است. با صرفنظر کردن از وزن شیر و آب درون آن، مطلوبست تعیین نیروی برشی V، نیروی کششی F، گشتاور پیچشی T و گشتاور خمشی M، در مقطع A-A.

جواب $V = 733\ N$ و $F = 1588\ N$

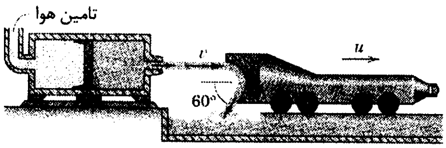
$T = 36/6\ N.m$ و $M = 54/8\ N.m$



شکل مسئله ۶۱-۴

۶۲-۴ ◀ یک وسیلهٔ آزمایشی که برای تحقیق درباره برخورد طراحی شده است، دارای جرم $m = 1/4\ Mg$ می‌باشد و توسط فوران یک جت آب که با سرعت زیاد به منحرف کننده خمیده که به پشت وسیله نصب شده، از حالت سکون به حرکت در آمده و شتاب می‌گیرد. جت آب شیرین، توسط یک پیستون عامل هوا تولید می‌شود و از دهانه شیپوره‌ای به قطر $140\ mm$ با سرعت $v = 150\ m/s$ به بیرون فوران می‌کند. مقاومت اصطکاکی وسیله، به عنوان یک ذره، حدود ۱۰ درصد وزن آن است. معین کنید سرعت u وسیله را ۳ ثانیه پس از رها شدن از حالت سکون. (*راهنمایی:* از نتایج مسئله نمونه ۵-۴ استفاده کنید.)

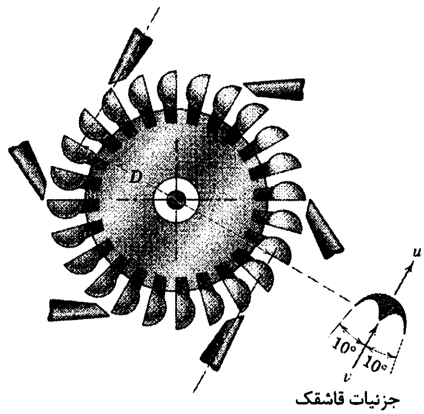
جواب: $u = 131/0\ m/s$



شکل مسئله ۶۲-۴

٤-٦٣ در شکل، چرخ توربین ضربه‌ای یک نیروگاه هیدروالکتریک نشان داده شده که هر شش شیپوره موجود در آن می‌بایست تحت فشار استاتیکی حاصل از آبی به ارتفاع ۳۰۰ m قرار داشته و سرعت دورانی چرخ برابر ۲۷۰ rev/min باشد. توان خروجی مجموعهٔ چرخ و ژنراتور باید ۲۲۰۰۰ kW باشد. بازده ژنراتور را می‌توان ۰/۹۰ در نظر گرفت و نیز بازده‌ای برابر با ۰/۸۵ برای تبدیل انرژی جنبشی جت آب به انرژی دریافتی از توربین قابل پیش‌بینی است. سرعت متوسط محیطی چنین چرخی در ازای بیشترین بازده تقریباً ۰/٤۷ سرعت جت آب می‌باشد. اگر هر یک از قاشکها دارای شکل نشان داده شده باشند، قطر جت آب مورد نیاز d و قطر چرخ D را تعیین کنید. فرض کنید آب بر قاشقکی عمل می‌کند که در نقطه مماس بر جریان جت آب قرار گرفته باشد.

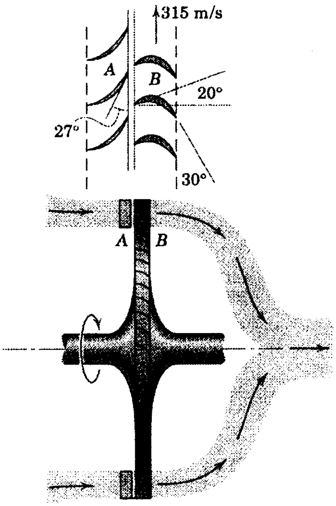
جواب $\quad d = ۱٦٥/۳\ \text{mm} \quad D = ۲/٥٥\ \text{m}$



شکل مسئله ۴-۶۳

٤-٦٤ در شکل، جزئیات مربوط به دیافراگم شیپوره ثابت A و نیز پره‌های دوار B از یک توربین گازی نشان داده شده‌اند. محصولات حاصل از احتراق روی پره‌های دیافراگم ثابت تحت زاویه ۲۷° عبور کرده و به پره‌های روتور متحرک برخورد می‌کنند. زوایای نشان داده شده طوری انتخاب شده‌اند که زاویه سرعت گاز نسبت به پره‌های متحرک در مدخل ورودی ۲۰° باشد تا کمترین آشفتگی متناظر با سرعت متوسط ۳۱۵ m/s برای پره‌ها در شعاع ۳۷۵ mm بوجود آید. اگر گاز با دبی ۱۵ kg/s از روی پره‌ها جریان یابد، توان خروجی تئوری توربین P را بدست آورید. از اصطکاک سیال و اصطکاک مکانیکی که نتیجه‌اش اتلاف انرژی حرارتی است، صرفنظر کرده و فرض کنید که همه گازهای موجود در سطوح پره‌ها با سرعت ثابت نسبت به پره‌ها منحرف می‌شوند.

جواب $\quad P = ۱/۱۹۷\ \text{MW}$



شکل مسئله ۴-۶۴

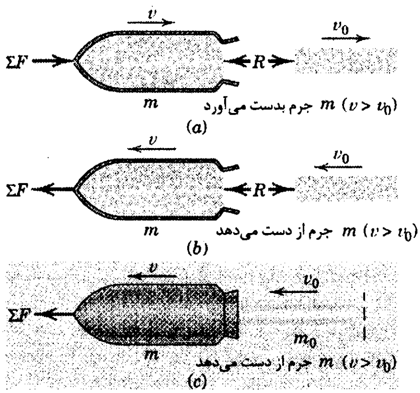
۷-۴ جرم متغیر

در بخش ٤-٤ معادلات حرکت یک ذره را به منظور در بر گرفتن مجموعه‌ای از ذرات تعمیم دادیم. این تعمیم ما را به روابط کلی $\Sigma\mathbf{F}=\dot{\mathbf{G}}$، $\Sigma\mathbf{M}_O=\dot{\mathbf{H}}_O$ و $\Sigma\mathbf{M}_G=\dot{\mathbf{H}}_G$ رهنمون ساخت که در واقع به ترتیب همان معـادلات ٦-٤، ٧-٤ و ٩-٤ می‌باشند. در استخراج این معادلات، مجموع‌های موجود در آنها به مجموعه‌ای از ذرات ثـابت اعمـال گردیـد و جـرم سیستم مورد تجزیه و تحلیل ثابت بود.

در بخش ٦-٤ اصول مومنتم به معادلات ١٨-٤ و ١٩-٤ تعمیم داده شد تا عمل نیروهای وارد بر سیستم تشریح شود. این سیستم به صورت حجم هندسی‌ای تعریف شده است که یک جریان پایا جرم از آن عبور می‌کند. بنابراین، مقدار جـرم موجود در حجم کنترل نسبت به زمان ثابت بوده و در نتیجه استفاده از معادلات ٦-٤، ٧-٤ و ٨-٤ مجاز می‌باشد. هنگامیکه جرم موجود در مرز یک سیستم مورد نظر ثابت نباشد، روابط اخیر معتبر نیستند*.

معادله حرکت

حال معادله حرکت خطی یک سیستم، مورد بسط و توسعه قرار خواهد گرفت که جرمش نسبت به زمان متغیر است. در ابتدا مطابق شکل ٦a-٤، جسمی را در نظر بگیرید که با گرفتن و بلعیدن جریانی از ماده، جرمش افزایش می‌یـابد. جـرم جسم و سرعت آن در هر لحظه به ترتیب برابر با m و v می‌باشند. فرض می‌شود که جهت جریان ماده در راستای حرکـت m بوده و دارای سرعت v_0 است که کمتر از v می‌باشد. به کمک معادله ١٨-٤، نیروی وارده از طرف m بـه ذرات در حـال جریان و برای شتاب دادن آنها از سرعت v_0 به سرعت بزرگتر v، برابر است با $R=m'(v-v_0)=\dot{m}u$ که در آن $m'=\dot{m}$ میزان افزایش جرم m نسبت به زمان بوده و u مقدار سرعت نسبی می‌باشد که با این سرعت، به m نزدیک می‌شوند. عـلاوه بر نیروی R، کلیه نیروهایی که به m در جهت حرکت آن اعمال می‌شوند در $\Sigma\mathbf{F}$ گنجانده شده است. بنابراین، طبق قـانون دوم نیوتن، معادله حرکت جرم m به صورت $\Sigma F-R=m\dot{v}$ است یا:



شکل ۶-۴

* در مکانیک نسبی، جرم به صورت تابعی از سرعت تعریف می‌شود و مشتق آن نسبت به زمان دارای مفهوم متفاوتی با مکانیک نیوتنی دارد.

$$\boxed{\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u} \qquad (۴-۲۰)$$

به طور مشابه، اگر جسم نشان داده شده در شکل ۴-۶b جرم m را بـا سـرعت v_0 کمـتر از v از قسـمت انتـهایی از دست بدهد، نیروی لازم R لازم برای دادن شتاب منفی به ذرات سیستم و رساندن سرعت از v بـه سـرعت کمـتر v_0 برابـر است با: $R = m'(-v_0 - [-v]) = m'(v - v_0)$. اما $m' = -\dot{m}$ می‌باشد. زیرا که m کاهش می‌یابد. همچنیــن سـرعت نسـبی ذرات جدا شونده از جرم m برابر با $u = v - v_0$ است. در نتیجه نیروی R به صـورت $R = -\dot{m}u$ می‌باشـد. اگر ΣF نشـان دهنده برآیند کلیه نیروهای وارد بر جرم m در جهت حرکت باشد، قانون دوم نیوتن ایجاب می‌کند که $\Sigma F + R = m\dot{v}$ باشد یا:

$$\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u$$

که نظیر همان رابطه‌ای است که در حالت افزایش جرم m بدست آمده است. می‌تـوان معادلـه ۲۰-۴ را بـه صـورت معادله حرکت جرم m در حالت افزایش جرم و چه در مورد کاهش جرم، بکار بریم.

خطایی که غالباً در بکارگیری معادله نیرو ـ مومنتم صورت می‌گیرد، اینست که ΣF به صورت زیر بیان شود.

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}(mv) = m\dot{v} + \dot{m}v$$

در این رابطه می‌بینیم که مشتق گیری مستقیم از مومنتم خطی *فقط* هنگامی صحیح است که ماده‌ای که ابتـدا سـاکن است باعث افزایش جرم شود و یا سرعت مطلق خروج ماده صفر باشد. در هر دو مورد داریم: $v_0 = 0$ و $u = v$.

نگرش دیگر

همچنین می‌توانیم از رابطه اساسی $\Sigma F = \dot{G}$، معادله ۲۰-۴ را با مشتق گیـری مسـتقیم از مومنتـم بـه دسـت آوریـم مشروط بر اینکه سیستم مناسبی با جرم کل ثابت انتخاب شود. برای تشریح این دیدگاه، حالتی را در نظـر مـی‌گیریـم کـه همانند شکل ۴-۶c جرم m در حال کاهش است. شکل مزبور نشان دهنده جرم m و بخشی از جریان جرم خروجـی یعنـی m_0 می‌باشد که مجموعاً یک سیستم را تشکیل می‌دهند. جرم این سیستم برابر $m + m_0$ بوده و ثابت است.

فرض می‌شود که جریان جرم خروجی در لحظه‌ای که از جرم m جدا می‌شـود دارای حرکـت آشـفته نبـوده و تنـها نیروی خارجی وارد بر کل سیستم مستقیماً به جرم m اعمال می‌شود. نیروی عکس العمل $R = -\dot{m}u$ را در درون سیسـتم داریم که به صورت نیروی خارجی وارد بر سیستم ظاهر نمی‌شود. با ثابت بودن جـرم کـل، اصـل مومنتـم $\Sigma F = \dot{G}$ قـابل اعمال بوده و داریم:

$$\Sigma F = \frac{d}{dt}(mv + m_0 v_0) = m\dot{v} + \dot{m}v + \dot{m}_0 v_0 + m_0 \dot{v}_0$$

واضح است که $\dot{m}_0 = -\dot{m}$ و سرعت جرم خروجی نسبت به جرم m برابر با $u = v - v_0$ می‌باشد. همچنیــن بـه دلیـل اینکه جرم m_0 در لحظه جدا شدن از m دارای حرکت غیر آشفته و بدون شتاب است، بنابراین، $\dot{v}_0 = 0$ می‌شود.

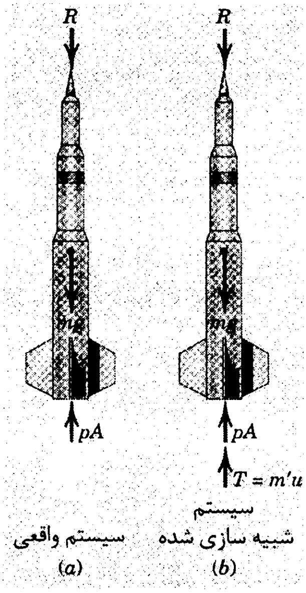
در نتیجه رابطه فوق چنین می‌گردد:

$$\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u$$

که با فرمول قبلی بدست آمده در معادله ۲۰-۴ یکسان است.

کاربرد در پیش رانش راکت

حالتی که جرم m در حال کاهش است، توصیف روشنی از پیشرانش راکت می‌باشد. شکل۷a-٤ راکتی را نشان می‌دهد که به طور قائم بالا می‌رود. جرمی که درون حجم محصور به سطح خارجی راکت و شیپوره خروجی آن قرار دارد، به عنوان سیستم در نظر گرفته می‌شود. نیروهای خارجی وارد بر این سیستم که به طور همزمان در ترسیمه آزاد راکت نمایان می‌شوند، عبارتند از: نیروی جاذبه ثقل mg ، نیروی مقاومت آیرودینامیکی R و نیروی pA که در اثر اعمال فشار استاتیکی متوسط p در صفحه خروجی شیپوره با سطح مقطع A ایجاد می‌شود. همچنین میزان جریان جرمی برابر است با: $m' = -\dot{m}$. در نتیجه می‌توانیم رابطه $\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u$ را که معادله حرکت راکت است به صورت $pA - mg - R = m\dot{v} + \dot{m}u$ بنویسیم. یا:



شکل ۷-۴

$$m'u + pA + mg - R = m\dot{v} \qquad (٤-٢١)$$

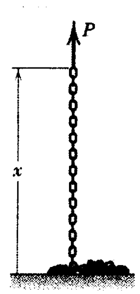
معادله ٢١-٤ دارای همان شکل معادله «$\Sigma F = ma$» است که اولین جمله « ΣF» نیروی رانش $T = m'u$ می‌باشد. در نتیجه، راکت را می‌توان همانند شکل ٤-٧b به صورت جسمی که نیروی رانش T به آن اعمال می‌شود، شبیه سازی کرده و آن را همانند هر مسئله دیگری که با رابطه $F = ma$ حل می‌شود مورد تحلیل قرار داد، مگر m تابعی از زمان باشد.

می‌توان مشاهده کرد که در مراحل اولیه حرکت، هنگامیکه سرعت v راکت از سرعت نسبی گاز خروجی یعنی u کمتر است، راستای سرعت مطلق v_0 مربوط به گازهای خروجی به سمت عقب راکت خواهد بود. از طرف دیگر، زمانی که سرعت v راکت به بیش از u برسد در آن صورت راستای سرعت مطلق v_0 گازهای خروجی به سمت جلوی راکت خواهد بود. به ازای دبی جرمی معینی از جریان، نیروی رانش T راکت فقط به سرعت نسبی گاز خروجی یعنی u بستگی داشته و به مقدار و یا جهت سرعت مطلق v_0 گازهای خروجی ارتباطی ندارد.

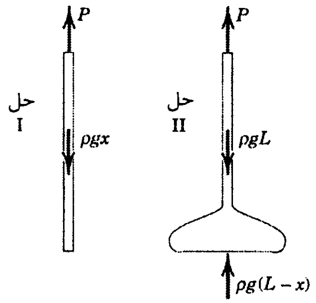
در بحث اخیر که مربوط به اجسامی با جرم متغیر نسبت به زمان بود، فرض کردیم که تمامی اجزای جرم جسم در هر لحظه با سرعت v حرکت کرده و ذرات جرمی که به جسم اضافه و یا از آن کاسته می‌شوند، سبب ایجاد انتقال ناگهانی سرعت در ورود و یا هنگام خروج از جسم می‌شوند. در نتیجه این تغییر سرعت به صورت یک ناپیوستگی ریاضی مدل سازی می‌شود. در حقیقت حتی اگر انتقال، سریع هم باشد، نمی‌توان این تغییر سرعت را ناپیوسته در نظر گرفت. برای مثال در مورد راکت، تغییر سرعتی که در فضای بین محفظه احتراق و صفحه خروجی شیپوره رخ می‌دهد، پیوسته است. تحلیلی جامع‌تر* از دینامیک جرم متغیر، این محدودیت ناپیوستگی تغییر سرعت را از بین برده و تصحیحات جزیی‌ای را معرفی می‌کند که در مورد معادله ٢٠-٤ اعمال می‌شود.

* به منظور بسط و توسعه معادلات توصیف کننده حرکت یک سیستم با تغییر جرم نسبت به زمان، بخش ۳-۵ از کتاب *دینامیک ویرایش دوم*، سیستم SI ، ۱۹۷۵، اثر اولین مولف از انتشارات John Wiley & Sons را ببینید.

مسئله نمونه ۹-۴



انتهای زنجیری به طول L و جرم در واحد طول ρ که بـر روی یـک سـکو انباشته شده با سرعت ثابت υ و با نیروی متغیر P به طور قائم به سمت بالا کشیده می‌شود. نیروی P را به صورت تابعی از ارتفاع h از سطح سکو بنویسید. همچنیـن انرژی تلف شده در طی بالا کشیدن زنجیر را پیدا کنید.



حل ۱، (نگرش جرم متغیر): از معادله ٤-٤ استفاده کـرده، آن را بـه بخـش متحرک زنجیر به طول x اعمال می‌کنیم که به جرم این بخش از زنجیر در هر لحظه افزوده می‌شود. نیروی مجموع ΣF شامل کلیه نیروهـای وارد بـر بخـش متحـرک می‌باشد و نیروی وارده از طرف ذراتی کـه در شـرف اتصـال بـه زنجـیر متحـرک هستند، در نظر گرفته نمی‌شود. با توجه به شکل داریم:

$$\Sigma F_x = P - \rho g x$$

سرعت ثابت است، بنابراین داریم: $\dot{\upsilon} = 0$. میزان افزایش جرم برابـر اسـت با $\dot{m} = \rho \upsilon$ و سرعت نسبی ذراتی که در شرف اتصال بـه بخـش متحـرک هسـتند، برابر است با: $u = \upsilon - 0 = \upsilon$ در نتیجه، معادله ٤-٢٠ چنین می‌شود:

❶ $[\Sigma F = m\dot{\upsilon} + \dot{m}u]$ $\qquad P - \rho g x = 0 + \rho \upsilon (\upsilon) \qquad P = \rho (g x + \upsilon^2)$ جواب

حال می‌بینیم که نیروی P از دو بخش تشکیل شده، یکی $\rho g x$ که وزن بخش متحرک زنجیر اسـت و دیـگری $\rho \upsilon^2$ که نیروی اضافی لازم برای تغییر مومنتم حلقه‌های زنجیر موجود بر روی سکو جهت رسیدن از حال سـکون بـه سـرعت υ می‌باشد.

حل ۲، (نگرش جرم ثابت): اصل ضربه و مومنتم که توسط معادله ٤-٦ در مورد سیستمی از ذرات بیان شده، به کل زنجیر که به صورت جرم ثابت در نظر گرفته می‌شود، اعمال خواهد شد. ترسیمه آزاد سیستم، نـیروی نامشـخص P ، وزن کلی تمام حلقه یعنی $\rho g L$ و نیروی $\rho g (L - x)$ که از طرف سکو به حلقـه‌های ثـابت اعمـال می‌شـود را نشـان می‌دهـد. مومنتم سیستم در هر موقعیتی برابر $G_x = \rho x \upsilon$ است و از مومنتم داریم:

❷ $\left[\Sigma F_x = \frac{dG_x}{dt}\right]$ $\qquad P + \rho g (L - x) - \rho g L = \frac{d}{dt}(\rho x \upsilon) \qquad P = \rho\left(g x + \upsilon^2\right)$ جواب

دوباره دیده می‌شود که نیروی P برابر است با وزن بخشی از زنجیر که بر روی سکو ساکن بوده بعلاوه جمله‌ای کـه میزان زمانی افزایش مومنتم زنجیر را محاسبه می‌کند.

اتلاف انرژی: برای بلند کردن هر حلقه زنجیر که روی سکو قرار دارد، لازم است که حلقه بالایی ضربه‌ای با سرعت ناگهانی به آن وارد کند. ضربه‌های پی در پی سبب اتلاف انرژی ΔE (کار منفی $-\Delta E$) می‌شـوند. معادلـه کـار ـ انـرژی را

❸ می‌توان به صورت $U'_{1-2} = \int P dx - \Delta E = \Delta T + \Delta V_g$ نوشت که در آن:

$$\int P dx = \int_0^L \left(\rho g x + \rho \upsilon^2\right) dx = \frac{1}{2} \rho g L^2 + \rho \upsilon^2 L$$

$$\Delta T = \frac{1}{2}\rho L \upsilon^2 \qquad \Delta V_g = \rho g L \frac{L}{2} = \frac{1}{2}\rho g L^2$$

با جایگزینی در معادله کار انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}\rho g L^2 + \rho \upsilon^2 L - \Delta E = \frac{1}{2}\rho L \upsilon^2 + \frac{1}{2}\rho g L^2 \qquad \Delta E = \frac{1}{2}\rho L \upsilon^2$$ جواب

نکات مفید

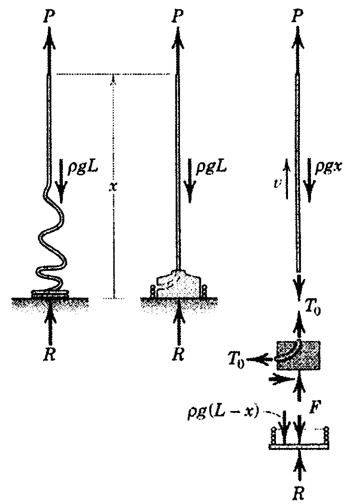
❶ *مدل ارائه شده در شکل ٦a-٤ نشان دهنده افزایش جرم از قسمت انتهایی بخش متحرک است. در مورد زنجیر، جرم از طریق قسمت آویزان اضافه می‌شود ولی دارای همان اثر است.*

❷ *باید خیلی دقت کنیم که رابطه $\Sigma F = \dot{G}$ را در مورد سیستمی بکار نبریم که جرم آن متغیر است. به این جهت کل زنجیر را به عنوان یک سیستم در نظر گرفته‌ایم زیرا جرمش ثابت است.*

❸ *توجه کنید U'_{1-2} شامل کار انجام شده توسط نیروهای داخلی غیر الاستیک می‌باشد. مانند نیروهای ضربه‌ای حلقه به حلقه که به اتلاف انرژی گرمایی و صوتی ΔE منجر می‌شود.*

مسئله نمونه ۱۰-۴

به جای حلقه زنجیر مسئله نمونه ٩-٤، طناب انعطاف پذیر و غیر کشسان یا زنجیر دوچرخه‌ای با طول L و جرم در واحد طول ρ را جایگزین کنید. نیروی P لازم برای بلند کردن انتهای طناب با سرعت ثابت υ و نیروی عکس العمل R بین حلقه طناب و سکو را تعیین کنید.



❶ **حل:** ترسیمه آزاد حلقه و نیز بخش متحرک طناب در شکل سمت چپ نشان داده شده است. به دلیل وجود مقداری مقاومت نسبت به خمش و حرکات جانبی، حرکت از حال سکون تا رسیدن به سرعت υ در جهت قائم، درقطعه مناسبی از طناب صورت می‌گیرد. با این وجود در ابتدا فرض کنید که تمام اجزای متحرک دارای سرعت یکسانی بوده، بنابراین با اعمال معادله ٦-٤ به این سیستم داریم:

❷ $$\left[\Sigma F_x = \frac{dG_x}{dt}\right] \qquad P + R - \rho g L = \frac{d}{dt}(\rho x \upsilon) \qquad P + R = \rho \upsilon^2 + \rho g L$$

باز هم فرض کنید که تمام اجزای حلقه طناب روی سکو ساکن بوده و نیروی دیگری غیر از نیروی وزن را به آن اعمال نمی‌کنند. بطوریکه $R = \rho g (L-x)$ است. با جایگزینی در رابطه اخیر داریم:

$$P + \rho g (L-x) = \rho \upsilon^2 + \rho g L \quad \text{یا} \quad P = \rho \upsilon^2 + \rho g x$$

که همان نتیجه بدست آمده در مسئله نمونه ٩-٤ برای زنجیر است. کل کار انجام شده بر روی طناب توسط نیروی P چنین می‌شود.

$$U'_{1-2} = \int P dx = \int_0^x \left(\rho v^2 + \rho g x\right) dx = \rho v^2 x + \frac{1}{2}\rho g x^2$$

با جایگزینی در معادله کار ـ انرژی داریم:

$$\left[U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g\right] \qquad \rho v^2 x + \frac{1}{2}\rho g x^2 = \Delta T + \rho g x \frac{x}{2} \qquad \Delta T = \rho x v^2$$

❸ که دو برابر انرژی جنبشی مربوطه به حرکت در جهت قائم می‌باشد. در نتیجه این مقدار از انرژی اضافی که با انرژی جنبشی $\frac{1}{2}\rho x v^2$ برابر است، بحساب نیامده است. چنین نتیجه‌ای، فرض حرکت یک بعدی در جهت x را رد می‌کند.

به منظور ایجاد یک مدل یک بعدی که خاصیت غیر کشسانی طناب را حفظ کند، لازم است که یک قید فیزیکی در پایه طناب اعمال شود تا طناب را در جهت قائم هدایت کرده و در همان لحظه بدون هیچگونه اتلاف انرژی حرکت انتقالی یکنواخت را از حالت سکون تا رسیدن به سرعت v به آن بدهد. در ترسیمه آزاد کل طناب در شکل وسط،

❹ چنین راهنمای جلوگیر گنجانده شده و به طور شماتیک در شکل راست و شکل وسط نمایش داده شده است. از معادله کار ـ انرژی در مورد یک سیستم کنسرواتیو داریم:

❺

$$\left[dU' = dT + dV_g\right] \qquad P dx = d\left(\frac{1}{2}\rho x v^2\right) - d\left(\rho g x \frac{x}{2}\right)$$

$$P = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g x$$

با جایگزینی در معادله ضربه ـ مومنتم داریم:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g x + R - \rho g L = \rho v^2 \qquad R = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g(L - x)$$

اگرچه این نیرو که به اندازه $\frac{1}{2}\rho v^2$ از نیروی وزن بیشتر است؛ به لحاظ تجربی غیر واقعی است، اما در اینجا معرف مدل ایده‌آل است.

تعادل بخش عمودی طناب ایجاب می‌کند که:

$$T_0 = P - \rho g x = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g x - \rho g x = \frac{1}{2}\rho v^2$$

از آنجایی که برای تغییر مومنتم اجزای طناب، نیروی ρv^2 لازم است، راهنمای جلوگیر باید تعادل $F = \frac{1}{2}\rho v^2$ را تامین کند تا در برگشت به سکو انتقال داده شود.

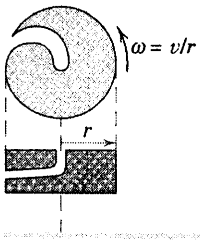
نکات مفید

❶ انعطاف‌پذیری کامل، هرگونه مقاومت در مقابل خمش را غیر مجاز می‌سازد.

❷ در نظر داشته باشید که v ثابت بوده و برابر $\dot{x}$ می‌باشد. همچنین توجه کنید که نظیر همین رابطه به زنجیر مسئله نمونه ۹-۴ اعمال می‌شود.

❸ این مقدار اضافی از انرژی جنبشی که به حساب نمی‌آید، دقیقاً با اتلاف انرژی حاصل از زنجیر در طی اعمال ضربه حلقه‌های آن برابر است.

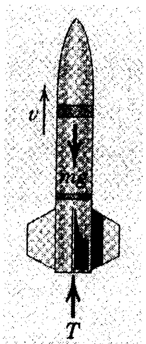
❹ این راهنمای جلوگیر را می‌توان به صورت یک قرقره به جرم ناچیز درنظر گرفت که بهمراه طناب پیچیده شدهٔ دور آن با سرعت زاویه‌ای ثابت v/r در حال چرخش بدور محورش می‌باشد. همانطوریکه در شکل نشان داده شده، به هنگام برگشت، طناب را از حالت سکون خارج ساخته و به سرعت v می‌رساند.



توجه کنید که مرکز جرم مرکز مقطعی از طناب به طول x، به فاصله $x/2$ از سطح پایه قرار گرفته است.

❺

مسئله نمونه ۱۱-۴



راکتی به جرم اولیه m_0 که از قطب شمال به طور قائم شلیک شده، تا هنگامی شتاب می‌گیرد که سوخت آن با میزان ثابت احتراق یافته و به اتمام برسد و به صورت گاز خارج شود. سرعت گاز خروجی از شیپوره دارای مقدار ثابت u و فشار آن در سراسر پرواز برابر با فشار جو می‌باشد. اگر پس از اتمام سوخت جرم باقیمانده بدنه و موتور راکت برابر m_b باشد، عبارتی برای حداکثر سرعت راکت بدست آورید. از مقاومت هوا و تغییرات شتاب جاذبه نسبت به ارتفاع صرفنظر کنید.

حل I (راه حل $F = ma$): از شکل ۷b-۴ ایده گرفته و با نیروی رانش به صورت یک نیروی خارجی وارد بر ❶ راکت برخورد می‌کنیم. با ناچیز در نظر گرفتن فشار p در شیپوره و نیز مقاومت R جو، از معادله ۲۱-۴ یا قانون دوم نیوتن داریم:

$$T - mg = m\dot{v}$$

اما نیروی رانش برابر است با: $T = m'u = -\dot{m}u$ به طوریکه معادله حرکت چنین می‌شود:

$$-\dot{m}u - mg = m\dot{v}$$

با ضرب کردن در dt و تقسیم بر m و سپس مرتب کردن معادله داریم:

$$dv = -u\frac{dm}{m} = -g\,dt$$

که به صورتی است که می‌توان از آن انتگرال گیری کرد. پس از انتگرال گیری، رابطه v بر حسب t بدست می‌آید.

$$\int_0^v dv = -u\int_{m_0}^{m}\frac{dm}{m} - g\int_0^t dt$$

یا

$$v = u\ln\frac{m_0}{m} - gt$$

چون سوخت با نرخ ثابت $m' = -\dot{m}$ می‌سوزد، جرم در هر لحظه t برابر می‌شود با: $m = m_0 + \dot{m}t$. اگر هنگام اتمام سوخت، جرم راکت را برابر m_b قرار دهیم در آن صورت زمان سوزش برابر می‌شود با:

❷ $t_b = \dfrac{(m_b - m_0)}{\dot{m}} = \dfrac{(m_0 - m_b)}{-\dot{m}}$ در چنین زمانی حداکثر سرعت را داریم که چنین است:

جواب $$v_{\max} = u \ln \frac{m_0}{m_b} + \frac{g}{\dot{m}}(m_0 - m_b)$$

کمیت $\dot{m}$ دارای مقدار منفی است، زیرا جرم با زمان کاهش می‌یابد.

حل II (راه حل جرم متغیر): اگر معادله ۲۰-٤ را به کار ببریم، در اینصورت $\Sigma F = -mg$ و معادله چنین می‌شود:

$$[\Sigma F = m\dot{v} + \dot{m}u] \qquad -mg = m\dot{v} + \dot{m}u$$

اما $\dot{m}u = -m'u = -T$ است. بنابراین معادله حرکت به صورت زیر می‌شود.

$$T - mg = m\dot{v}$$

که همان فرمولی است که در *راه حل* I بدست آمد.

نکات مفید

❶ *ناچیز شمردن مقاومت هوا در اولین تقریب، فرض بدی نیست به طوری که سرعت راکت در چگال‌ترین بخش جو رو به افزایش و در رقیقترین بخش آن رو به کاهش است. همچنین در ارتفاع ۳۲۰ km، شتاب ناشی از جاذبه ۹۱ درصد مقدار آن در سطح زمین است.*

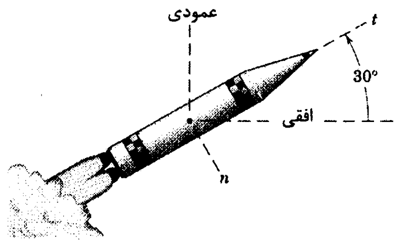
❷ *فرض پرتاب عمودی راکت از قطب شمال فقط جهت حذف هرگونه پیچیدگی ناشی از دوران زمین است که در مسیر مطلق راکت ظاهر می‌شود.*

مسائل

مسائل مقدماتی

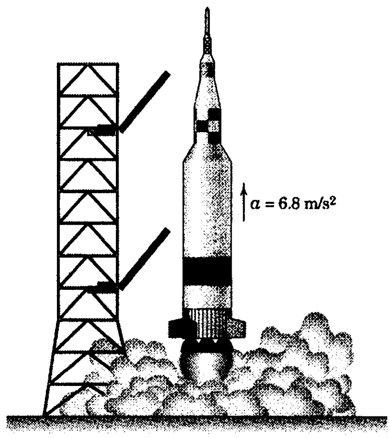
٤-٦٥ هنگامی که راکت به موقعیت نشان داده شده از مسیرش می‌رسد، جرم آن $3\ Mg$ بوده و تحت تاثیر جو زمین نمی‌باشد. شتاب جاذبه $9/6\ m/s^2$ است. سوخت با دبی $130\ kg/s$ مصرف می‌شود و سرعت گاز خروجی نسبت به شیپوره $600\ m/s$ می‌باشد. مولفه‌های شتاب راکت را در جهت‌های n و t بدست آورید.

جواب $a_n = 8/31\ m/s^2$ و $a_t = 21/2\ m/s^2$



شکل مسئله ۶۵-۴

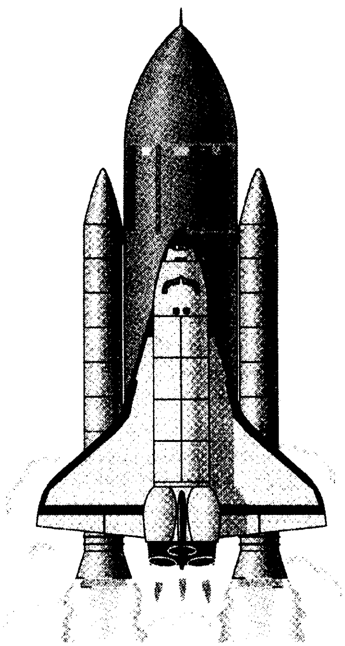
٤-٦٦ در لحظه پرتاب قائم، گازهای خروجی راکت با میزان $220\ kg/s$ و با سرعت $820\ m/s$ از اگزوز خارج می‌شوند. اگر شتاب اولیه قائم $6/80\ m/s^2$ باشد، جرم کل راکت و سوخت را در لحظه پرتاب محاسبه کنید.



شکل مسئله ۶۶-۴

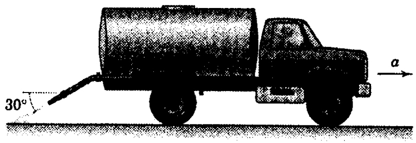
٤-٦٧ شاتل فضایی به همراه مخزن سوخت مرکزی و دو راکت بوستر (تقویت کننده) دارای جرم $2/04(10^6)\ kg$ در لحظه بلند شدن از سطح زمین می‌باشد. نیروی رانش ایجاد شده توسط هر بوستر $11/8(10^6)\ N$ بوده و هر یک از سه موتور اصلی شاتل، رانشی برابر $2/00(10^6)\ N$ ایجاد می‌کنند. ضربه ویژه (نسبت سرعت گاز خروجی به شتاب جاذبه) برای هر سه موتور اصلی شاتل $455\ s$ می‌باشد. شتاب اولیه مجموعه a را در حالیکه هر پنج موتور کار می‌کنند، در جهت قائم محاسبه کرده و دبی سوخت مصرفی هر یک از سه موتور را پیدا کنید.

جواب $a = 4/70\ m/s^2$ و $m' = 448\ kg/s$



شکل مسئله ۶۷-۴

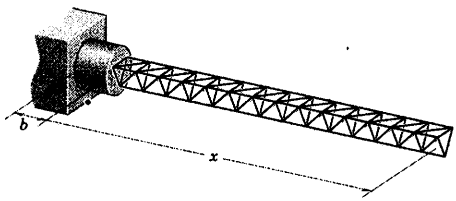
۴-۶۸ تانکری که برای شستن خیابانها به کار می‌رود به هنگام پر بودن مخزن آن، دارای جرم ۱۰ Mg می‌باشد. هنگامیکه آب‌پاش به کار می‌افتد، آب با دبی ۴۰ kg بر ثانیه و سرعت ۲۰ m/s نسبت به تانکر و با زاویه °۳۰ که در شکل نشان داده شده از شیپوره خارج می‌گردد. اگر کامیون تانکر روی یک جاده هموار با شتاب $0/6\ m/s^2$ شروع به حرکت کند، نیروی جلوبرنده لازم P بین چرخها و جاده را در حالات زیر بدست آورید: (الف) آب‌پاش در حال کار است و (ب) آب‌پاش کار نمی‌کند.



شکل مسئله ۶۸-۴

۴-۶۹ دکل مغناطیس‌سنج یک فضاپیما شامل تعداد زیادی واحدهای مثلثی شکل است که پس از آزاد شدن از محفظه خود، حالت ارتجاعی پیدا می‌کند و به حالت گسترش یافته خود می‌رسد. عبارتی برای نیروی F بر حسب افزایش طول x و مشتقات زمانی آن بنویسید که از طرف پایهٔ محفظه بر دکل در خلال گسترش یافتن واحدهای مثلثی اعمال می‌شود. جرم دکل در واحد طول گسترش یافته، برابر ρ می‌باشد. تکیه‌گاه روی فضاپیما را به صورت یک سکوی ثابت در نظر بگیرید و فرض کنید که عمل گسترش یافتن در خارج از هر میدان جاذبه‌ای صورت می‌گیرد. از b در مقایسه با x صرفنظر کنید.

جواب $F = \rho\left(x\ddot{x} + \dot{x}^2\right)$



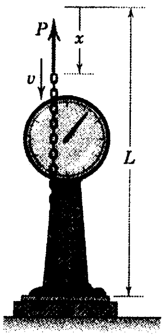
شکل مسئله ۶۹-۴

۴-۷۰ جرم یک قطره باران به هنگام سقوط در یک هوای مرطوب و ساکن افزایش می‌یابد. اگر مقاومت هوا در مقابل حرکت قطره باران برابر R و سرعت رو به پایین آن برابر v باشد، معادله حرکت قطره باران را نوشته و نشان دهید که رابطه $\Sigma F = \dfrac{d(mv)}{dt}$ در حالت خاصی از معادله جرم متغیر صادق است.

مسائل ویژه

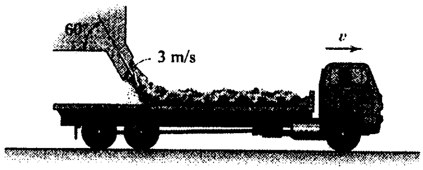
۴-۷۱ انتهای فوقانی زنجیری به طول L و جرم بر واحد طول ρ تحت تاثیر نیروی P با سرعت v پایین می‌آید. مقدار R خوانده شده توسط کفه نیروسنج را بر حسب x بدست آورید.

جواب $R = \rho g x + \rho v^2$



شکل مسئله ۷۱-۴

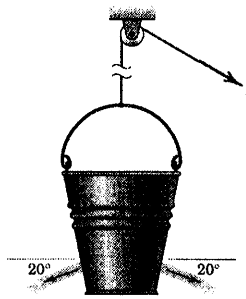
۴-۷۲ در یک ایستگاه بارگیری، شن‌ها از دهانه تخلیه به میزان ۱۰۰ kg/s و سرعت ۳ m/s در امتداد نشان داده شده بر روی کفی یک کامیون متحرک تخلیه می‌گردد. نیروی کشش بین چرخهای کامیون و جاده ۱/۷ kN است که بر مقاومت اصطکاکی ۹۰۰ N جاده در برابر حرکت، غلبه می‌کند. شتاب a کامیون را ۴ ثانیه پس از شروع تخلیه شن‌ها بر کفی کامیون محاسبه کنید. در صورتیکه در آن لحظه سرعت کامیون ۲/۵ km/h به طرف جلو بوده است. جرم کامیون خالی ۵/۴ Mg است.



شکل مسئله ۴-۷۲

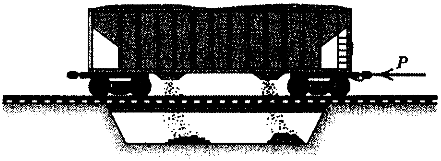
۷۳-٤ آب شیرین از دو سوراخ سطل، هر کدام به قطر ۳۰ mm، با سرعت ۲/۵ m/s در راستای نشان داده شده به خارج پاشیده می‌شود. نیروی لازم P برای حرکت دادن سطل به سمت بالا با شتاب ۰/۵ m/s^2 از حالت سکون را در زمانی تعیین کنید که سطل دارای ۲۰ kg آب باشد. جرم سطل خالی ۰/٦ kg است.

جواب $P = ۲۰۹$ N



شکل مسئله ۴-۷۳

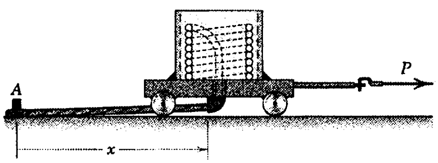
۷۴-٤ جرم یک واگن خالی حمل زغال سنگ برابر ۲۵ Mg بوده و با خود ۹۰ Mg ذغال سنگ را حمل می‌کند. در کف واگن، دریچه‌هایی تعبیه شده که اجازه می‌دهند که ذغال سنگ‌ها در بین ریلها تخلیه شوند. اگر واگن، ذغال سنگ‌ها را با دبی ۱۰ Mg/s به سمت پایین تخلیه کند و نیز اگر مقاومت اصطکاکی در مقابل حرکت برابر ۲۰ N/Mg از جرم باقیمانده کل باشد، نیروی P وارده بر اتصال واگن را چنان تعیین کنید که واگن شتاب ۰/۰٤۵ m/s^2 را در امتداد P در لحظه‌ای که نیمی از ذغال سنگ‌ها تخلیه شده، بدست آورد.



شکل مسئله ۴-۷۴

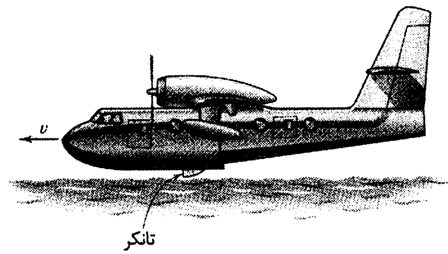
۷۵-٤ حلقه‌ای از کابل انعطاف پذیر به طول کل ۱۰۰ m و جرم ۱/۲ kg/m بایستی در طول یک مسیر مستقیم افقی قرار گیرد. انتهای کابل به تیرک A متصل شده است و حلقه‌های کابل از دهانه افقی زیر ارابه، مطابق شکل باز می‌شوند و بر روی زمین قرار می‌گیرند. ارابه و محموله آن مجموعاً ٤۰ kg جرم دارد. اگر ارابه با سرعت ۲ m/s به طرف راست در موقعیتی که ۳۰ m از کابل در استوانه روی ارابه باقی مانده باشد، حرکت کند و کشش کابل در محل اتصال به تیرک، ۲/٤ N باشد؛ نیروی لازم P برای دادن شتاب ۰/۳ m/s^2 به ارابه و محموله‌اش را حساب کنید. از هرگونه اصطکاک صرفنظر کنید.

جواب $P = ۲۰/٤$ N



شکل مسئله ۴-۷۵

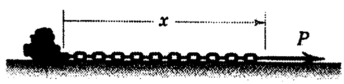
۴-۷۶ هواپیمای «ملقب به ابر تانکر» به هنگام نزدیک شدن به سطح آب، می‌تواند تانکر بزرگ خود را در آب فرو برد و $4/5\ m^3$ آب شیرین را در حین حرکت، ظرف مدت ۱۲ ثانیه ببلعد. سپس هواپیما به طرف مکان آتش سوزی رفته و حجم بزرگ آب تانکر خود را بر روی آتش بپاشد و تا خاموش شدن آتش، می‌تواند این عملیات را تکرار نماید. هواپیما کار خود را با سرعت ۲۸۰ km/h و جرم اولیه ۱۶/۴ Mg شروع می‌کند. به مجرد ورود تانکر به درون آب، خلبان ۳۰۰ hp (۲۲۳/۸ kW) توان هواپیما را افزایش می‌دهد تا از کاهش شتاب حرکت اجتناب نماید. شتاب کند شونده اولیه هواپیما را به هنگام شروع عملیات تعیین کنید (از تفاوت بین میزان آبگیری متوسط و اولیه صرفنظر کنید).



شکل مسئله ۴-۷۶

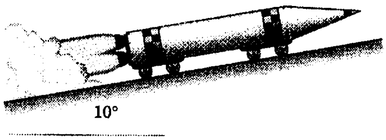
۴-۷۷ حلقه انتهایی توده‌ای از زنجیر با جرم بر واحد طول ρ به طور افقی با نیروی ثابت P بر روی سطحی کشیده می‌شود. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی بین زنجیر و سطح برابر μ_k باشد، شتاب a زنجیر را بر حسب x و $\dot{x}$ بدست آورید.

جواب $$a = \frac{P}{\rho x} - \mu_k g - \frac{\dot{x}^2}{x}$$



شکل مسئله ۴-۷۷

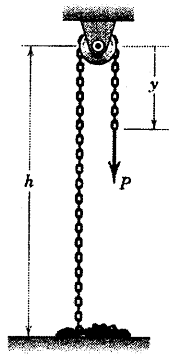
۴-۷۸ وسیله نقلیه کوچکی با موتور راکت، ۶۰ kg جرم دارد که ۱۰ kg آن مربوط به سوختش می‌شود. سوخت با میزان ثابت ۱ kg/s سوخته و با سرعت ۱۲۰ m/s نسبت به شیپوره از اگزوز آن خارج می‌شود. به محض روشن کردن، وسیله نقلیه از حالت سکون بر روی شیب °۱۰ شروع به حرکت می‌کند. سرعت ماکزیمم v وسیله نقلیه را حساب کنید. از کلیه اصطکاکها صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۴-۷۸

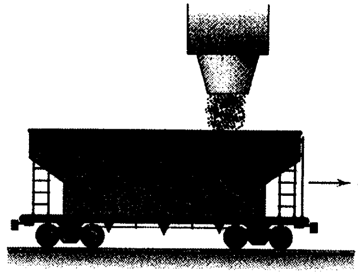
۴-۷۹ نیروی لازم P برای دادن سرعت ثابت $v = \dot{y}$ به زنجیری به طول کل L را تعیین کنید. جرم بر واحد طول زنجیر ρ است. همچنین با اعمال معادله ضربه ـ مومنتم به بخش سمت چپ مجموعه، تحقیق کنید، نیروی R وارده از تکیه‌گاه بر توده ساکن زنجیر، برابر با وزن توده زنجیر می‌شود. از اندازه و جرم قرقره کوچک و هرگونه اصطکاک آن صرفنظر کنید.

جواب $$P = \rho v^2 + \rho g (h - y)$$



شکل مسئله ۴-۷۹

۴-۸۰ یک واگن حمل ذغال سنگ خالی ۲۵ Mg جرم دارد و آزادانه با سرعت ۱/۲ m/s از زیر دهانه تخلیه ذغال سنگ که دهانه تخلیه‌اش باز است، در حال حرکت است و ذغال سنگ با میزان ثابت ۴ Mg بر ثانیه در درون واگن می‌ریزد. مسافت x پیموده شده توسط واگن را در طی مدتی تعیین کنید که ۳۲ Mg ذغال سنگ به درون آن تخلیه شده است. از هر گونه مقاومت اصطکاک غلتشی در طول ریلهای افقی صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۸۰-۴

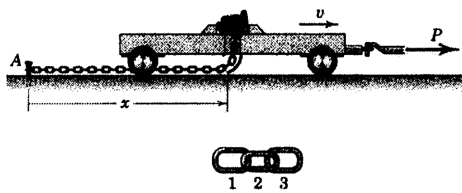
۸۱-٤ ارابه‌ای حامل توده‌ای از زنجیر حلقه‌ای به جرم بر واحد طول ρ است. زنجیر آزادانه از میان سوراخ موجود در زیر ارابه عبور کرده و حلقه به حلقه در اثر نیروی کشش T حاصل از بخش ساکن زنجیر که از انتهای A محکم شده، به حالت سکون قرار می‌گیرند. ارابه و زنجیر روی آن در اثر نیروی ثابت P حرکت کرده و در $x = ۰$ دارای سرعت $v_{\circ}$ و جرم $m_{\circ}$ می‌باشند. برای شتاب a و سرعت v ارابه عبارتی بر حسب x تعیین کنید، مشروط بر اینکه از تمام اصطکاکها صرفنظر شود. همچنین T را پیدا کنید. مشاهده می‌کنید که در اثر انتقال نیروی کشش T توسط آخرین حلقهٔ افقی، یعنی حلقه شماره ۱، سرعت انتقالی حلقه شماره ۲ از v به صفر کاهش می‌یابد. همچنین توجه کنید که حلقه شماره ۲ در طی حرکت انتقالی خود هیچگونه نیرویی به حلقه شماره ۳ وارد نمی‌کند. توضیح دهید که چرا با اعمال معادله ۲۰-٤ در این مسئله جمله $\dot{m}u$ ظاهر نمی‌شود.

جواب

$$a = \frac{P}{m_{\circ} - \rho x}$$

$$v = \sqrt{v_{\circ}^{۲} + \frac{۲P}{\rho} \ln \frac{m_{\circ}}{m_{\circ} - \rho x}}$$

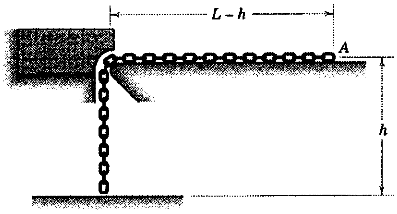
$$T = \rho v^{۲}$$



حلقه انتقالی ۲

شکل مسئله ۸۱-۴

۸۲-٤ زنجیر حلقه‌ای به طول L و جرم بر واحد طول ρ، از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌شود. در حالیکه حلقه پایینی تقریبا مماس بر زمین است و بخش افقی زنجیر روی یک سطح صیقلی قرار دارد. اصطکاک لبه راهنما قابل صرفنظر کردن است. تعیین کنید (الف) سرعت $v_۱$ انتهای A را به هنگام رسیدن به لبه راهنما؛ (ب) سرعت $v_۲$ هنگامیکه با زمین اصابت می‌کند و (ج) همچنین انرژی تلف شده کل Q را.

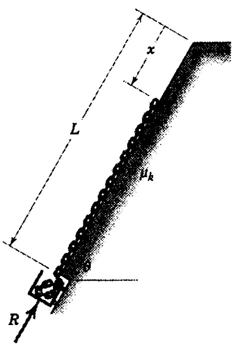


شکل مسئله ۸۲-۴

۸۳-٤ زنجیر حلقه‌ای با جرم بر واحد طول ρ از حالت سکون از روی سطح شیبدار و از موقعیت $x = ۰$ رها می‌شود. ضریب اصطکاک سینتیکی بین زنجیر و سطح شیبدار μ_k است. زنجیر در پایین سطح شیبدار در ارابه‌ای انباشته می‌شود. نیروی R وارد بر ارابه را جهت نگهداشتن آن در مقابل ضربه زنجیر به صورت تابعی از x بدست آورید. توجه کنید که آخرین حلقه زنجیر که در انتهای سطح شیبدار در حال حرکت است؛ تماس خود را با حلقه قبلی که به درون ارابه افتاده، قطع کرده است.

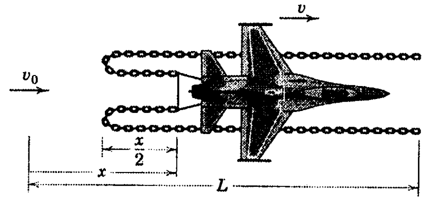
جواب

$R = \rho g x\,(۳\sin\theta - ۲\mu_k \cos\theta)$ با شرط : $\mu_k < \tan\theta$



شکل مسئله ۸۳-۴

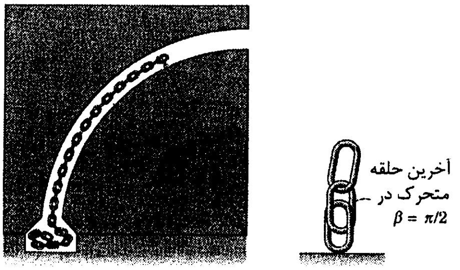
٤-٨٤ در شکل سیستمی نشان داده شده که جهت متوقف کردن هواپیمایی به کار می‌رود که طول باند فرود آن محدود است. هواپیما دارای جرم m بوده و با سرعت v_0 به شیوه‌ای که در شکل نشان داده شده با قلابی درگیر می‌شود که به انتهای دو زنجیر سنگین هر یک به طول L و جرم بر واحد طول ρ متصل شده‌اند. انجام محاسبات بر مبنای کنسرواتیو بودن اثر چنین دستگاهی سبب می‌شود که اصطکاک تاخیری زنجیر بر روی سطح و نیز هر نوع مقاومت دیگری در مقابل حرکت هواپیما ناچیر به حساب آید. با چنین فرضیاتی، سرعت v هواپیما را در لحظه‌ایکه آخرین حلقه هر زنجیر به حرکت در آمد، بدست آورید. همچنین رابطه بین تغییر مکان x و زمان t بعد از تماس و درگیری با زنجیرها را بدست آورید. فرض کنید هر حلقه از زنجیر در اثر درگیر شدن با حلقه‌های متحرک به طور ناگهانی به سرعت v می‌رسد.



شکل مسئله ۸۴-۴

٤-٨٥ زنجیر حلقه‌ای به طول $\pi r/۲$ و با جرم بر واحد طول ρ از موقعیت $\theta = ۰$ رها شده و به سمت پایین کانال صیقلی ربع دایره‌ای شکل می‌لغزد. زنجیر در انتهای کانال انباشته می‌شود. جاییکه آخرین حلقه متحرک در زاویه $\beta = \pi/۲$ هیچگونه تماسی با حلقه قبلی که به حالت سکون درآمده ندارد. برای شتاب مماسی a_t مشترک بین همه حلقه‌ها عبارتی بر حسب θ بدست آورید. (*راهنمایی:* معادله نیرویی حرکت را برای یک المان کل نوشته و از نیروی کشش از صفر در زاویه $\beta = \theta$ تا صفر در زاویه $\beta = \pi/۲$ انتگرال گیری کنید.) همچنین اتلاف انرژی Q را در طی حرکت از $\theta = ۰$ تا $\theta = \pi/۲$ بیابید.

جواب $a_t = g\dfrac{\cos\theta}{\pi/۲-\theta}$ و $Q = \rho g r^۲$



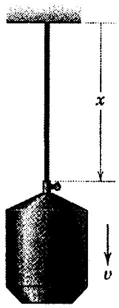
شکل مسئله ۸۵-۴

٤-٨٦ ◀ در یک محفظه فلزی به جرم m_0 حلقه‌هایی از یک طناب انعطاف پذیر با جرم بر واحد طول ρ موجود است. طناب از انتها به تکیه‌گاهی در بالای یک چاه آب شور بسته شده است و محفظه مزبور از حالت سکون به درون چاه رها می‌شود. یک پیچ پروانه‌ای بر روی گلوگاه خروجی محفظه تعبیه شده است تا یک گیره فنری را طوری تنظیم کند که نیروی اصطکاک ثابت $F/۲$ را به هر یک از دو طرف طناب در هنگام عبور از گلوگاه اعمال کند. برای شتاب a محفظه و نیروی P وارده بر تکیه‌گاه عبارتی بر حسب x و سرعت v پیدا کنید. طول کل طناب L است.

جواب

$$a = g + \frac{\dfrac{\rho v^۲}{۲} - F}{m_0 + \rho(L-x)}$$

$$P = \rho g x + \frac{\rho v^۲}{۲} + F$$

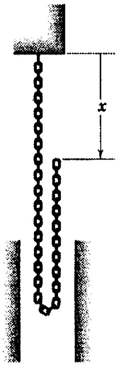


شکل مسئله ۸۶-۴

۴-۸۷ ◀ انتهای آزاد زنجیر حلقه‌ای به طول L و جرم بر واحد طول ρ در موقعیت $x = 0$ از حالت سکون رها می‌شود. نیروی R وارد بر انتهای ثابت زنجیر و نیز کشش T_1 زنجیر را در انتهای پایینی بخش غیر متحرک، بر حسب x بدست آورید. همچنین اتلاف انرژی Q را در $x = L$ محاسبه کنید.

جواب $R = \frac{1}{2}\rho g(L + 3x)$ و $T_1 = \rho g x$

$$Q = \frac{1}{4}\rho g L^2$$



شکل مسئله ۴-۸۷

۴-۸۸ ◀ در مسئله ۴-۸۷ به جای زنجیر، طناب انعطاف پذیر یا زنجیر دوچرخه‌ای به طول L و جرم بر واحد طول ρ را جایگزین کنید. انتهای آزاد طناب در موقعیت $x = 0$ از حالت سکون رها شده و در اثر شتاب جاذبه سقوط می‌کند. a شتاب انتهای آزاد طناب، R نیروی موجود در انتهای ثابت و T_1 کشش در قسمت حلقه شدهٔ طناب را بر حسب x بدست آورید (توجه کنید که a بزرگتر از g است. در مورد انرژی سیستم در $x = L$ چه اتفاق می‌افتد؟).

جواب

$$a = g\left[1 + \frac{x(L - x/2)}{(L - x)^2}\right]$$

$$R = \frac{1}{2}\rho g\left[(L + x) + \frac{x(L - x/2)}{(L - x)}\right]$$

$$T_1 = \frac{1}{2}\rho g \frac{x(L - x/2)}{(L - x)}$$

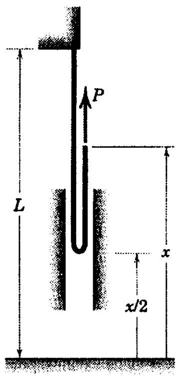
۴-۸۹ ◀ به انتهای آزاد طناب انعطاف پذیر و تطویل ناپذیر به طول L و جرم بر واحد طول ρ، سرعت ثابت v به سمت بالا داده می‌شود. برای P، نیروی تکیه‌گاهی R موجود در انتهای ثابت طناب و کشش T_1 در قسمت حلقه شده طناب، عباراتی بر حسب x پیدا کنید (کشش دو طرف حلقه، با ابعاد ناچیز، یکسان است).

جواب

$$T_1 = \frac{1}{4}\rho v^2$$

$$P = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{1}{2}v^2 + gx\right)$$

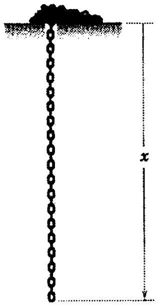
$$R = \frac{1}{4}\rho v^2 + \rho g(L - x/2)$$



شکل مسئله ۴-۸۹

۴-۹۰ حلقه انتهایی توده‌ای از زنجیر از میان حفره‌ای موجود در تکیه‌گاهش سقوط کرده و سایر حلقه‌های باقیمانده را به صورت جریان پایا با خود می‌کشد. اگر حلقه‌هایی که در ابتدا در حال سکون هستند به طور ناگهانی به سرعت v رسیده و هیچگونه مقاومت اصطکاکی یا تداخلی با تکیه‌گاه و یا حلقه‌های مجاور نداشته باشند، در صورتیکه در $x = 0$، $v = 0$ باشد، سرعت v زنجیر را به صورت تابعی از x بدست آورید. همچنین شتاب a سقوط حلقه‌های زنجیر و اتلاف انرژی P سیستم را هنگامیکه آخرین حلقه سکو را ترک می‌کند، پیدا کنید (*راهنمایی:* معادله ۴-۲۰ را اعمال کرده و به هنگام حل معادلهٔ دیفرانسیل، حاصلضرب xv را به عنوان متغیر در نظر بگیرید. همچنین در گام مناسب از راه حل، به رابطه $dx = v\,dt$ توجه داشته باشید). طول کل زنجیر L و جرم بر واحد طول آن ρ می‌باشد.

جواب $v = \sqrt{\frac{2gx}{3}}$ و $a = \frac{g}{3}$ و $Q = \frac{\rho g L^2}{6}$



شکل مسئله ۴-۹۰

دوره فصل

در این فصل اصول دینامیکی را برای حرکت یک ذره منفرد و سیستم عمومی ذرات بسط دادیم. چنین سیستمی می‌تواند صلب، غیر صلب (الاستیک) یا گروهی از ذرات مجزا از هم باشند؛ مانند ذرات مایع یا گازها. نتایج اصولی فصل ٤ را به صورت زیر می‌توان خلاصه نمود.

۱- قانون دوم نیوتن را از شکل عمومی بر اساس *اصل حرکت مرکز جرم* تعمیم دادیم (معادله ۱-٤ از بخش ۲-٤). این اصل بیان می‌کند که برآیند نیروهای خارجی وارد بر هر سیستم مادی، با حاصلضرب جرم کل سیستم در شتاب مرکز جرم برابر است.

۲- در بخش ۳-٤ *اصل کار - انرژی* را برای سیستم ذرات بدست آوردیم (معادله ۳a-٤) و نشان دادیم که مجموع انرژی جنبشی سیستم با مجموع انرژی حاصل از انتقال مرکز جرم کل سیستم و انرژی ناشی از حرکت کلیه ذرات نسبت به مرکز جرم، برابر است.

۳- برآیند نیروهای خارجی وارد بر هر سیستم با میزان تغییر مومنتم خطی سیستم نسبت به زمان برابر است (معادله ٦-٤ در بخش ٤-٤).

٤- برای نقطه ثابت O و مرکز جرم G ، برآیند برداری گشتاور کلیه نیروهای خارجی حول نقطه برابر میزان تغییر مومنتم زاویه‌ای نسبت به زمان است (معادله ۷-٤ و معادل و ۹-٤ در بخش ٤-٤). معادلات ۱۱-٤ و ۱۳-٤ نشان می‌دهد که این اصل برای نقطه اختیاری P یک ترم اضافه بر معادلات برای O و G دارد.

۵- در بخش ۵-٤ قانون *بقای انرژی دینامیکی* بیان شدند که در آن، اصطکاک جنبشی داخلی آنقدر کوچک بود که می‌توان از آن صرفنظر کرد.

٦- *بقای مومنتم خطی* در مورد سیستمی که ضربه خطی خارجی نداشته باشد، صادق است. به طور مشابه، *بقای مومنتم زاویه‌ای* در غیاب ضربه زاویه‌ای خارجی بکار می‌رود.

۷- رابطه ۱۸-٤ در بخش ٦-٤ را برای جریان پایا جرم، تعمیم دادیم که رابطه بین برآیند نیروی وارد بر یک سیستم جریان پایا و میزان جریان جرم متناظر با آن و نیز تغییر در سرعت سیال را برقرار می‌کند.

۸- تشریح مومنتم زاویه‌ای در جریان پایا جرم در رابطه ۱۹a-٤ در بخش ٦-٤ که این رابطه برآیند گشتاور کلیه نیروهای خارجی حول نقطه ثابت O روی یا خارج سیستم را به میزان جریان جرم و سرعتهای ورودی و خروجی جریان ارتباط می‌دهد.

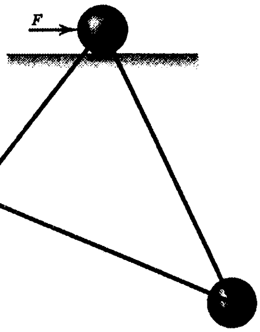
۹- بالاخره در بخش ۷-٤ معادله حرکت خطی سیستم‌های جرم متغیر را بدست آوردیم (رابطه ۲۰-٤). مثالهای متعارف چنین سیستمهایی، راکتها، زنجیرها و طنابهای قابل انعطاف می‌باشند.

اصول بیان شده در این فصل ما را قادر می‌سازد که حرکت اجسام صلب و اجسام غیر صلب را به نحوی به هم پیوند دهیم. بعلاوه، بسط بخش ۲-٤ تا ۵-٤ شالوده‌ای قوی برای بررسی سینتیک اجسام صلب در فصلهای ٦ و ۷ می‌باشند.

مسائل دوره‌ای

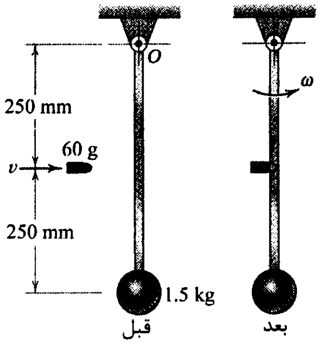
۴-۹۱ هر یک از گوی‌های فولادی مشابه، ۴ kg جرم دارند و توسط میله‌های اتصال با جرم ناچیز و طول نابرابر به دو گوی دیگر متصل شده است. در غیاب اصطکاک برای سطح افقی تکیه‌گاه، شتاب اولیه $\overline{a}$ مرکز جرم مجموعه را موقعی که نیروی افقی $F = ۲۰۰$ N به گوی بالایی وارد می‌شود، تعیین کنید. مجموعه ابتدا در حال سکون در صفحه قائم قرار دارد. آیا می‌توانید نشان دهید که $\overline{a}$ ابتدا افقی است؟

جواب $\overline{a} = ۱۶/۶۷$ m/s^2



شکل مسئله ۴-۹۱

۴-۹۲ گلوله ۶۰ گرمی با سرعت $v = ۳۰۰$ m/s در امتداد افق به سوی میله باریک آونگی ۱/۵ کیلوگرمی که ابتدا در حال سکون است، شلیک می‌شود. اگر گلوله بدرون میله نفوذ کرده و در آن فرو بنشیند، سرعت زاویه‌ای حاصله آونگ را درست پس از برخورد گلوله بدست آورید. گوی آونگ را یک ذره تلقی کرده و از جرم میله آونگ صرفنظر کنید. چرا مومنتم خطی سیستم بقاء ندارد؟



شکل مسئله ۴-۹۲

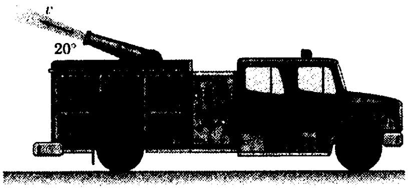
۴-۹۳ یک راکت بزرگ به جرم $۲/۷(۱۰^۳)$ Mg آماده پرتاب به طرف بالا می‌باشد. در هنگام پرتاب، سوخت راکت با میزان ۱۳ Mg/s محترق شده و با سرعت ۲۴۰۰ m/s از اگزوز (شیپوره) خارج می‌شود. شتاب اولیه a راکت را بدست آورید. فرض کنید که در سطح دهانه خروج شیپوره فشار جو وجود دارد.

جواب $a = ۱/۷۴۶$ m/s^2

۴-۹۴ هنگامیکه فقط شیر هوای یک تلمبه شن پاش در عملیات پرداخت و صیقل زدن سطوح باز باشد، نیروی وارده توسط جریان هوا در امتداد عمود بر یک سطح تخت نزدیک به شیپوره تلمبه ۲۰ N است. با همین موقعیت شیپوره بر اثر اضافه کردن شن به جریان هوا، نیروی وارده به ۳۰ N افزایش می‌یابد. اگر شن با میزان ۴/۵ kg/min مصرف شود، سرعت v ذرات شن را به هنگام برخورد با سطح تعیین کنید.

۴-۹۵ در یک آزمایش عملکرد دستگاه آب‌پاش یک ماشین آتش نشانی، لوله آب‌پاش آب شیرین را با میزان ۰/۳۰ m^3/min از شیپوره خود به قطر ۵۰ mm تحت زاویه °۲۰ بیرون می‌پاشد. نیروی اصطکاکی کل F وارده بر چرخهای ماشین از سوی سطح خیابان را در صورتیکه چرخهای ماشین کاملا ترمز شوند و ماشین در موقعیت ثابتی قرار گرفته باشد، تعیین کنید.

جواب $F = ۳۷۳۰$ N

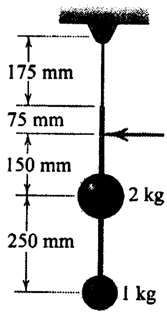


شکل مسئله ۹۵-۴

۹۶-٤ راکت کوچکی به جرم اولیه m_0 به طور قائم به طرف بالا از نزدیکی سطح زمین شلیک می‌شود (g ثابت) و میزان جرم خروجی m' و سرعت نسبت به اگزوز u، ثابت هستند. سرعت v را بر حسب تابعی از زمان t پرواز تعیین کنید، به شرطی که مقاومت هوا قابل صرفنظر کردن بوده و جرم محفظه راکت و مکانیزم آن در مقایسه با جرم سوخت حمل شده‌اش ناچیز باشد.

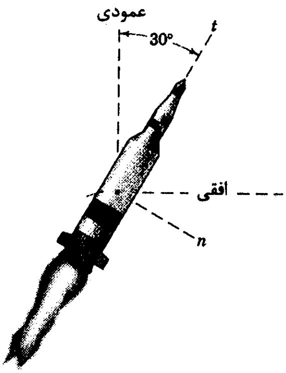
۹۷-٤ میله صلب سبکی دو گوی را به یکدیگر متصل کرده و مجموعاً به کمک ریسمانی از سقف آویزان شده‌اند. اگر به این مجموعه که ابتدا در حال سکون است نیروی $F = ٦٠\ \text{N}$ اعمال شود، شتاب متناظر مرکز جرم $\bar{a}$ و $\ddot{\theta}$ و میزان تغییر سرعت زاویه‌ای میله را محاسبه کنید.

جواب $\bar{a} = ٢٠\ \text{m/s}^2$ و $\ddot{\theta} = ٣٣٦\ \text{rad/s}^2$



شکل مسئله ۹۷-۴

۹۸-٤ راکت نشان داده شده طراحی شده است تا عملکرد یک سیستم جدید هدایت را آزمایش کند. موقعی که راکت به ارتفاعی می‌رسد که خارج از حوزه موثر جو زمین می‌باشد، جرم آن به ٢/٨٠ Mg کاهش می‌یابد و مسیر آن زاویه °٣٠ را با امتداد قائم ایجاد می‌کند. سوخت راکت با میزان ١٢٠ kg/s محترق شده و با سرعت خروجی ٦٤٠ m/s نسبت به شیپوره از آن خارج می‌شود. شتاب جاذبه در این ارتفاع $٩/٣٤\ \text{m/s}^2$ است. مولفه‌های n و t شتاب راکت را محاسبه کنید.



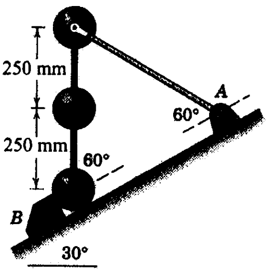
شکل مسئله ۹۸-۴

۹۹-٤ راکت دو طبقه‌ای به صورت قائم شلیک شده و در بالای جو، موقعی که اولین طبقه آن سوختش تمام شده، طبقه دوم از آن جدا شده و موتورش روشن می‌شود. طبقه دوم ١٢٠٠ kg سوخت را با خود حمل می‌کند و دارای جرم خالی ٢٠٠ kg است. سوخت طبقه دوم با میزان ٥/٢ kg/s محترق شده و دارای سرعت خروجی ثابت ٣٠٠٠ m/s نسبت به شیپوره خروجی می‌باشد. مطلوبست شتاب طبقه دوم را پس از ٦٠ ثانیه پس از روشن شدن و حداکثر شتاب و مدت زمان t که در آن شتاب ماکزیمم می‌شود. از تغییرات g صرفنظر کرده و آن را در ارتفاع متوسط ٤٠٠ km برابر $٨/٧٠\ \text{m/s}^2$ بگیرید.

$a = ٥/٦٤\ \text{m/s}^2$ در $t = ٦٠\ \text{s}$

$a_{max} = ٦٩/٣\ \text{m/s}^2$ در $t = ٢٣١\ \text{s}$

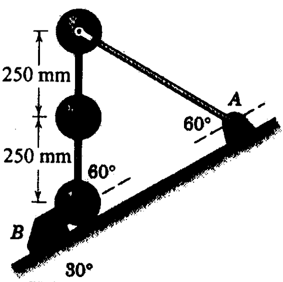
۱۰۰-٤ سه گوی، هر یک به جرم m به صورت قائم روی شیب °۳۰ قرار دارند. گوی‌ها به دو میله رابط با جرم ناچیز جوش شده‌اند. جرم میله بالایی نیز ناچیز بوده و به گوی بالایی و پایه A مفصل شده است. اگر مانع B به طور ناگهانی شروع به حرکت نماید، سرعت گوی بالایی را به هنگام برخورد با سطح شیبدار تعیین کنید (توجه کنید که سرعت متناظر گوی وسطی $\frac{v}{۲}$ است). در مورد اتلاف انرژی که بعد از توقف حرکت کل اتفاق افتاده توضیح دهید.



شکل مسئله ۱۰۰-۴

۱۰۱-٤ جریان آب شیرین تحت فشار از دهانه ثابت شیپوره به قطر ۲۰ mm با سرعت v = ٤٠ m/s فوران می‌کند و به دو جریان مساوی تقسیم و منحرف می‌شود. از اتلاف انرژی در جریانهای آب صرفنظر کرده و نیروی F لازمه برای ثابت نگهداشتن پره منحرف کننده جریان را بیابید.

جواب F = ۹۳۸ N

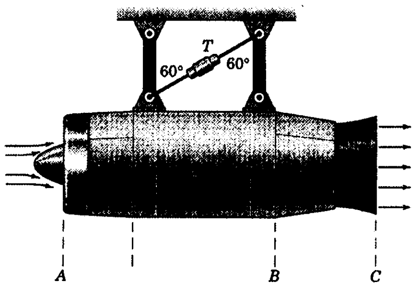


شکل مسئله ۱۰۱-۴

۱۰۲-٤ در آزمایش استاتیکی مجموعه موتور جت و شیپوره خروجی گاز، هوا با دبی ۳۰ kg/s به درون موتور مکش شده و سوخت با دبی ۱/٦ kg/s محترق می‌شود. سطح مقطع جریان، فشار استاتیکی و سرعت جریان محوری برای سه مقطع نشان داده شده، چنین می‌باشند:

	مقطع A	مقطع B	مقطع C
سطح مقطع جریان (m^2)	۰/۱۵	۰/۱۶	۰/۰۶
فشار استاتیکی (kPa)	۱۴-	۱۴۰	۱۴
سرعت جریان محوری (m/s)	۱۲۰	۳۱۵	۶۰۰

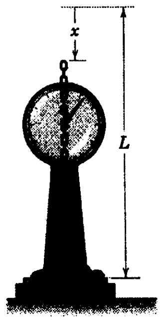
نیروی کشش T در مهاربند قطری تکیه‌گاه مجموعه را تعیین کنید و نیروی F را که توسط پیچ و واشرها بر لبه شیپوره در B وارد می‌شود تا آن را به بدنه موتور متصل نگه دارد، محاسبه کنید.



شکل مسئله ۱۰۲-۴

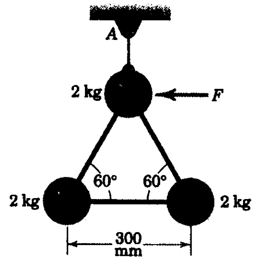
۱۰۳-٤ انتهای فوقانی زنجیر حلقه‌ای به طول L و جرم بر واحد طول ρ از حالت سکون رها می‌شود؛ در حالیکه حلقه پایینی زنجیر با کفه نیروسنج درست مماس می‌باشد. رابطه‌ای برای نیروی F که بوسیله نیروسنج خوانده می‌شود را به صورت تابعی از مسافت x پیموده شده توسط حلقه بالایی بدست آورید (توضیح: مادامیکه حلقه‌های زنجیر واقع بر کفه نیروسنج، نیرویی بر حلقه‌های بالاتر از خود در حال سقوط آزاد وارد نمی‌کنند، سرعت سقوط آزاد زنجیر برابر $\sqrt{۲gx}$ می‌شود. مسئله را از دو طریق بررسی کنید. ابتدا، میزان زمانی تغییر مومنتم را در مورد کل زنجیر مورد ارزیابی قرار دهید و دوم اینکه نیروی F را متشکل از مجموع دو نیرو در نظر بگیرید؛ یکی وزن حلقه‌های ساکن بر کفه نیروسنج و دیگری نیروی لازم جهت تغییر مسیر یک جریان سیال معادل).

جواب $F = ۳\rho g x$



شکل مسئله ۴-۱۰۳

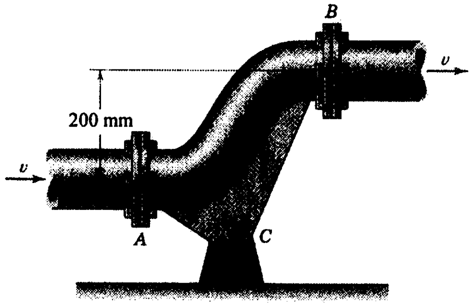
۴-۱۰۴ سه گوی، هر یک به جرم ۲ kg به میله‌هایی با جرم ناچیز جوش شده و توسط ریسمانی از نقطه A آویزان هستند. در لحظه اعمال نیروی $F = ۱۶$ N به گوی بالایی، گوی‌ها در حالت سکون قرار دارند. شتاب اولیه مرکز جرم گوی‌ها $\overline{a}$ و $\ddot{\theta}$ ناشی از افزایش سرعت زاویه‌ای و شتاب اولیه گوی بالایی a را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۴-۱۰۴

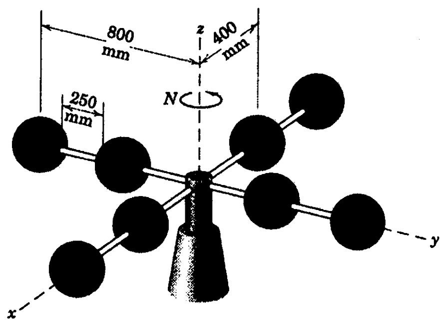
۴-۱۰۵ لوله خمیده زانویی بین A و B برای گذشتن از روی یک مانع در امتداد دو لوله موازی با هم، تعبیه شده است. لبه نگهدارنده زانو در نقطه C توسط یک پیچ و مهره قوی محکم شده است. لوله، آب شیرین را با میزان پایا ۲۰ m^3/min تحت فشار استاتیکی ۹۰۰ kPa وارد زانو می‌کند. قطر داخلی لوله در A و B برابر ۱۰۰ mm است. نیروی کششی در لوله در تقاطع A و B توسط فشار داخل لوله در مقاطع جریان خنثی می‌شوند. هیچگونه برش یا خمش در لوله‌ها در A و B وجود ندارد. گشتاور M را که توسط پیچ و مهره C تحمل می‌شود، محاسبه کنید.

جواب $M = ۲۸۳۰$ N.m



شکل مسئله ۴-۱۰۵

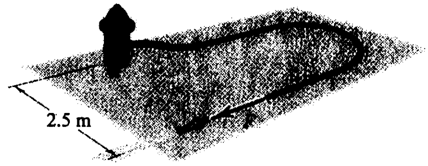
۴-۱۰۶ سیستمی شامل هشت گوی به صورت متقارن، هر یک به جرم ۲ kg حول محور قائم z با میزان $N = ۱۲۰$ rev/min آزادانه دوران می‌کند. گوی‌های خارجی به انتهای میله‌هایی با جرم ناچیز جوش داده شده‌اند. گوی‌های داخلی در ابتدا در موقعیت نشان داده شده قرار گرفته‌اند. اما پس از آزاد شدنشان (که در شکل نشان داده نشده‌اند)، می‌توانند به سوی انتهای میله‌ها بلغزند. میزان حرکت زاویه‌ای جدید N' سیستم را پس از آزاد ساختن مهارها و حرکت گوی‌ها به اندازه ۲۵۰ mm و رسیدن آنها به حالت سکون در تماس با گوی‌ها خارجی، تعیین کنید. همچنین اتلاف انرژی جنبشی ΔT را به حساب آورده و بدست آورید. گوی‌ها را می‌توان به عنوان ذره تلقی کرد.



شکل مسئله ۴-۱۰۶

۴-۱۰۷ شیلنگ آتش نشانی، یک حلقه °۱۸۰ را نسبت به شیر آب تشکیل داده است. فشار آب در شیر ۸۰۰ kPa می‌باشد. سرعت آب در شیپوره ۲۴ m/s می‌باشد. قطر داخلی شیلنگ در محل اتصال به شیر ۸۰ mm و دبی حجمی آب ۳ m^3/min است. نیروی لازم F برای نگهداشتن شیپوره شیلنگ انعطاف پذیر را در محل خود بیابید وکشش T شیلنگ در محل اتصال به شیر را تعیین کنید. از هرگونه اصطکاک بین شیلنگ و سطح افقی زمین صرفنظر کنید.

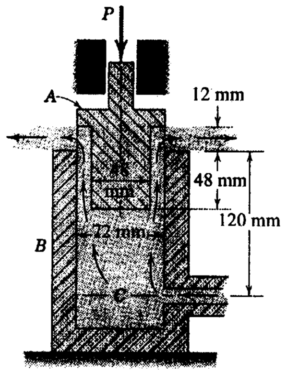
جواب $F = ۱۲۰۰$ N و $T = ۴/۵۲$ kN



شکل مسئله ۴-۱۰۷

۴-۱۰۸ نیروی قائم P وارده بر سوپاپ استوانه‌ای ۱/۲ کیلوگرمی A که مقطع آن نشان داده شده است، برای محدود کردن جریان آب شیرین از بالای لوله قائم B به قطر داخلی ۸۰ mm بکار می‌رود. آب از ورودی پایین لوله وارد می‌شود. نیروی لازم P برای نگهداشتن سوپاپ در موقعیت نشان داده شده را تعیین کنید، در حالیکه دبی حجمی جریان آب ۲/۳ m^3/min و فشار استاتیکی آن ۸۰ kPa در مقطع C می‌باشد.

(*پیشنهاد:* سوپاپ و قسمت آب بالای مقطع C را به عنوان ترسیمه آزاد ترکیبی جسم در نظر بگیرید.)



شکل مسئله ۴-۱۰۸

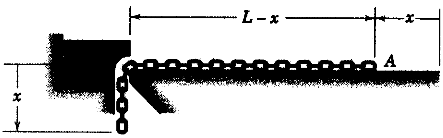
۴-۱۰۹ زنجیری به طول L و جرم بر واحد طول ρ از حالت سکون بر روی سطح صیقلی افقی رها می‌شود؛ در حالیکه طول ناچیز x آن آویزان است تا باعث شروع حرکت گردد. مطلوبست (الف) شتاب a زنجیر بر حسب x، (ب) کشش T در زنجیر در لبهٔ صیقلی بر حسب x و (ج) سرعت آخرین حلقه A موقعی که به لبه می‌رسد.

جواب

(الف) $a = \frac{g}{L}x$

(ب) $T = \rho g x\left(1 - \frac{x}{L}\right)$

(ج) $v = \sqrt{gL}$

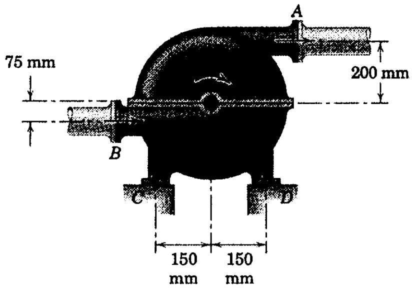


شکل مسئله ۴-۱۰۹

۴-۱۱۰ ◀ پمپ سانتریفوژ، ۲۰ m^3 آب شیرین را در دقیقه با سرعت ورودی و خروجی ۱۸ m/s انتقال می‌دهد. موتوری که توان آن ۴۰ kW و دور آن ۹۰۰ rev/min می‌باشد، پره‌های متصل به محور موتور را در نقطه O در جهت ساعتگرد می‌چرخاند. عکس العملهای قائم تکیه‌گاه‌ها در نقاط C و D در حالتیکه پمپ پر از آب بوده ولی چرخشی ندارد، هر یک برابر ۲۵۰ N می‌باشد. هنگامیکه موتور در حال کار است، نیروهای وارد بر پمپ را از طرف تکیه‌گاه‌های C و D محاسبه کنید. نیروهای کششی موجود در لوله‌های اتصالی در A و B به طور دقیق با نیروهای ناشی از فشار استاتیکی در آب خنثی شده‌اند. (*پیشنهاد:* کل پمپ و آب درون آن بین A و B را مجزا کرده و اصل مومنتم را به کل سیستم اعمال کنید.)

جواب $C = ٤٣٤٠$ N به طرف بالا

$D = ٣٨٤٠$ N به طرف پایین



شکل مسئله ۴-۱۱۰

فصل پنجم

سینماتیک اجسام صلب در صفحه

فهرست مطالب

سینماتیک اجسام صلب روابط بین حرکت خطی و زاویه‌ای اجسام را بدون در نظر گرفتن نیروها و گشتاورهایی که عامل بوجود آوردن چنین حرکاتی است را تشریح می‌کند. طراحی چرخ‌دنده‌ها، بادامک‌ها، اهرم‌بندی متصله و بسیاری دیگر از قطعات متحرک ماشین‌ها، از جمله مسائل دینامیکی هستند. مکانیزم عملکرد ساعت مثال خوبی از کاربرد سینماتیک اجسام صلب است که در آن روابط بین حرکات ورودی و خروجی، نیازمند تحلیل دقیق می‌باشد.

۱-۵ مقدمه

در فصل ۲ در بحث سینماتیک ذره، روابط حاکم بر جابجایی، سرعت و شتاب ذرات را هنگامی که در امتداد مسیر مستقیم یا منحنی حرکت می‌کردند، مطرح کردیم. همین روابط را برای سینماتیک اجسام صلب استفاده می‌کنیم ولی باید حرکت دورانی جسم را نیز به حساب آوریم. بنابراین، سینماتیک اجسام صلب هم شامل جابجایی، سرعت و شتابهای خطی است و هم جابجایی، سرعت و شتابهای زاویه‌ای می‌باشد. برای ما تشریح حرکت اجسام صلب در دو حالت مهم، لازم است. اول اینکه اغلب لازم داریم حرکات خاص مورد نظر را با استفاده از بادامکها، چرخ‌دنده‌ها و انواع گوناگون اهرم بندی‌ها بوجود آورده، منتقل کرده و یا کنترل نماییم. در اینجا به منظور تعیین طراحی هندسی اجزای مکانیکی، لازم است جابجایی، سرعت و شتاب حرکت تشریح گردد. علاوه بر این، در نتیجه حرکت حاصله، اغلب نیروهایی بوجود می‌آیند که باید در طراحی اجزای مکانیکی به حساب آیند. ثانیاً غالباً لازم است که حرکت ناشی از نیروهای وارد بر اجسام صلب تعیین گردند. محاسبه حرکت راکت تحت اثر نیروی رانش موتور خود و نیروی جاذبه، نمونه‌ای از اینگونه مسائل است.

احتیاج داریم که اصول سینماتیک اجسام صلب را در هر دو حالت بکار گیریم. در این فصل سینماتیک حرکتی که بتوان آن را در یک صفحه منفرد قرار داد، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در فصل ۷ سینماتیک حرکت در سه بعد به طور اجمال معرفی خواهد شد.

فرض جسم صلب

در فصل قبلی، جسم *صلب* را به صورت سیستمی از ذرات تعریف کردیم که در آن، فاصله بین ذرات تغییر نمی‌کند. بنابراین، اگر هر ذره‌ای از جسم به وسیله بردار موقعیت نسبت به محورهای مرجع متصل و چرخان با جسم، مشخص شود، هیچ تغییری در موقعیتش که از این محورها اندازه گیری می‌شود، ایجاد نخواهد شد. البته این تعریف یک جسم ایده‌آل است. زیرا تمامی اجسام جامد کم و بیش تحت تاثیر نیرو، تغییر شکل می‌دهند.

با این وجود، اگر حرکتهای وابسته به این تغییرات شکل در مقایسه با حرکات کلی جسم خیلی ناچیز باشد، مفهوم ایده‌آل صلبیت معمولاً قابل قبول خواهد بود. جابجایی‌های مربوط به ارتعاش بال یک هواپیما تاثیری در تشریح مسیر پرواز آن نداشته و در این مورد فرض جسم صلب کاملاً منطقی است. اما از طرف دیگر، اگر تشریح تنش داخلی بال هواپیما بر اثر ارتعاش بال، بر حسب زمان مورد سئوال باشد، در این صورت حرکتهای نسبی قسمتهای مختلف بال قابل صرفنظر کردن

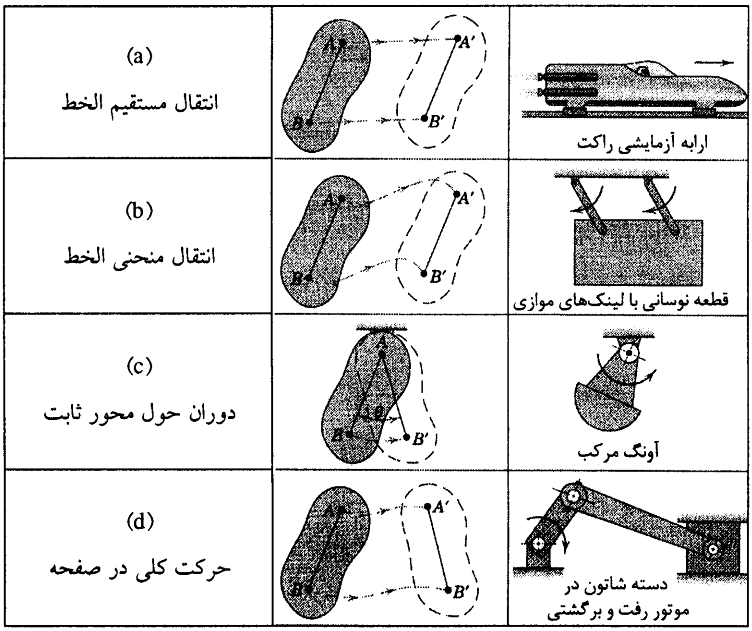
نیست و بال را نمی‌توان یک جسم صلب در نظر گرفت. در این فصل و دو فصل بعدی، تمامی مطالب بر اساس فرضیه صلبیت صورت خواهد گرفت.

حرکت صفحه‌ای

موقعی که تمامی اجزاء یک جسم در صفحات موازی حرکت کنند، حرکت جسم صلب دارای حرکت صفحه‌ای است. برای راحتی کار، عموماً *صفحه حرکت* را صفحه‌ای در نظر می‌گیرند که مرکز جسم در آن قرار دارد و جسم را به صورت ورقه نازکی فرض می‌کنند که حرکتش به عنوان حرکت جسم تلقی می‌گردد. این فرضیه با تعداد زیادی از حرکات اجسام صلبی که در مهندسی با آن مواجه هستیم، قابل تطبیق است.

حرکت صفحه‌ای یک جسم صلب را به چند دسته می‌توان تقسیم کرد که در شکل ۱-۵ معرفی شده‌اند.

انتقال. به این صورت تعریف می‌گردد که حرکت هر خطی روی جسم همواره به موازات موقعیت اولیه خود باقی بماند. در انتقال *هیچ خطی از جسم نمی‌چرخد*. در *انتقال مستقیم الخط*، قسمت (a) از شکل ۱-۵، تمامی نقاط روی خطوط مستقیم موازی حرکت می‌کنند. در *انتقال منحنی الخط*، قسمت (b)، همه نقاط بر روی منحنی‌های مشابهی حرکت می‌کنند. ملاحظه می‌کنیم که در هر کدام از دو حالت، حرکتِ جسم را می‌توان توسط حرکت هر نقطه از جسم مشخص کرد. زیرا تمامی نقاط حرکت یکسانی دارند. بنابراین با مطالعه‌ای که قبلاً در مورد حرکت یک نقطه (ذره) در فصل ۲ داشتیم، می‌توانیم انتقال جسم صلب را کاملاً تشریح نماییم.



شکل ۱-۵

دوران. حول محور ثابت، قسمت (c) از شکل ۱-۵، حرکت زاویه‌ای حول آن محوراست. در نتیجه کلیه نقاط روی مسیرهای مدوری حول محور دوران حرکت نموده و تمامی خطوط جسم که عمود بر این محور دوران هستند (از جمله

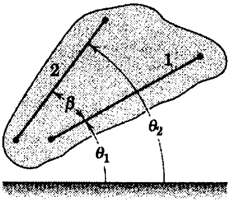
آنهایی که از محور نمی‌گذرند) در زمان یکسان، زاویه‌ای یکسان را طی می‌کنند. بحثی که در فصل ۲ درباره حرکت دایره‌ای داشتیم، دوباره برای تشریح حرکت دورانی یک جسم صلب می‌توانیم بکار ببریم که در بخش بعد بررسی می‌شود.

حرکت کلی در صفحه. یک جسم صلب، قسمت (d) از شکل ۱-۵، ترکیبی از انتقال و دوران است. اصول حرکت نسبی را که در بخش ۸-۲ آمد می‌توانیم برای تشریح حرکت کلی در صفحه بکار ببریم. ملاحظه می‌کنیم که در هر یک از مثالهای ذکر شده، حرکت واقعی کلیه نقاط جسم بر روی صفحه حرکت منفردی تصویر می‌شود، همانطور که در هر شکل نشان داده شده است.

حرکت صفحه‌ای اجسام صلب به دو طریق، محاسبه مستقیم جابجایی مطلق و مشتق‌های زمانی آنها از روی شکل هندسی ایجاد شده و یا توسط اصول حرکت نسبی تعیین می‌شود. هر دو روش مهم و مفید هستند و در بخشهای بعدی به ترتیب خواهند آمد.

۲-۵ دوران

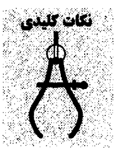
دوران یک جسم صلب توسط حرکت زاویه‌ای آن تشریح می‌گردد. شکل ۲-۵ جسم صلبی را نشان می‌دهد که ضمن داشتن حرکت صفحه‌ای، در صفحهٔ شکل دوران می‌کند. موقعیتهای زاویه‌ای هر دو خط (مانند ۱ و ۲) که به جسم صلب متصل شده، توسط θ_1 و θ_2 مشخص می‌گردد و نسبت به امتداد هر مرجع ثابت مناسبی اندازه گیری می‌شوند. به دلیل این که زاویه β تغییر نمی‌کند، با مشتق گیری از رابطه $\theta_2 = \theta_1 + \beta$ نسبت به زمان خواهیم داشت: $\dot{\theta}_2 = \dot{\theta}_1$ و $\ddot{\theta}_2 = \ddot{\theta}_1$ یا، طی یک مدت زمانی محدود، $\Delta\theta_2 = \Delta\theta_1$ می‌شود. بنابراین *تمامی خطوط یک جسم صلب در حرکت صفحه‌ای، دارای جابجایی زاویه‌ای یکسان، سرعت زاویه‌ای یکسان و شتاب زاویه‌ای یکسان خواهند بود.*



شکل ۳-۵

بایستی توجه داشت که حرکت زاویه‌ای یک خط، تنها به جابجایی زاویه‌ای آن نسبت به هر مرجع ثابت دلخواه و به مشتقات جابجایی نسبت به زمان وابسته است. حرکت زاویه‌ای به وجود یک محور ثابت عمود بر صفحه حرکت، نیازی ندارد تا خط یا جسم حول آن دوران کند.

روابط حرکت زاویه‌ای



سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α برای یک جسم صلب در دوران صفحه‌ای به ترتیب، برابر با مشتقهای اول و دوم موقعیت زاویه‌ای θ هر خطی از جسم در صفحه حرکت، نسبت به زمان است. با این تعریف خواهیم داشت:

$$\boxed{\begin{aligned} &\omega = \frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta} \\ &\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} \quad \text{یا} \quad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} \\ &\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \quad \text{یا} \quad \dot{\theta}\, d\dot{\theta} = \ddot{\theta}\, d\theta \end{aligned}} \qquad (۱-۵)$$

سومین رابطه با حذف dt بین رابطه‌های ۱ و ۲ بدست می‌آید. در هر یک از این روابط جهت مثبت ω و α، جهت حرکت ساعتگرد یا پادساعتگرد، همان جهتی است که برای θ انتخاب شده است. معادله‌های ۱-۵ را باید با روابط حرکت مستقیم الخط ذره مشابه دانست که توسط روابط ۱-۲ و ۲-۲ و ۳-۲ بیان شدند. در واقع همه روابط تشریح شده برای حرکت خطی در بخش ۲-۲ را می‌توان در مورد حرکت دورانی بکار برد به شرطی که به جای کمیتهای خطی s، v و a به ترتیب کمیتهای زاویه‌ای معادل θ ، ω و α را جایگزین نمود. بعداً در طول مطالعه بیشتر دینامیک اجسام صلب، در خواهیم یافت که شباهت بین روابط حرکت خطی و زاویه‌ای در همه موارد سینماتیک و سینتیک کاملاً مشخص هستند. این تشابه کمک می‌کند تا تقارن و اتحاد موجود در تمامی مکانیک آشکار گردد.

در مورد دوران با شتاب زاویه‌ای ثابت، انتگرال گیری از روابط ۱-۵ نتیجه می‌دهد:

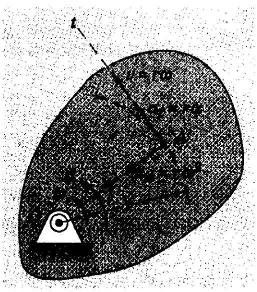
$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

در اینجا θ_0 و ω_0 به ترتیب، مقادیر موقعیت زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای در $t = 0$ هستند و t زمان حرکت مورد نظر است. شما بایستی به راحتی بتوانید این انتگرال گیری‌ها را انجام دهید. زیرا این روابط کاملاً شبیه روابط مربوط به حرکت مستقیم الخط با شتاب ثابت است که در بخش ۲-۲ آمد.

تشریح روابط به صورت ترسیمی که برای s ، v، a و t در شکلهای ۳-۲ و ٤-۲ آمد، با جایگزینی نمادهای مربوطه می‌توانند کاملاً برای θ، ω و α نیز مورد استفاده واقع شود. شما باید این روابط ترسیمی را برای دوران صفحه‌ای رسم نمایید. عملیات ریاضی‌ای که برای بدست آوردن سرعت و جابجایی از شتاب در حرکت مستقیم الخط تشریح شده را می‌توان با جایگزین کردن کمیتهای خطی با کمیتهای زاویه‌ای متناظرشان برای حرکت دورانی کاملاً بکار برد.

دوران حول یک محور ثابت

هنگامیکه جسمی حول محور ثابت دوران می‌کند، تمام نقاط به غیر از آنهایی که روی محور قرار گرفته‌اند، به صورت دوایر متحدالمرکزی حول محور ثابت، حرکت می‌کنند. بنابراین برای جسم صلب شکل ۳-۵ که حول محور ثابت عمود بر صفحه شکل (که از O می‌گذرد) دوران می‌کند. هر نقطه‌ای نظیر A روی دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند.



شکل (۳-۵)

از بحثی که در بخش ۲-۵ داشتیم، با روابط بین حرکت خطی A و حرکت زاویه‌ای خط عمود بر مسیرش که حرکت زاویه‌ای جسم صلب نیز می‌باشد، آشنا شدیم. با استفاده از نماد $\omega = \dot{\theta}$ و $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$ به ترتیب برای سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای جسم، روابط (۱-۲) به صورت زیر بازنویسی می‌شوند.

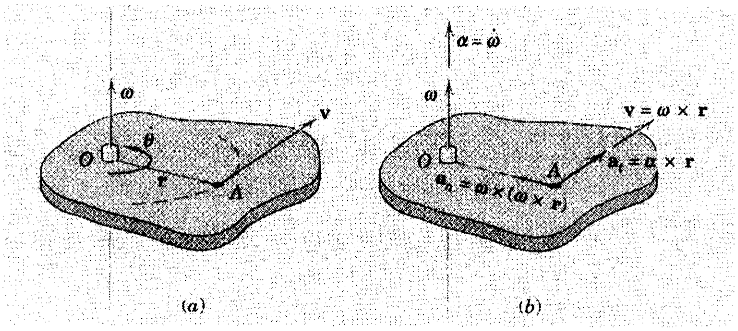
$$\boxed{\begin{aligned} v &= r\omega \\ a_n &= r\omega^2 = v^2/r = v\omega \\ a_t &= r\alpha \end{aligned}} \qquad (5\text{-}2)$$

این کمیتها را با استفاده از رابطه ضرب برداری می‌توان به صورت نماد برداری نیز بیان کرد. فرمول‌بندی برداری به ویژه در تجزیه تحلیل حرکت سه بعدی مهم است. سرعت زاویه‌ای جسم چرخان را می‌توان بوسیله بردار $\boldsymbol{\omega}$ که عمود بر صفحه دوران بوده و جهتش از قاعده دست راست پیروی می‌کند، مطابق شکل (5-4a) بیان کرد. با توجه به تعریف ضرب برداری، دیده می‌شود که بردار $\mathbf{v}$ از ضرب خارجی $\boldsymbol{\omega}$ در $\mathbf{r}$ بدست می‌آید. این ضرب برداری مقدار و جهت صحیح $\mathbf{v}$ را می‌دهد و می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

ترتیب بردارها در ضرب باید حفظ شود. عکس این ترتیب می‌دهد: $\mathbf{r}\times \boldsymbol{\omega} = -\mathbf{v}$. شتاب نقطه A با مشتق گیری از عبارت ضرب برداری $\mathbf{v}$ بدست می‌آید که چنین می‌شود.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} &= \boldsymbol{\omega}\times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times \mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} \\ &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \end{aligned}$$



شکل ۴-۵

در اینجا $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ نشان دهنده شتاب زاویه‌ای جسم است. بنابراین، معادل‌های برداری روابط ۲-۵ عبارت است از:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v} &= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \\ \mathbf{a}_n &= \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ \mathbf{a}_t &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} \end{aligned}} \qquad (5\text{-}3)$$

و در شکل 5-4b نشان داده شده‌اند.

در حرکت سه بعدی جسم صلب، ممکن است بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ هم تغییر جهت و هم تغییر مقدار دهد که در این صورت شتاب زاویه‌ای که مشتق سرعت زاویه‌ای نسبت به زمان است، $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ دیگر هم‌جهت $\boldsymbol{\omega}$ نخواهد بود.

مسئله نمونه ۱-۵

چرخ طیاری که آزادانه با سرعت ۱۸۰۰ rev/min در جهت ساعتگرد دوران می‌کنـد، یکبـاره در $t = ٠$ تحـت تـاثیر گشتاور متغیری قرار می‌گیرد که در جهت پادساعتگرد است. گشتاور مزبور، شتاب زاویـه‌ای در جـهت پادسـاعتگرد برابـر $\alpha = ٤t$ rad/s^2 بوجود می‌آورد که در آن t مدت زمان اعمال گشتاور بر حسب ثانیه است. مطلوب است محاسبه (a) مدت زمان لازم برای کاهش سرعت زاویه‌ای چرخ طیار به ۹۰۰ rev/min در جهت چرخش ساعتگرد، (b) زمان لازم برای اینکـه جهت دوران چرخ طیار عوض شود، (c) تعداد کل دورهای چرخ طیار، در جهت ساعتگرد و پادساعتگرد، در طی ۱٤ ثانیـه اولیه اعمال گشتاور.

حل: جهت پادساعتگرد را به طور اختیاری مثبت در نظر می‌گیریم.

❶ **a)** چون تابع α نسبت به زمان معلوم است، با انتگرال گیری از آن سرعت زاویه‌ای بدست می‌آید. با سرعت زاویه‌ای اولیهٔ $-١٨٠٠(٢\pi)/٦٠ = -٦٠\pi$ rad/s ، داریم:

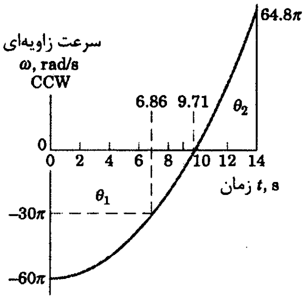
$$[d\omega = \alpha\, dt] \qquad \int_{-60\pi}^{\omega} d\omega = \int_0^t 4t\, dt \qquad \omega = -60\pi + 2t^2$$

با جایگذاری مقدار سرعت زاویه‌ای ۹۰۰ rev/min یا $\omega = -٩٠٠(٢\pi)/٦٠ = -٣٠\pi$ rad/s خواهیم داشت:

جواب $\qquad -30\pi = -60\pi + 2t^2 \qquad t^2 = 15\pi \qquad t = 6.86$ s

(b) موقعی چرخ طیار تغییر جهت می‌دهد که در یک لحظه سرعت زاویه‌ای آن صفر گردد. بنابراین:

جواب $\qquad 0 = -60\pi + 2t^2 \qquad t^2 = 30\pi \qquad t = 9.71$ s



(c) تعداد کل دورانی که در طی ۱٤ ثانیه چـرخ طیـار دارد برابـر است با N_1 ، تعداد دوران در جهت ساعتگرد در مدت ۹/۷۱ ثانیه اول، بـه عـلاوه N_2 ، تعداد دوران در جهت پادساعتگرد در مدت باقیمانده. با انتگرال گیری از عبارت ω نسبت به t جابجایی زاویه‌ای بر حسب رادیان بدست می‌آید. بنابراین، بـرای اولین فاصله زمانی:

$$[d\theta = \omega\, dt] \qquad \int_0^{\theta_1} d\theta = \int_0^{9.71} \left(-60\pi + 2t^2\right) dt$$

❷
$$\theta_1 = \left[-60\pi t + \frac{2}{3}t^3\right]_0^{9.71} = -1220 \text{ rad}$$

یا $N_1 = \frac{١٢٢٠}{٢\pi} = ١٩٤/٢$ دور در جهت ساعتگرد.

برای دومین فاصله زمانی:

$$\int_0^{\theta_2} d\theta = \int_{9.71}^{14} \left(-60\pi + 2t^2\right) dt$$

❸
$$\theta_2 = \left[-60\pi t + \frac{2}{3}t^3\right]_{9.71}^{14} = 410 \text{ rad}$$

یا $N_2 = \frac{٤١٠}{٢\pi} = ٦٥/٣$ دور در جهت پادساعتگرد. بنابراین، تعداد کل دورهای دوران در طی ۱٤ ثانیه برابر است با:

جواب $\qquad N = N_1 + N_2 = 194.2 + 65.3 = 259$ rev

ω را بر حسب t رسم نموده‌ایم و می‌بینیم θ_1 با سطح منفی و θ_2 با سطح مثبت مشخص شده است. اگر در یک مرحله روی کل فاصله زمانی انتگرال می‌گرفتیم، $|\theta_2|-|\theta_1|$ را بدست می‌آوریم.

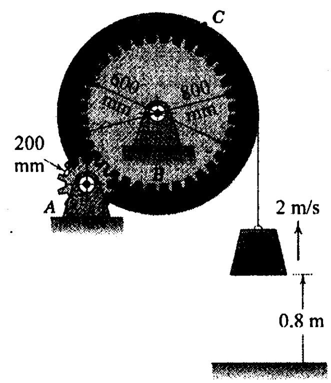
نکات مفید

❶ باید در مورد سازگاری علامتهای جبری خیلی دقت کنیم. مد پایینی مقدار سرعت اولیه (در جهت ساعتگرد) منفی است. همچنین باید دور را به رادیان تبدیل کنیم. زیرا α بر حسب واحد رادیان بیان می‌شود.

❷ دوباره توجه داشته باشید که علامت منفی در این مسئله به معنای حرکت در جهت ساعتگرد است.

❸ می‌توانستیم عبارت اولیه α را به rev/s^2 تبدیل کنیم، در این صورت جواب انتگرال مستقیماً بر حسب دور حاصل می‌شد.

مسئله نمونه ۲-۵



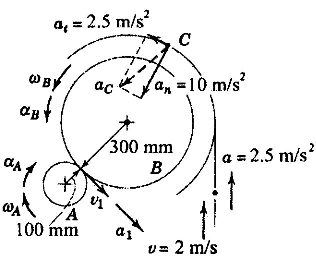
چرخ دنده کوچک (پینیون) A از موتور بالابر، چرخ دنده B را که به طبلک بالابر متصل است، می‌راند. بار L از حالت سکون با شتاب ثابت بالا رفته و در ارتفاع ۰/۸ m سرعتش به ۲ m/s می‌رسد. موقعی که بار از این موقعیت می‌گذرد مطلوب است محاسبه: (a) شتاب نقطه C کابل در اتصال با طبلک و (b) سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای چرخ دنده کوچک A.

حل، (a): اگر کابل بر روی طبلک نلغزد، سرعت و شتاب قائم بار L، الزاماً همان سرعت مماسی v و شتاب مماسی a_t نقطه C می‌باشد. برای حرکت مستقیم الخط L با شتاب ثابت، مولفه‌های n و t شتاب C برابر است با:

$$[v^2 = 2as] \qquad a = a_t = \frac{v^2}{2s} = \frac{2^2}{[2(0.8)]} = 2.5 \ \text{m/s}^2$$

❶ $$[a_n = v^2/r] \qquad a_n = \frac{2^2}{0.400} = 10 \ \text{m/s}^2$$

$$\left[a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}\right] \qquad a_C = \sqrt{(10)^2 + (2.5)^2} = 10.31 \ \text{m/s}^2$$ جواب



(b) حرکت زاویه‌ای چرخ دنده A از روی چرخ دنده B توسط سرعت v_1 و شتاب مماسی a_1 نقطه تماس مشترک آنها بدست می‌آید. ابتدا، حرکت زاویه‌ای چرخ دنده B از روی حرکت نقطه C واقع بر طبلک متصل تعیین می‌شود. بنابراین:

$$[v = r\omega] \qquad \omega_B = \frac{v}{r} = \frac{2}{0.400} = 5 \ \text{rad/s}$$

$$[a_t = r\alpha] \qquad \alpha_B = \frac{a_t}{r} = \frac{2.5}{0.400} = 6.25 \ \text{rad/s}^2$$

سپس از $v_1 = r_A\,\omega_A = r_B\,\omega_B$ و $a_1 = r_A\,\alpha_A = r_B\,\alpha_B$ داریم:

جواب $\omega_A = \frac{r_B}{r_A}\omega_B = \frac{0.300}{0.100}(5) = 15 \text{ rad/s CW}$

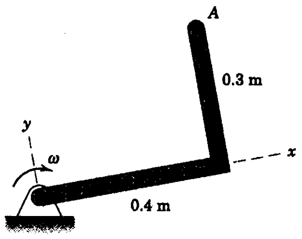
جواب $\alpha_A = \frac{r_B}{r_A}\alpha_B = \frac{0.300}{0.100}(6.25) = 18.75 \text{ rad/s}^2 \text{ CW}$

نکته مفید

❶ توجه داشته باشید که وقتی نقطه‌ای از کابل با طبلک تماس پیدا کرد، جهتش تغییر نموده و در نتیجه مولفه شتاب عمودی بدست می‌آورد.

مسئله نمونه ۳-۵

میله قائم الزاویه‌ای در جهت ساعتگرد با سرعت زاویه‌ای که با میزان 4 rad/s^2 کاهش می‌یابد، دوران می‌کند. عبارتهای برداری برای سرعت و شتاب نقطه A را موقعی که $\omega = 2 \text{ rad/s}$ است، بنویسید.



حل: با استفاده از قاعده دست راست، داریم:

$$\boldsymbol{\omega} = -2\mathbf{k} \text{ rad/s} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{\alpha} = +4\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$

سرعت و شتاب A چنین می‌شود.

جواب $[\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}] \qquad \mathbf{v} = -2\mathbf{k} \times (0.4\mathbf{i} + 0.3\mathbf{j}) = 0.6\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j} \text{ m/s}$

$$[\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})] \qquad \mathbf{a}_n = -2\mathbf{k} \times (0.6\mathbf{i} - 0.8\mathbf{j}) = -1.6\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

$$[\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}] \qquad \mathbf{a}_t = 4\mathbf{k} \times (0.4\mathbf{i} + 0.3\mathbf{j}) = -1.2\mathbf{i} + 1.6\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

جواب $[\mathbf{a} = \mathbf{a}_n + \mathbf{a}_t] \qquad \mathbf{a} = -2.8\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} \text{ m/s}^2$

مقادیر **v** و **a** برابرند با:

$$v = \sqrt{0.6^2 + 0.8^2} = 1 \text{ m/s} \qquad \text{و} \qquad a = \sqrt{2.8^2 + 0.4^2} = 2.83 \text{ m/s}^2$$

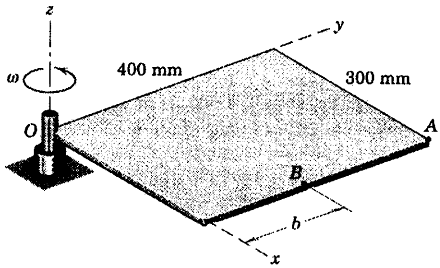
مسائل

مسائل مقدماتی

۱-۵ گشتاوری بــه چـرخ طیـاری وارد شـده و بـاعث می‌شود سرعت آن در مدت چهار ثانیه به طـور یکنواخت از ۲۰۰ rev/min بـه ۸۰۰ rev/min افزایـش یـابد. تعـداد دور چرخش N که چرخ طیار در این مدت طی می‌کند، تعیین کنید. (*پیشنهاد:* از آحاد دور و دقیقه در محاسبات استفاده کنید).

جواب N = ۳۳/۳ rev

۲-۵ صفحه مستطیلی شکل حول محور کناری خود که از O می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ثـابت ω = ۱۰ rad/s دوران می‌کند. مقادیر سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ گوشه A را بـا استفاده از (الف) روابط اسکالر و (ب) روابط برداری، تعیین کنید.



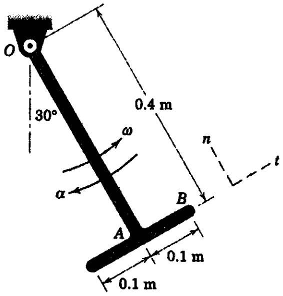
شکل مسئله ۲-۵

۳-۵ جسم T شکلی حول محور افقی گذرنده از نقطـه O دوران می‌کند. در لحظه نشان داده شده، سرعت زاویه‌ای آن ω = ۳ rad/s و شـتاب زاویـه‌ای جســم α = ۱٤ rad/s^2 در جهات مشخص شده می‌باشد. سرعت و شتاب (الف) نقطـه A و (ب) نقطه B را تعییـن کنیـد. نتـایج خـود را بــر حســب مولفه‌های نشان داده شده n و t بیان کنید.

جواب

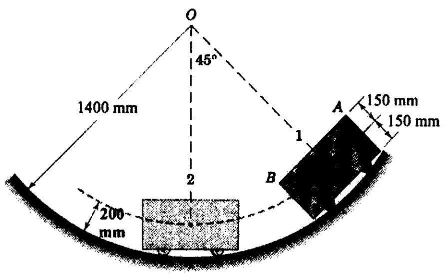
(الف) $\mathbf{v}_A$ = ۱/۲$\mathbf{e}_t$ m/s و $\mathbf{a}_A$ = −۵/٦ $\mathbf{e}_t$ +۳/٦$\mathbf{e}_n$ m/s^2

(ب) $\mathbf{v}_B$ = ۱/۲$\mathbf{e}_t$ +۰/۳ $\mathbf{e}_n$ m/s و $\mathbf{a}_B$ = −٦/۵$\mathbf{e}_t$ +۲/۲$\mathbf{e}_n$ m/s^2



شکل مسئله ۳-۵

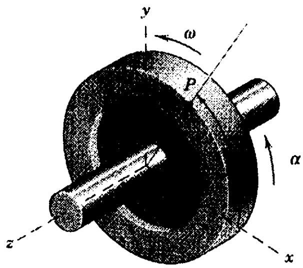
٤-۵ ارابه کوچکی از حالت سکون در موقعیت ۱ رهـا می‌گردد و ۰/٦۳۸ ثانیه زمان لازم دارد که به موقعیت ۲، کـه در پـایین مسیر بـوده و مرکــز G آن دارای ســرعت ٤/۳۳ m/s می‌باشد، برسد. سرعت زاویه‌ای ω خـط AB در موقعیت ۲ و سرعت زاویه‌ای متوسط ω_{av} خــط AB را در طـی ایـن مـدت تعیین کنید.



شکل مسئله ۴-۵

۵-۵ چرخ طیاری به قطر ۶۰۰ mm با سرعت افزایشی حول محور z دوران می‌کند. هنگامیکه نقطه P واقع بر لبه چرخ از محور y در موقعیت $\theta = 90°$ می‌گذرد، شتابی برابر $\mathbf{a} = -1.8\mathbf{i} - 4.8\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$ دارد. در این لحظه سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α چرخ طیار را تعیین کنید.

جواب $\alpha = 6\ \text{rad/s}^2$ و $\omega = 4\ \text{rad/s}$



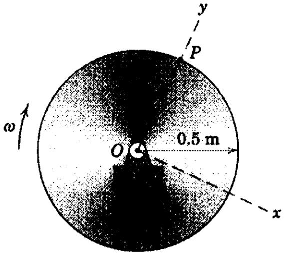
شکل مسئله ۵-۵

۵-۶ اگر شتاب نقطه P روی لبه چرخ طیار مسئله ۵-۵ برابر $\mathbf{a} = -3.02\mathbf{i} - 1.624\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$ موقعی که $\theta = 60°$ است، باشد. سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α چرخ طیار به قطر ۶۰۰ mm را در این موقعیت تعیین کنید.

۵-۷ موقعیت زاویه‌ای خط شعاعی یک دیسک مدور در جهت ساعتگرد با رابطه $\theta = 2t^3 - 3t^2 + 4$ داده شده است که در آن θ بر حسب رادیان و t بر حسب ثانیه است. $\Delta\theta$، جابجایی زاویه‌ای دیسک را طی مدتی که شتاب زاویه‌ای از $42\ \text{rad/s}^2$ به $66\ \text{rad/s}^2$ افزایش پیدا می‌کند، محاسبه کنید.

جواب $\Delta\theta = 244\ \text{rad}$

۵-۸ دیسک مدوری حول مرکز O در جهت نشان داده شده دوران می‌کند. در لحظه‌ای مشخص نقطه P بر لبه دیسک دارای شتاب $\mathbf{a} = -3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$ است. در این لحظه سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α دیسک راتعیین کنید.

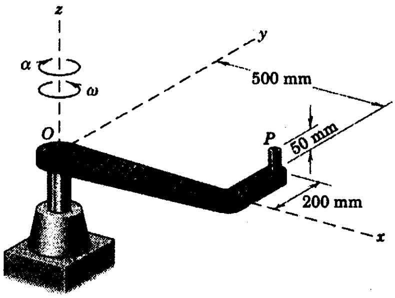


شکل مسئله ۵-۸

۵-۹ اگر صفحه‌ای مستطیل شکل مسئله ۵-۲ از حالت سکون شروع به حرکت نموده و نقطه B دارای شتاب اولیه $0.5\ \text{m/s}^2$ باشد، فاصله b را طوری تعیین کنید که در مدت ۲ ثانیه سرعت صفحه، با شتاب زاویه‌ای ثابت، به ۳۰۰ rev/min برسد.

جواب $b = 180.6\ \text{mm}$

۵-۱۰ میله قائم الزاویه حول محور z گذرنده از O با شتاب زاویه‌ای $\alpha = 3\ \text{rad/s}^2$ در جهت نشان داده شده دوران می‌کند. سرعت و شتاب نقطه P را موقعی که سرعت زاویه‌ای به مقدار $\omega = 2\ \text{rad/s}$ برسد، تعیین کنید.

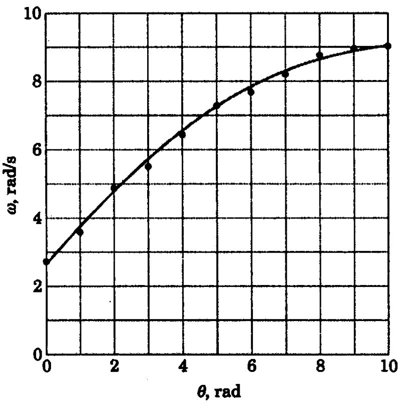


شکل مسئله ۵-۱۰

مسائل ویژه

۵-۱۱ داده‌های تجربی یک قطعه کنترل کننده چرخشی به صورت نمودار سرعت زاویه‌ای بر حسب جابجایی زاویه‌ای θ مطابق شکل می‌باشد. شتاب زاویه‌ای α را موقعی که $\theta = 6\ \text{rad}$ باشد، تخمین بزنید.

جواب $\alpha = ۳/۹۵ \text{ rad/s}^2$

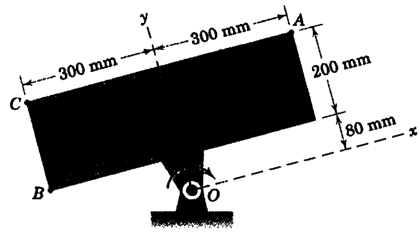


شکل مسئله ۱۱-۵

۱۲-۵ موقعیت زاویه‌ای خطی واقع بر دیسک چرخانی با رابطه $\theta = (-۱+۱/۵t)\,e^{-۰/۵t}$ که در آن θ بر حسب رادیـان و t بر حسب ثانیـه اسـت، داده شـده اسـت. موقعیـت زاویـه‌ای، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای را در طی مدت ۲۰ ثانیه اول حرکت ترسیم نمـایید. مـدت زمـانی را کـه شـتاب بـه صفـر می‌رسد، بدست آورید.

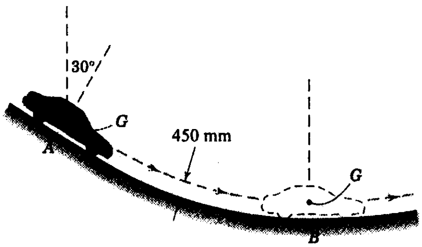
۱۳-۵ ورق مستطیلی شکل در جهت سـاعتگرد حـول یاتاقـان ثـابت O دوران می‌کنـد. اگر لبـه BC دارای سـرعت زاویه‌ای ثابت ۶ rad/s باشد، عبارت‌هایی برداری، برای سرعت و شتاب نقطه A با استفاده از مختصات داده شده تعیین کنید.

جواب $\mathbf{v}_A = ۱/۶۸\mathbf{i} - ۱/۸\mathbf{j} \quad \mathbf{a}_A = -۱۰/۸\mathbf{i} - ۱۰/۰۸\mathbf{j}$



شکل مسئله ۱۳-۵

۱۴-۵ مرکـز جـرم G اتومبیلـی در موقعیـت A دارای سرعت ۶۰ km/h بـوده و ۱/۵۲ ثانیـه بعـد در نقطـه B دارای سرعت ۸۰ km/h مـی‌گردد. شـعاع انحنـای جـاده در B برابـر ۶۰ m است. سرعت زاویه‌ای اتومبیل در موقعیت B و سـرعت زاویه‌ای متوسط ω_{av} اتومبیل بین A و B را محاسبه کنید.

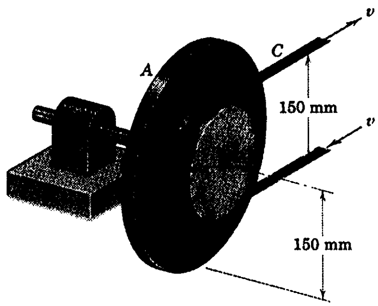


شکل مسئله ۱۴-۵

۱۵-۵ تسمه گرداننده پولی و دیسک متصل بـه آن، بـا سرعت افزاینده دوران می‌کنند. در لحظه‌ای خـاص سـرعت v تسمه ۱/۵ m/s و شتاب کل نقطه A برابـر ۷۵ m/s² اسـت. در این لحظه (الف) شتاب زاویه‌ای α پولی و دیسک، (ب) شتاب کل نقطه B و (ج) شتاب نقطه C واقع بر تسمه را تعیین کنید.

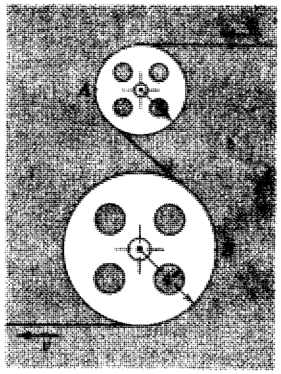
جواب (الف) $\alpha = ۳۰۰ \text{ rad/s}^2$

(ب) $a_B = ۳۷/۵ \text{ m/s}^2$ و (ج) $a_C = ۲۲/۵ \text{ m/s}^2$



شکل مسئله ۱۵-۵

۵-۱۶ نوار مغناطیسی از روی دو قرقره سبک نصب شده در یک کامپیوتر می‌گذرد. اگر سرعت v نوار ثابت بوده و چنانچه مقدار شتاب نقطه A روی نوار $\frac{۴}{۳}$ شتاب نقطه B باشد، شعاع r قرقره کوچک را محاسبه کنید.

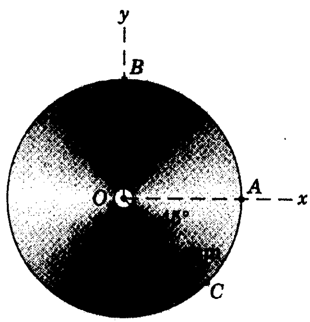


شکل مسئله ۱۶-۵

۵-۱۷ دیسک مدور، حول مرکز O خود دوران می‌کند. در لحظه نشان داده شده، سرعت A برابر است با $\mathbf{v}_A = ۲۰۰\mathbf{j}$ mm/s و شتاب مماسی B برابر است با $(\mathbf{a}_B)_t = ۱۵۰\mathbf{i}$ mm/s^2 می‌باشد. عبارتهایی برداری برای سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ دیسک بنویسید. از این نتایج استفاده کرده و عبارت برداری برای شتاب نقطه C بدست آورید.

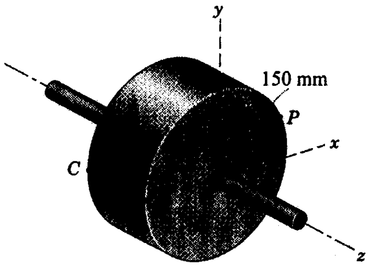
جواب $\boldsymbol{\omega} = ۲\mathbf{k}$ rad/s و $\boldsymbol{\alpha} = -\frac{۳}{۲}\mathbf{k}$ rad/s^2

$\mathbf{a}_C = ۲۵\sqrt{۲}(-۱۱\mathbf{i} + ۵\mathbf{j})$ mm/s^2



شکل مسئله ۱۷-۵

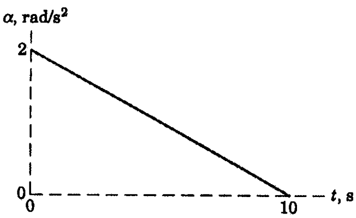
۵-۱۸ استوانه توپر حول محور z خود دوران می‌کند. در لحظه نشان داده شده، نقطه P روی لبه استوانه دارای مولفه x سرعت برابر $-۱/۲۸$ m/s بوده و $\theta = ۲۰°$ است. $\boldsymbol{\omega}$، سرعت زاویه‌ای خط AB روی وجه استوانه را تعیین کنید. آیا خط BC نیز دارای سرعت زاویه‌ای است؟



شکل مسئله ۱۸-۵

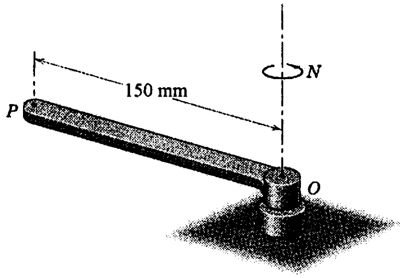
۵-۱۹ چرخ‌دنده‌ای که با سرعت ۲۰۰ rev/min در جهت ساعتگرد در دوران است، تحت گشتاوری قرار می‌گیرد که شتاب زاویه‌ای α را به آن می‌دهد که مطابق شکل نسبت به زمان تغییر می‌کند. سرعت دورانی چرخ‌دنده N را در $t = ۵$ s پیدا کنید.

جواب $N = ۲۷۲$ rev/min



شکل مسئله ۱۹-۵

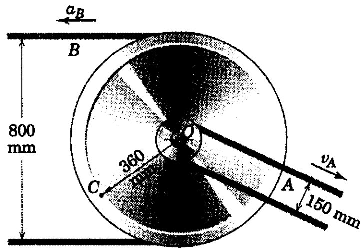
۵-۲۰ بازوی دوار از حالت سکون با شتاب زاویه‌ای ثابت شروع به حرکت نموده و در ۲ ثانیه، سرعت دورانی $N = ۶۰۰$ rev/min را بدست می‌آورد. زمان t پس از شروع حرکت را قبل از اینکه بردار شتاب انتهای P زاویه ۴۵° را با بازوی OP بسازد، پیدا کنید.



شکل مسئله ۲۰-۵

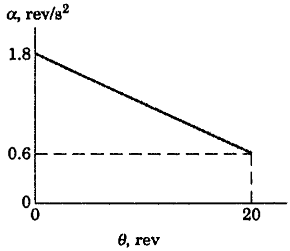
۲۱-۵ دو پولی با تسمهٔ V شکل، یک مجموعه واحد تشکیل داده و حول محور ثابت O دوران می‌نمایند. مطابق شکل در لحظه‌ای خاص، نقطه A روی تسمه پولی کوچکتر دارای سرعت $v_A = ۱/۵\ \text{m/s}$ بوده و نقطه B روی تسمه پولی بزرگتر دارای شتاب $a_B = ۴۵\ \text{m/s}^2$ می‌باشد. در این لحظه مقدار شتاب $\mathbf{a}_C$ نقطه C را تعیین نموده و بردار آن را رسم کنید.

جواب $a_C = ۱۴۹/۶\ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۲۱-۵

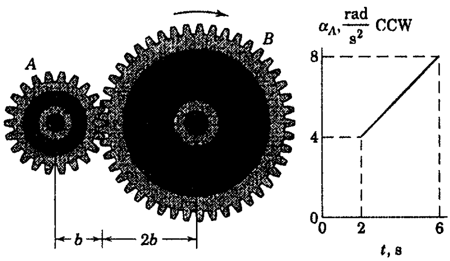
۲۲-۵ گشتاوری متغیر در جهت ساعتگرد در زمان $t = ۰$ بر چرخ طیاری اعمال شده و باعث می‌شود که شتاب زاویه‌ای به طوری خطی، مطابق شکل نسبت به جابجایی زاویه‌ای θ طی ۲۰ دور دوران چرخ، تغییر نماید. اگر سرعت دورانی چرخ طیار در $t = ۰$ برابر $۳۰۰\ \text{rev/min}$ در جهت ساعتگرد باشد، سرعت دورانی N را پس از ۲۰ دور دوران تعیین کنید (*پیشنهاد:* از واحد دور بجای رادیان استفاده کنید).



شکل مسئله ۲۲-۵

۲۳-۵ مشخصات طراحی یک جعبه دنده کاهنده سرعت، مورد بررسی مجدد قرار گرفته است. چرخ‌دنده B در جهت ساعتگرد با سرعت $۳۰۰\ \text{rev/min}$ در حال دوران است که در این هنگام گشتاوری به مدت $t = ۲\ \text{s}$ بر چرخ‌دنده A وارد می‌شود تا به آن شتاب زاویه‌ای پادساعتگرد α را بدهد که مطابق شکل به مدت ٤ ثانیه با زمان تغییر می‌کند. سرعت N_B چرخ‌دنده B را در $t = ٦\ \text{s}$ تعیین کنید.

جواب $N_B = ٤١٥\ \text{rev/min}$



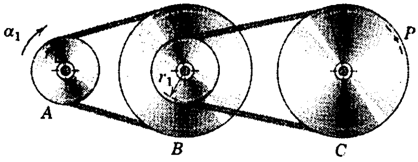
شکل مسئله ۲۳-۵

۵-۲۴ ◀ سیستم متحرک کاهش سرعت با تسمه V شکل که در آن پولی A دو پولی یکپارچه B را به حرکت در می‌آورد که آنها نیز به نوبه خود پولی C را به حرکت در می‌آورند. اگر A از حالت سکون در زمان $t = 0$ شروع به حرکت نموده و به آن شتاب زاویه‌ای ثابت α_1 داده شود، در زمان t عبارتهایی برای سرعت زاویه‌ای C و مقدار شتاب نقطه P بر روی تسمه بدست آورید.

جواب

$$\omega_C = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 \alpha_1 t$$

$$a_P = \frac{r_1^2}{r_2}\alpha_1 \sqrt{1 + \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 \alpha_1^2 t^4}$$



شکل مسئله ۲۴-۵

۵-۳ حرکت مطلق

اکنون برای تحلیل سینماتیک اجسام صلب در صفحه، حرکت مطلق را مطـرح می‌کنیـم. بـرای ایـن کـار، از روابـط هندسی‌ای که توسط پیکره جسم ایجاد می‌شود استفاده نموده و سپس با مشتق گیری زمانی از روابط هندسی مزبور، سرعتها و شتابها به دست می‌آیند.

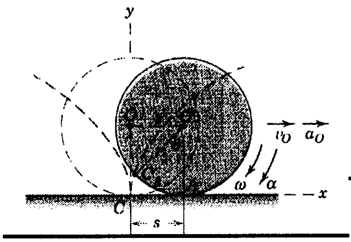
در بخش ۹-۲ از فصل ۲ در مورد سینماتیک ذره، کاربرد تحلیل حرکت مطلق را برای حرکت مقید ذرات متصل بـه هم نشان دادیم. در بررسی پیکره قرقره، سرعتها و شتابها با مشتق گیری متوالی از طول‌های کابلهای اتصال تعیین شـدند. در بحث قبلی روابط هندسی کاملاً ساده بودند و کمیتهایی زاویه‌ای مد نظر قرار نداشتند. اما در حرکت جسم صلب درمی‌یابیم که روابط هندسی، هم اندازه گیری خطی و هم اندازه گیری زاویه‌ای را شامل می‌شود. بنابراین، مشتقهای زمانی این کمیتـها هم شامل سرعتهای خطی و زاویه‌ای و هم شامل شتابهای خطی و زاویه‌ای هستند.

در تحلیل حرکت مطلق، لازم است با ریاضیات تشریحی کاملاً سازگار عمل کنیم. مثلاً اگر موقعیـت زاویـه‌ای یـک خط متحرک در صفحهٔ حرکت توسط زاویه θ، که نسبت به محور مرجع ثـابتی کـه در جـهت پادسـاعتگرد انـدازه گیـری می‌شود، مشخص گردد، آنگاه جهت مثبت سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$و شتاب زاویه‌ای $\ddot{\theta}$ نیز در جهت پادساعتگرد خواهد بـود. از اینرو علامت جبری منفی برای هر یک از دو کمیت اخیر، نشان دهنده حرکت زاویه‌ای در جهت ساعتگرد می‌باشد. روابـط تعریف شده ۱-۲ ، ۲-۲ و ۳-۲ برای حرکت خطی و روابط ۱-۵ و ۲-۵ یا ۳-۵ مربـوط بـه حرکـت زاویـه‌ای در تشـریح حرکت مکرراً استفاده خواهند شد و باید بر آنها تسلط داشت.

استفاده از روش حرکت مطلق در سینماتیک جسم صلب روش بسیار سر راستی است، به شرطی که پیکره جسـم را بتوان توسط رابطه‌ای هندسی توصیف کرد که بیش از حد پیچیده نباشد. اگر پیکره هندسی جسم نامشخص یا پیچیده باشد، تجزیه و تحلیل بوسیله اصول حرکت نسبی ترجیح داده می‌شود. تحلیل حرکت نسبی در بخش ٤-٥ از این فصـل بررسـی شده است. انتخاب بین تحلیل حرکت مطلق یا نسبی بعد از کسب تجربه در استفاده از دو روش حاصل خواهد شد.

در سه مسئله نمونه‌ای که در ادامه خواهد آمد، کاربرد روش تحلیل حرکت مطلق را در سه وضعیتی نشان می‌دهد که بطور معمول با آنها برخورد می‌کنیم. در مسئله نمونه ٤-٥، سینماتیک چرخ غلتان بررسـی مـی‌گردد کـه بخصـوص بسـیار اساسی است و مکرراً در حل مسائل مورد استفاده قرار می‌گیرد. زیرا چرخ غلتان به اشکال مختلـف بـه عنـوان یـک عضـو متداول در سیستمهای مکانیکی مطرح می‌باشد.

مسئله نمونه ۴-۵



چرخی به شعاع r روی سطح همواری بدون لغزش می‌غلتد. حرکت زاویه‌ای چرخ را برحسب حرکت خطی مرکز O آن تعیین کنید. همچنین شتاب نقطه‌ای واقع بر لبه چرخ را هنگامی که در شرف تماس با سطح است، تعیین کنید.

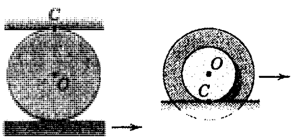
حل: شکل، چرخ غلتان را نشان می‌دهد که از موقعیت خط چین بدون لغزش به سمت راست به موقعیت خط پر می‌رسد. جابجایی خطی مرکز O برابر s است که همچنین برابر است با طول قوس $C'A$ در امتداد لبه‌ای که چرخ بر روی آن می‌غلتد. خط شعاعی CO به اندازه زاویه θ چرخیده و به موقعیت جدید $C'O'$ می‌رسد که در آن θ از حالت قائم اندازه گیری می‌شود. اگر چرخ نلغزد، قوس $C'A$ باید برابر با فاصله s باشد. بنابراین، رابطه جابجایی و مشتقهای آن نسبت به زمان عبارتند از:

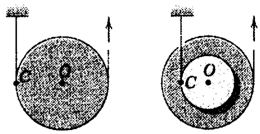
$$s = r\theta$$

❶ جواب $$v_O = r\omega$$

$$a_O = r\alpha$$

که در آن $v_O = \dot{s}$ ،$a_O = \dot{v}_O = \ddot{s}$ ،$\omega = \dot{\theta}$ و $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. البته زاویه θ باید بر حسب رادیان باشد. چنانچه حرکت چرخ در حال کند شدن باشد، شتاب a_O مخالف جهت v_O خواهد بود. در این صورت جهت α نیز خلاف جهت ω می‌باشد.





مبدا مختصات ثابت، اختیاری است. اما نقطه تماس C چرخ با سطح، مناسب‌ترین نقطه برای مبدا مختصات است. هنگامی که نقطه C بر روی مسیر سیکلوئیدی خود به سمت C' حرکت می‌کند، مختصات جدید و مشتق‌های آن نسبت به زمان چنین می‌گردد.

$$x = s - r\sin\theta = r(\theta - \sin\theta) \qquad y = r - r\cos\theta = r(1-\cos\theta)$$
$$\dot{x} = r\dot{\theta}(1-\cos\theta) = v_O(1-\cos\theta) \qquad \dot{y} = r\dot{\theta}\sin\theta = v_O\sin\theta$$
$$\ddot{x} = \dot{v}_O(1-\cos\theta) + v_O\dot{\theta}\sin\theta \qquad \ddot{y} = \dot{v}_O\sin\theta + v_O\dot{\theta}\cos\theta$$
$$= a_O(1-\cos\theta) + r\omega^2\sin\theta \qquad = a_O\sin\theta + r\omega^2\cos\theta$$

برای لحظه تماس مورد نظر، $\theta = ۰$ بوده و:

❷ جواب $$\ddot{x} = 0 \quad , \quad \ddot{y} = r\omega^2$$

بنابراین در لحظه تماس با زمین شتاب نقطه C روی لبه، تنها به r و ω وابسته بوده و به سوی مرکز چرخ متوجه است. در صورت تمایل، سرعت و شتاب نقطه C در هر موقعیت θ را می‌توان توسط نوشتن عبارتهای $\mathbf{v} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}$ و $\mathbf{a} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j}$ بدست آورد.

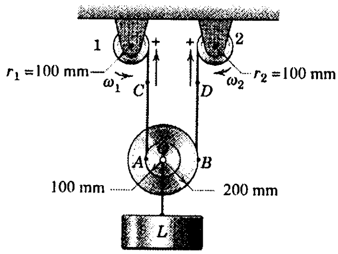
کاربرد روابط سینماتیکی برای چرخی که بدون لغزش می‌غلتد را باید برای پیکره‌های مختلف چرخهای غلتان مطابق آنچه در شکل نشان داده شده است، به خوبی تشخیص داد. اگر چرخ همراه غلتش، لغزش نیز داشته باشد، دیگر رابطه‌های اخیر اعتبار نخواهند داشت.

نکات مفید

❶ *این سه رابطه در این نقطه کاملاً ناشناخته نیستند و بر کاربرد آنها در مورد چرخ غلتان باید کاملاً تسلط داشت.*

❷ *واضح است موقعی که $\theta = 0$ می‌باشد، نقطه تماس دارای سرعت صفر بوده و بنابراین $\dot{x} = \dot{y} = 0$ است. شتاب نقطه تماس روی چرخ نیز توسط اصول حرکت نسبی در بخش ٦-٥ بدست می‌آید.*

مسئله نمونه ۵-۵



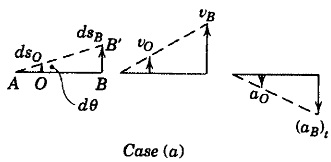
بار L توسط مجموعه قرقره و کابل نشان داده شده، بالا کشیده می‌شود. هر کابل طوری دور قرقره خود پیچیده شده که نمی‌لغزد. دو قرقره‌ای که بار L به آنها بسته شده است، با یکدیگر تشکیل یک جسم واحد را می‌دهند. سرعت و شتاب بار L و سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α متناظر را برای قرقره‌های دوبل، تحت شرایط زیر محاسبه کنید.

حالت (a) قرقره ۱: $\omega_1 = \dot{\omega}_1 = 0$ (قرقره در حال سکون)

قرقره ۲: $\omega_2 = ۲ \text{ rad/s}$ و $\alpha_2 = \dot{\omega}_2 = -۳ \text{ rad/s}^2$

حالت (b) قرقره ۱: $\omega_1 = ۱ \text{ rad/s}$ و $\alpha_1 = \dot{\omega}_1 = ٤ \text{ rad/s}^2$

قرقره ۲: $\omega_2 = ۲ \text{ rad/s}$ و $\alpha_2 = \dot{\omega}_2 = -۲ \text{ rad/s}^2$



Case (a)

حل: جابجائی، سرعت و شتاب مماسی نقطه‌ای بر روی قرقره ۱ یا ۲ برابر حرکت قائم متناظر نقطه A یا B می‌باشد. زیرا کابل‌ها تطویل ناپذیر فرض می‌شوند.

حالت (a) با در نظر گرفتن اینکه A به طور لحظه‌ای در سکون است، خط AB در طی زمان dt به اندازه زاویه $d\theta$ دوران کرده و به AB' می‌رسد. از روی نمودار مشاهده می‌کنیم که جابجایی و مشتق‌های زمانی آنها چنین است:

$$ds_B = \overline{AB}\,d\theta \qquad v_B = \overline{AB}\,\omega \qquad (a_B)_t = \overline{AB}\,\alpha$$

$$ds_O = \overline{AO}\,d\theta \qquad v_O = \overline{AO}\,\omega \qquad a_O = \overline{AO}\,\alpha$$ ❶

با توجه به $v_D = r_2\,\omega_2 = ۰/۱(۲) = ۰/۲ \text{ m/s}$ و $a_D = r_2\,\alpha_2 = ۰/۱(-۳) = -۰/۳ \text{ m/s}^2$ برای حرکت زاویه‌ای قرقره دوبل داریم:

$$\omega = v_B/\overline{AB} = v_D/\overline{AB} = \frac{0.2}{0.3} = 0.667 \text{ rad/s} \quad \text{(CCW)}$$

❷ جواب

$$\alpha = (a_B)_t/\overline{AB} = a_D/\overline{AB} = -\frac{0.3}{0.3} = -1 \text{ rad/s}^2 \quad \text{(CW)}$$

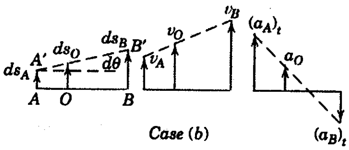
حرکت مربوط به O و بار L برابر است با:

$$v_O = \overline{AO}\,\omega = 0.1(0.667) = 0.0667 \text{ m/s}$$

❸ جواب

$$a_O = \overline{AO}\,\alpha = 0.1(-1) = -0.1 \text{ m/s}^2$$

حالت (b) با حرکت نقطه C و در نتیجه حرکت نقطه A، خط AB در مدت زمان dt به موقعیت $A'B'$ تبدیل می‌شود. از روی نمودار برای این حالت، مشاهده می‌کنیم که جابجایی و مشتق‌های زمانی آنها عبارتند از:



$$ds_B - ds_A = \overline{AB}\,d\theta \qquad v_B - v_A = \overline{AB}\,\omega \qquad (a_B)_t - (a_A)_t = \overline{AB}\,\alpha$$

$$ds_O - ds_A = \overline{AO}\,d\theta \qquad v_O - v_A = \overline{AO}\,\omega \qquad a_O - (a_A)_t = \overline{AO}\,\alpha$$

با توجه به:

$$v_C = r_1\,\omega_1 = 0.1(1) = 0.1 \text{ m/s} \qquad v_D = r_2\,\omega_2 = 0.1(2) = 0.2 \text{ m/s}$$

$$a_C = r_1\,\alpha_1 = 0.1(4) = 0.4 \text{ m/s}^2 \qquad a_D = r_2\,\alpha_2 = 0.1(-2) = -0.2 \text{ m/s}^2$$

برای حرکت زاویه‌ای قرقره دوبل داریم:

جواب

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{\overline{AB}} = \frac{v_D - v_C}{\overline{AB}} = \frac{0.2-0.1}{0.3} = 0.333 \text{ rad/s} \quad \text{(CCW)}$$

❹ جواب

$$\alpha = \frac{(a_B)_t - (a_A)_t}{\overline{AB}} = \frac{a_D - a_C}{\overline{AB}} = \frac{-0.2-0.4}{0.3} = -2 \text{ rad/s}^2 \quad \text{(CW)}$$

حرکت مربوط به O و بار L برابر است با:

جواب

$$v_O = v_A + \overline{AO}\,\omega = v_C + \overline{AO}\,\omega = 0.1 + 0.1(0.333) = 0.1333 \text{ m/s}$$

جواب

$$a_O = (a_A)_t + \overline{AO}\,\alpha = a_C + \overline{AO}\,\alpha = 0.4 + 0.1(-2) = 0.2 \text{ m/s}^2$$

نکات مفید

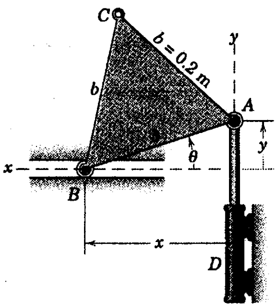
❶ *توجه داشته باشید که قرقره داخلی چرخی است که طول خط ثابت کابل سمت چپ می‌غلتد. بنابراین روابط مسئله نمونه ٤-٥ برقرار است.*

❷ *چون B در امتداد مسیر منحنی حرکت می‌کند، علاوه بر مولفه‌های شتاب $(a_B)_t$، یک مولفه عمودی به سوی O نیز دارد که بر شتاب زاویه‌ای قرقره تاثیر نمی‌گذارد.*

❸ *ترسیمه‌ها، این کمیتها و سادگی رابطه‌های خطی آنها را نشان می‌دهد. مشاهده حرکت O و B به هنگام دوران AB تحت زاویه $d\theta$ این تحلیل را آشکار می‌سازد.*

❹ *دوباره مانند حالت (a) همانطور که در شکل مشاهده می‌شود، دوران جزئی خط AB رابطه بین سرعت زاویه‌ای قرقره و سرعت‌های خطی نقاط A، O و B را مشخص می‌کند. علامت منفی برای $(a_B)_t = a_D$ نمودار شتاب نشان داده شده را بوجود می‌آورد. اما خطی بودن رابطه را بهم نمی‌زند.*

مسئله نمونه ۶-۵



حرکت ورق مثلثی شکل متساوی الاضلاع ABC توسط سیلندر هیدرولیکی D کنترل می‌گردد. اگر دسته پیستون داخل سیلندر با سرعت ثابت ۰/۳ m/s در طی فاصله‌ای از زمان به سمت بالا در حرکت باشد، در لحظه $\theta = ۳۰°$، سرعت و شتاب مرکز غلتک B را در راهنمای افقی‌اش و سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای لبه CB را حساب کنید.

حل: با انتخاب مختصات x-y مطابق شکل، حرکت نقطه A با روابط $v_A = \dot{y} = ۰/۳$ m/s و $a_y = \ddot{y} = ۰$ داده می‌شود و حرکت مربوط به B توسط x و مشتقهای زمانی آن از رابطه $x^2 + y^2 = b^2$ بدست می‌آید. مشتق گیری از رابطه اخیر نتیجه می‌دهد:

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0 \qquad \dot{x} = -\frac{y}{x}\dot{y}$$

$$x\ddot{x} + \dot{x}^2 + y\ddot{y} + \dot{y}^2 = 0 \qquad \ddot{x} = -\frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{x} - \frac{y}{x}\ddot{y}$$

با توجه به اینکه $y = b\sin\theta$ و $x = b\cos\theta$ و $\ddot{y} = 0$، عبارتهای فوق تبدیل می‌شوند به:

$$v_B = \dot{x} = -v_A \tan\theta$$

$$a_B = \ddot{x} = -\frac{v_A^2}{b}\sec^3\theta$$

با قرار دادن مقادیر عددی $v_A = ۰/۳$ m/s و $\theta = ۳۰°$ خواهیم داشت:

جواب $$v_B = -0.3\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -0.1732 \text{ m/s}$$

جواب $$a_B = -\frac{(0.3)^2 (2/\sqrt{3})^3}{0.2} = -0.693 \text{ m/s}^2$$

علامتهای منفی نشان می‌دهند که سرعت و شتاب B هر دو به طرف راست می‌باشند، زیرا x و مشتق‌های آن مثبت و به طرف چپ هستند.

حرکت زاویه‌ای CB همانند هر خط دیگری از صفحه، مانند AB می‌باشد. با مشتق گیری از $y = b\sin\theta$ خواهیم داشت:

$$\dot{y} = b\dot{\theta}\cos\theta \qquad \omega = \dot{\theta} = \frac{v_A}{b}\sec\theta$$

شتاب زاویه‌ای چنین است:

$$\alpha = \dot{\omega} = \frac{v_A}{b}\dot{\theta}\sec\theta\tan\theta = \frac{v_A^2}{b^2}\sec^2\theta\tan\theta$$

با جایگزینی مقادیر عددی خواهیم داشت:

جواب $$\omega = \frac{0.3}{0.2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1.732 \text{ rad/s}$$

جواب
$$\alpha=\frac{(0.3)^2}{(0.2)}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\frac{1}{\sqrt{3}}=1.732\quad \text{rad/s}^2$$

ω و α هر دو در جهت پادساعتگرد هستند زیرا علامتهای آنها مثبت و در جهت مثبت اندازه گیری θ می‌باشند.

نکته مفید

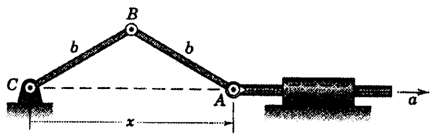
❶ *ملاحظه کنید که مشتق گیری از حاصل ضرب، ساده‌تر از مشتق گیری از یک کسر است. بنابراین مشتق گیری از $x\dot{x}+y\dot{y}=0$ بر مشتق گیری از $\dot{x}=-\frac{y\dot{y}}{x}$ ترجیح داده می‌شود.*

مسائل

مسائل مقدماتی

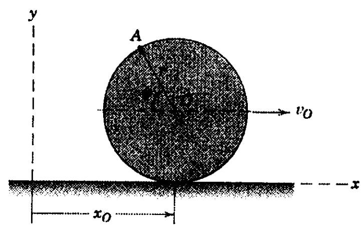
۲۵-۵ به نقطه A شتاب ثابت a به سمت راست (موقعی که x اساساً صفر است) از حالت سکون داده می‌شود. سرعت زاویه‌ای ω لینک AB را بر حسب x و a تعیین کنید.

جواب $\omega = \dfrac{\sqrt{2ax}}{\sqrt{4b^2 - x^2}}$



شکل مسئله ۲۵-۵

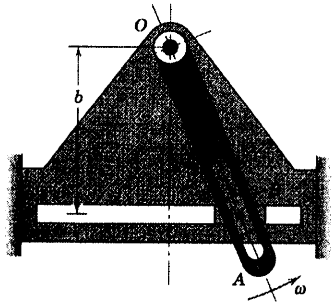
۲۶-۵ چرخی به شعاع r بدون لغزش می‌غلتد و مرکز O آن دارای سرعت ثابت v_O به سمت راست می‌باشد. رابطه‌ای برای مقادیر سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ نقطه A بر روی طوقه چرخ توسط مشتق گیری از مختصات x و y بدست آورید. نتایج حاصله را به شکل ترسیمی به صورت بردار بیان کنید و نشان دهید که $\mathbf{v}$ مجموع برداری دو بردار است که هر کدام دارای مقدار v_o می‌باشد.



شکل مسئله ۲۶-۵

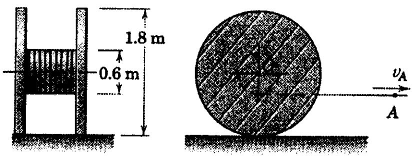
۲۷-۵ بازوی شیاردار OA با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = \dot{\theta}$ در محدودهٔ زمان حرکتش دوران می‌کند و لغزنده زیرین را در امتداد شیار افقی حرکت می‌دهد. روابطی برای سرعت v_B و شتاب a_B پین B بر حسب زاویه θ بیابید.

جواب $v_B = b\omega \sec^2\theta$ و $a_B = 2b\omega^2 \sec^2\theta \tan\theta$



شکل مسئله ۲۷-۵

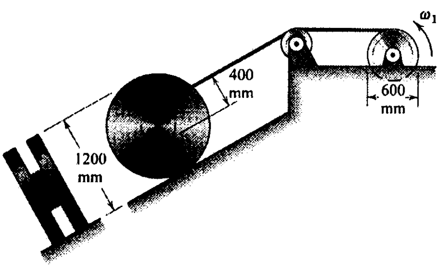
۲۸-۵ طبلک کابل تلفن بدون لغزش بر روی سطح افقی می‌غلتد. اگر نقطه A روی کابل دارای سرعت $v_A = 0/8$ m/s به طرف راست باشد، سرعت مرکز O و سرعت زاویه‌ای ω طبلک را حساب کنید (دقت کنید که به اشتباه غلتش طبلک را به طرف چپ فرض نکنید).



شکل مسئله ۲۸-۵

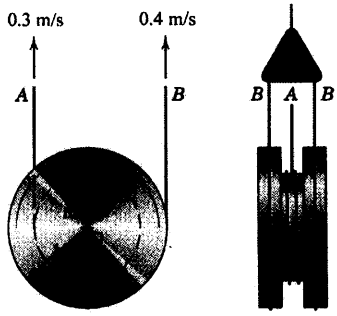
۲۹-۵ طبلک کابل تلفن توسط کابل یک قرقره کوچک که در بالای شیب بوده و به دور توپی طبلک پیچیده شده به طرف پایین شیب هدایت می‌شود. اگر قرقره بالایی با سرعت ثابت $\omega_1 = 2$ rad/s دوران نماید، زمان لازم برای حرکت مرکز طبلک را به اندازه ۳۰ m در امتداد شیب، حساب کنید. لغزشی اتفاق نمی‌افتد.

جواب $t = 66/7$ s



شکل مسئله ۲۹-۵

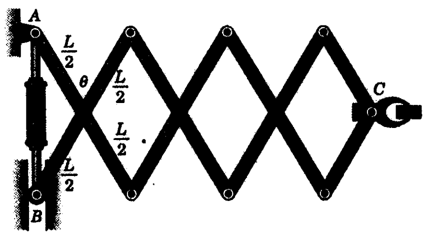
۵-۳۰ کابلهای A و B به دور لبه‌ها و توپی قرقره مرکب، مطابق شکل پیچیده شده‌اند. اگر کابلها در A و B به ترتیب دارای سرعتهای رو به بالای ۰/۳ m/s و ۰/٤ m/s باشند، سرعت مرکز O و سرعت زاویه‌ای قرقره را حساب کنید.



شکل مسئله ۵-۳۰

۵-۳۱ فعال کننده خطی چنان طراحی شده که سرعت افقی v فک C را به تندی تولید کند، در حالیکه فاصله A و B به کندی تغییر می‌کند. اگر سیلندر هیدرولیکی، این فاصله را با میزان u کاهش دهد، سرعت افقی فک C را برحسب زاویه θ بدست آورید.

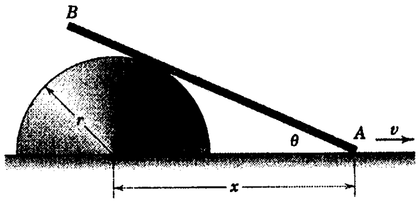
جواب $$v = \frac{۷}{۲} u \cot \frac{\theta}{۲}$$



شکل مسئله ۵-۳۱

مسائل ویژه

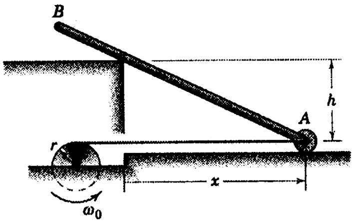
۵-۳۲ هنگامیکه انتهای A از میله باریک با سرعت v به طرف راست حرکت می‌کند، میله بر روی سطح نیم استوانه ثابت می‌لغزد. سرعت زاویه‌ای میله $(\omega = \dot{\theta})$ را بر حسب x بیان کنید.



شکل مسئله ۵-۳۲

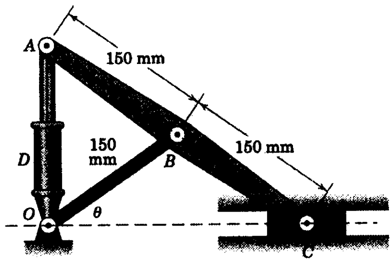
۵-۳۳ سرعت زاویه‌ای ω میله باریک AB را به صورت تابعی از فاصله x و سرعت زاویه‌ای ثابت ω_0 قرقره حساب کنید.

جواب $$\omega = \frac{rh\omega_0}{x^2 + h^2}$$



شکل مسئله ۵-۳۳

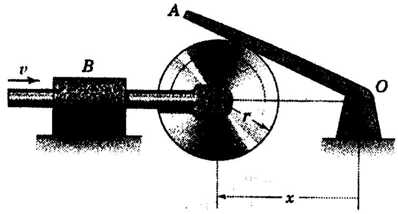
۵-۳۴ سیلندر هیدرولیکی D باعث افزایش فاصله OA با سرعت ۵۰ mm/s می‌گردد. سرعت نقطه C را روی راهنمای افقی در لحظه $\theta = ۵۰^\circ$ حساب کنید.



شکل مسئله ۵-۳۴

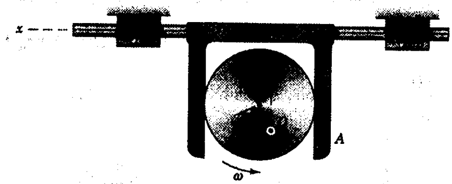
۵-۳۵ حرکت دورانی اهرم OA به کمک حرکت دیسک دوار متصل به آن کنترل می‌شود که به مرکز دیسک سرعت افقی v داده می‌شود. رابطه‌ای برای ω، سرعت زاویه‌ای اهرم OA بر حسب x تعیین کنید.

جواب $\omega = \dfrac{v}{x\sqrt{(x/r)^{۲} - ۱}}$



شکل مسئله ۳۵-۵

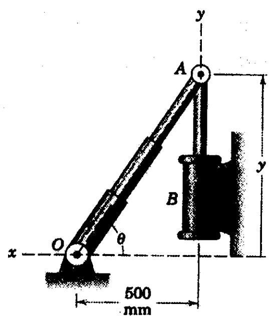
۳۶-۵ بادامک مدور خارج از مرکزی حول یاتاقان ثابت O با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند. بادامک باعث نوسان چنگک A و میله کنترل آن در امتداد افقی x می‌گردد. روابطی برای سرعت v_x و شتاب a_x میله کنترل بر حسب زاویه θ، که از حالت قائم اندازه گیری می‌شود، بنویسید. سطوح تماس چنگک قائم هستند.



شکل مسئله ۳۶-۵

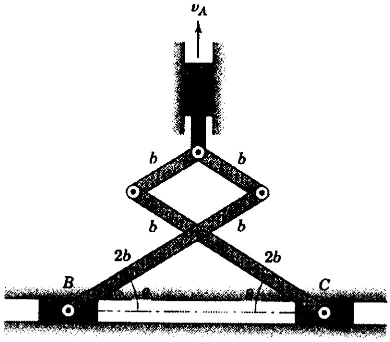
۳۷-۵ میله تلسکوپی در نقطه O مفصل شده و به انتهای A از آن شاتون سیلندر هیدرولیکی ثابت B، سرعت ثابت ۲۰۰ mm/s به طرف بالا داده می‌شود. سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ و شتاب زاویه‌ای $\ddot{\theta}$ میله OA را در لحظه‌ای که $y = ۶۰۰$ mm است، حساب کنید.

جواب $\dot{\theta} = ۰/۱۶۳۹$ rad/s و $\ddot{\theta} = -۰/۰۶۴۵$ rad/s^2



شکل مسئله ۳۷-۵

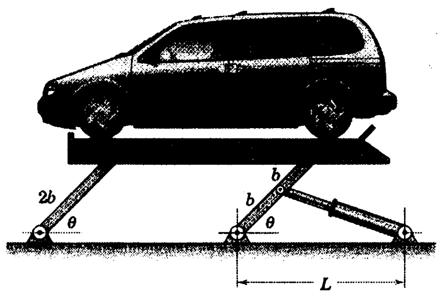
۳۸-۵ حرکت لغزنده‌های B و C در راهنمای افقی توسط حرکت لغزنده A کنترل می‌گردد. اگر A دارای سرعت رو به بالای v_A باشد، مقدار سرعت‌های مساوی و مخالف B و C را که به طرف هم در حرکت هستند را بر حسب تابعی از θ تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۸-۵

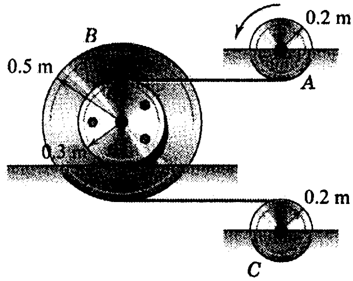
۳۹-۵ عبارتی برای سرعت رو به بالای v بالابر اتومبیل، بر حسب θ بدست آورید. طول میله سیلندر هیدرولیکی به میزان $\dot{s}$ افزایش می‌یابد.

جواب $v = \dfrac{۲\dot{s}\sqrt{b^{۲} + L^{۲} - ۲bL\cos\theta}}{L\tan\theta}$



شکل مسئله ۳۹-۵

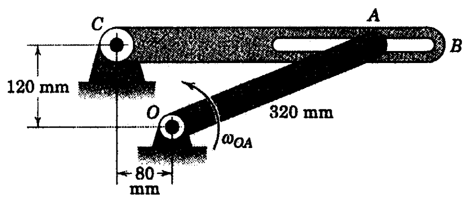
۵-۴۰ کابل قرقره A باعث چرخش قرقره دوبل B می‌گردد که بر روی توپی‌هایش بدون لغزش می‌غلتد. سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α قرقره C را در لحظه‌ای که سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای A به ترتیب برابر ٤ rad/s و ۳ rad/s^2 هر دو در جهت پادساعتگرد هستند، تعیین کنید.



شکل مسئله ۴۰-۵

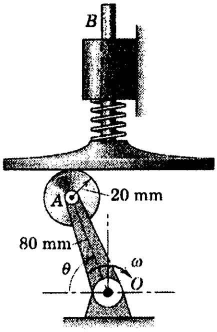
۵-٤۱ لینک OA هنگامی که از موقعیت نشان داده شده عبور می‌کند، دارای سرعت زاویه‌ای ω_{OA} = ۸ rad/s می‌باشد. سرعت زاویه‌ای متناظر ω_{CB} بازوی شیاردار CB را تعیین کنید. مسئله را با لحاظ کردن رابطه جابجایی بسیار جزئی حل کنید.

جواب ω_{CB} = ٦/۳۰ rad/s



شکل مسئله ۴۱-۵

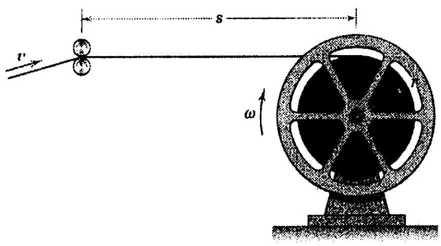
۵-٤۲ اگر لنگ OA دارای شتاب زاویه‌ای $\ddot{\theta}$ = ۸ rad/s^2 و سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ = ٤ rad/s در موقعیت θ = ٦۰° باشد، شتاب محور B را در این موقعیت تعیین کنید. فنر تماس بین غلتک و سطح سوپاپ را حفظ می‌کند.



شکل مسئله ۴۲-۵

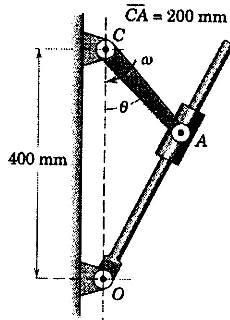
۵-٤۳ مطابق شکل، فیلم از غلتکهای راهنما عبور کرده و در حلقه‌ای که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند، پیچیده می‌شود. شتاب فیلم $a = \dot{v}$ را هنگام ورود به غلتک‌ها تعیین کنید. ضخامت فیلم t بوده و s به اندازه کافی بزرگ است؛ به طوری که تغییر زاویه‌ای که فیلم با راستای افقی می‌سازد، قابل صرفنظر کردن باشد.

جواب $a = \dfrac{tv^2}{2\pi r^2}$



شکل مسئله ۴۳-۵

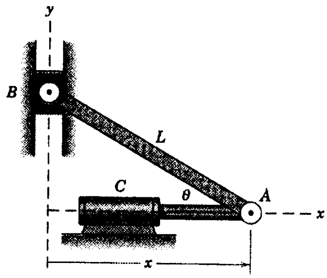
۵-٤٤ میله OB درون طوقهٔ لولا شده به لینک دوار در A می‌لغزد. اگر CA دارای سرعت زاویه‌ای ω = ۳ rad/s در فاصله‌ای از حرکت باشد، سرعت زاویه‌ای OB را در θ = ٤٥° حساب کنید.



شکل مسئله ۴۴-۵

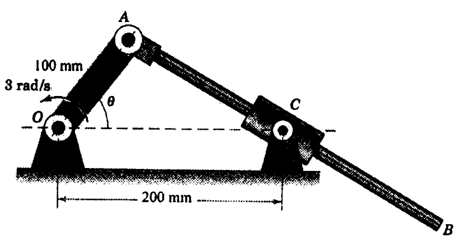
۵-۴۵ سیلندر هیدرولیکی C به انتهای A از لینک AB ، سرعت ثابت v_0 را در جهت منفی x می‌دهد. عباراتی برای سرعت زاویه‌ای $\omega=\dot{\theta}$ و شتاب زاویه‌ای $\alpha=\ddot{\theta}$ لینک بر حسب x بیان کنید.

جواب $\omega = \dfrac{v_0}{\sqrt{L^2-x^2}}$ و $\alpha = \dfrac{-xv_0^2}{(L^2-x^2)^{3/2}}$



شکل مسئله ۴۵-۵

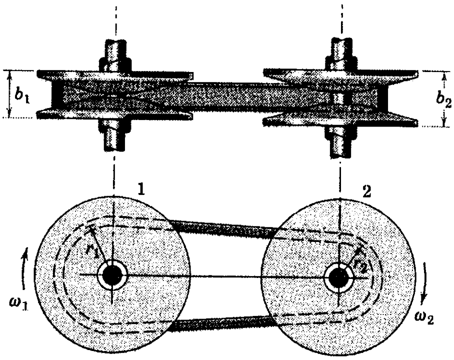
۵-۴۶ لینک OA با سرعت زاویه‌ای ۳ rad/s در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند. لینک AB داخل طوقهٔ لولا شده در C می‌لغزد. سرعت زاویه‌ای ω لینک AB را در $\theta = ۴۰°$ تعیین کنید.



شکل مسئله ۴۶-۵

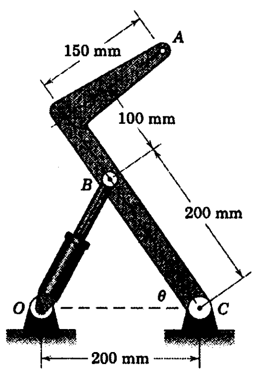
۵-۴۷ یک مجموعه تغییر سرعت، شامل یک تسمه و دو پولی که هر کدام از دو مخروط ناقص بوجود آمده‌اند، با هم می‌چرخند ولی برای تغییر شعاع موثر پولی می‌توانند به یکدیگر نزدیک و یا از یکدیگر دور شوند. اگر سرعت زاویه‌ای پولی ۱ برابر ω و ثابت باشد، رابطه‌ای برای شتاب زاویه‌ای $\alpha_2=\dot{\omega}_2$ پولی ۲ بر حسب میزان تغییرات شعاع موثر $\dot{r}_1$ و $\dot{r}_2$ پولی‌ها تعیین کنید.

جواب $\alpha_2 = \dfrac{\dot{r}_1 r_2 - r_1 \dot{r}_2}{r_2^2}\omega_1$



شکل مسئله ۴۷-۵

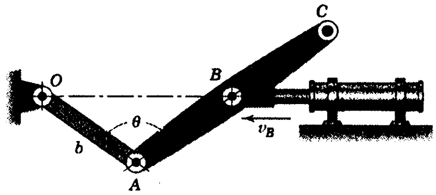
۵-۴۸ فعالیت سیلندر هیدرولیکی باعث افزایش طول OB با میزان ثابت ۰/۲۶۰ m/s می‌گردد. شتاب عمودی نقطه A را روی مسیر مدورش حول نقطه C در موقعیت $\theta = ۶۰°$ حساب کنید.



شکل مسئله ۴۸-۵

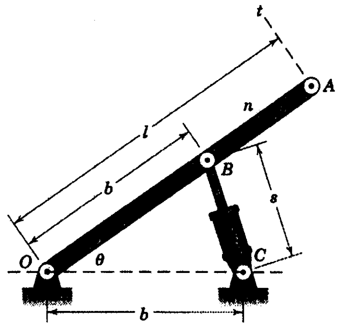
۵-۴۹ میل پیستون سیلندر هیدرولیکی، به نقطه B سرعت v_B را مطابق شکل می‌دهد. مقدار v_C سرعت انتهایی C لینک ABC را بر حسب θ تعیین کنید.

جواب $v_C = \frac{v_B}{۲}\sqrt{۸ + \sec^{۲}\frac{\theta}{۲}}$



شکل مسئله ۵-۴۹

۵-۵۰ دوران لینک AO توسط دسته پیستون سیلندر هیدرولیکی BC که طولش در برهه‌ای از زمان با میزان ثابت $\dot{s} = k$ افزایش می‌یابد، کنترل می‌گردد. عبارتی برداری برای شتاب انتهای A برای مقدار معلوم θ با استفاده از بردارهای یکه $\mathbf{e}_n$ و $\mathbf{e}_t$ در مختصات n-t بنویسید.

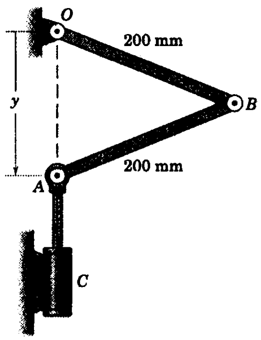


شکل مسئله ۵-۵۰

۵-۵۱ در لحظه‌ای که $y = ۲۰۰\ \text{mm}$ است، دسته پیستون سیلندر هیدرولیکی C به پین A حرکت قائم $\dot{y} = ۴۰۰\ \text{mm/s}$ و $\ddot{y} = -۱۰۰\ \text{mm/s}^2$ را می‌دهد. سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α مربوط به لینک AB را در این لحظه تعیین کنید.

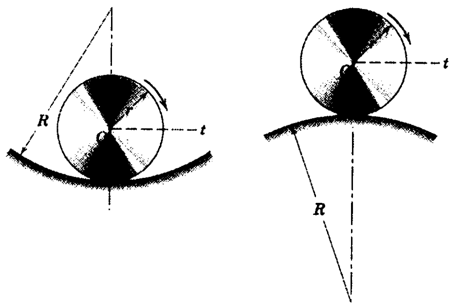
جواب $\omega = ۱/۱۵۵\ \text{rad/s}\ \ \text{CCW}$

$\alpha = ۰/۴۸۱\ \text{rad/s}^2\ \ \text{CCW}$



شکل مسئله ۵-۵۱

۵-۵۲ نشان دهید که عبارتهای $v = r\omega$ و $a_t = r\alpha$ نمایشگر حرکت مرکز O چرخی است که روی قوسهای مدور مقعر و محدب می‌غلتد که در آن ω و α به ترتیب، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای مطلق چرخ می‌باشد. (*راهنمایی:* مسئله نمونه ۵-۴ را دنبال کرده و اجازه دهید چرخ مسافت کوچکی را بغلتد. برای تعیین سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای چرخ، خیلی دقت کنید که زاویه *مطلق* صحیح را که چرخ در هر حالت می‌چرخد، تشخیص دهید).

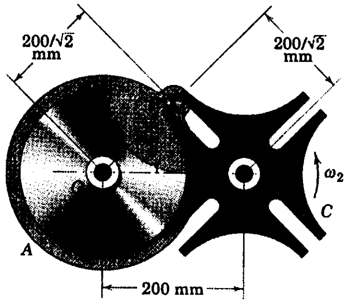


شکل مسئله ۵-۵۲

۵-۵۳ ◀ چرخ ژنوا مکانیزمی برای ایجاد چرخش متناوب می‌باشد. پین P در واحد یکپارچه چرخ A و صفحه قفل شده B در شیارهای شعاعی چرخ C درگیر شده، بنابراین برای هر دور چرخش پین، چرخ C یک‌چهارم دور می‌چرخد. در موقعیت درگیری نشان داده شده، $\theta = ۴۵°$ می‌باشد. برای سرعت دورانی ثابت چرخ A، $\omega_۱ = ۲\ \text{rad/s}$ در جهت ساعتگرد، سرعت زاویه‌ای $\omega_۲$ چرخ C را در جهت

پادساعتگرد در $\theta = ۲۰^\circ$ تعیین کنید (توجه داشته باشید حرکت در طی درگیری، توسط رابطه هندسی مثلث $O_۱O_۲P$ با θی متغیر مشخص می‌گردد).

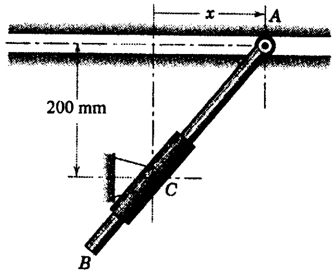
جواب $\omega_۲ = ۱/۹۲۳\ \text{rad/s}$



شکل مسئله ۵-۵۳

۵-۵٤ ◀ میله AB هنگامی که انتهای A آن در امتداد شیار افقی حرکت می‌کند، درون طوقه لولا شده در C، می‌لغزد. اگر A از حالت سکون در $x = ۰$ با شتاب ثابت $۰/۱\ \text{m/s}^2$ به طرف راست شروع به حرکت نموده باشد، α شتاب زاویه‌ای AB را در لحظه‌ای که $x = ۱۵۰\ \text{mm}$ است، حساب کنید.

جواب $\alpha = ۰/۱٤۰۸\ \text{rad/s}^2$ CCW

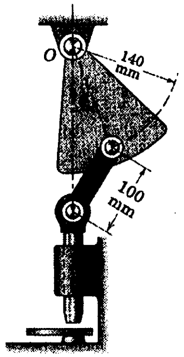


شکل مسئله ۵-۵۴

۵-۵۵ ◀ دستگاه سوراخ‌کن نشان داده شده توسط حرکت نوسانی هارمونیک ساده قسمت لولا شده با رابطه $\theta = \theta_۰ \ \sin ۲\pi t$ که در آن دامنه نوسان برابر $\theta_۰ = \pi/۱۲\ \text{rad}\ (۱۵^\circ)$ و زمان یک نوسان کامل برابر ۱ ثانیه است، تعریف می‌شود. شتاب سوراخ‌کن را موقعی که (الف) $\theta = ۰$ و (ب) $\theta = \pi/۱۲$ است، تعیین کنید.

جواب (الف) $a = ۰/۹۰۹\ \text{m/s}^2$ به طرف بالا

(ب) $a = ۰/۹۱۸\ \text{m/s}^2$ به طرف پایین



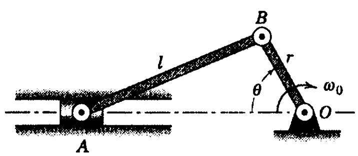
شکل مسئله ۵-۵۵

۵-۵٦ ◀ یکی از متداولترین مکانیزمها، مکانیزم لنگ ـ لغزنده است. اگر سرعت زاویه‌ای لنگ ثابت و برابر $\omega_۰$ باشد، عبارتهایی برای سرعت زاویه‌ای ω_{AB} و شتاب زاویه‌ای شاتون AB بر حسب θ لنگ بیان کنید. ω_{AB} و α_{AB} را در جهت پادساعتگرد، مثبت در نظر بگیرید.

جواب

$$\omega_{AB} = \frac{r\omega_۰}{l}\frac{\cos\theta}{\sqrt{۱-\frac{r^۲}{l^۲}\sin^۲\theta}}$$

$$\alpha_{AB} = \frac{r\omega_۰^۲}{l}\sin\theta\frac{\frac{r^۲}{l^۲}-۱}{\left(۱-\frac{r^۲}{l^۲}\sin^۲\theta\right)^{۳/۲}}$$



شکل مسئله ۵-۵۶

۴-۵ سرعت نسبی

دومین روش بررسی سینماتیک اجسام صلب، استفاده از اصول حرکت نسبی است. در بخش ۸-۲ این اصول را برای اندازه گیری نسبت به محورهای انتقالی مطرح کردیم و معادله سرعت نسبی زیر

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \qquad [۲-۲۰]$$

را در مورد حرکت دو ذره A و B بکار بردیم.

سرعت نسبی ناشی از دوران

اکنون دو نقطه را بر روی یک جسم صلب به جای آن دو ذره انتخاب می‌کنیم. نتیجه این است که حرکت هر نقطه از دید ناظری که روی نقطه دیگر انتقال می‌یابد، باید یک مسیر دایره‌ای باشد، زیرا فاصله شعاعی نقطه مورد نظر تا نقطه مرجع تغییر نمی‌کند. این مطلب *کلید* درک موفقیت آمیزی برای بخش بزرگی از مسائل حرکت صفحه‌ای اجسام صلب است.

این مفهوم در شکل ۵-۵a نمایش داده شده است. شکل، جسم صلبی را نشان می‌دهد که در صفحه شکل در مدت زمان Δt از موقعیت AB به موقعیت $A'B'$ می‌رسد. می‌توان مشاهده نمود که حرکت جسم در دو مرحله صورت پذیرفته است. در مرحله اول، جسم به موقعیت موازی $A''B'$ به اندازه $\Delta \mathbf{r}_B$ انتقال یافته است و در مرحله دوم، حول B' به اندازه زاویه $\Delta\theta$ دوران کرده است. از محورهای مرجع غیر دوار x'-y' الصاق شده به نقطه مرجع B'، مشاهده می‌شود که مرحله دوم حرکت جسم، چیزی جز دورانی ساده حول B' نیست که موجب می‌گردد نقطه A نسبت به B بـه انـدازه $\Delta \mathbf{r}_{A/B}$ جابجا شود. از دید ناظری غیر دوار که به B متصل شده، جسم دورانی حول محور ثابت B دارد، و مطابق شکل ۵-۵b، A حرکتی دایره‌ای ایجاد می‌کند. بنابراین روابط مطرح شده در بخش ۵-۲ و ۵-۲ که به صورت معادله‌های ۲-۱۱ و ۵-۲ (یا ۵-۳) بیان شدند، بخش نسبی حرکت A را توصیف می‌کنند.

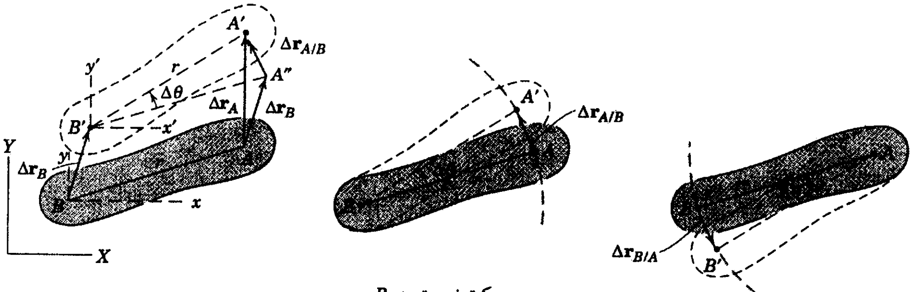
نقطه B به عنوان نقطه مرجع برای الصاق محورهای مرجع غیر دوار x-y به طور اختیاری انتخاب شده است. نقطه A نیز می‌توانست به عنوان نقطه مرجع استفاده شود، در این حالت مطابق شکل ۵-۵c مشاهده می‌کنیم که B حرکت مدوری را حول نقطه A دارد که ثابت در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌کنیم که چه A به عنوان مرجع انتخاب شود چه B در هر دو صورت جهت چرخش یکسان است. در این مثال جهت پادساعتگرد است و همچنین می‌بینیم که $\Delta \mathbf{r}_{B/A} = -\Delta \mathbf{r}_{A/B}$.

اگر B را به عنوان نقطه مرجع در نظر بگیریم، جابجایی کل نقطه A از شکل ۵-۵a چنین بدست می‌آید.

$$\Delta \mathbf{r}_A = \Delta \mathbf{r}_B + \Delta \mathbf{r}_{A/B}$$

که در آن $\Delta \mathbf{r}_{A/B}$ ، هنگامی که $\Delta\theta$ به صفر میل می‌کند، دارای مقدار $r\Delta\theta$ می‌باشد. توجه می‌کنیم که از دید محورهای مختصات انتقالی x'-y' ، حرکت *خطی نسبی* $\Delta \mathbf{r}_{A/B}$ مرتبط با حرکت *زاویه‌ای مطلق* $\Delta\theta$ می‌باشد. از تقسیم عبارت $\Delta \mathbf{r}_A$ بر زمان متناظر Δt و گرفتن حد، رابطه سرعت نسبی زیر بدست می‌آید.

$$\boxed{\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}} \qquad (۵-٤)$$



حرکت نسبت به B (b)

حرکت نسبت به A (c)

(a)

شکل ۵-۵

این عبارت با رابطه ۲۰-۲ یکسان است با این تفاوت که در اینجا فاصلهr بین A و B ثـابت بـاقی می‌مـاند. بنـابراین مقدار سرعت نسبی نیز چنین بدست می‌آید. $v_{A/B} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(|\Delta \mathbf{r}_{A/B}|/\Delta t\right) = \lim_{\Delta t \to 0}\left(r\Delta\theta/\Delta t\right)$

که با قرار دادن $\omega = \dot{\theta}$ داریم:

$$\boxed{v_{A/B} = r\omega} \qquad (5\text{-}5)$$

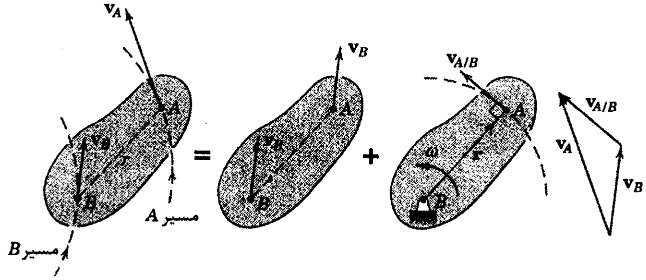
با در نظر گرفتن $\mathbf{r}$ به عنوان بردار $\mathbf{r}_{A/B}$ و با استفاده از رابطه اول ۳-۵ می‌توانیم سرعت نسبی را به صـــورت بـرداری چنین بنویسیم:

$$\boxed{\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \qquad (5\text{-}6)$$

که در آن $\boldsymbol{\omega}$ بردار سرعت زاویه‌ای است که عمود بر صفحه حرکت بوده و جهت آن توسـط قـاعده دسـت راسـت تعیین می‌شود. مشاهده دقیق شکلهای ۵-۵b و c نشان می‌دهد که سرعت خطی نسبی همواره بر خط واصـل بیـن دو نقطـه مورد نظر عمود می‌باشد.

تفسیر معادله سرعت نسبی

کاربرد رابطه ٤-٥ به کمک تجسم جداگانه مولفه‌های انتقالی و دورانی روشـــن‌تر مـی‌گردد. در شـکل ٦-٥ بـر ایـن مولفه‌ها تاکید شده است که حرکت صفحه‌ای جسم صلبی را نشان می‌دهد. با انتخابB به عنوان نقطـه مرجع، سـرعت A برابر است با جمع برداری بخش انتقالی $\mathbf{v}_B$ و بخش دورانی $\mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$ کـه دارای مقـدار $v_{A/B} = r\omega$ می‌باشـد. در ایـن رابطه $|\omega| = \dot{\theta}$، سرعت زاویه‌ای *مطلق* AB است. این نکته که *سرعت خطی نسبی همواره عمود* بر خط واصل بین دو نقطـه مورد نظر می‌باشد، کلید مهمی برای حل بسیاری از مسائل است. شما باید موقعی که بجای نقطهB ، نقطــه A را بـه عنـوان مرجع بکار می‌برید، نمودار معادلی را رسم نمایید.



شکل ۶-۵

معادله ٤-۵ می‌تواند همچنین در مورد تماس لغزشی مقید دو لینک در یک مکانیزم استفاده گردد. در این حالت، نقاط A و B به عنوان نقاط تماس روی هر یک از لینک‌ها در نقطه مورد نظر انتخاب می‌شوند. در این حالت، بر خلاف مثال قبلی، دو نقطه مربوط به دو جسم مختلف بوده، در نتیجه فاصله بین آنها ثابت نمی‌ماند. استفاده دوم از رابطه سرعت نسبی در مسئله نمونه ۱۰-۵ مطرح خواهد شد.

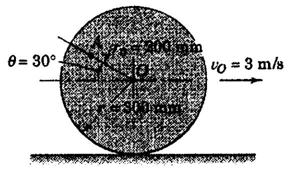
حل معادله سرعت نسبی

حل رابطه سرعت نسبی می‌تواند توسط جبر اسکالر و یا جبر برداری صورت پذیرد و یا حل ترسیمی بکار گرفته شود. در هر حال، چند ضلعی برداری که نماینده معادله برداری است، بایستی همیشه رسم گردد تا ارتباط فیزیکی بین کمیتها آشکار گردد. با استفاده از این چند ضلعی می‌توان معادلات مولفه‌های اسکالر را با تصویر کردن بردارها روی امتدادهای مناسب به دست آورد. معمولاً به کمک انتخاب دقیق امتدادهای تصویر کردن بردارها، می‌توان از حل همزمان دستگاه معادلات پرهیز کرد. به عنوان روشی دیگر، هر جمله از رابطه حرکت نسبی را می‌توان بر حسب مولفه‌های **i** و **j** آن نوشت و هنگامی که ضرایب جمله‌های **i** و **j** طرفین، به طور مجزا، مساوی قرار داده شوند، دو معادله اسکالر حاصل می‌گردد.

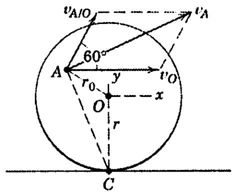
در بسیاری از مسائل، بویژه موقعی که نتایج هندسی مربوط به آن با عبارت ریاضی پیچیده‌ای منجر می‌گردد، حل ترسیمی بکار می‌رود. در این حالت، ابتدا بردارهای معلوم با استفاده از یک مقیاس مناسب در موقعیت صحیح خود رسم می‌شوند. سپس، بردارهای مجهول، که چند ضلعی را کامل کرده و در رابطه برداری صدق می‌کنند، مستقیماً از روی ترسیمه اندازه گیری می‌شوند. انتخاب روش تحلیل به مسئله خاص مورد نظر، دقت لازم، و سلیقه و تجربه فردی بستگی دارد. در مسائل نمونه‌ای که متعاقباً می‌آیند، هر سه روش نشان داده شده‌اند.

صرفنظر از اینکه چه روشی برای حل مسئله بکار گرفته می‌شود، توجه کنید که یک معادله برداری در دو بعد، معادل با دو رابطه اسکالر است، یعنی با حل یک معادله برداری می‌توان دو مجهول اسکالر را تعیین کرد؛ به عنوان مثال، مقدار یک بردار و جهت بردار دیگر. قاعدتاً، باید قبل از شروع حل مسئله، معلومات و مجهولات مسئله شناسایی و مشخص شوند.

مسئله نمونه ۷-۵



چرخی به شعاع $r =$ ۳۰۰ mm بدون لغزش به سمت راست می‌غلتد و سرعت مرکز O آن $v_O =$ ۳ m/s می‌باشد. سرعت نقطه A بر روی چرخ را در لحظه نشان داده شده حساب کنید.



حل I (اسکالر ـ هندسی): مرکز O به عنوان نقطه مرجع برای رابطه سرعت نسبی انتخاب می‌شود زیرا حرکتش داده شده است. بنابراین می‌نویسیم:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O}$$

که در آن جمله سرعت نسبی از محورهای انتقالی x-y مشاهده می‌شود که به نقطه O متصل شده است. سرعت زاویه‌ای AO، از مسئله نمونه ٤-٥ برابر سرعت زاویه‌ای چرخ بوده و برابر است با $\omega = v_O/r = \frac{۳}{۰/۳} =$ ۱۰ rad/s. بنابراین از رابطه ٥-٥ داریم:

$$[v_{A/O} = r_O\dot{\theta}] \qquad v_{A/O} = 0.2(10) = 2 \ \ \text{m/s}$$

❶ که مطابق شکل، عمود بر AO می‌باشد. جمع برداری $\mathbf{v}_A$ در شکل نشان داده شده و می‌تواند از قانون کسینوسها محاسبه شود. بنابراین:

❷ $$v_A^2 = 3^2 + 2^2 + 2(3)(2)\cos 60° = 19 \ \ (\text{m/s})^2 \qquad v_A = 4.36 \ \ \text{m/s}$$ جواب

نقطه تماس C دارای سرعت لحظه‌ای صفر بوده و می‌تواند به عنوان نقطه مرجع مورد استفاده قرار گیرد. رابطه سرعت نسبی می‌شود $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{A/C} = \mathbf{v}_{A/C}$ که در آن:

$$v_{A/C} = \overline{AC}\,\omega = \frac{\overline{AC}}{\overline{OC}}v_O = \frac{0.436}{0.300}(3) = 4.36 \ \ \text{m/s} \qquad v_A = v_{A/C} = 4.36 \ \ \text{m/s}$$

❸ فاصله $\overline{AC} =$ ٤٣٦ mm به طور جداگانه محاسبه می‌شود. دیده می‌شود که $\mathbf{v}_A$ عمود بر AC است زیرا A به طور لحظه‌ای حول نقطه C دوران می‌کند.

حل II (برداری): اکنون با استفاده از رابطه ٦-٥ می‌نویسیم:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_O + \mathbf{v}_{A/O} = \mathbf{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

که در آن

❹
$$\boldsymbol{\omega} = -10\mathbf{k} \ \ \text{rad/s}$$
$$\mathbf{r}_\circ = 0.2\,(-\mathbf{i}\cos 30° + \mathbf{j}\sin 30°) = -0.1732\,\mathbf{i} + 0.1\,\mathbf{j} \ \ \text{m}$$
$$\mathbf{v}_O = 3\,\mathbf{i} \ \ \text{m/s}$$

اکنون رابطه برداری را حل می‌کنیم.

$$\mathbf{v}_A = 3\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 0 & -10 \\ -0.1732 & 0.1 & 0 \end{vmatrix} = 3\mathbf{i} + 1.732\mathbf{j} + 1.0\mathbf{i}$$

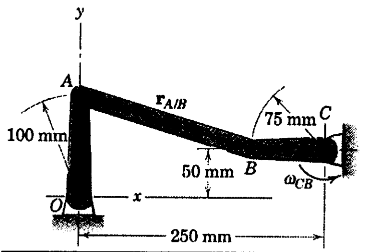
جواب $= 4\mathbf{i} + 1.732\mathbf{j}\ \text{m/s}$

مقدار $v_A = \sqrt{4^2 + (1.732)^2} = \sqrt{19} = 4.36\ \text{m/s}$ و جهت آن با حل قبلی یکسان است.

نکات مفید

1. $v_{A/O}$ را مشابه سرعت A در نظر بگیرید که دارای حرکتی مدور نسبت به O می‌باشد.
2. بردارها را نیز می‌توان با مقیاس درست رسم نمود و مقدار و جهت v_A را مستقیماً با اندازه گیری از روی نمودار بدست آورد.
3. سرعت هر نقطه بر روی چرخ را می‌توان به راحتی توسط نقطه تماس C به عنوان نقطه مرجع تعیین نمود. شما باید به عنوان تمرین بردارهای سرعت تعدادی از نقاط واقع بر روی چرخ را رسم کنید.
4. بردار $\boldsymbol{\omega}$ با توجه به قاعده دست راست به سمت داخل صفحه است در حالی که جهت مثبت z به طرف خارج صفحه است. بنابراین، علامت آن منفی است.

مسئله نمونه ۸-۵



لنگ قائم CB حول C نوسان نموده، و باعث می‌شود که لنگ OA حول O نوسان نماید. موقعی که اهرم بندی از موقعیت نشان داده شده که CB افقی و OA قائم است، می‌گذرد، سرعت زاویه‌ای CB برابر ۲ rad/s در جهت پادساعتگرد است. در این لحظه، سرعتهای زاویه‌ای OA و AB را تعیین کنید.

حل I (برداری): رابطه سرعت نسبی $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ به صورت زیر بازنویسی می‌شود.

1. $$\boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A = \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

که در آن:

$$\boldsymbol{\omega}_{OA} = \omega_{OA}\mathbf{k} \qquad \boldsymbol{\omega}_{CB} = 2\mathbf{k}\ \text{rad/s} \qquad \boldsymbol{\omega}_{AB} = \omega_{AB}\mathbf{k}$$
$$\mathbf{r}_A = 100\mathbf{j}\ \text{mm} \qquad \mathbf{r}_B = -75\mathbf{i}\ \text{mm} \qquad \mathbf{r}_{A/B} = -175\mathbf{i} + 50\mathbf{j}\ \text{mm}$$

با جایگذاری خواهیم داشت:

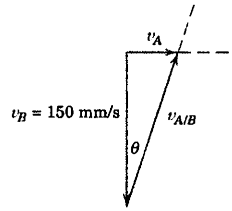
$$\omega_{OA}\mathbf{k} \times 100\mathbf{j} = 2\mathbf{k} \times (-75\mathbf{i}) + \omega_{AB}\mathbf{k} \times (-175\mathbf{i} + 50\mathbf{j})$$
$$-100\,\omega_{OA}\mathbf{i} = -150\mathbf{j} - 175\,\omega_{AB}\mathbf{j} - 50\,\omega_{AB}\mathbf{i}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب متناظر $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$، نتیجه می‌شود:

$$-100\,\omega_{OA} + 50\,\omega_{AB} = 0 \qquad 25\,(6 + 7\,\omega_{AB}) = 0$$

که حل آنها می‌دهد:

2. جواب $$\omega_{AB} = -\frac{6}{7}\ \text{rad/s} \quad , \quad \omega_{OA} = -\frac{3}{7}\ \text{rad/s}$$



حل II (اسکالر ـ هندسی): حل مسئله توسط هندسه اسکالر مثلث برداری خصوصا در اینجا ساده است، زیرا $\mathbf{v}_A$ و $\mathbf{v}_B$ در این وضعیت خاص اهرم بندی بر هم عمود هستند. ابتدا، v_B را بدست می‌آوریم که برابر است با:

$$[v = r\omega] \qquad v_B = 0.075\,(2) = 0.150 \text{ m/s}$$

و مطابق شکل جهت درست آن نشان داده شده است. بردار $\mathbf{v}_{A/B}$ باید بر AB عمود باشد و زاویه θ بین $\mathbf{v}_{A/B}$ و $\mathbf{v}_B$ نیز زاویه‌ای است که AB با امتداد افق می‌سازد. این زاویه چنین محاسبه می‌شود:

$$\tan\theta = \frac{100-50}{250-75} = \frac{2}{7}$$

❸ بردار افقی $\mathbf{v}_A$ مثلث را کامل می‌کند و برای آن داریم:

$$v_{A/B} = v_B/\cos\theta = 0.150/\cos\theta$$
$$v_A = v_B \tan\theta = 0.150\,(2/7) = 0.30/7 \text{ m/s}$$

سرعتهای زاویه‌ای چنین می‌شوند:

$$[\omega = v/r] \qquad \omega_{A/B} = \frac{v_{AB}}{AB} = \frac{0.150}{\cos\theta}\,\frac{\cos\theta}{0.250-0.075}$$

جواب $= 6/7$ rad/s CW

جواب $$[\omega = v/r] \qquad \omega_{OA} = \frac{v_A}{OA} = \frac{0.30}{7}\,\frac{1}{0.100} = \frac{3}{7} \text{ rad/s CW}$$

نکات مفید

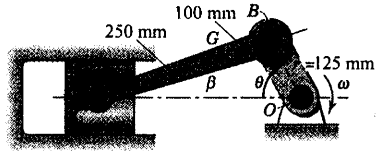
❶ *از اولین رابطه معادله‌های ۳-۵ و ۶-۵ استفاده می‌کنیم.*

❷ *علامت منفی در جواب نشان می‌دهد که بردارهای ω_{AB} و ω_{OA} در جهت منفی $\mathbf{k}$ می‌باشند. بنابراین سرعتهای زاویه‌ای در جهت ساعتگرد هستند.*

❸ *همیشه اطمینان پیدا کنید که ترتیب بردارها در چند ضلعی برداری با تساوی رابطه برداری مطابقت داشته باشد.*

مسئله نمونه ۹-۵

شکل متداول موتور پیستونی رفت و برگشتی همان است که در مکانیزم لنگ ـ لغزنده نشان داده شده است. اگر لنگ OB دارای سرعت دورانی ۱۵۰۰ rev/min در جهت ساعتگرد باشد، در موقعیت $\theta = ۶۰°$ مطلوب است تعیین سرعت پیستون A، سرعت نقطه G از شاتون و سرعت زاویه‌ای شاتون.

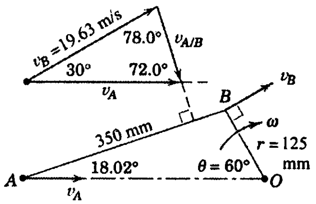


حل: سرعت پین B لنگ روی AB به سادگی بدست می‌آید. بنابراین B می‌تواند به عنوان نقطه مرجع برای تعیین سرعت A استفاده شود. اکنون رابطه سرعت نسبی را می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

سرعت پین لنگ برابر است با:

$$[v = r\omega] \qquad v_B = (0.125)\frac{1500(2\pi)}{60} = 19.63 \text{ m/s}$$ ❶



و عمود بر OB است. البته جهت $\mathbf{v}_A$ در امتداد افقی محور سیلندر است.

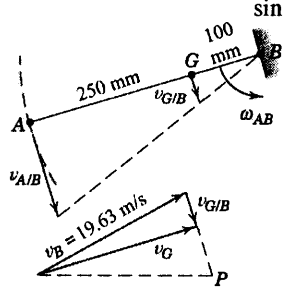
همانطور که در بخش حاضر توضیح داده شد و همانگونه که در نمودار نشان داده شده و در آن B نقطه مرجع ثابت در نظر گرفته شده، جهت $\mathbf{v}_{A/B}$ باید بر خط AB عمود باشد. این جهت را به کمک محاسبه زاویه β از قانون سینوسها بدست می‌آوریم که می‌شود:

$$\frac{125}{\sin\beta} = \frac{350}{\sin 60^\circ} \qquad \beta = \sin^{-1}(0.309) = 18.02^\circ$$

اکنون شکل مثلث سرعت را کامل می‌کنیم که در آن زاویه بین $\mathbf{v}_{A/B}$ و $\mathbf{v}_A$ برابر °۷۲/۰۰ = °۱۸/۰۲ −°۹۰ است و زاویه سوم برابر با °۷۸/۰۰ = °۷۲/۰۰ − °۳۰ − °۱۸۰ می‌باشد. بردارهای $\mathbf{v}_B$ و $\mathbf{v}_{A/B}$ با جهت مناسب نشان داده شده‌اند به طوریکه جمع ابتدا به انتهای $\mathbf{v}_B$ و $\mathbf{v}_{A/B}$ برابر $\mathbf{v}_A$ گردد. اکنون مقادیر مجهول از روابط مثلثاتی به کمک مثلث برداری محاسبه می‌شوند و اگر از روش ترسیمی استفاده شود از روی نمودار با مقیاس اندازه گیری می‌شود. از قانون سینوسها$\mathbf{v}_A$ و $\mathbf{v}_{A/B}$ چنین بدست می‌آید:

$$\frac{v_A}{\sin 78.0^\circ} = \frac{19.63}{\sin 72.0^\circ} \qquad v_A = 20.2 \text{ m/s}$$ جواب ❷

$$\frac{v_{A/B}}{\sin 30^\circ} = \frac{19.63}{\sin 72.0^\circ} \qquad v_{A/B} = 10.32 \text{ m/s}$$



همانطور که از جهت $\mathbf{v}_{A/B}$ مشخص می‌شود سرعت زاویه‌ای AB در جهت پادساعتگرد بوده و برابر است با:

$$[\omega = v/r] \qquad \omega_{AB} = \frac{v_{A/B}}{AB} = \frac{10.32}{0.350} = 29.5 \text{ rad/s}$$ جواب

اکنون سرعت G را با نوشتن رابطه زیر تعیین می‌کنیم:

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{G/B}$$

که در آن: $v_{G/B} = \overline{GB}\,\omega_{AB} = \frac{\overline{GB}}{\overline{AB}} v_{A/B} = \frac{100}{350}(10.23) = 2.95 \text{ m/s}$

همانطور که از نمودار دیده می‌شود، $\mathbf{v}_{G/B}$ دارای همان جهتی است که $\mathbf{v}_{A/B}$ دارد. جمع برداری در نمودار آخر نشان داده شده است. می‌توانیم v_G را با عملیات هندسی حساب کرده یا از روی نمودار سرعت که با مقیاس رسم شده، مقدار و جهت آن را به سادگی اندازه گرفت. برای سهولت، روش اخیر را بکار گرفته و داریم:

$$v_G = 19.24 \text{ m/s}$$ جواب

همانطور که دیده می‌شود، نمودار را می‌توان مستقیماً روی نمودار اول سرعت رسم کرد.

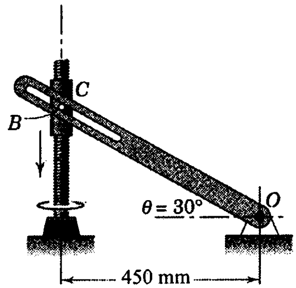
نکات مفید

❶ به خاطر داشته باشید که هنگام استفاده از $v = r\omega$ همیشه ω را به رادیان بر واحد زمان تبدیل کنید.

❷ حل ترسیمی در این مسئله سریعترین راه است، اگر چه دقت محدودی دارد. البته از حل جبر برداری می‌توان استفاده کرد اما عملیات بیشتری را می‌طلبد.

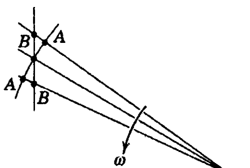
مسئله نمونه ۱۰-۵

پیچ انتقال قدرت با سرعتی دوران می‌کند که باعث پیشروی غلاف رزوه شده C به طرف پایین با سرعت ۰/۲۵ m/s می‌گردد. سرعت زاویه‌ای بازوی شیاردار را در $\theta = ۳۰°$ تعیین کنید.



حل: اگر سرعت نقطه‌ای از بازو مشخص شود، می‌توان سرعت زاویه‌ای آن را بدست آورد. نقطه A واقع بر بازو را انتخاب می‌کنیم که پین B غلاف در این موقعیت منطبق است. ❶

❷ اگر B را به عنوان نقطه مرجع در نظر بگیریم و رابطه $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ را بنویسیم؛ از روی نموداری که بازو و نقاط A و B را در لحظه‌ای قبل و بعد از انطباق نشان می‌دهد، مشاهده می‌کنیم که $\mathbf{v}_{A/B}$ دارای جهتی در امتداد شیار و به طرف خارج از O می‌باشد.

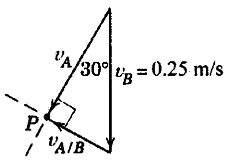


مقادیر $\mathbf{v}_A$ و $\mathbf{v}_{A/B}$ تنها مجهول‌های رابطهٔ برداری بوده، بنابراین اکنون می‌توان آن را حل کرد. بردار $\mathbf{v}_B$ معلوم را رسم می‌کنیم و سپس تقاطع P و امتدادهای معلوم $\mathbf{v}_{A/B}$ و $\mathbf{v}_A$ را بدست می‌آوریم. این روش حل منجر می‌شود به:

$$v_A = v_B \cos\theta = 0.25 \cos 30° = 0.217 \text{ m/s}$$

$$[\omega = v/r] \qquad \omega = \frac{v_A}{OA} = \frac{0.217}{0.450/\cos 30°}$$

$$= 0.417 \text{ rad/s CCW}$$ جواب



به اختلاف بین این مسئله که بین دو لینک، تماس لغزشی وجود دارد و سه مسئله نمونه قبلی در مورد سرعت نسبی که هیچ تماس لغزشی نداشته و نقاط A و B بر روی جسم صلب قرار گرفته‌اند، توجه کنید.

نکات مفید

❶ البته به لحاظ فیزیکی این نقطه وجود ندارد. اما چنین نقطه‌ای را می توانیم وسط شیار متصل به بازو در نظر بگیریم.

❷ همیشه قبل از شروع به حل رابطه برداری، معلومات و مجهولات را شناسایی کنید.

مسائل

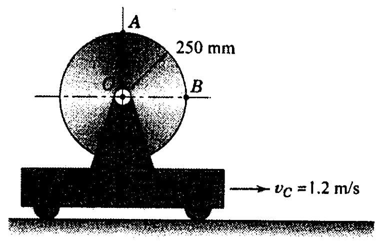
مسائل مقدماتی

۵-۵۷ ارابه دارای سرعت $1/2$ m/s بـه طرف راست می‌باشد. سرعت زاویه‌ای N چرخ را هنگامی که نقطه A در بالای چرخ دارای سرعت (الف) $1/2$ m/s به طرف چپ، (ب) برابر صفر، (ج) برابر $2/4$ m/s به طرف راست باشد، تعیین کنید.

جواب (الف) $N = 91/7$ rev/min CCW

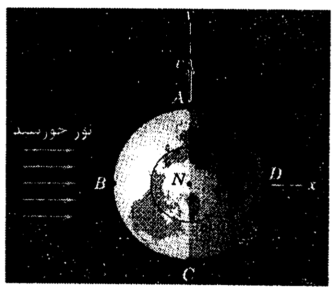
(ب) $N = 45/8$ rev/min CCW

(ج) $N = 45/8$ rev/min CW



شکل مسئله ۵-۵۷

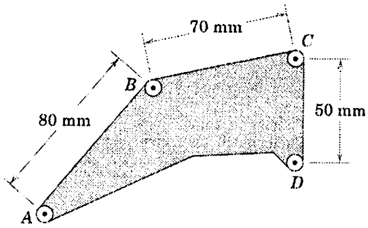
۵-۵۸ سرعت حرکت مرکز کره زمین در مدار خود حول خورشید $v = 107257$ km/h بوده و سرعت زاویه‌ای مطلق زمین حول محور چرخش شمال ـ جنوبی آن، $\omega = 7/292(10^{-5})$ rad/s است. با استفاده از مقدار $R = 6371$ km برای شعاع زمین، سرعت نقاط A، B، C و D را تعیین کنید. همگی آنها روی خط استوا قرار دارند. از انحراف محور زمین صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۵-۵۸

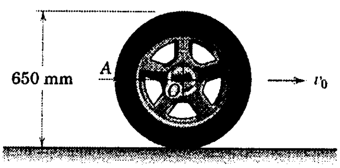
۵-۵۹ قطعه کنترلی در یک مکانیزم فضایی، محدود به حرکت در صفحه شکل می‌باشد. اگر سرعت B نسبت به A در لحظه‌ای معین دارای مقدار $0/926$ m/s باشد، مقدار سرعت متناظر C نسبت به D چقدر است؟

جواب $v_{C/D} = 0/579$ m/s



شکل مسئله ۵-۵۹

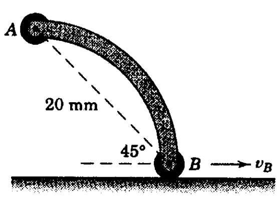
۵-۶۰ مقدار سرعت مطلق نقطه A بر روی تایر اتومبیلی، در موقعیت نشان داده شده برای A، برابر 12 m/s می‌باشد. سرعت v_O مربوط به اتومبیل و سرعت زاویه‌ای ω چرخ چقدر است؟ (چرخ بدون لغزش می‌غلتد).



شکل مسئله ۵-۶۰

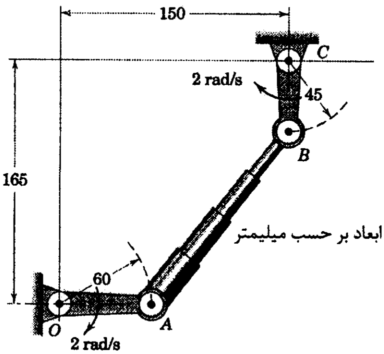
۵-۶۱ در لحظه نشان داده شده لینک خمیده دارای سرعت زاویه‌ای 4 rad/s در جهت پادساعتگرد بوده و غلتک B دارای سرعت 40 mm/s در امتداد سطح افقی می‌باشد. مقدار v_A، سرعت A را تعیین کنید.

جواب $v_A = 58/9$ mm/s



شکل مسئله ۵-۶۱

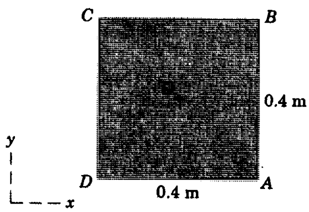
۵-۶۲ سرعت زاویه‌ای لینک تلسکوپی AB را در موقعیت نشان داده شده، موقعی که لینک‌های محرک دارای سرعتهای زاویه‌ای مشخص شده در شکل هستند، تعیین کنید.



شکل مسئله ۶۲-۵

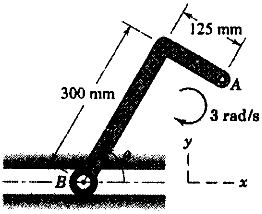
۵-۶۳ ورق یکنواخت مربعی شکل در صفحه x-y حرکت نموده و دارای سرعت زاویه‌ای در جهت ساعتگرد می‌باشد. در لحظه نشان داده شده، نقطه A دارای سرعت ۲ m/s به طرف راست بوده و سرعت C نسبت به ناظر غیر چرخشی واقع در B دارای مقدار ۱/۲ m/s می‌باشد. روابط برداری برای سرعت زاویه‌ای صفحه و سرعت مرکزی G آن بدست آورید.

جواب $\boldsymbol{\omega} = -۳\mathbf{k}$ rad/s و $\mathbf{v}_G = ۰/۶\mathbf{i}+۰/۶\mathbf{j}$ m/s



شکل مسئله ۶۳-۵

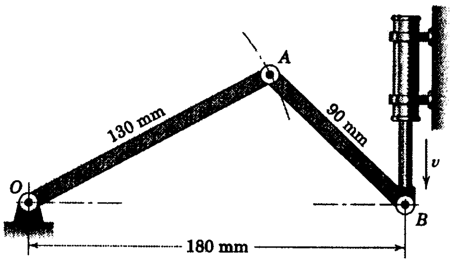
۵-۶۴ لینک قائم الزاویه AB در جهت ساعتگرد دارای سرعت زاویه‌ای ۳ rad/s در لحظه‌ای که $\theta = ۶۰°$ است، می‌باشد. عبارتی برای سرعت A نسبت به B به صورت برداری در این لحظه بیان کنید.



شکل مسئله ۶۴-۵

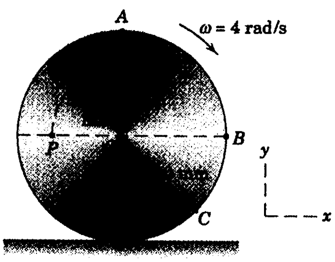
۵-۶۵ در لحظه نشان داده شده، نقطه B از محور افقی گذرنده از نقطه O با سرعت $v = ۰/۶$ m/s به طرف پایین حرکت می‌کند. سرعت زاویه‌ای متناظر ω_{OA} لینک OA را تعیین کنید.

جواب $\omega_{OA} = -۳/۳۳\mathbf{k}$ rad/s



شکل مسئله ۶۵-۵

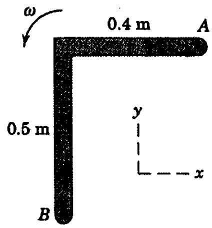
۵-۶۶ دیسک مدوری بدون لغزش با سرعت زاویه‌ای $\omega = ٤$ rad/s در جهت ساعتگرد می‌غلتد. در لحظه نشان داده شده، عبارتهایی برداری برای سرعت A نسبت به B و سرعت نقطه P بنویسید.



شکل مسئله ۶۶-۵

۵-۶۷ لینک قائم الزاویه‌ای دارای سرعت زاویه‌ای ۳ rad/s در جهت پادساعتگرد در لحظه نشان داده شده می‌باشد و نقطه B دارای سرعت $\mathbf{v}_B = ۲\mathbf{i} - ۰/۳\mathbf{j}$ m/s است. سرعت A را با استفاده از علائم برداری تعیین کنید. چند ضلعی برداری که مربوط به جمله‌های رابطه سرعت نسبی می‌شود را ترسیم نموده، مقدار $\mathbf{v}_A$ را تخمین زده و یا اندازه بگیرید.

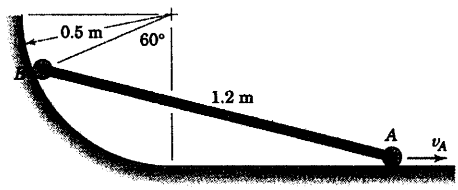
جواب $\mathbf{v}_A = ۰/۵\mathbf{i} + ۰/۹\mathbf{j}$ m/s



شکل مسئله ۶۷-۵

مسائل ویژه

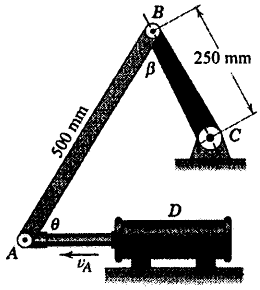
۵-۶۸ در لحظه نشان داده شده، سرعت نقطه A میلهٔ ۱/۲ متری برابر ۳ m/s به طرف راست است. سرعت v_B نقطه B و سرعت زاویه‌ای ω میله را تعیین کنید. از قطر غلتکهای کوچک دو انتهای میله صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۶۸-۵

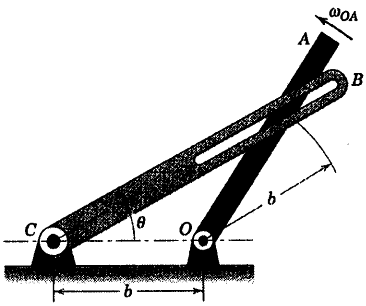
۵-۶۹ برای مدت زمانی از حرکت، دسته پیستون سیلندر هیدرولیکی دارای سرعت $v_A = ۱/۲$ m/s مطابق شکل می‌باشد. در لحظه‌ای خاص که $\theta = \beta = ۶۰°$ می‌باشد، ω_{BC} سرعت زاویه‌ای لینک BC را تعیین کنید.

جواب $\omega_{BC} = ۲/۷۷$ rad/s CCW



شکل مسئله ۶۹-۵

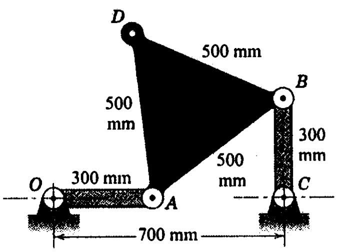
۵-۷۰ پین بازوی چرخشی OA درون شیار لینکی درگیر شده و باعث دوران آن می‌گردد. نشان دهید که سرعت زاویه‌ای CB به ازای هر مقدار θ، نصف سرعت زاویه‌ای OA می‌باشد.



شکل مسئله ۷۰-۵

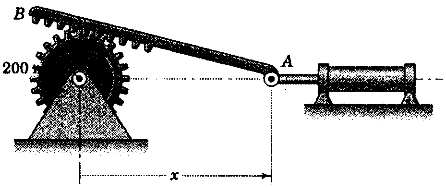
۵-۷۱ در لحظه نشان داده شده، صفحه مثلثی شکل ABD دارای سرعت زاویه‌ای ۳ rad/s در جهت ساعتگرد می‌باشد. در این لحظه ω_{BC}، سرعت زاویه‌ای لینک BC را تعیین کنید.

جواب $\omega_{BC} = ۳$ rad/s CW



شکل مسئله ۷۱-۵

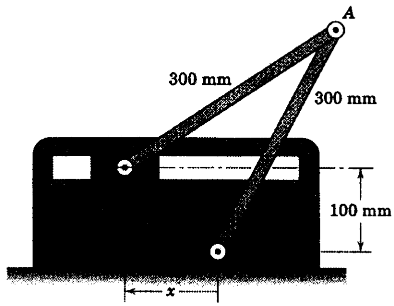
۵-۷۲ دوران چرخ‌دنده توسط حرکت افقی انتهای A از شانه‌دنده AB کنترل می‌گردد. اگر دسته پیستون در طی مدت کوتاهی از حرکت دارای سرعت ثابت $\dot{x}$ = ۳۰۰ mm/s باشد، سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده ω_o و سرعت زاویه‌ای شانه‌دنده AB ω_{AB} را در موقعیت x = ۸۰۰ mm تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۷۲

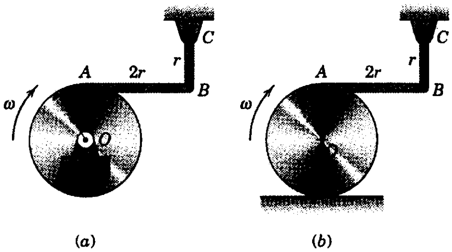
۵-۷۳ اگر لینک OA دارای سرعت زاویه‌ای ۲ rad/s در جهت ساعتگرد در موقعیت x = ۷۵ mm باشد، سرعت لغزنده B را تعیین کنید.

جواب v_B = ۰/۲۶۹ m/s



شکل مسئله ۵-۷۳

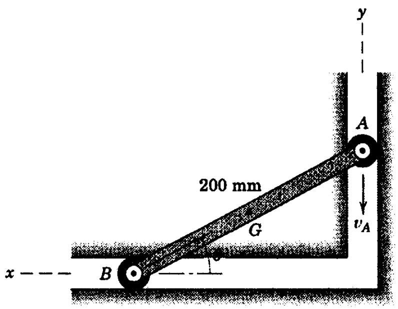
۵-۷۴ سرعت زاویه‌ای لینک BC را در لحظه نشان داده شده، تعیین کنید. در حالت (a) مرکز O دیسک یک مفصل ثابت است، در صورتیکه در حالت (b) دیسک بدون لغزش روی سطح افقی می‌غلتد. در هر دو حالت، دیسک دارای سرعت زاویه‌ای ساعتگرد ω می‌باشد. از فاصله جزئی پین A از لبه دیسک صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۵-۷۴

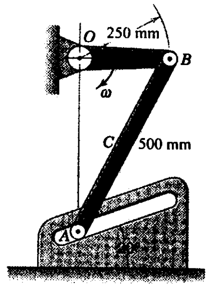
۵-۷۵ انتهای A لینک دارای سرعت v_A رو به پایین ۲ m/s در طی مدتی از حرکتش می‌باشد. برای موقعیتی که θ = ۳۰° است، سرعت زاویه‌ای ω لینک AB و سرعت v_G نقطه وسط G لینک را تعیین کنید. از معادلات سرعت نسبی، اولاً با استفاده از هندسه چند ضلعی برداری، ثانیاً با استفاده از جبر برداری حل کنید.

جواب ω = ۱۱/۵۵ rad/s CW و v_G = ۱/۱۵۵ m/s



شکل مسئله ۵-۷۵

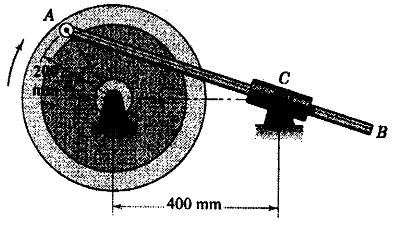
۵-۷۶ در لحظه نشان داده شده، لنگ OB دارای سرعت $\omega =$ ۰/۸ rad/s در جهت ساعتگرد بوده و از موقعیت افقی عبور می‌نماید. سرعت متناظر غلتک راهنمای A را در شیب °۲۰ تعیین کرده و سرعت نقطه C وسط، بین A و B را حساب کنید.



شکل مسئله ۷۶-۵

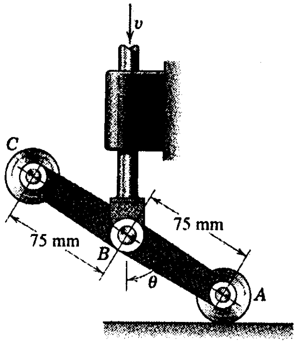
۵-۷۷ چرخ‌طیار با سرعت ثابت ۶۰۰ rev/min در جهت ساعتگرد دوران کرده و میله رابط AB در داخل غلاف مفصل شده در C می‌لغزد. در موقعیت $\theta =$ °۴۵، سرعت زاویه‌ای ω_{AB} مربوط به AB را با استفاده از روابط سرعت نسبی تعیین کنید. (*پیشنهاد:* نقطه‌ای مانند D را بر روی AB که منطبق با C بوده و امتداد سرعتش نیز معلوم است به عنوان نقطه مرجع انتخاب نمایید.)

جواب $\omega_{AB} =$ ۱۹/۳۸ rad/s CW



شکل مسئله ۷۷-۵

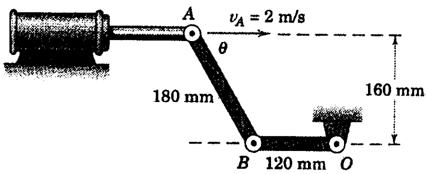
۵-۷۸ اجزای یک وسیله سوییچ کننده در شکل نشان داده شده است. اگر میله کنترل قائم در موقعیت $\theta =$ °۶۰ دارای سرعت رو به پایین v برابر ۰/۹ m/s باشد و چنانچه غلتک A تماس خود را با سطح افقی حفظ کند، مقدار سرعت C را در این لحظه تعیین کنید.



شکل مسئله ۷۸-۵

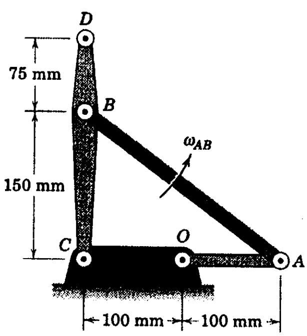
۵-۷۹ حرکت افقی دسته پیستون سیلندر هیدرولیک، باعث کنترل دوران لینک OB حول O می‌گردد. در لحظه نشان داده شده، $v_A =$ ۲ m/s و OB افقی است. ω، سرعت زاویه‌ای OB را در این لحظه تعیین کنید.

جواب $\omega =$ ۸/۵۹ rad/s CCW



شکل مسئله ۷۹-۵

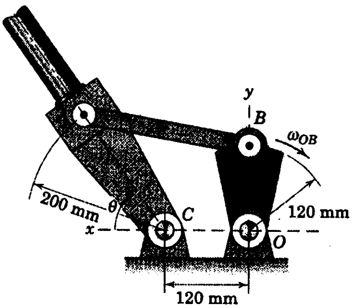
۵-۸۰ سرعت نقطه D را برای اهرم‌بندی چهار لینکی در موقعیت نشان داده شده در شکل طوری تعیین کنید که سرعت زاویه‌ای ۴۰ rad/s را در جهت پادساعتگرد برای لینک AB ایجاد کند.



شکل مسئله ۸۰-۵

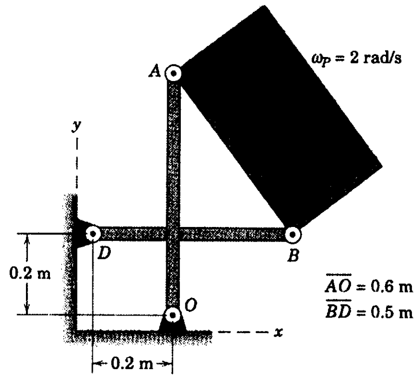
۸۱-۵ در شکل، اجزای مکانیزم بازوی محرک مغناطیس‌سنج فضاپیمایی نشان داده شده است. موقعی که لینک محرک OB محور y را با سرعت زاویه‌ای $\omega_{OB} = ۰/۵$ rad/s قطع می‌کند، سرعت زاویه‌ای بازوی محرک را تعیین کنید. در این لحظه $\tan\theta = \frac{۴}{۳}$ است.

جواب $\omega_{CA} = ۰/۴۲۹$ **k** rad/s



شکل مسئله ۸۱-۵

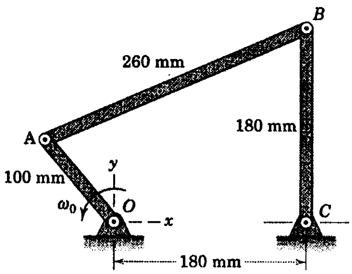
۸۲-۵ حرکت ورق مستطیلی شکل P به کمک دو لینک متقاطع بدون تماس با هم، کنترل می‌گردد. در لحظه‌ای که دو لینک بر هم عمود هستند، ورق دارای سرعت زاویه‌ای $\omega_P = ۲$ rad/s در جهت پادساعتگرد می‌باشد. سرعت زاویه‌ای متناظر دو لینک را تعیین کنید.



شکل مسئله ۸۲-۵

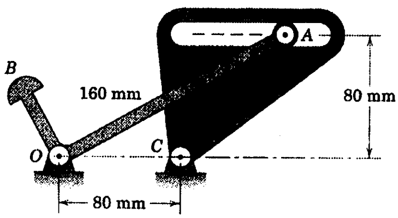
۸۳-۵ در اهرم بندی چهار لینکی نشان داده شده، لینک کنترل OA در برهه‌ای از زمان دارای سرعت زاویه‌ای $\omega_0 = ۱۰$ rad/s در جهت پادساعتگرد می‌باشد. موقعی که لینک CB از موقعیت قائم نشان داده شده می‌گذرد، نقطه A دارای مختصات $x = -۶۰$ mm و $y = ۸۰$ mm می‌باشد. به کمک جبر برداری سرعت زاویه‌ای AB و BC را تعیین کنید.

جواب $\omega_{AB} = ۲/۵$**k** rad/s و $\omega_{BC} = ۵/۸۳$**k** rad/s



شکل مسئله ۸۳-۵

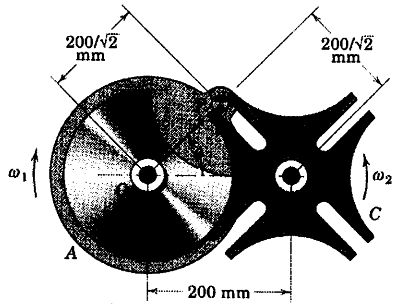
۸۴-۵ مکانیزم قسمتی از دستگاه چفت کردن را نشان می‌دهد که دوران لینک AOB توسط چرخش لینک شیاردار D حول C کنترل می‌گردد. اگر عضو D موقعی که شیار موازی OC است، دارای سرعت زاویه‌ای ۱/۵ rad/s در جهت ساعتگرد باشد، سرعت زاویه‌ای متناظر AOB را تعیین کنید. مسئله را از طریق ترسیمی یا هندسی حل نمایید.



شکل مسئله ۸۴-۵

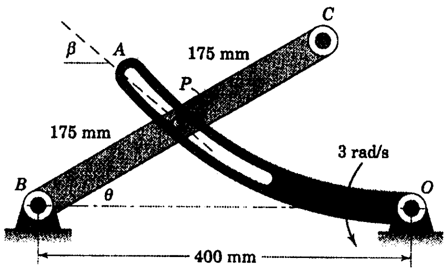
۵-۸۵ مکانیزم ژنوای مسئله ۵-۵۳ دوباره در اینجا نشان داده شده است. به کمک اصول حرکت نسبی در $\theta = ۲۰^\circ$ سرعت زاویه‌ای $\omega_۲$ چرخ C را تعیین کنید. چرخ A دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_۱ = ۲$ rad/s در جهت ساعتگرد است.

جواب $\omega_۲ = ۱/۹۲۳$ rad/s



شکل مسئله ۵-۸۵

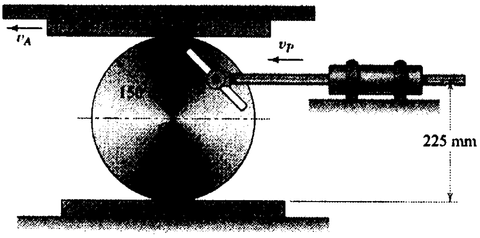
۵-۸۶ مکانیزم طوری طراحی شده است تا حرکت دورانی را به حرکت دورانی دیگر تبدیل کند. دوران لینک BC توسط دوران لینک خمیده شیاردار OA که توسط پین P درگیر شده است، کنترل می‌گردد. در لحظه نشان داده شده، $\theta = ۳۰^\circ$ بوده و زاویه β بین مماس بر منحنی در نقطه P و امتداد افقی برابر ۴۰° می‌باشد. اگر سرعت زاویه‌ای OA در این موقعیت برابر ۳ rad/s باشد، سرعت نقطه C را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۸۶

۵-۸۷ پین P بر روی انتهای میله افقی آزادانه در شیار چرخ‌دنده‌ای می‌لغزد. چرخ‌دنده با شانه‌دنده متحرک A و شانه‌دنده ثابت B (دندانه‌ها نشان داده نشده) درگیر شده و بدون لغزیدن می‌غلتد. اگر در لحظه نشان داده شده، سرعت A برابر ۱۲۰ mm/s به طرف چپ باشد، سرعت v_P میله را در این موقعیت تعیین کنید.

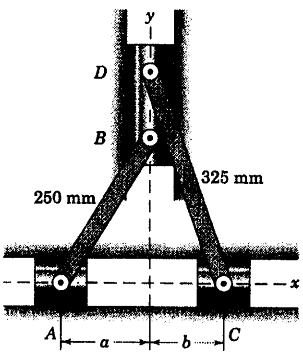
جواب $v_P = ۶۰$ mm/s



شکل مسئله ۵-۸۷

۵-۸۸ ◀ در لحظه نشان داده شده $a = ۱۵۰$ mm و $b = ۱۲۵$ mm و فاصله $a + b$ بین A و C با میزان ۰/۲ m/s کاهش می‌یابد. سرعت مشترک v نقاط B و D را در این لحظه تعیین کنید.

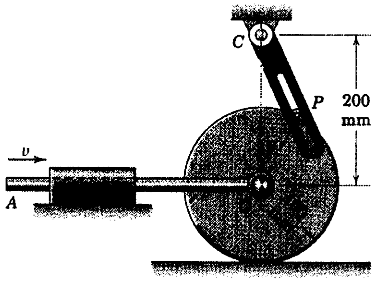
جواب $v = ۰/۰۵۳۶$ m/s



شکل مسئله ۵-۸۸

۸۹-۵ ◀ چرخی بدون لغزش می‌غلتد. در موقعیت نشان داده شده که O درست زیر نقطه C می‌باشد، $\theta = ۳۰^\circ$ است و لینک OA دارای سرعت $v = ۱/۵$ m/s به طرف راست می‌باشد. سرعت زاویه‌ای لینک شیاردار را تعیین کنید.

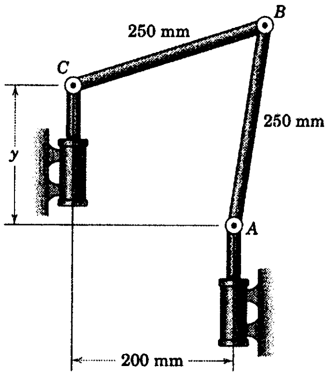
جواب $\omega = ۱۸/۲۲$ rad/s CCW



شکل مسئله ۸۹-۵

۹۰-۵ ◀ انتهاهای A و C لینک‌های اتصالی توسط حرکت دسته پیستونهای سیلندرهای هیدرولیکی کنترل می‌گردد. در برهه‌ای از زمان، A دارای سرعت ۳ m/s به طرف بالا بوده و C دارای سرعت ۲ m/s به طرف پایین می‌باشد. سرعت B را در لحظه‌ای که $y = ۱۵۰$ mm است، تعیین کنید.

جواب $v_B = ۳/۹۷$ m/s



شکل مسئله ۹۰-۵

۵-۵ مرکز آنی دوران (بدون سرعت)

در بخش قبل، سرعت نقطه‌ای بر روی جسم صلب در حرکت صفحه‌ای را به کمک اضافه کردن سرعت نسبی ناشی از دوران حول نقطه مرجعی مناسب به اضافه سرعت خود نقطه مرجع، تعیین نمودیم. در بخش حاضر، مسئله را توسط انتخاب نقطه مرجع منحصر بفردی که دارای سرعت لحظه‌ای صفر است، حل خواهیم کرد. تا آنجا که به سرعتها مربوط می‌شود، می‌توان در نظر گرفت که جسم منحصراً حول محوری دوران می‌کند که عمود بر صفحه حرکت بوده و از این نقطه می‌گذرد. این محور، *محور آنی* بدون سرعت نامیده شده و محل تلاقی آن با صفحه حرکت به *مرکز آنی* بدون سرعت معروف است. این روش به ما امکان می‌دهد که در صفحه حرکت، سرعت‌ها را مشاهده و تجزیه و تحلیل نماییم.

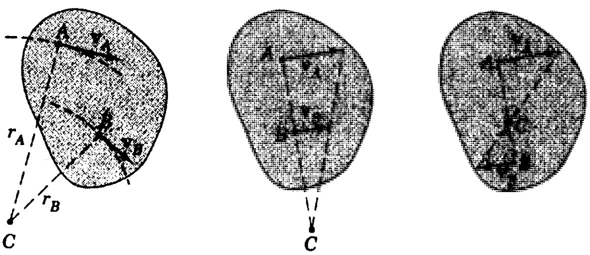
محل مرکز آنی

وجود مرکز آنی به سادگی نشان داده می‌شود. برای جسم شکل‌7a-5 فرض می‌کنیم که امتدادهای سرعت‌های مطلق هر دو نقطه مانند A و B روی جسم مشخص بوده و موازی نیستند. اگر نقطه‌ای وجود داشته باشد که نقطه A در لحظه مورد نظر حرکت مطلق مدوری حول آن داشته باشد، این نقطه باید واقع بر عمودی باشد که از A بر v_A رسم می‌گردد. شبیه همین استدلال را در مورد B بکار می‌بریم و نقطه C تقاطع این دو خط عمود، مرکز مطلق دوران در *لحظه مورد نظر* را آشکار می‌کند. نقطه C مرکز آنی بدون سرعت بوده و می‌تواند داخل و یا خارج از جسم واقع گردد. اگر این نقطه خارج از جسم باشد، می‌توان فرض کرد که نقطه بر روی گستره فرضی جسم قرار دارد. مرکز آنی، نقطه‌ای ثابت در جسم و یا در صفحه جسم نیست.

اگر مقدار سرعت یکی از نقاط مانند v_A نیز معلوم باشد، سرعت زاویه‌ای ω جسم و سرعت خطی هر نقطه دیگر واقع بر آن به آسانی بدست می‌آید. بنابراین، سرعت زاویه‌ای جسم، شکل 7a-5 برابر است با:

$$\omega = \frac{v_A}{r_A}$$

که البته، سرعت زاویه‌ای هر خطی روی جسم نیز می‌باشد. بنابراین سرعت B برابر $v_B = r_B\,\omega = (r_B / r_A)\,v_A$ است. یکبار که مرکز آنی مشخص گردد، جهت سرعت لحظه‌ای هر نقطه‌ای روی جسم مشخص می‌شود. زیرا این سرعت باید عمود بر خط شعاعی واصل بین نقطه مورد نظر و نقطه C باشد.



(a) (b) (c)

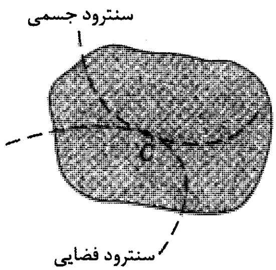
شکل ۷-۵

اگر سرعت‌های دو نقطه روی جسم که حرکت صفحه‌ای دارند موازی باشند، شکل ۵-۷b یا ۵-۷c، خط واصل نقاط، عمود بر این سرعت‌ها بوده و به کمک تناسب مستقیم مطابق شکل، مرکز آنی C مشخص می‌گردد. از روش شکل ۵-۷b به راحتی می‌توان مشاهده کرد هنگامی که مقادیر سرعت‌های موازی به یکدیگر نزدیک شوند، مرکز آنی C از جسم دور شده و در حد، موقعیی که جسم سرعت دورانی خود را از دست داده و فقط انتقال می‌یابد، به بینهایت میل می‌کند.

حرکت مرکز آنی

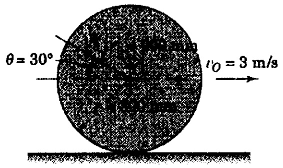
هنگامی که جسم موقعیت خود را تغییر می‌دهد، موقعیت مرکز آنی C نیز در فضا و در جسم تغییر می‌کند. مکان هندسی مراکز آنی در فضا *سنترود فضایی* نامیده شده و مکان هندسی مراکز آنی روی جسم به *سنترود جسمی* معروف است. در لحظه مورد نظر، این دو منحنی در نقطه C مماس بر یکدیگرند. مطابق شکل ۵-۸ می‌توان نشان داد، در طی حرکت جسم، منحنی سنترود جسمی روی منحنی سنترود فضایی می‌غلتد.

در حالی که مرکز آنی بدون سرعت به عنوان یک نقطه به طور لحظه‌ای ساکن می‌باشد، شتاب آن عموماً *صفر نیست*. بنابراین از این نقطه *نمی‌توان* به عنوان مرکز آنی بدون شتاب مطابق آنچه در مورد سرعت استفاده شد، بهره گرفت. در حرکت صفحه‌ای اجسام، مرکز آنی بدون شتاب نیز وجود دارد، ولی محل و کاربرد آن بحثی تخصصی در مبحث سینماتیک مکانیزمها بوده و در اینجا بررسی نخواهد شد.

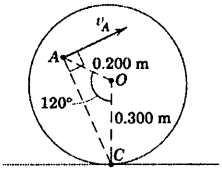


شکل ۵-۸

مسئله نمونه ۱۱-۵



چرخ مسئله نمونه ۷-۵ که در اینجا دوباره نشان داده شده، بدون لغزش به طرف راست می‌غلتد و سرعت مرکز O آن v_O = ۳ m/s است. محل مرکز آنی بدون سرعت را مشخص کرده و برای پیدا کردن سرعت نقطه A، در موقعیت نشان داده، از آن استفاده کنید.



حل: اگر چرخ لغزش نداشته باشد، نقطه تماس آن با زمین بدون سرعت بوده و در نتیجه مرکز آنی بدون سرعت، نقطه C است. سرعت زاویه‌ای چرخ برابر می‌شود با:

$$[\omega = v/r] \qquad \omega = \frac{v_O}{OC} = \frac{3}{0.300} = 10 \ \ \text{rad/s}$$

فاصله نقطه A تا C برابر است با:

❶ $$\overline{AC} = \sqrt{(0.300)^2 + (0.200)^2 - 2(0.300)(0.200)\cos 120^\circ} = 0.436 \ \ \text{m}$$

سرعت نقطه A می‌شود:

❷ $$[v = r\omega] \qquad v_A = \overline{AC}\,\omega = 0.436(10) = 4.36 \ \ \text{m/s}$$

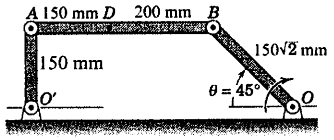
جهت $\mathbf{v}_A$ مطابق شکل عمود بر AC است.

نکات مفید

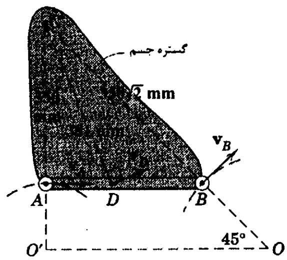
❶ *متوجه باشید که کسینوس ۱۲۰° خودش منفی است.*

❷ *از نتایج این مسئله باید بتوانید سرعتهای تمام نقاط روی چرخ را مشخص و رسم نمایید.*

مسئله نمونه ۱۲-۵



بازوی OB از اهرم بندی، در موقعیت نشان داده شده در $\theta = 45°$ دارای سرعت زاویه‌ای ۱۰ rad/s در جهت ساعتگرد می‌باشد. سرعت نقطه A، سرعت نقطه D و سرعت زاویه‌ای لینک AB را در لحظه نشان داده شده تعیین کنید.



حل: جهت سرعتهای A و B مطابق شکل مماس بر مسیرهای مدورشان حول مراکز ثابت O' و O می‌باشد. محل تقاطع عمودهای بر سرعت‌های A و B، مرکز آنی C لینک AB را مشخص می‌کند. فاصله $\overline{AC}$، $\overline{BC}$ و $\overline{DC}$ نشان داده شده در نمودار محاسبه و یا با مقیاس اندازه گیری می‌شوند. سرعت زاویه‌ای BC ❶، که به عنوان خطی از گستره جسم در نظر گرفته شده، برابر سرعت زاویه‌ای خطوط AC، DC و AB بوده و داریم:

$$[\omega = v/r] \qquad \omega_{BC} = \frac{v_B}{\overline{BC}} = \frac{\overline{OB}\,\omega_{OB}}{\overline{BC}} = \frac{150\sqrt{2}(10)}{350\sqrt{2}}$$

$$= 4.29 \text{ rad/s CCW}$$ جواب

بنابراین سرعتهای A و D برابرند با:

$$[v = r\omega] \qquad v_A = (0.350)(4.29) = 1.500 \text{ m/s}$$ جواب

$$v_D = (0.381)(4.29) = 1.632 \text{ m/s}$$ جواب

که در جهت‌های نشان داده شده است.

نکته مفید

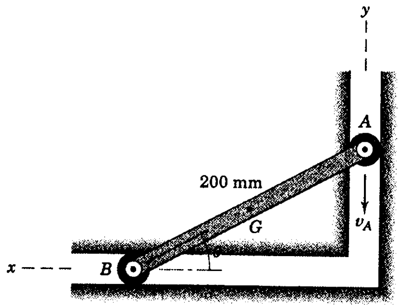
❶ در لحظه نشان داده شده باید تجسم نمود که لینک AB و گستره جسم به عنوان جسمی واحد، حول نقطه C دوران می‌کند.

مسائل

مسائل مقدماتی

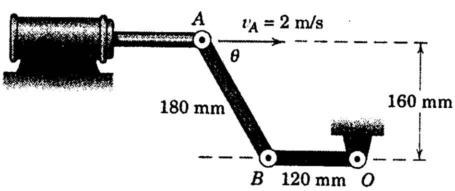
۵-۹۱ لینک مقید مسئله ۵-۷۵ مجدداً در اینجا تکرار شده است. انتهای A لینک دارای سرعت v_A رو به پایین ۲ m/s در طی مدتی از حرکتش می‌باشد. برای موقعیتی که $\theta = ۳۰°$ است، با استفاده از روش مرکز آنی، سرعت زاویه‌ای ω لینک AB و سرعت v_G نقطه وسط G لینک را تعیین کنید.

جواب $\omega = ۱۱/۵۵$ rad/s CW و $v_G = ۱/۱۵۵$ m/s



شکل مسئله ۵-۹۱

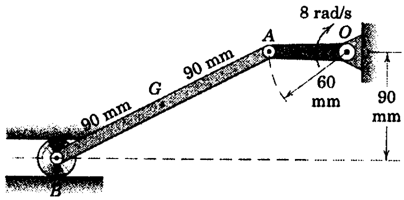
۵-۹۲ شکل مسئله ۵-۷۹ مجدداً در اینجا تکرار شده است. سرعت زاویه‌ای OB در آن مسئله را با روش مرکز آنی بدون سرعت حل کنید.



شکل مسئله ۵-۹۲

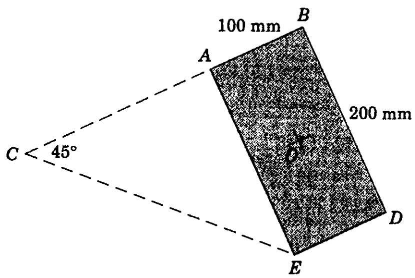
۵-۹۳ در لحظه نشان داده شده، موقعی که لنگ OA از وضعیت افقی می‌گذرد، سرعت G، مرکز لینک AB را به کمک روش مرکز آنی بدون سرعت تعیین کنید.

جواب $v_G = ۲۷۷$ mm/s



شکل مسئله ۵-۹۳

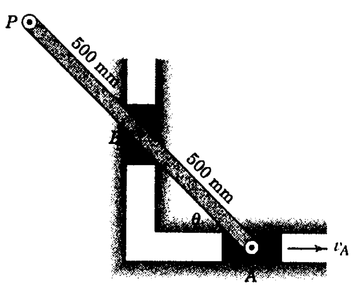
۵-۹۴ برای لحظه نشان داده شده، مرکز آنی بدون سرعت برای ورق مستطیلی شکل، در حرکت صفحه‌ای، در نقطه C قرار گرفته است. اگر در این لحظه ورق دارای سرعت زاویه‌ای ٤ rad/s در جهت پادساعتگرد باشد، مقدار v_O، سرعت مرکز O صفحه را تعیین نمایید.



شکل مسئله ۵-۹۴

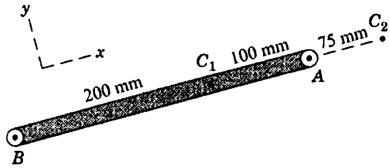
۵-۹۵ حرکت میله‌ای توسط مسیرهای مقید A و B کنترل می‌گردد. اگر در هنگامیکه میله از موقعیت $\theta = ٤٥°$ می‌گذرد دارای سرعت ۲ rad/s در جهت پادساعتگرد باشد، مقادیر سرعت‌های نقاط A و P را تعیین کنید.

جواب $v_A = ۰/۷۰۷$ m/s و $v_P = ۱/۵۸۱$ m/s



شکل مسئله ۵-۹۵

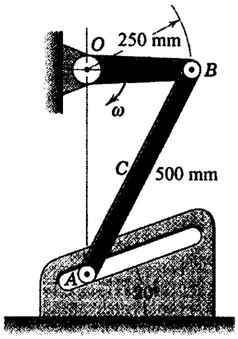
۵-۹۶ میله AB دارای سرعت زاویه‌ای ۵ rad/s در جهت ساعتگرد می‌باشد. سرعت برداری دو انتهای میله را موقعی که مرکز آنی بدون سرعت (الف) در C_1 و (ب) در C_2 باشد، تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۹۶

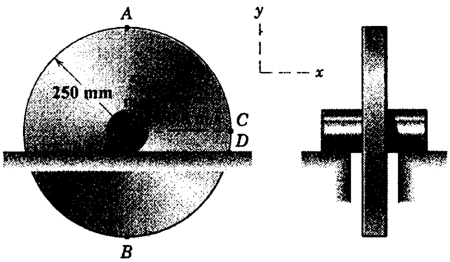
۵-۹۷ اهرم‌بندی مسئله ۵-۷٦ در اینجا مجدداً تکرار شده است. در لحظه نشان داده شده، لنگ OB دارای سرعت زاویه‌ای ساعتگرد ω = ۰/۸ rad/s بوده و در حال گذشتن از موقعیت افقی می‌باشد. به روش مرکز آنی بدون سرعت، سرعت متناظر غلتک راهنمای A را در شیار ۲۰° بیابید و سرعت نقطه C در وسط A و B را تعیین کنید.

جواب v_A = ۲۲٦ mm/s و v_C = ۱۷٤/۷ mm/s



شکل مسئله ۵-۹۷

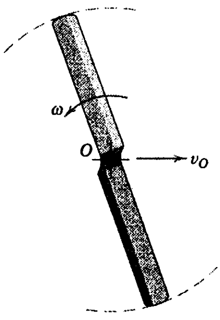
۵-۹۸ شافت چرخ، بدون لغزش روی یک سطح ثابت افقی می‌غلتد و نقطه O دارای سرعت ۰/۸ m/s به طرف راست می‌باشد. به روش مرکز آنی بدون سرعت، سرعت‌های نقاط A، B، C و D را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۹۸

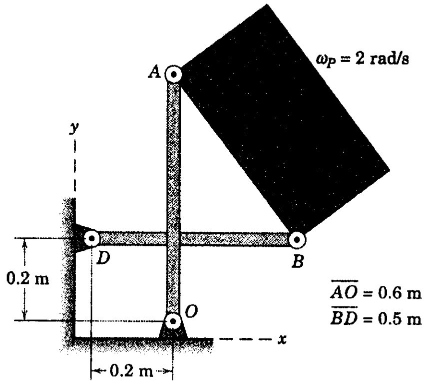
۵-۹۹ تیغه چرخان یک ماشین چمن‌زن در جهت پادساعتگرد با سرعت زاویه‌ای ۱۸۰۰ rev/min دوران می‌کند. اگر سنترود جسم دایره‌ای به شعاع ۰/۷۵ mm باشد، سرعت v_O ماشین چمن‌زن را حساب کنید.

جواب v_O = ۰/۱٤۱٤ m/s



شکل مسئله ۵-۹۹

۵-۱۰۰ مکانیزم مسئله ۵-۸۲ مجدداً در اینجا تکرار شده است. حرکت ورق مستطیلی شکل P به کمک دو لینک متقاطع بدون تماس با هم، کنترل می‌گردد. در لحظه نشان داده شده که دو لینک بر هم عمود هستند، ورق دارای سرعت زاویه‌ای $\omega_P = ۲$ rad/s در جهت پادساعتگرد می‌باشد. با روش مرکز آنی بدون سرعت، سرعت زاویه‌ای متناظر دو لینک را تعیین کنید.

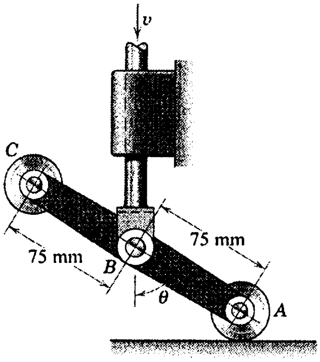


شکل مسئله ۴-۱۰۰

مسائل ویژه

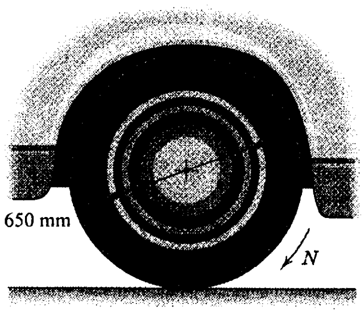
۵-۱۰۱ وسیله سوییچ کننده مسئله ۵-۷۸ مجدداً در اینجا تکرار شده است. اگر میله کنترل قائم در موقعیت $\theta = ۶۰°$ دارای سرعت رو به پایین v برابر ۰/۹ m/s باشد و چنانچه غلتک A تماس خود را با سطح افقی حفظ کند، با روش مرکز آنی بدون سرعت، مقدار سرعت C را دراین لحظه تعیین کنید.

جواب $v_C = ۱/۸۷۳$ m/s



شکل مسئله ۵-۱۰۱

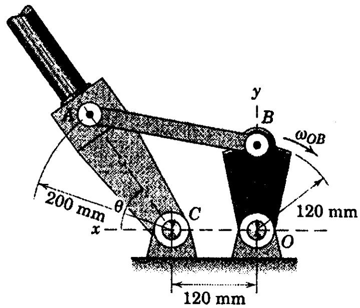
۵-۱۰۲ چرخ محرک عقب یک اتومبیل به قطر ۶۵۰ mm دارای سرعت زاویه‌ای N، برابر ۲۰۰ rev/min روی یک جاده یخ زده می‌باشد. اگر مرکز آنی بدون سرعت چرخ به فاصله ۱۰۰ mm بالای نقطه تماس تایر با جاده باشد، سرعت v اتومبیل و سرعت لغزشی v_s تایر روی یخ را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۱۰۲

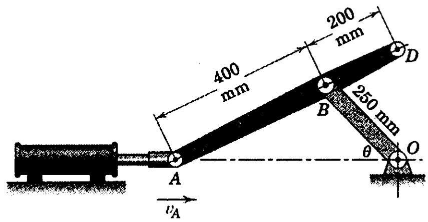
۵-۱۰۳ اجزای مکانیزم بازوی محرک مغناطیس‌سنج فضاپیمای مسئله ۵-۸۱ مجددا در اینجا تکرار شده است. با روش مرکز آنی بدون سرعت، سرعت زاویه‌ای بازوی محرک را موقعی که لینک محرک OB محور y را با سرعت زاویه‌ای $\omega_{OB} = ۰/۵$ rad/s قطع می‌کند، تعیین کنید. در این لحظه $\theta = \frac{۴}{۳}$ است.

جواب $\omega_{CA} = ۰/۴۲۹\mathbf{k}$ rad/s



شکل مسئله ۵-۱۰۳

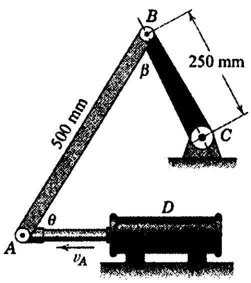
۵-۱۰٤ سیلندر هیدرولیکی، حرکت افقی محدودی را در A تولید می‌کند. اگر موقعی که $\theta = ٤٥°$ می‌باشد، $v_A = ٤$ m/s باشد. مقدار سرعت نقطه D و سرعت زاویه‌ای ω، ABD را در این موقعیت تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۱۰۴

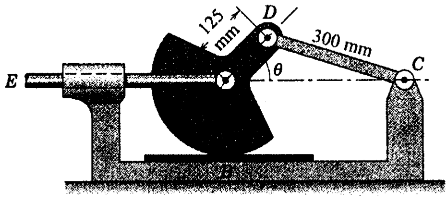
۵-۱۰۵ مکانیزم مسئله ۵-٦٩ در اینجا تکرار شده است. برای مدت زمانی از حرکت، دسته پیستون هیدرولیکی دارای سرعت $v_A = ١/٢$ m/s مطابق شکل می‌باشد. در لحظه‌ای خاص که $\theta = \beta = ٦٠°$ می‌باشد، با روش مرکز آنی بدون سرعت، سرعت زاویه‌ای ω_{BC} لینک BC را تعیین کنید.

جواب $\omega_{BC} = ٢/٧٧$ rad/s CCW



شکل مسئله ۵-۱۰۵

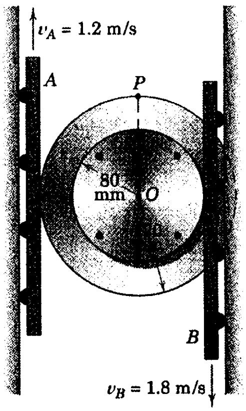
۵-۱۰٦ دستگاه آزمایش مقاومت در مقابل سایش دو ماده A و B در شکل نشان داده شده است. اگر موقعی که $\theta = ٤٥°$ است، سرعت لینک EO برابر ١/٢ m/s باشد، سرعت مالشی v_A را تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۱۰۶

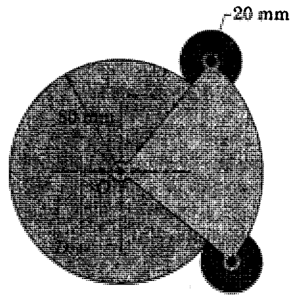
۵-۱۰۷ ریلهای لغزشی A و B با لبه‌های چرخ دوبل بدون لغزش درگیر شده‌اند. برای سرعتهای معینی از A و B، سرعت زاویه‌ای ω چرخ و مقدار سرعت نقطه P را تعیین کنید.

جواب $\omega = ١٥$ rad/s و $v_P = ١/٨٩٧$ m/s



شکل مسئله ۵-۱۰۷

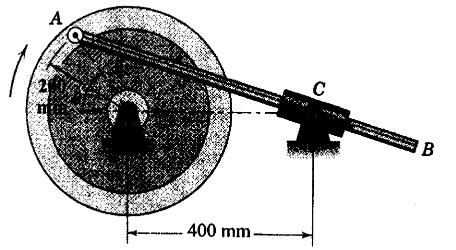
۵-۱۰۸ چرخ‌دنده D (دندانه‌ها نشان داده نشده‌اند) حول O با سرعت زاویه‌ای ثابت ٤ rad/s در جهت ساعتگرد می‌چرخد. قطاع AOB با زاویه °۹۰ روی محوری مستقل، در O نصب شده و هر کدام از چرخ‌دنده‌های کوچک در A و B با چرخ‌دنده D درگیر شده است. اگر قطاع دارای سرعت زاویه‌ای ۳ rad/s در جهت پادساعتگرد باشد، سرعت زاویه‌ای متناظر هر یک از چرخ‌دنده‌های کوچک را بدست آورید.



شکل مسئله ۵-۱۰۸

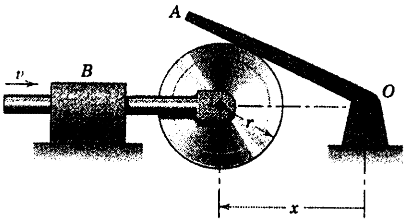
۵-۱۰۹ مکانیزم مسئله ۵-۷۷ در اینجا تکرار شده است. چرخ‌طیار با سرعت ثابت ٦۰۰ rev/min در جهت ساعتگرد دوران کرده و میله رابط AB در داخل غلاف مفصل شده در C می‌لغزد. در موقعیت θ = °٤٥ سرعت زاویه‌ای ω_{AB} مربوط به AB را با روش مرکز آنی بدون سرعت حل کنید.

جواب ω_{AB} = ۱۹/۳۸ rad/s CW



شکل مسئله ۵-۱۰۹

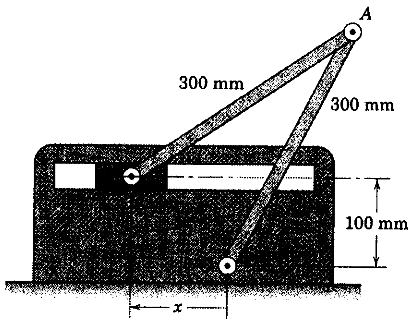
۵-۱۱۰ دوران اهرم OA توسط حرکت دیسک مدور که مرکزش دارای سرعت افقی v است، کنترل می‌گردد. رابطه‌ای برای سرعت زاویه‌ای ω اهرم OA بر حسب x تعیین کنید. همچنین سرعت زاویه ω_w چرخ را به شرطی که لغزشی بین دیسک و اهرم وجود نداشته باشد، بدست آورید.



شکل مسئله ۵-۱۱۰

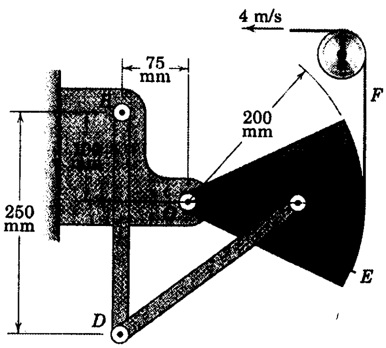
۵-۱۱۱ مکانیزم مسئله ۵-۷۳ در اینجا تکرار شده است. اگر لینک OA دارای سرعت زاویه‌ای ۲ rad/s در جهت ساعتگرد در موقعیت x = ۷٥ mm باشد، سرعت لغزنده B را با روش مرکز آنی بدون سرعت، تعیین کنید.

جواب v_B = ۲٦۹ mm/s



شکل مسئله ۵-۱۱۱

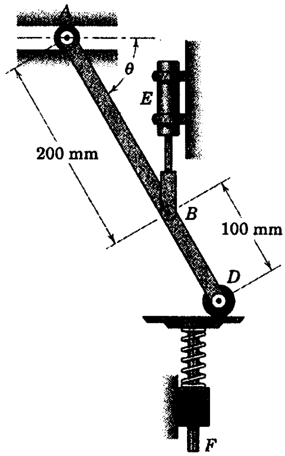
۵-۱۱۲ تسمه انعطاف پذیر F در E به قطاع چرخان متصل شده و روی قرقره راهنما کشیده می‌گردد. اگر تسمه دارای سرعت ٤ m/s باشد، سرعتهای زاویه‌ای AD و BD را در موقعیت نشان داده شده، تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۱۱۲

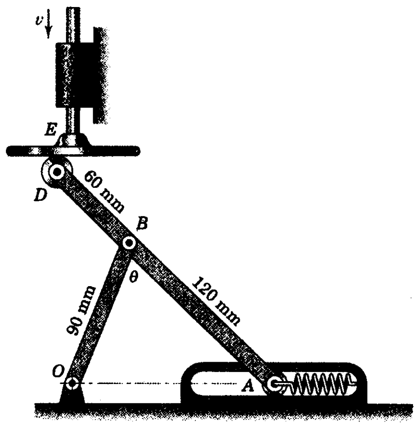
۵-۱۱۳ نوسان عمودی سوپاپ فنردار F توسط تغییرات پریود فشار در سیلندر هیدرولیک عمودی E کنترل می‌گردد. در موقعیت $\theta = ۶۰°$ اگر سرعت سوپاپ F برابر ۲ m/s به طرف پایین باشد، سرعت زاویه‌ای AD و سرعت غلتک A را در راهنمای افقی‌اش تعیین کنید.

جواب $\omega_{AD} = ۱۳/۳۳$ rad/s CW و $v_A = ۲/۳۱$ m/s



شکل مسئله ۵-۱۱۳

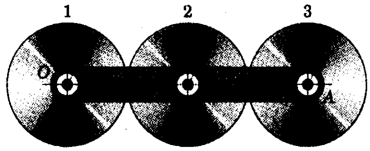
۵-۱۱۴ حرکت غلتک A در مقابل فنر مقید آن، توسط حرکت به طرف پایین پیستون E کنترل می‌شود. در برهه‌ای از حرکت، سرعت E برابر $v = ۰/۲$ m/s است. سرعت A را موقعی که θ به ۹۰° می‌رسد، تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۱۱۴

۵-۱۱۵ سه چرخدنده ۱، ۲ و ۳ به شعاع مساوی روی بازوی دوار مطابق شکل سوار شده‌اند (شکل دندانه‌ها نشان داده نشده‌اند). بازوی OA حول O با سرعت زاویه‌ای ٤ rad/s در جهت ساعتگرد دوران می‌کند. در حالیکه چرخدنده ۱ مستقلا با سرعت ۸ rad/s در جهت پادساعتگرد در دوران است. سرعت زاویه‌ای چرخدنده ۳ را تعیین کنید.

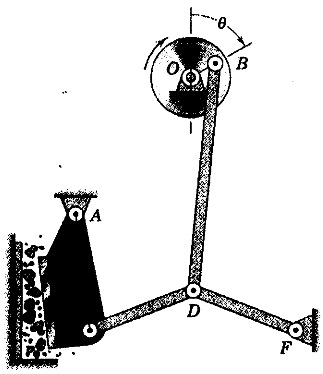
جواب $\omega_۳ = ۸$ rad/s CCW



شکل مسئله ۵-۱۱۵

۵-۱۱۶ ◀ در موقعیت $\theta = ۶۰°$ سرعت زاویه‌ای ω کوبه سنگ شکن AE را تعیین کنید. لنگ OB دارای سرعت زاویه‌ای ۶۰ rev/min می‌باشد. موقعی که B در پایین مسیر دایره‌ای شکل قرار دارد، D و E بر روی خط افقی که از F می‌گذرد، قرار گرفته و خطوط BD و AE در راستای قائم هستند. اندازه‌ها عبارتند از: $\overline{OB} = ۱۰۰$ mm، $\overline{BD} = ۷۵۰$ mm و $\overline{AE} = \overline{ED} = \overline{DF} = ۳۷۵$ mm. با دقت، پیکره را ترسیم نموده و از روش مرکز آنی بدون سرعت استفاده نمایید.

جواب $\omega = ۱/۱۱$ rad/s CW

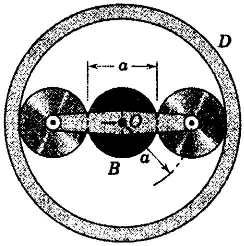


شکل مسئله ۵-۱۱۶

۵-۱۱۷ ◀ محور متصل به O بازوی OA را با سرعت ۹۰ rev/min در جهت ساعتگرد حول یاتاقان ثابت O به دوران در می‌آورد. با استفاده از روش مرکز آنی بدون سرعت، سرعت دورانی چرخ‌دنده B (دندانه‌های چرخ‌دنده نشان داده نشده‌اند) را در حالات زیر بدست آورید: (الف) چرخ‌دنده حلقه‌ای D ثابت باشد و (ب) چرخ‌دنده حلقه‌ای D حول O با سرعت ۸۰ rev/min در جهت پادساعتگرد دوران نماید.

جواب (الف) ω_B = ۳٦۰ rev/min

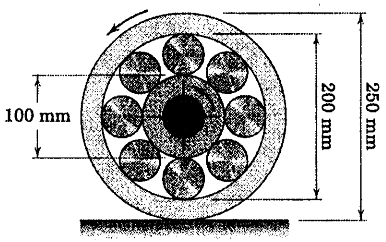
(ب) ω_B = ٦۰۰ rev/min



شکل مسئله ۵-۱۱۷

۵-۱۱۸ ◀ بلبرینگ غلتکی بزرگی که سرعت مرکز O آن به سمت چپ برابر ۰/۹ m/s می‌باشد، بر روی طوقه خارجی خود می‌غلتد. در همان زمان، محور مرکزی و طوقه داخلی با سرعت زاویه‌ای ۲٤۰ rev/min در جهت پادساعتگرد دوران می‌کنند. سرعت زاویه‌ای ω هر کدام از غلتکها را تعیین کنید.

جواب ω = ۱۰/۷۳ rad/s CW



شکل مسئله ۵-۱۱۸

۶-۵ شتاب نسبی

شتاب نسبی را می‌توان با استفاده از رابطه سرعت نسبی $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ برای دو نقطه A و B در حرکت صفحه‌ای موقعی که محورهای مرجع چرخش نمی‌کنند و با مشتق گیری نسبت به زمان یعنی $\dot{\mathbf{v}}_A = \dot{\mathbf{v}}_B + \dot{\mathbf{v}}_{A/B}$ بدست آورد یا می‌توان چنین نوشت:

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}} \qquad (۵-۷)$$

رابطه ۵-۷ بیان می‌کند که شتاب نقطه A برابر است با مجموع برداری شتاب نقطه B بعلاوه شتابی که A از دید ناظر متحرک غیر دوار واقع در B دارد.

شتاب نسبی ناشی از دوران

اگر نقاط A و B در صفحه حرکت بر روی یک جسم صلب واحد واقع شوند، فاصله r بین آنها ثابت بوده و در نتیجه، همانگونه که در روابط سرعت نسبی در بخش ٤-٥ دیدیم، ناظر متحرک واقع در B ، حرکت A را به صورت مسیر مدوری حول نقطه B می‌بیند. از حرکت نسبی دایره‌ای شکل، چنین نتیجه می‌شود که شتاب نسبی دارای دو مولفه، شتاب عمودی در جهت A به طرف B ناشی از تغییر جهت $\mathbf{v}_{A/B}$ و شتاب مماسی عمود بر AB ناشی از تغییر مقدار $\mathbf{v}_{A/B}$ می‌باشد. این مولفه‌های شتاب که در رابطه ۲-۵ آمده‌اند، قبلاً در بخش ۵-۲ بیان شدند و اکنون بایستی کاملاً آشنا شده باشید. بنابراین می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t} \qquad (۵-۸)$$

که در آن مقادیر مولفه‌های شتاب عبارتند از:

$$\boxed{\begin{aligned}(a_{A/B})_n &= v_{A/B}^2/r = r\omega^2\\ (a_{A/B})_t &= \dot{v}_{A/B} = r\alpha\end{aligned}} \qquad (۵-۹)$$

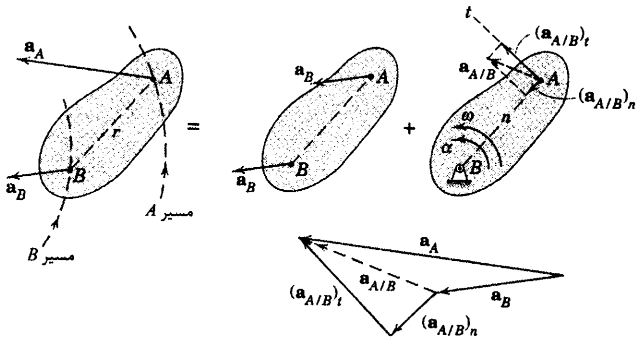
یا به صورت برداری، مولفه‌های شتاب عبارتند از:

$$\boxed{\begin{aligned}(\mathbf{a}_{A/B})_n &= \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})\\ (\mathbf{a}_{A/B})_t &= \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r}\end{aligned}} \qquad (۵-۹a)$$

در این روابط، $\boldsymbol{\omega}$ سرعت زاویه‌ای و $\boldsymbol{\alpha}$ شتاب زاویه‌ای جسم است. بردار موقعیت A از B برابر $\mathbf{r}$ می‌باشد. باید به این نکته توجه کنیم که عبارتهای شتاب *نسبی* به سرعت زاویه‌ای *مطلق* و شتاب زاویه‌ای *مطلق* بستگی دارند.

تفسیر معادله شتاب نسبی

مفهوم روابط ۸-۵ و ۹-۵ در شکل ۹-۵ نشان داده شده است که در آن نقاط A و B از جسم صلبی در حرکت صفحه‌ای بر روی مسیرهای منحنی الخط مجزایی با شتاب‌های مطلق $\mathbf{a}_A$ و $\mathbf{a}_B$ حرکت می‌کنند. برخلاف سرعت‌ها، شتاب‌های $\mathbf{a}_A$ و $\mathbf{a}_B$ عموماً در نقاط A و B مماس بر مسیرهای منحنی الخط نیستند. شکل نشان می‌دهد که شتاب نقطه A شامل دو قسمت است: شتاب نقطه B و شتاب A نسبت به B . شکلی که نقطه مرجع را به صورت ثابت نشان دهد برای تعیین جهت صحیح هر یک از دو مولفه شتاب نسبی مفید است.



شکل ۹-۵

به طریق دیگر می‌توانیم رابطه شتاب را به ترتیب عکس بنویسیم که در آن محورهای مرجع غیر دوار را به جای B در A قرار می‌دهیم. به این ترتیب چنین نوشته می‌شود:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

که در آن $\mathbf{a}_{B/A}$ و مولفه‌های n و t آن برابر منهای $\mathbf{a}_{A/B}$ و مولفه‌های n و t آن می‌باشند. برای فهم بهتر این تحلیل، شما باید تصویر متناظر شکل ۹-۵ را بر مبنای انتخاب جدید ترسیم نمایید.

حل معادله شتاب نسبی

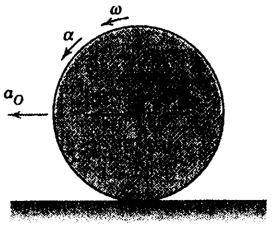
همانند رابطه سرعت نسبی، می‌توانیم معادله ۸-۵ را با سه روش مختلف حل نماییم، به روشهای جبر اسکالر و هندسی، جبر برداری و ترسیمی. آشنایی با هر سه روش مفید و خوب است. در هر حال باید، شکلی از چند ضلعی برداری با دقت رسم کنید که معرف رابطه برداری باشد تا ترکیب ابتدا به انتهای بردارها با رابطه برداری سازگاری داشته باشد. ابتدا باید بردارهای معلوم با هم جمع شوند و بردارهای مجهول، مسدود کننده چند ضلعی برداری باشند. ضروری است که بردارها را در جهت هندسی آنها تجسم و ترسیم نموده، آنگاه با انجام این عمل مفهوم کامل رابطه شتاب را دریافت خواهید کرد.

قبل از حل باید معلوم‌ها و مجهول‌ها را شناسایی کنیم، و به یاد داشته باشیم هنگامی که مجهول‌ها به دو کمیت اسکالر تقلیل می‌یابد، حل معادله برداری در دو بعد میسر خواهد شد. این کمیت‌ها می‌تواند مقدار یا جهت هر کدام از جمله‌های معادله برداری باشند. مشاهده می‌کنیم موقعی که دو نقطه در مسیرهای منحنی در حرکت باشند، به طور کلی شش کمیت اسکالر برای قرار دادن در رابطه ۸-۵ وجود خواهند داشت که باید بحساب آیند.

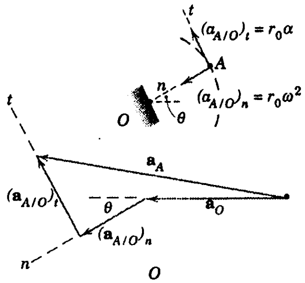
چون مولفه‌های شتاب عمودی بستگی به سرعت‌ها دارند، معمولاً لازم است که قبل از محاسبه شتاب، سرعت‌ها را حساب کنید. نقطه مرجع در رابطه شتاب نسبی اغلب نقطه‌ای از جسم انتخاب می‌شود که یا شتابش مشخص باشد یا بتوان شتاب آن نقطه را به راحتی بدست آورد. باید دقت نمود که از مرکز آنی بدون سرعت به عنوان نقطه مرجع *استفاده ننماییم*، مگر شتابش مشخص یا قابل محاسبه باشد.

مرکز آنی بدون شتاب برای یک جسم صلب در حرکت کلی در صفحه وجود دارد، اما در اینجا بحث نمی‌شود. زیرا استفاده از آن قدری تخصصی است.

مسئله نمونه ۱۳-۵



چرخی به شعاع r بدون لغزش به سمت چپ در غلتش بوده و در لحظه مورد نظر، مرکز O دارای سرعت $\mathbf{v}_O$ و شتاب $\mathbf{a}_O$ به سمت چپ می‌باشد. شتاب نقاط A و C بر روی چرخ را در لحظه مورد نظر تعیین کنید.



حل: قبلاً از تحلیل مسئله نمونه ٤-۵ سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای چرخ معلوم شدند که برابرند با:

$$\omega = v_O / r \quad , \quad \alpha = a_O / r$$

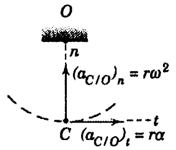
شتاب نقطه A بر حسب شتاب داده شده نقطه O چنین نوشته می‌شود:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{A/O} = \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{A/O})_n + (\mathbf{a}_{A/O})_t$$

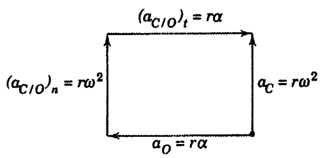
جمله‌های شتاب نسبی با فرض O به عنوان نقطه‌ای ثابت، و برای این حرکت دایره‌ای، مقادیر چنین خواهند بود:

$$(a_{A/O})_n = r_\circ\omega^2 = r_\circ\left(\frac{v_O}{r}\right)^2$$

$$(a_{A/O})_t = r_\circ\alpha = r_\circ\left(\frac{a_O}{r}\right)$$



و جهت‌های آنها مطابق شکل نشان داده است. ❶



جمع بردارها به صورت انتها به ابتدا، مطابق شکل، $\mathbf{a}_A$ را می‌دهد. در یک مسئله عددی، می‌توانیم ترکیب بردارها را به صورت جبری یا ترسیمی بدست آوریم. عبارت جبری برای مقدار $\mathbf{a}_A$ از جذر گرفتن مجموع مربعات مولفه‌های آن بدست می‌آید. اگر از امتدادهای n و t استفاده کنیم، داریم:

$$a_A = \sqrt{(a_A)_n^2 + (a_A)_t^2}$$

$$= \sqrt{[a_O\cos\theta + (a_{A/O})_n]^2 + [a_O\sin\theta + (a_{A/O})_t]^2}$$ ❷

جواب $$= \sqrt{\left(r\alpha\cos\theta + r_0\omega^2\right)^2 + \left(r\alpha\sin\theta + r_0\alpha\right)^2}$$

اگر بخواهیم می‌توانیم جهت $\mathbf{a}_A$ را نیز بدست آوریم.

شتاب مرکز آنی بدون سرعت C، نقطه‌ای واقع بر چرخ، از عبارت زیر بدست می‌آید.

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_{C/O}$$

که در آن مولفه‌های شتاب نسبی برابرند با $(a_{C/O})_n = r\omega^2$ در جهت C به طرف O و $(a_{C/O})_t = r\alpha$ در جهت راست به دلیل اینکه شتاب زاویه‌ای خط CO حول O در جهت پادساعتگرد می‌باشد. این عبارت‌ها در ترسیمهٔ پایین با هم جمع شده‌اند و مشاهده می‌شود که:

جواب $$a_C = r\omega^2$$ ❸

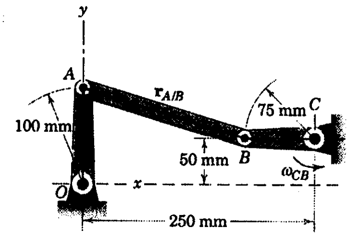
نکات مفید

❶ جهت پادساعتگرد شتاب α از خط OA، جهت مثبت $(a_{A/O})_t$ را تعیین می‌کند. البته جهت مولفه عمودی $(a_{A/O})_n$ به طرف مرکز مرجع O است.

❷ توجه کنید که اگر چرخ با همان سرعت v_O به سمت راست می‌غلتید ولی هنوز شتاب a_O به سمت چپ می‌ماند، a_A تغییر نمی‌کرد.

❸ ملاحظه می‌کنیم که شتاب مرکز آنی بدون سرعت وابسته به α نبوده و جهتش به طرف مرکز چرخ می‌باشد. این نتیجه را بخاطر بسپارید.

مسئله نمونه ۱۴-۵



اهرم بندی مسئله نمونه ۸-۵ در اینجا تکرار شده است. لنگ CB در موقعیت نشان داده شده در فاصله زمانی کوتاه از حرکت، دارای سرعت ثابت ۲ rad/s در جهت پادساعتگرد می‌باشد. شتاب زاویه‌ای لینک‌های AB و OA را در این موقعیت تعیین کنید. مسئله را از روش جبر برداری حل نمایید.

حل: ابتدا سرعت‌هایی را مشخص می‌کنیم که در مسئله نمونه ۸-۵ بدست آوردیم که عبارتند از:

$$\omega_{OA} = -\frac{3}{7}\ \text{rad/s} \qquad , \qquad \omega_{AB} = -\frac{6}{7}\ \text{rad/s}$$

که در آن جهت پادساعتگرد (جهت $+\mathbf{k}$) مثبت گرفته شده است. رابطه شتاب برابر است با:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t$$

که از روابط ۳-۵ و ۹a-۵ می‌توانیم بنویسیم.

❶
$$\begin{aligned}\mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\alpha}_{OA} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}_{OA} \times (\boldsymbol{\omega}_{OA} \times \mathbf{r}_A)\\ &= \alpha_{OA}\,\mathbf{k} \times 100\mathbf{j} + (-3/7\,\mathbf{k}) \times (-3/7\,\mathbf{k} \times 100\mathbf{j})\\ &= -100\,\alpha_{OA}\,\mathbf{i} - 100(3/7)^2\,\mathbf{j}\ \text{mm/s}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times (\boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_B)\\ &= \mathbf{0} + 2\,\mathbf{k} \times (2\,\mathbf{k} \times [-75\,\mathbf{i}])\\ &= 300\,\mathbf{i}\ \text{mm/s}^2\end{aligned}$$

❷
$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_{A/B})_n &= \boldsymbol{\omega}_{AB} \times (\boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B})\\ &= -\frac{6}{7}\mathbf{k} \times [(-\frac{6}{7}\mathbf{k}) \times (-175\,\mathbf{i} + 50\,\mathbf{j})]\\ &= \left(\frac{6}{7}\right)^2 (175\mathbf{i} - 50\,\mathbf{j})\ \text{mm/s}^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}_{A/B})_t &= \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{A/B}\\ &= \alpha_{AB}\,\mathbf{k} \times (-175\,\mathbf{i} + 50\,\mathbf{j})\\ &= -50\alpha_{AB}\,\mathbf{i} - 175\alpha_{AB}\,\mathbf{j}\ \text{mm/s}^2\end{aligned}$$

حال این نتایج را در رابطه شتاب نسبی قرار داده و ضرایب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ طرفین را مساوی هم قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}-100\alpha_{OA} &= 429 - 50\alpha_{AB}\\ -18.37 &= -36.7 - 175\alpha_{AB}\end{aligned}$$

نتایج چنین هستند:

جواب $\alpha_{AB} = -0.1050 \ \text{rad/s}^2 \quad , \quad \alpha_{OA} = -4.34 \ \text{rad/s}^2$

چون بردار یکه **k** عمود بر صفحه کاغذ و در جهت مثبت z می‌باشد، مشاهده می‌گردد که شتاب زاویه‌ای AB و OA هر دو در جهت ساعتگرد (منفی) هستند.

به دانشجو توصیه می‌گردد که شکل هر یک از بردارهای شتاب را با نسبت هندسی مناسب خود، مطابق رابطه شتاب نسبی رسم کنید تا مفهوم حل مسئله روشن‌تر گردد.

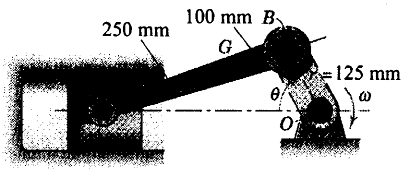
نکات مفید

❶ *به یاد داشته باشید که ترتیب عبارت‌ها در ضرب برداری حفظ شود.*

❷ *در عبارت $\mathbf{a}_{A/B}$ ، مطمئن شوید که $\mathbf{r}_{A/B}$ برداری از B به طرف A نوشته شده باشد و نه بالعکس.*

مسئله نمونه ۱۵-۵

مکانیزم لنگ ـ لغزنده مسئله نمونه ۹-۵ در اینجا تکرار شده است. لنگ OB دارای سرعت زاویه‌ای ثابت 1500 rev/min در جهت ساعتگرد می‌باشد. در لحظه‌ای که زاویه لنگ θ برابر ۶۰° است، شتاب پیستون A و شتاب زاویه‌ای شاتون AB را تعیین کنید.



حل: شتاب A می‌تواند بر حسب شتاب پین لنگ B بیان گردد. بنابراین:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + (\mathbf{a}_{A/B})_n + (\mathbf{a}_{A/B})_t$$

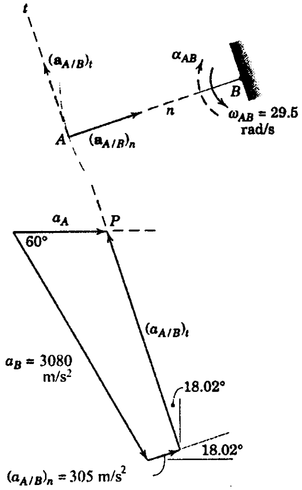
نقطه B دایره‌ای به شعاع 125 mm را با سرعت ثابت طی می‌کند به طوری که تنها مولفه شتاب عمودی آن در جهت B به طرف O برابر است با: ❶

$$[a_n = r\omega^2] \qquad a_B = 0.125\left(\frac{1500[2\pi]}{60}\right)^2 = 3080 \ \text{m/s}^2$$

مطابق شکل، جمله‌های شتاب نسبی را با در نظر گرفتن چرخش A روی دایره‌ای نسبت به B که ثابت فرض شده، در نظر می‌گیریم. از مسئله نمونه ۹-۵، سرعت زاویه‌ای AB در چنین شرایطی برابر است با: $\omega_{AB} =$ ۲۹/۵ rad/s . بنابراین:

$$[a_n = r\omega^2] \qquad (a_{A/B})_n = 0.350(29.5)^2 = 305 \ \text{m/s}^2$$ ❷

که جهش از A به طرف B می‌باشد. مولفه مماسی $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ فقط جهتش معلوم است زیرا مقدار آن به شتاب زاویه‌ای مجهول AB بستگی دارد. همچنین جهت $\mathbf{a}_A$ معلوم است زیرا پیستون مجبور به حرکت در امتداد محور افقی سیلندر می‌باشد. اکنون فقط دو مجهول در طرفین معادله باقی می‌ماند. یکی مقدار $\mathbf{a}_A$ و دیگری $(\mathbf{a}_{A/B})_t$. بنابراین می‌توان مسئله را حل نمود.



اگر راه حل جبری را با استفاده از هندسه چند ضلعی شتاب انتخاب کنیـــم، ابتدا زاویه بین AB و افق را محاسبه می‌کنیم. از قانون سینوسها، این زاویـــه ۱۸/۰۲° می‌شود. با مساوی قرار دادن مولفه‌های افقی و عمودی جمله‌ها در معادلـــه شـتاب، همانطور که از چند ضلعی شتاب مشاهده می‌شود، داریم:

$$a_A = 3080\cos 60° + 305\cos 18.02° - (a_{A/B})_t \sin 18.02°$$
$$0 = 3080\sin 60° - 305\sin 18.02° - (a_{A/B})_t \cos 18.02°$$

با حل معادلات فوق مقادیر زیر بدست می‌آید.

جواب $\quad a_A = 994\ \text{m/s}^2 \quad$ و $\quad (a_{A/B})_t = 2710\ \text{m/s}^2$

با تعیین جهت $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ که از ترسیمه نیز بدست می‌آید، شتـاب زاویـه‌ای AB از شکل که دوران نسبت به B را نشان می‌دهد، چنین نتیجه می‌شود:

جواب ساعتگرد $\quad [\alpha = a_t/r] \qquad \alpha_{AB} = \dfrac{2710}{0.350} = 7740\ \text{rad/s}^2$

❸ اگر راه حل ترسیمی را انتخاب کنیم، با بردارهای معلوم $\mathbf{a}_B$ و $(\mathbf{a}_{A/B})_n$ شروع کرده و با استفاده از مقیاس مناسب آنها را با روش انتها به ابتدا جمع می‌کنیم. سپس جهت $(\mathbf{a}_{A/B})_t$ را از انتهای آخرین بردار مشخص می‌کنیم. حل معادلـــه، توسـط نقطه P از تقاطع آخرین خط با خط افقی که از جهت معلوم جمع برداری $\mathbf{a}_A$ مشخص گردیده، بدست می‌آیـد. بـا مقیـاس مناسب از روی ترسیمه، مقادیری بدست می‌آیند که با مقادیر محاسبه شده مطابقت دارند.

جواب $\quad (a_{A/B})_t = 2710\ \text{m/s}^2 \quad$ و $\quad a_A = 994\ \text{m/s}^2$

نکات مفید

❶ *اگر لنگ OB دارای شتاب زاویه‌ای می‌بود، $\mathbf{a}_B$ نیز دارای شتاب مماسی می‌گردید.*

❷ *به روش دیگر می‌توان از رابطه $a_n = v^2/r$ برای محاسبه $(a_{A/B})_n$ استفاده نمود. به شرط آنکه به جای v، از سرعت نسبی $v_{A/B}$ استفاده گردد.*

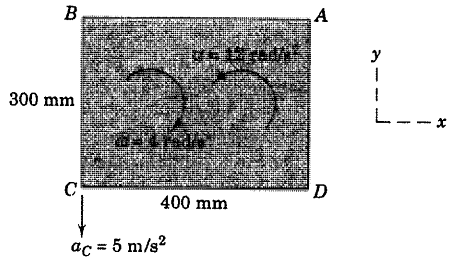
❸ *به استثنای مواردی که دقت زیاد نیاز دارد، در استفاده از روش ترسیمی تردید نداشته باشید، زیرا روش سریع می‌باشد و برداشتی روشن از روابط فیزیکی بین بردارها می‌دهد. البته بردارهای معلوم را به هر ترتیبی که در رابطه حاکم صدق نماید، می‌توان با هم جمع کرد.*

مسائل

مسائل مقدماتی

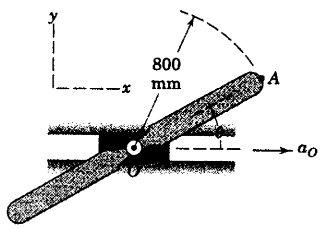
۵-۱۱۹ در لحظه نشان داده شده، لبه C یک ورق مستطیلی شکل شتابی برابر $۵\ \text{m/s}^2$ در خلاف جهت y داشته و صفحه دارای سرعت زاویه‌ای $٤\ \text{rad/s}$ در جهت ساعتگرد می‌باشد که با میزان $۱۲\ \text{rad/s}$ در هر ثانیه کاهش می‌یابد. شتاب نقطه A را در این لحظه معین کنید. از روشهای هندسه، اسکالر و جبر برداری مسئله را حل کنید.

جواب $a_A = ۱۱/۱۸\ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۱۱۹-۵

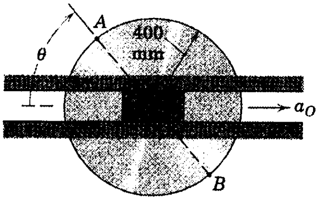
۵-۱۲۰ دو پره روتور که هر یک دارای شعاع $۸۰۰\ \text{mm}$ می‌باشند با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = \dot{\theta} = ۲\ \text{rad/s}$ در جهت پادساعتگرد، حول محور O دوران می‌کنند. در حالیکه محور مزبور روی یک بلوک لغزنده سوار شده است. شتاب لغزنده $a_O = ۳\ \text{m/s}^2$ می‌باشد. مطلوب است مقدار شتاب انتهای A پره در موقعیتهای (الف) $\theta = ۰$ (ب) $\theta = ۹۰^\circ$ و (ج) $\theta = ۱۸۰^\circ$. آیا سرعت O یا جهت ω در محاسبات دخالت دارد؟



شکل مسئله ۱۲۰-۵

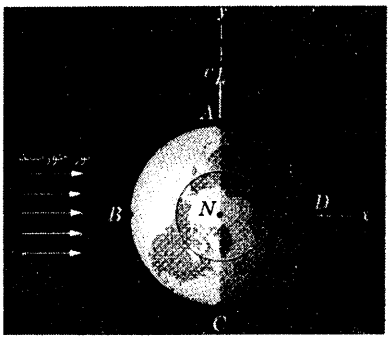
۵-۱۲۱ مرکز O چرخ بر روی یک لغزنده که دارای شتاب $a_O = ۸\ \text{m/s}^2$ به طرف راست می‌باشد، سوار شده است. در موقعیت $\theta = ٤٥^\circ$، $\dot{\theta} = ۳\ \text{rad/s}$ و $\ddot{\theta} = -۸\ \text{rad/s}^2$ است. در این موقعیت مقادیر شتاب نقاط A و B را تعیین کنید.

جواب $a_A = ۹/۵۸\ \text{m/s}^2$ و $a_B = ۹/۰۹\ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۱۲۱-۵

۵-۱۲۲ شتاب نقطه B روی خط استوای کره زمین، مسئله ۵۸-۵ را که در اینجا تکرار شده تعیین کنید. از داده‌های مسئله مذکور استفاده کرده، با این فرض که مدار زمین دایره است و در صورت لزوم از جدول D-۲ استفاده نمایید. مرکز خورشید را ثابت در نظر گرفته و از انحراف محور زمین صرفنظر کنید.



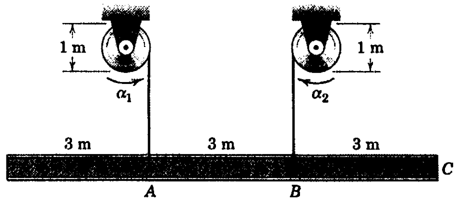
شکل مسئله ۱۲۲-۵

۵-۱۲۳ تیر آهنی به طول $۹\ \text{m}$ توسط دو کابل متصل به A و B از وضعیت افقی بالا کشیده می‌شود. اگر شتاب زاویه‌ای اولیه قرقره‌های بالابر، $\alpha_1 = ۰/۵\ \text{rad/s}^2$ و $\alpha_2 = ۰/۲\ \text{rad/s}^2$ در جهت نشان داده شده باشند، شتاب زاویه‌ای متناظر تیر آهن، شتاب C و فاصله d از B تا نقطه P واقع بر خط مرکزی تیر آهن که دارای شتاب صفر است را تعیین کنید.

جواب $\alpha = ۰/۰۵\ \text{rad/s}^2$ CW

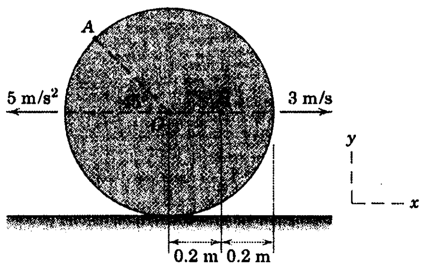
$a_C = ۰/۰۵\ \text{m/s}^2$ بطرف پایین

$d = ۲\ \text{m}$ B بطرف راست



شکل مسئله ۵-۱۲۳

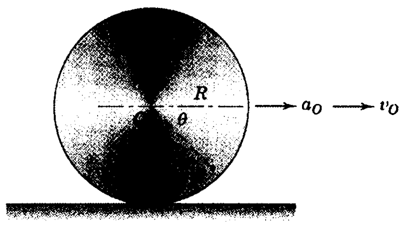
۵-۱۲۴ مرکز O دیسک دارای سرعت و شتاب نشان داده شده در شکل است. اگر دیسک بدون لغزش بر روی سطح افقی بغلتد، سرعت A و شتاب B را در لحظه نشان داده شده تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۱۲۴

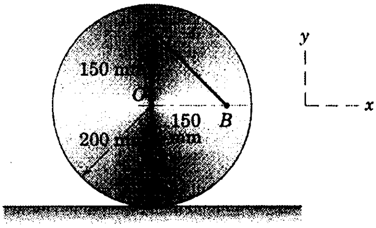
۵-۱۲۵ چرخی به شعاع R بدون لغزش، می‌غلتد و مرکز آن O ، دارای شتاب a_O می‌باشد. فاصله P واقع بر چرخ از مرکز O برابر r می‌باشد. برای مقادیر داده شده a_O ، R و r ، زاویه θ و سرعت v_O چرخ را چنان تعیین کنید که نقطه P در این وضعیت شتابی نداشته باشد.

جواب $\theta = \sin^{-1}\dfrac{r}{R}\ ,\ v_O = \sqrt{\dfrac{R}{r}a_O}\sqrt[4]{R^2 - r^2}$



شکل مسئله ۵-۱۲۵

۵-۱۲۶ دیسک مدور بدون لغزش به طرف چپ می‌غلتد. اگر $\mathbf{a}_{A/B} = -۲/۷\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$ باشد، سرعت و شتاب مرکز O دیسک را بدست آورید.

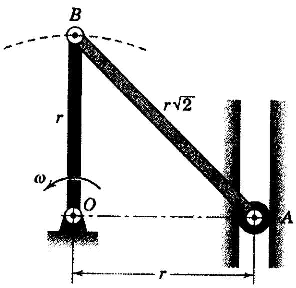


شکل مسئله ۵-۱۲۶

۵-۱۲۷ اتومبیلی با تایرهایی به قطر ۶۰۰ mm با میزان ثابت از حالت سکون شتاب گرفته و در فاصله ۴۰ m سرعتش را به ۶۰ km/h می‌رساند. مقدار شتاب نقطه A روی بالای چرخ را هنگامیکه سرعت اتومبیل به ۱۰ km/h می‌رسد، بدست آورید.

جواب $a_A = ۲۶/۶\ \text{m/s}^2$

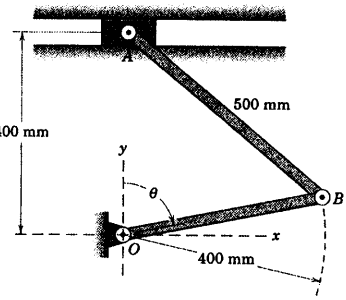
۵-۱۲۸ شتاب زاویه‌ای α_{AB} لینک AB را در موقعیت نشان داده شده، موقعی که لینک OB دارای سرعت زاویه‌ای ثابت ω است، بدست آورید.



شکل مسئله ۵-۱۲۸

۵-۱۲۹ شتاب زاویه‌ای لینک AB و شتاب خطی A را در موقعیت $\theta = ۹۰^\circ$ تعیین نمایید. به شرطی که در آن موقعیت $\dot{\theta} = ۰$ و $\ddot{\theta} = ۳\ \text{rad/s}^2$ باشد. حل خود را با استفاده از نماد برداری انجام دهید.

جواب $\quad \alpha_{AB} = -٤\mathbf{k}\ \text{rad/s}^2$ و $\mathbf{a}_A = ۱/٦\mathbf{i}\ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۵-۱۲۹

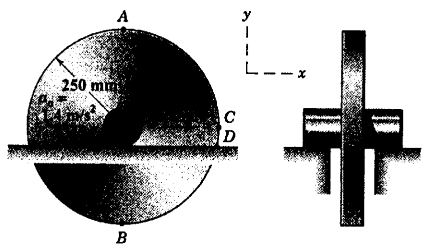
مسائل ویژه

۵-۱۳۰ شتاب زاویه‌ای AB و شتاب خطی A را برای اهرم‌بندی مسئله ۵-۱۲۹ در موقعیت $\theta = ۹۰^\circ$ تعیین کنید؛ به شرطی که در آن موقعیت $\dot{\theta} = ٤\ \text{rad/s}$ و $\ddot{\theta} = ۰$ باشد. حل خود را با استفاده از نماد برداری انجام دهید.

۵-۱۳۱ مجموعه چرخ و محور مسئله ۵-۹۸ در اینجا تکرار شده با این مشخصه اضافی که شتاب مرکز O به سمت چپ، مطابق شکل، برابر $۱/٤\ \text{m/s}^2$ است. اگر محور بدون لغزش روی سطح افقی بغلتد، شتاب نقاط A و D را بدست آورید.

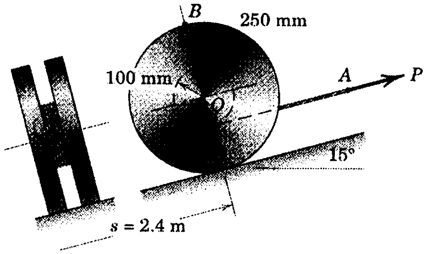
جواب $\quad \mathbf{a}_A = -۸/٤\mathbf{i} - ٦٤\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$

$\mathbf{a}_D = -٦۲/۷\mathbf{i} + ۱۹/٦٦\mathbf{j}\ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۵-۱۳۱

۵-۱۳۲ تحت تاثیر نیروی ثابت P که به نقطه A از کابل قرقره وارد می‌شود، مرکز O قرقره از حالت سکون شروع به حرکت به سمت بالا نموده و پس از طی مسافت $۲/٤\ \text{m}$ با شتاب ثابت، سرعت $۱/۲\ \text{m/s}$ را بدست می‌آورد. کابل با کشش کافی دور قرقره پیچیده شده و قرقره بدون لغزش می‌غلتد. در موقعیتی که قرقره مسافت $۲/٤\ \text{m}$ را پیموده است، شتاب نقطه A کابل و نقطه B قرقره را حساب کنید.

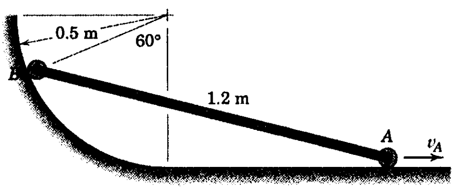


شکل مسئله ۵-۱۳۲

۵-۱۳۳ میله AB مسئله ۵-٦۸ در اینجا تکرار شده است. اگر سرعت نقطه A به سمت راست $۳\ \text{m/s}$ و برای مدتی از زمان از جمله موقعیت نشان داده شده، ثابت باشد. شتاب مماسی نقطه B در امتداد مسیر حرکت آن و همچنین شتاب زاویه‌ای میله را بدست آورید.

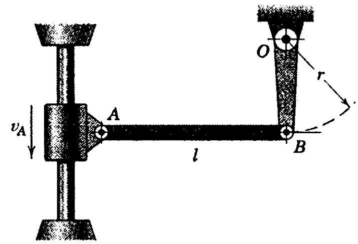
جواب $\quad (a_B)_t = -۲۳/۹\ \text{m/s}^2$

$\alpha = ۳٦/۲\ \text{rad/s}^2\ \ \text{CW}$



شکل مسئله ۵-۱۳۳

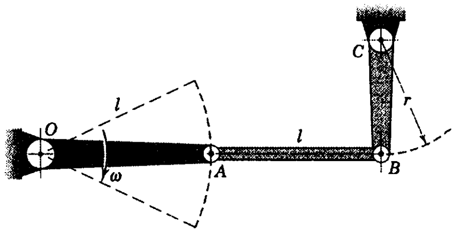
۵-۱۳۴ غلاف لغزنده بـه طرف بـالا و پـایین شـافت عمودی می‌لغـزد و بـاعث نوسـان لـنگ OB می‌شـود. اگر در موقعیت خنثی که AB افقی و OB قائـم است، سـرعت A در حال تغییر نباشد، شتاب زاویه‌ای OB را در آن موقعیت بدست آورید.



شکل مسئله ۵-۱۳۴

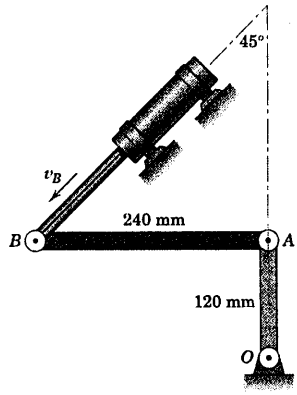
۵-۱۳۵ لنگ OA بین موقعیت‌های خط چین نشان داده شده نوسان نموده و از طریق لینک واسـط AB بـاعث حرکـت زاویه‌ای کوچک لنگ BC می‌گردد. موقعی که OA از موقعیـت افقی عبـور می‌نمـاید، AB افقی و BC قـائم بـوده و سـرعت زاویه‌ای آن ω و شتاب زاویه‌ای‌اش صفر است. شتاب زاویه‌ای BC را در این وضعیت بدست آورید.

جواب $\alpha = \dfrac{۲l\omega^۲}{r}$ CW



شکل مسئله ۵-۱۳۵

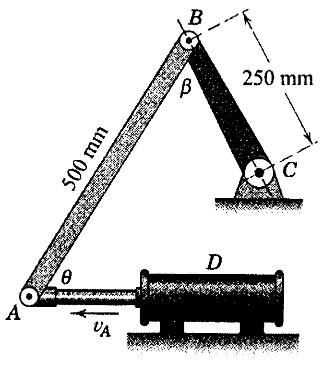
۵-۱۳۶ سیلندر هیدرولیکی، حرکتی را به B می‌دهد که خود باعث دوران لینک OA می‌گردد. در لحظه نشان داده شده که OA قائم و AB افقی است، سرعت v_B بین B برابـر ۴ m/s و با میزان ۲۰ m/s^2 در حال افزایـش اسـت. در ایـن موقعیـت شتاب زاویه‌ای OA را بدست آورید.



شکل مسئله ۵-۱۳۶

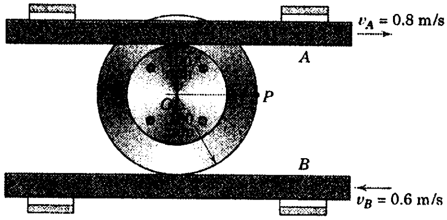
۵-۱۳۷ اهرم بندی مسئله ۵-۶۹ مجددا در اینجا نشـان داده شده است. برای لحظه‌ای که $\theta = \beta = ۶۰°$ است، سیلندر هیدرولیکی به A سرعت $v_A = ۱/۲$ m/s را می‌دهد که با میزان ۰/۹ m/s در هر ثانیه افزایـش می‌یـابد. در ایـن لحظـه شـتاب زاویه‌ای لینک BC را تعیین کنید.

جواب $\alpha_{BC} = ۲/۰۸$ rad/s^2 CCW



شکل مسئله ۵-۱۳۷

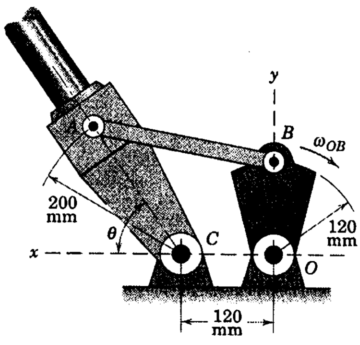
۵-۱۳۸ میله‌های لغزنده A و B با لبه‌های چرخهای دو تکه بدون لغزش درگیر شده‌اند. اگر علاوه بر اطلاعات نشان داده شده، میله A دارای شتاب $2\ m/s^2$ به طرف راست و میله B بدون شتاب باشد، مقدار شتاب P را در لحظه مشخص شده، بدست آورید.



شکل مسئله ۵-۱۳۸

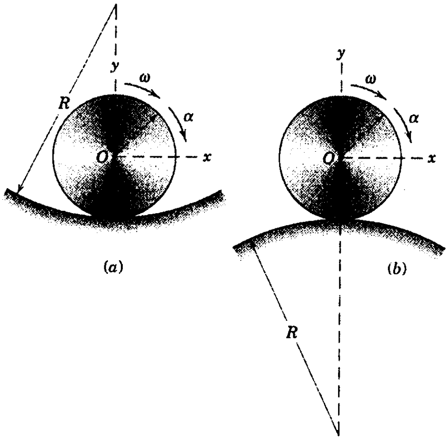
۵-۱۳۹ مکانیزم بکار برده شده در بازوی مغناطیس‌سنج فضاپیمای مسئله ۵-۸۱ در اینجا مجددا نشان داده شده است. لینک محرک OB موقعی که از موقعیت قائم عبور می‌کند، دارای سرعت زاویه‌ای ثابت ω_{OB} برابر ۰/۵ rad/s در جهت ساعتگرد می‌باشد. شتاب زاویه‌ای α_{CA} بازوی محرک را در موقعیت نشان داده شده، یعنی $\tan\theta = \frac{۴}{۳}$ تعیین کنید.

جواب $\alpha_{CA} = -۰/۰۷۵۸\mathbf{k}\ rad/s^2$



شکل مسئله ۵-۱۳۹

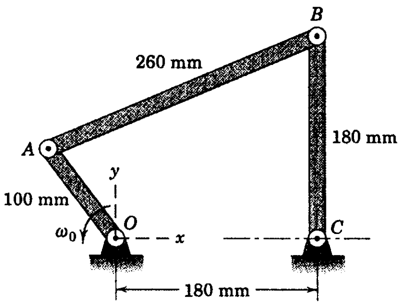
۵-۱۴۰ اگر در هر دو حالت چرخ بر روی سطح دایره‌ای بدون لغزش بغلتد، شتاب نقطه C واقع بر چرخ را که به طور لحظه‌ای با سطح دایره‌ای در تماس است، تعیین کنید. چرخ دارای سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α می‌باشد.



شکل مسئله ۵-۱۴۰

۵-۱۴۱ اهرم‌بندی مسئله ۵-۸۳ مجددا در اینجا نشان داده شده است. اگر OA دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_0 = ۱۰$ rad/s در جهت پادساعتگرد باشد، شتاب زاویه‌ای لینک AB را در موقعیتی که مختصات A، $x = -۶۰$ mm و $y = ۸۰$ mm می‌باشند، حساب کنید. مسئله را به روش جبر برداری حل کنید (از نتایج مسئله ۵-۸۳ برای سرعت زاویه‌ای AB و BC استفاده کنید که برابر $\omega_{BC} = ۵/۸۳\mathbf{k}$ rad/s و $\omega_{AB} = ۲/۵\mathbf{k}$ rad/s است).

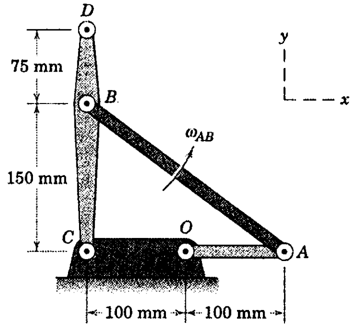
جواب $\alpha_{AB} = ۱۰/۴۲\mathbf{k}\ rad/s^2$



شکل مسئله ۵-۱۴۱

۵-۱۴۲ شکل مسئله ۵-۸۰ در اینجا با اضافه شدن محورهای مرجع تکرار می‌شود. اگر در لحظه نشان داده شده، سرعت زاویه‌ای لینک AB ثابت و برابر ۴۰ rad/s در جهت پادساعتگرد باشد، شتاب زاویه‌ای AO و شتاب نقطه D را

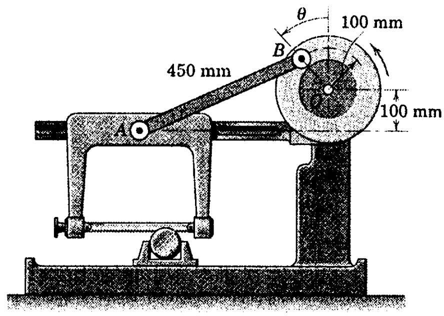
تعیین کنید. نتایج خود را به صورت برداری بیان کنید.



شکل مسئله ۵-۱۴۲

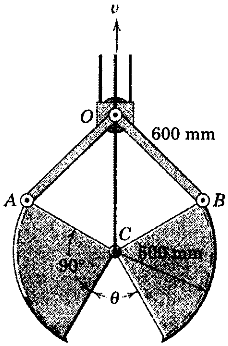
۵-۱۴۳ اجزای یک اره لنگ برقی در شکل نشان داده شده‌اند. تیغه اره بر روی یک قاب که در امتداد راهنمای افقی می‌لغزد، سوار شده است. اگر موتور، چرخ‌طیار را با سرعت ثابت ۶۰ rev/min در جهت پادساعتگرد بـه دوران درآورد. شتاب را در موقعیت $\theta = ۹۰°$ تعیین کنید و شتاب زاویه‌ای متناظر لینک AB را بیابید.

جواب $a_A = ۴/۸۹\ \text{m/s}^2$ و $\alpha_{AB} = ۰/۴۶۷\ \text{rad/s}^2$ CCW



شکل مسئله ۵-۱۴۳

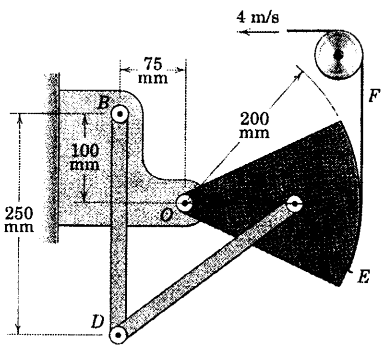
۵-۱۴۴ اجزای بیل چنگکی ساده شده یک ماشین لایروبی نشان داده شده است. با فرض ثابت بودن قطعه O و با در نظر گرفتن سرعت ثابت v برای کابل کنترل C برابر ۰/۵ m/s، شتاب زاویه‌ای بیل سمت راست را موقعی که $\theta = ۴۵°$ و چنگک در حال بسته شدن می‌باشد، تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۱۴۴

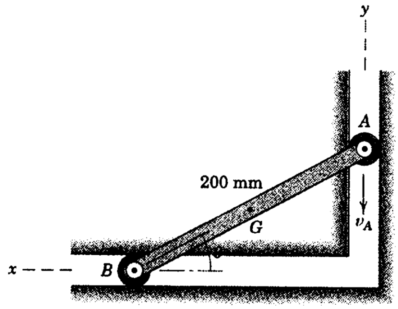
۵-۱۴۵ مکانیزم مسئله ۵-۱۱۲ در اینجا مجدداً تکرار شده که در آن نوار انعطاف پذیر F متصل به قطاع در E مطابق شکل دارای سرعت ثابت ۴ m/s می‌باشد. در لحظه‌ای که BD عمود بر OA می‌باشد، شتاب زاویه‌ای BD را تعیین کنید.

جواب $\alpha_{BD} = ۴۶/۹\ \text{rad/s}^2$ CW



شکل مسئله ۵-۱۴۵

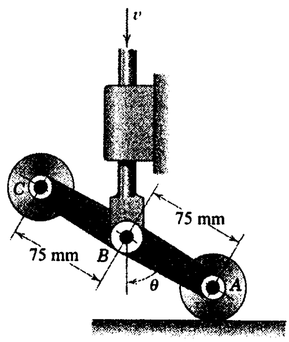
۵-۱۴۶ اگر انتهای A از میله مقید، هنگامیکه از موقعیت $\theta = ۳۰°$ می‌گذرد دارای سرعت رو به پایین v_A برابر ۲ m/s باشد، شتاب مرکز جرم G که در وسط میله واقع شده است را تعیین کنید. جواب بدست آمده از روش جبر برداری را با جواب بدست آمده از روش هندسه برداری مقایسه کنید.



شکل مسئله ۵-۱۴۶

۵-۱۴۷ ◀ اجزای وسیله سوییچ کننده مسئله ۵-۷۸ در اینجا نشان داده شده است. اگر سرعت v میله کنترل در موقعیت $\theta = ۶۰°$ برابر ۰/۹ m/s بوده و با میزان ۶ m/s² در حال کاهش باشد، مقدار شتاب C را تعیین کنید.

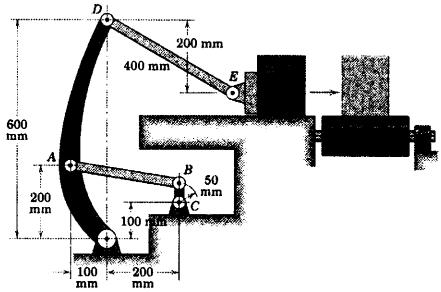
جواب $a_C = ۲۳/٤ \text{ m/s}^2$



شکل مسئله ۵-۱۴۷

۵-۱۴۸ ◀ مکانیزم هل دادن جعبه‌های کوچک در خط مونتاژ به طرف تسمه نقاله در شکل نشان داده شده که در آن بازوی OD و لنگ CB در موقعیت قائم‌شان هستند. در موقعیت نشان داده شده، لنگ CB دارای سرعت زاویه‌ای ثابت π rad/s در جهت ساعتگرد می‌باشد. شتاب E را بدست آورید.

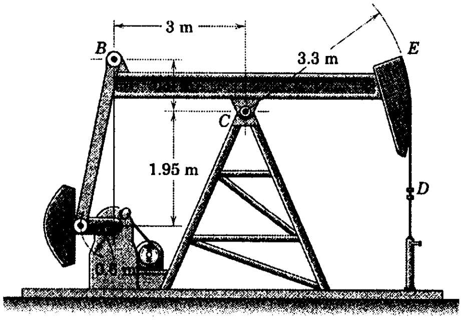
جواب $a_E = ۰/۲۸۵ \text{ m/s}^2$



شکل مسئله ۵-۱۴۸

۵-۱۴۹ ◀ یک دستگاه پمپاژ نفت در شکل نشان داده شده است. میله انعطاف پذیر D در نقطه E به قطاع متصل شده و به هنگام ورود به «فیتینگ» در زیر D همواره به صورت قائم است. هنگامیکه لنگ وزنه‌ای OA دوران می‌کند، لینک AB سبب نوسان تیر BCE می‌گردد. اگر OA دارای سرعت ثابت ۱ دور در هر ۳ ثانیه در جهت ساعتگرد باشد، شتاب میله پمپ D را در موقعی که تیر و لنگ OA هر دو در وضعیت افقی نشان داده شده می‌باشند، تعیین کنید.

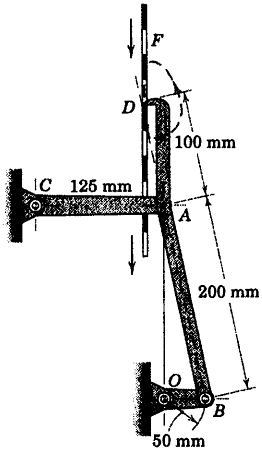
جواب $a_D = ۰/۵٦۸ \text{ m/s}^2$ بطرف پایین



شکل مسئله ۵-۱۴۹

۱۵۰-۵ ◀ مکانیزم حرکت مقطعی برای راندن نوار سوراخ‌دار F، متشکل از لینک DAB است که حرکت خود را از لینک OB اخذ می‌کند. مسیر حرکت انگشتانه D توسط خط چین نشان داده شده است. چنانچه در لحظه نشان داده شده OB دارای سرعت دورانی ثابت ۱۲۰ rev/min در جهت ساعتگرد بوده و OB و CA هر دو مطابق شکل در موقعیت افقی قرار گیرند، شتاب D را تعیین کنید.

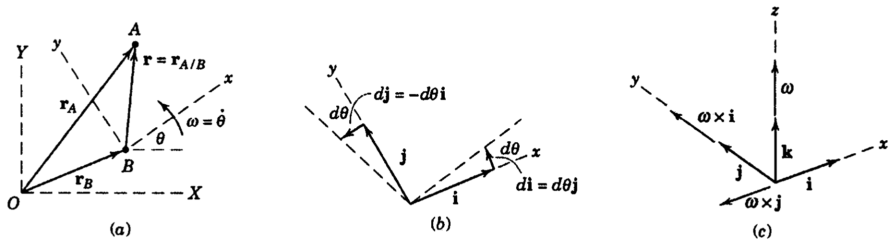
جواب $a_D =$ ۱۹۹۷ mm/s^2



شکل مسئله ۱۵۰-۵

۵-۷ حرکت نسبت به محورهای در حال دوران

در بحث حرکت نسبی ذرات در بخش ۸-۲ و در استفاده از روابط حرکت نسبی در حرکت صفحه‌ای اجسام صلب در فصل حاضر، تمام سرعت‌های نسبی و شتاب‌های نسبی از محورهای مرجع *غیر دوار* اندازه‌گیری شدند. بسیاری از مسائل سینماتیکی که در آنها حرکت در سیستمی بوجود می‌آید یا از سیستمی مشاهده می‌شود که خود در حال دوران است، با استفاده از محورهای مرجع در حال دوران آسان‌تر حل می‌شوند. یک نمونه از چنین حرکتی، حرکت یک ذره سیال در امتداد پره منحنی یک پمپ گریز از مرکز است که در آن مسیر ذره نسبت به پره‌های پروانه، یک پارامتر مهم در طراحی محسوب می‌شود.



شکل ۱۰-۵

تشریح حرکت با استفاده از محورهای دوار را با ملاحظه حرکت صفحه‌ای دو ذره A و B در صفحه ثابت x-y مطابق شکل ۱۰a-۵ آغاز می‌کنیم. در ابتدا برای عمومیت دادن به مسئله، فرض می‌کنیم A و B مستقل از یکدیگر حرکت می‌کنند. اکنون حرکت A از دستگاه مرجع متحرک x-y مشاهده می‌شود که مبدا آن بر B منطبق بوده و بـا سرعت زاویه‌ای $\omega = \dot{\theta}$ دوران می‌کند. این سرعت زاویه‌ای را می‌توان بصورت بردار $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{k} = \dot{\theta}\,\mathbf{k}$ نوشت که در آن، بردار عمود بر صفحه حرکت بوده و جهت آن مطابق قاعده دست راست در جهت مثبت محور z می‌باشد (به طرف خارج از صفحه). بردار موقعیت مطلق A توسط رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r} = \mathbf{r}_B + (x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}) \qquad (۵-۱۰)$$

که در آن $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بردارهای یکه هستند که به دستگاه x-y متصل بوده و $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ به جای $\mathbf{r}_{A/B}$ یعنی بردار موقعیت A نسبت به B جایگزین شده است.

مشتق زمانی بردارهای یکه

برای بدست آوردن رابطه‌های سرعت و شتاب لازم است به طور متوالی از رابطه بردار موقعیت نسبت به زمان مشتق گرفته شود. بر خلاف آنچه در مورد محورهای انتقالی که در بخش ۸-۲ مطرح شد، در اینجا بردارهای یکه $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ در دوران بوده و بنابراین نسبت به زمان مشتق دارند و باید به حساب آیند. این مشتق‌ها را می‌توان در شکل ۱۰b-۵ مشاهده نمود که تغییر بسیار جزئی هر بردار یکه را در مدت زمان dt، هنگامیکه محورهای مرجع به اندازه $d\theta = \omega\,dt$ دوران نموده است، نشان می‌دهد. تغییر دیفرانسیلی $\mathbf{i}$ عبارت است از $d\mathbf{i}$ که در امتداد $\mathbf{j}$ بوده و مقدارش برابر است با حاصلضرب $d\theta$ در مقدار بردار $\mathbf{i}$ که برابر واحد است. بنابراین $d\mathbf{i} = d\theta\,\mathbf{j}$ است.

بطور مشابه، بردار یکه $\mathbf{j}$ دارای تغییر بسیار جزیی $d\mathbf{j}$ در امتداد منفی x می‌باشد. بنابراین $d\mathbf{j}=-d\theta\,\mathbf{i}$ است. از تقسیم روابط مربوط به dt و جایگزین کردن $d\mathbf{i}/dt$ با $\dot{\mathbf{i}}$ و $d\mathbf{j}/dt$ با $\dot{\mathbf{j}}$ و $d\theta/dt$ با $\omega=\dot{\theta}$، نتیجه می‌شود:

$$\dot{\mathbf{i}}=\omega\,\mathbf{j} \quad \text{و} \quad \dot{\mathbf{j}}=-\omega\,\mathbf{i}$$

با استفاده از ضرب برداری، از شکل ۱۰c-۵ دیده می‌شود که $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i}=\omega\,\mathbf{j}$ و $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}=-\omega\,\mathbf{i}$ است. بنابراین مشتق‌های زمانی بردارهای یکه را می‌توان چنین نوشت:

$$\boxed{\dot{\mathbf{i}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{i} \quad \text{و} \quad \dot{\mathbf{j}}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{j}} \qquad (۵-۱۱)$$

سرعت نسبی

اکنون با استفاده از عبارت‌های معادله ۱۱-۵ موقعی که از رابطه برداری موقعیت A و B مشتق بگیریم رابطه سرعت برداری بدست می‌آید. با مشتق گیری از رابطه ۱۰-۵ داریم:

$$\dot{\mathbf{r}}_A=\dot{\mathbf{r}}_B+\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})$$
$$=\dot{\mathbf{r}}_B+\left(x\dot{\mathbf{i}}+y\dot{\mathbf{j}}\right)+\left(\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}\right)$$

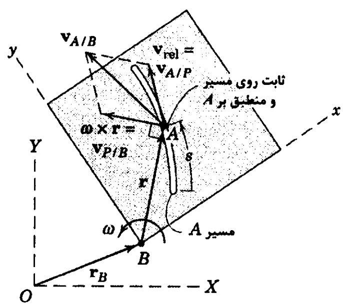
اما $x\,\dot{\mathbf{i}}+y\,\dot{\mathbf{j}}=\boldsymbol{\omega}\times x\,\mathbf{i}+\boldsymbol{\omega}\times y\,\mathbf{j}=\boldsymbol{\omega}\times\left(x\,\mathbf{i}+y\,\mathbf{j}\right)=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ است.

همچنین از آنجایی که ناظر واقع در x-y مولفه‌های سرعت یعنی $\dot{x}$ و $\dot{y}$ را اندازه می‌گیرد، مشاهده می‌شود $\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}=\mathbf{v}_{rel}$ است که سرعت نسبت به دستگاه مرجع x-y می‌باشد. بنابراین رابطه سرعت نسبی چنین می‌گردد:

$$\boxed{\mathbf{v}_A=\mathbf{v}_B+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}+\mathbf{v}_{rel}} \qquad (۵-۱۲)$$

مقایسه معادله ۱۲-۵ با ۲۰-۲، برای محورهای مرجع غیر دوار نشان می‌دهد که $\mathbf{v}_{A/B}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}+\mathbf{v}_{rel}$ بوده و نتیجه می‌شود که عبارت $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ اختلاف سرعت نسبی موقعی که از محورهای غیر دوار اندازه‌گیری می‌شود با موقعی است که از محورهای دوار سنجیده می‌گردد.

برای تجسم مفهوم عبارت آخر معادله ۱۲-۵، حرکت ذره A نسبت به صفحه x-y در شکل ۱۱-۵ نشان داده شده، در حالیکه بجای سیستم در حال دوران x-y از یک قطعه ورق با یک شیار منحنی به عنوان مسیر ذره استفاده شده است. سرعت A که نسبت به ورق، $\mathbf{v}_{rel}$ ، اندازه‌گیری می‌شود، مماس بر مسیر واقع در صفحه x-y بوده و مقدارش $\dot{s}$ است. به طوریکه s در امتداد مسیر اندازه‌گیری می‌شود. این سرعت نسبی را همچنین می‌توان به صورت $\mathbf{v}_{A/P}$ تلقی نمود که سرعت A نسبت به نقطه P می‌باشد. در حالیکه P نقطه‌ای متعلق به صفحه و در لحظه مورد نظر بر نقطه A منطبق است. عبارت $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ دارای مقدار $r\dot{\theta}$ بوده و جهتی عمود بر $\mathbf{r}$ دارد و عبارت است از سرعت P نسبت به B که از دستگاه غیر دوار متصل به B مشاهده می‌گردد.



شکل ۱۱-۵

مقایسه زیر به تفهیم برقراری توازن و اختلاف بین روابط سرعت نسبی را که توسط محورهـای مرجـع دوار و غـیر دوار نوشته می‌شوند، کمک خواهد نمود:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}} \\ \mathbf{v}_A &= \underbrace{\mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{P/B}} + \mathbf{v}_{A/P} \\ \mathbf{v}_A &= \underbrace{\mathbf{v}_P \quad + \mathbf{v}_{A/P}} \\ \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \quad \mathbf{v}_{A/B} \end{aligned} \qquad (۵\text{–}۱۲\mathbf{a})$$

در معادله دوم، جمله $\mathbf{v}_{P/B}$ از موقعیت غیر دوار اندازه‌گیری می‌شود، در غیر اینصورت صفر است. جملـه $\mathbf{v}_{A/P}$ همـان $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ است که در دستگاه x-y اندازه‌گیری می‌گردد. در معادله سوم، $\mathbf{v}_P$ سرعت مطلق P بوده و نشان دهنده هر دو اثر انتقالی و دورانی دستگاه مختصات متحرک است. چهارمین معادله، همان است که بـرای محورهـای غـیر دوار بدسـت آمـد (معادلـه ۲۰–۲) و مشاهده می‌شود که $\mathbf{v}_{A/B} = \mathbf{v}_{P/B} + \mathbf{v}_{A/P} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$ است.

انتقال یک مشتق زمانی

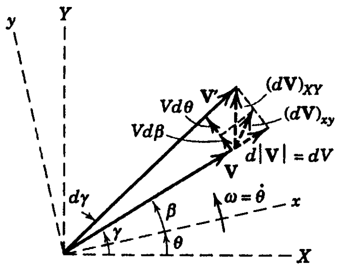
معادله ۱۲–۵ انتقال مشتق زمانی بردار موقعیت را بین محورهای دوار و غیر دوار نشان می‌دهد. این نتیجه را می‌توان به آسانی عمومیت داده و در مورد مشتق زمانی هر کمیت برداری $\mathbf{V}=V_x\mathbf{i}+V_y\mathbf{j}$ بکار برد. بر این منوال، مشتق کامل زمـانی که در مختصات X-Y گرفته می‌شود، برابر است با:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XY} = \left(\dot{V}_x\mathbf{i} + \dot{V}_y\mathbf{j}\right) + \left(V_x\dot{\mathbf{i}} + V_y\dot{\mathbf{j}}\right)$$

دو کمیت اول عبارت، آن بخش از مشتق کامل $\mathbf{V}$ را نشان می‌دهد که نسبت به دستگاه مرجع x-y اندازه‌گیری شده اسـت و کمیت دوم، آن بخش از مشتق را نشان می‌دهد که مربوط به دوران دستگاه مرجع می‌باشد. اکنون با توجـه بـه عبارت‌هـای مربوط به $\dot{\mathbf{i}}$ و $\dot{\mathbf{j}}$ از رابطه ۱۱–۵ می‌توانیم بنویسیم:

$$\boxed{\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XY} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{xy} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}} \qquad (۵\text{–}۱۳)$$

در اینجا $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{V}$ نشان دهنده اختلاف بین مشتق زمانی برداری است که در مرجع ثابت اندازه‌گیری می‌شود، با مشتقی که در مرجع اول اندازه گیری شده است. همانطور که در بخش ۲–۷ در مورد حرکت سه بعدی خواهیم دید، معادله ۱۳–۵ عـلاوه بر دو بعد، در سه بعد نیز صادق است.



شکل ۱۲-۵

مفهوم فیزیکی معادله ۱۳-۵، در شکل ۱۲-۵ روشن شده است که در آن بردار $\mathbf{V}$ در زمان t در هر دو محورهای ثابت X-Y و دوار x-y نشان داده شده است. از آنجایی که فقط با اثرهای دوران سروکار داریم، بدون اینکه عمومیت قضیه از بین برود، بردار می‌تواند از مبدا مختصات نشان داده شود. در مدت زمان dt بردار به موقعیت $\mathbf{V}'$ رسیده، ناظر واقع بر x-y مولفه‌های $d\mathbf{V}$ ناشی از تغییر مقدار آن و $\mathbf{V}d\beta$ ناشی از دوران $d\beta$ آن نسبت به x-y، را اندازه می‌گیرد. سپس از دید ناظر دوار، مولفه‌های مشتق $\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{xy}$ چنین اندازه گیری می‌شود. dV/dt و $V\frac{d\beta}{dt} = V\dot{\beta}$. بخش باقی مانده مشتق کامل نسبت به زمان که توسط ناظر دوار اندازه گیری نمی‌شود، دارای مقدار $V\frac{d\theta}{dt}$ و دارای شکل برداری $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$ می‌باشد. بنابراین، از روی ترسیمه می‌بینیم که:

$$(\dot{\mathbf{V}})_{XY} = (\dot{\mathbf{V}})_{xy} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}$$

که همان معادله ۱۳-۵ است.

شتاب نسبی

معادله شتاب نسبی را می‌توان با مشتق‌گیری از رابطه ۱۲-۵ سرعت نسبی بدست آورد. بنابراین:

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} + \dot{\mathbf{v}}_{\text{rel}}$$

با مشتق گیری از رابطه ۱۲-۵ دیدیم که:

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) = (x\dot{\mathbf{i}} + y\dot{\mathbf{j}}) + (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j})$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

بنابراین، سومین جمله طرف راست معادله شتاب چنین می‌شود:

$$\boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}) = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

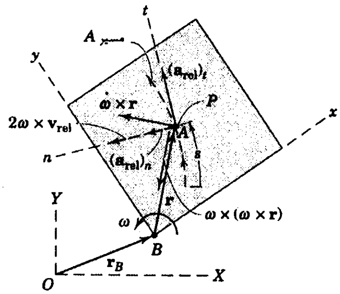
به کمک معادله ۱۱-۵، آخرین جمله طرف راست معادله $\mathbf{a}_A$ چنین می‌شود:

$$\dot{\mathbf{v}}_{\text{rel}} = \frac{d}{dt}(\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) = (\dot{x}\dot{\mathbf{i}} + \dot{y}\dot{\mathbf{j}}) + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j})$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times (\dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j}) + (\ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j})$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

با جایگزینی و مرتب کردن این عبارت در رابطه $\mathbf{a}_A$ نتیجه می‌شود:

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}} \qquad (۵-۱٤)$$

معادله ۱۴-۵ رابطه برداری کلی برای شتاب مطلق ذره A، بر حسب شتاب نسبی $\mathbf{a}_{rel}$ آن نسبت به دستگاه مختصات متحرکی است که با سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای $\dot{\omega}$ دوران می‌کند. عبارتهای $\dot{\omega}\times\mathbf{r}$ و $\omega\times(\omega\times\mathbf{r})$ در شکل ۱۳-۵ نشان داده شده‌اند. این دو عبارت به ترتیب نمایش دهنده مولفه‌های عمودی و مماسی شتاب $\mathbf{a}_{P/B}$ نقطه منطبق بر P در حرکت دورانی خود نسبت به B می‌باشد. این حرکت را می‌توان از محورهای غیر دوار مشاهده نمود که همراه با B حرکت می‌کند. مقدار $\dot{\omega}\times\mathbf{r}$ برابر $r\ddot{\theta}$ بوده و امتداد آن مماس بر دایره است. مقدار $\omega\times(\omega\times\mathbf{r})$ مساوی $r\omega^2$ و جهتش از P به B در امتداد عمود بر دایره است.

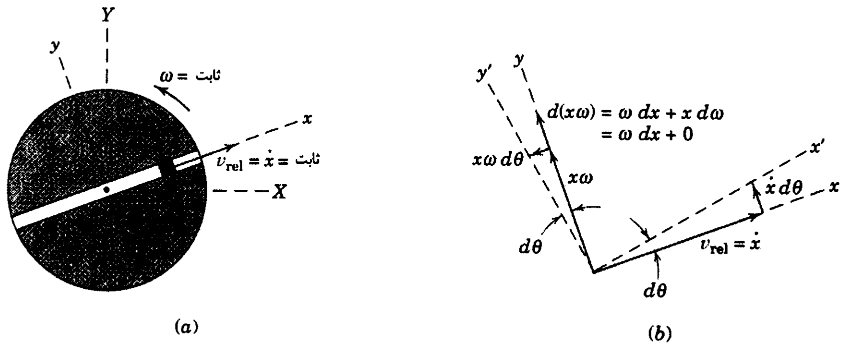


شکل ۱۳-۵

شتاب A نسبت به ورق در امتداد مسیر، $\mathbf{a}_{rel}$، را می‌توان در مختصات کارتزین، عمودی و مماسی و یا مختصات قطبی بیان کرد. معمولاً مولفه‌های n و t بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند و در شکل ۱۳-۵ نشان داده شده‌اند. مولفهٔ مماسی دارای مقدار $(a_{rel})_t=\ddot{s}$ است که در آن s فاصله اندازه‌گیری شده در امتداد مسیر تا نقطه A می‌باشد. مولفه عمودی دارای مقدار v_{rel}^2/ρ است که در آن ρ شعاع انحنای مسیر اندازه گیری شده در x-y می‌باشد. جهت این بردار همیشه به طرف مرکز انحنا متوجه است.

شتاب کوریولیس

عبارت $2\omega\times\mathbf{v}_{rel}$، نشان داده شده در شکل ۱۳-۵، به شتاب کوریولیس* معروف است و نشان دهندهٔ اختلاف بین شتاب A نسبت به P هنگامی می‌باشد که از محورهای غیر دوار و محورهای دوار اندازه گیری می‌شود. امتداد آن همواره عمود بر $\mathbf{v}_{rel}$ بوده و جهت آن توسط قاعده دست راست برای ضرب برداری تعیین می‌شود.



شکل ۱۴-۵

تجسم شتاب کوریولیس مشکل است. زیرا از ترکیب دو اثر فیزیکی مجزا تشکیل می‌گردد. برای کمک به این تجسم، ساده‌ترین حرکت ممکن را در نظر می‌گیریم که این عبارت در آن ظاهر گردد. در شکل ۱۴a-۵ دیسک مدوری را با شیار

* به یاد مهندس ارتش فرانسه، G. Coriolis (۱۸۴۳-۱۷۹۲) که برای اولین بار متوجه این عبارت شد.

شعاعی داریم که ذره کوچک A مقید به لغزش در آن است. دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega = \dot{\theta}$ دوران نموده و ذره با سرعت ثابت $v_{rel} = \dot{x}$ در امتداد شیار و نسبت به آن می‌لغزد. سرعت A دارای مولفه‌های، $\dot{x}$ ناشی از حرکت در امتداد شیار و $x\omega$ ناشی از دوران دیسک می‌باشد. تغییرات در این دو مولفه سرعت بر اثر دوران دیسک در فاصله زمانی dt که طی آن محورهای x-y به اندازه زاویه $d\theta$ دوران کرده و به موقعیت x'-y' می‌رسند، در قسمت (b) شکل نشان داده شده است.

نمو سرعت ناشی از تغییر جهت $\mathbf{v}_{rel}$ برابر است با $\dot{x}d\theta$ و نمو سرعت ناشی از تغییر مقدار $x\omega$، برابر $\omega\ dx$ است که هر دو در جهت y عمود بر شیار هستند. از تقسیم هر یک از نموها بر dt و جمع آنها یعنی $\omega\dot{x} + \dot{x}\omega = 2\dot{x}\omega$، مقدار شتاب کوریولیس $2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel}$ حاصل می‌گردد.

با تقسیم نمو سرعت باقی مانده یعنی $x\omega\, d\theta$ که ناشی از تغییر امتداد $x\omega$ است بر dt، $x\omega\dot{\theta}$ یا $x\omega^2$ نتیجه می‌گردد که شتاب نقطه P ثابت شده بر شیار است که در یک لحظه بر ذره A منطبق می‌شود.

اکنون می‌بینیم که چگونه این نتایج با شکل ۱۴-۵ مطابقت دارد. با توجه به مبدا B در آن معادله و قرار دادن مرکز ثابت O به جای آن، $\mathbf{a}_B = \mathbf{0}$ می‌گردد. با توجه به ثابت بودن سرعت زاویه‌ای، $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} = \mathbf{0}$ است. در نتیجه ثابت بودن مقدار $\mathbf{v}_{rel}$ و منحنی نبودن شیار، $\mathbf{a}_{rel} = \mathbf{0}$ می‌شود. این جمله‌ها باقی می‌مانند:

$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel}$$

از جایگزینی $\mathbf{r}$ توسط $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ و $\boldsymbol{\omega}$ توسط $\omega\mathbf{k}$ و $\mathbf{v}_{rel}$ توسط $\dot{x}\mathbf{i}$ خواهیم داشت:

$$\mathbf{a}_A = -x\omega^2\mathbf{i} + 2\dot{x}\omega\,\mathbf{j}$$

که تحلیل ما را از شکل ۱۴-۵ محک می‌زند.

همچنین توجه داریم این همان نتیجه‌ای است که از تشریح مختصات قطبی در حرکت منحنی الخط صفحه‌ای بدست می‌آید، موقعی که در رابطه ۱۴-۲، $\ddot{r} = 0$ و $\ddot{\theta} = 0$ و r را با x و $\dot{\theta}$ را با ω جایگزین کنیم. اگر شیار واقع بر دیسک، منحنی شکل می‌بود، $\mathbf{a}_{rel}$ صفر نمی‌گردید و شتاب دارای مولفه عمودی نسبت به شیار می‌شد.

مقایسه سیستم‌های دوار و غیر دوار

مقایسه زیر کمک می‌کند تا تساوی‌ها و تفاوتهای بین معادلات شتاب نسبی در دو دستگاه محورهای مرجع دوار و غیر دوار روشن گردند.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})} + \underbrace{2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}} \\
\mathbf{a}_A &= \underbrace{\mathbf{a}_B + \qquad \mathbf{a}_{P/B}} \qquad + \mathbf{a}_{A/P} \qquad\qquad (5\text{-}14a) \\
\mathbf{a}_A &= \qquad \mathbf{a}_P \qquad \underbrace{\qquad\qquad + \mathbf{a}_{A/P}} \\
\mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \qquad\qquad \mathbf{a}_{A/B}
\end{aligned}$$

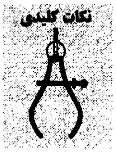
معادل بودن $\mathbf{a}_{P/B}$ و $\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ که در رابطه دوم بیان شده، قبلاً توصیف شده است. در معادله سوم که $\mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{P/B}$ با هم ترکیب شده تا $\mathbf{a}_P$ را بدهد، به نظر می‌رسد که بر خلاف جمله سرعت نسبی متناظر آن، در اینجا جمله شتاب نسبی $\mathbf{a}_{A/P}$ مساوی با شتاب نسبی $\mathbf{a}_{rel}$ نیست که در دستگاه مرجع دوار x-y اندازه گیری می‌شود.

بنابراین عبارت کوریولیس، تفاوت بین شتاب $\mathbf{a}_{A/P}$ ذره A نسبت به P در دستگاه غیر دوار و شتاب $\mathbf{a}_{rel}$ ذره A نسبت به P در دستگاه دوار، می‌باشد. از چهارمین معادله، نتیجه می‌شود که شتاب $\mathbf{a}_{A/B}$ ذره A نسبت به B در دستگاه غیر دوار، رابطه ۲۱-۲، عبارت از ترکیب چهار جمله آخر رابطه اول در دستگاه دوار می‌باشد.

با نوشتن شتاب A بر حسب شتاب نقطه انطباقی P ، تجسم نتایجی که بـه کمـک معادلـه ۱۴-۵ بیـان میشـوند، تـا اندازه‌ای ساده‌تر می‌گردند. زیرا شتاب P برابر $\mathbf{a_P} = \mathbf{a_B} + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$ بـوده و می‌تـوان معادلـه ۱۴-۵ را بـه ایـن صورت نوشت:

$$\boxed{\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_P + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}} \qquad (5\text{-}14b)$$

موقعی که از رابطه فوق استفاده می‌شود، باید توجه داشت که نقطه P را دلخواه در نظر نمی‌گیریم. زیرا آن نقطـه‌ای منحصر بفرد است که به دستگاه مرجع دوار متصل بوده و در لحظه مورد نظر بر ذره A منطبق می‌باشـد. مجـدداً بـه شـکل ۱۳-۵ مراجعه می‌کنیم تا مفهوم هر یک از جمله‌های رابطه ۱۴-۵ و معادل آن، رابطه ۱۴b-۵، روشن شود.



به طور خلاصه، به محض اینکه دستگاه مرجع دوار را انتخاب کردیم، بـاید کمیتـهای زیـر در معادلات ۱۲-۵ و ۱۴-۵ را مشخص نماییم:

$\mathbf{v}_B$ = سرعت مطلق مبدا B محورهای دوار

$\mathbf{a}_B$ = شتاب مطلق مبدا B محورهای دوار

$\mathbf{r}$ = بردار موقعیت نقطه انطباقی P که از B اندازه‌گیری می‌شود

$\boldsymbol{\omega}$ = سرعت زاویه‌ای محورهای دوار

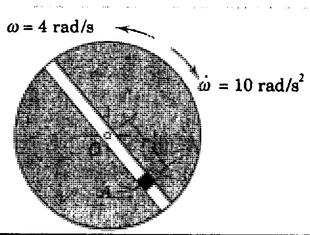
$\dot{\boldsymbol{\omega}}$ = شتاب زاویه‌ای محورهای دوار

$\mathbf{v}_{rel}$ = سرعت نقطه A که نسبت به محورهای دوار اندازه گیری می‌شود

$\mathbf{a}_{rel}$ = شتاب نقطه A که نسبت به محورهای دوار اندازه گیری می‌شود

همچنین بهتر است، بخاطر سپرده شود که تحلیل برداری به استفاده هماهنگ از محورهای مختصات راستگرد بستگی دارد. بالاخره، این حقیقت را باید متذکر شد که روابط ۱۲-۵ و ۱۴-۵ که در اینجا برای حرکـت صفحـه‌ای مطـرح شـدند، بخوبی برای حرکت فضایی در سه بعد صادق هستند که این مطلب در بخش ۶-۷ بسط داده خواهد شد.

مسئله نمونه ۱۶-۵



در لحظه نشان داده شده، دیسک شیاردار شعاعی حول O با سرعت زاویه‌ای ٤ rad/s در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند و با میزان ۱۰ rad/s^2 در حال کاهش است. حرکت لغزنده A جداگانه کنترل شده و در این لحظه $r =$ ۱۵۰ mm، $\dot{r} =$ ۱۲۵ mm/s و $\ddot{r} =$ ۲۰۲۵ mm/s^2 است. سرعت و شتاب مطلق A را در این موقعیت تعیین کنید.

حل: در اینجا حرکت نسبت به یک مسیر دورانی داریم، بنابراین دستگاه مختصات دواری با مبدا O در نظر گرفته شده است. محورهای x-y را به دیسک متصل کرده و از بردارهای یکه $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ استفاده می‌کنیم.

سرعت. با در نظر گرفتن مبدا در O، عبارت $\mathbf{v}_B$ از رابطه ۱۲-۵ حذف شده و داریم:

❶ $$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

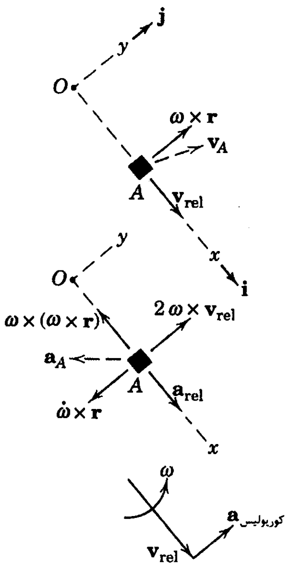
سرعت زاویه‌ای به صورت یک بردار برابر است با $\boldsymbol{\omega} =$ ٤$\mathbf{k}$ rad/sec که در آن $\mathbf{k}$ بردار یکه عمود بر صفحه x-y و

❷ در امتداد $z+$ می‌باشد. معادله سرعت زاویه‌ای به صورت زیر در می‌آید.

جواب $$\mathbf{v}_A = 4\mathbf{k} \times 0.150\mathbf{i} + 0.125\mathbf{i} = 0.600\mathbf{j} + 0.125\mathbf{i} \text{ m/s}$$

که در امتداد نشان داده شده بود و دارای مقدار زیر می‌باشد.

جواب $$v_A = \sqrt{(0.600)^2 + (0.125)^2} = 0.613 \text{ m/s}$$



شتاب. رابطه ۱٤-۵ با توجه به صفر بودن شتاب، مبدا دستگاه مختصات دوار نوشته می‌شود.

$$\mathbf{a}_A = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + 2\,\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

که عبارتهای آن به صورت زیر می‌باشند.

❸ $$\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = 4\mathbf{k} \times (4\mathbf{k} \times 0.150\mathbf{i}) = 4\mathbf{k} \times 0.6\mathbf{j} = -2.4\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} = -10\mathbf{k} \times 0.150\mathbf{i} = -1.5\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$
$$2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} = 2\,(4\mathbf{k}) \times 0.125\mathbf{i} = 1.0\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$
$$\mathbf{a}_{\text{rel}} = 2.025\mathbf{i} \text{ m/s}^2$$

بنابراین، شتاب کل، برابر است با:

جواب $$\mathbf{a}_A = (2.025-2.4)\mathbf{i} + (1.0-1.5)\mathbf{j} = -0.375\mathbf{i} - 0.5\mathbf{j} \text{ m/s}^2$$

که در امتداد نشان داده شده بوده و دارای مقدار زیر است.

جواب $$a_A = \sqrt{(0.375)^2 + (0.5)^2} = 0.625 \text{ m/s}^2$$

البته، نمادهای برداری برای حل این مسئله ضروری نیست. دانشجو باید بتواند با نمادهای اسکالر قسمت‌های مختلف مسئله را به همین آسانی حل نماید. جهت صحیح شتاب کوریولیس را می‌توان همیشه به کمک چرخاندن نوک پیکان بردار $\mathbf{v}_{\text{rel}}$ حول مبدا این بردار در جهت دوران $\boldsymbol{\omega}$ مطابق شکل، پیدا کرد.

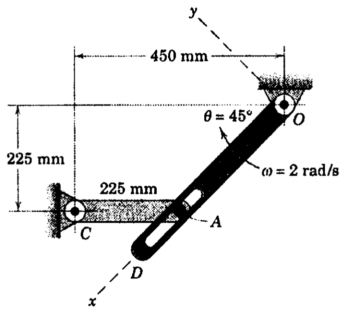
نکات مفید

❶ این معادله همان رابطه $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{A/P}$ است که در آن P نقطه متصل به دیسک می‌باشد که در این لحظه منطبق بر A است.

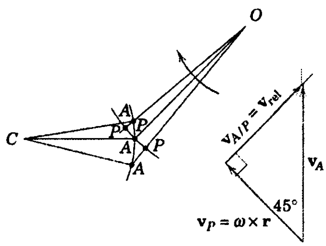
❷ توجه کنید که محورهای x-y-z انتخابی، بر اساس یک دستگاه راستگرد ساخته شده است.

❸ اطمینان حاصل کنید که $\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$ و $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ مشخص کننده مولفه‌های عمودی و مماسی شتاب نقطه‌ای مانند P واقع در صفحه و منطبق بر A می‌باشد. این توصیف مربوط به معادله ۵-۱۴b می‌شود.

مسئله نمونه ۱۷-۵



پین مربوط به لینک لولا شده در AC مقید است. در شیار لینک دوار OD حرکت نماید. سرعت زاویه‌ای OD برابر $\omega = ۲\ \text{rad/s}$ در جهت ساعتگرد و در طی فاصله زمانی حرکت مورد نظر ثابت می‌باشد. برای موقعیتی که $\theta = ۴۵°$ و AC افقی است، سرعت پین A و سرعت A نسبت به شیار دوار واقع در OD را تعیین کنید.



حل: حرکت نقطه (پین A) در امتداد مسیر دوار (شیار)، استفاده از محورهای مختصات دوار الصاق شده به بازوی OD را ایجاب می‌کند. با در نظر گرفتن نقطه ثابت O به عنوان مبدا، عبارت $\mathbf{v}_B$ در معادله ۵-۱۲ حذف شده و داریم: $\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} + \mathbf{v}_{rel}$.

سرعت A در حرکت دورانی‌اش حول C برابر است با:

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega}_{CA}\times\mathbf{r}_{CA} = \omega_{CA}\mathbf{k}\times\left(225/\sqrt{2}\right)(-\mathbf{i}-\mathbf{j}) = \left(225/\sqrt{2}\right)\omega_{CA}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$$

❶ که در آن سرعت زاویه‌ای ω_{CA} به طور دلخواه در جهت ساعتگرد و جهت مثبت محور z $(+\mathbf{k})$ در نظر گرفته شده است.

سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ محورهای دوار مربوط به بازوی OD بوده و توسط قاعده دست راست برابر است با:

$$\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k} = 2\mathbf{k}\ \ \text{rad/s}$$

برداری که از مبدا به نقطه P، واقع بر OD و منطبق بر A رسم می‌گردد، برابر است با:

$\mathbf{r} = \overline{OP}\,\mathbf{i} = \sqrt{(450-225)^2+(225)^2}\ \mathbf{i} = 225\sqrt{2}\mathbf{i}\ \ \text{mm}$، بنابراین:

$$\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = 2\mathbf{k}\times 225\sqrt{2}\,\mathbf{i} = 450\sqrt{2}\ \mathbf{j}\ \ \text{mm/s}$$

بالاخره، عبارت سرعت نسبی $\mathbf{v}_{rel}$ سرعتی است که توسط ناظر متصل به دستگاه مبدا دوار اندازه گیری می‌شود و برابر است با: $\mathbf{v}_{rel} = \dot{x}\mathbf{i}$. با قرار دادن این عبارت‌ها در رابطه سرعت نسبی خواهیم داشت:

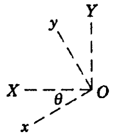
$$\left(225/\sqrt{2}\right)\omega_{CA}(\mathbf{i}-\mathbf{j}) = 450\sqrt{2}\ \mathbf{j} + \dot{x}\,\mathbf{i}$$

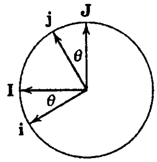
با مساوی قرار دادن ضرائب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ به طور جداگانه داریم:

$$\left(225/\sqrt{2}\right)\omega_{CA} = \dot{x} \quad \text{و} \quad -\left(225/\sqrt{2}\right)\omega_{CA} = 450\sqrt{2}$$

در نتیجه:

جواب $\omega_{CA} = -4 \ \text{rad/s}$ و $\dot{x} = v_{rel} = -450\sqrt{2} \ \text{mm/s}$





با در نظر گرفتن مقدار منفی بـرای ω_{CA}، سـرعت زاویـه‌ای واقعـی CA در جهت ساعتگرد بوده، بنابراین سرعت A به طرف بالا و مقدارش برابر است با:

❷ جواب $v_A = 225\,(4) = 900 \ \text{mm/s}$

توصیف هندسی جمله‌ها مفید است و به آسانی نشان داده می‌شوند. با استفاده از معادل بودن سومین و اولین رابطـه ۵-۱۲a و با در نظر گرفتن $\mathbf{v}_B = \mathbf{0}$ می‌توان چنین نوشت: $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{A/P}$ ، که در آن P نقطه‌ای واقـع بـر بـازوی دوار OD است که بر A منطبق شده است. واضح است کـه $v_P = \overline{OP}\,\omega = 225\sqrt{2}(2) = 450\sqrt{2} \ \text{mm/s}$ و امتـدادش عمـود بـر OD می‌باشد. از روی شکل مشاهده می‌شود که سرعت نسبی $\mathbf{v}_{A/P}$ که همان $\mathbf{v}_{rel}$ است، در امتداد شیار و به طرف O می‌باشد. این نتیجه گیری موقعی واضح می‌گردد که مشاهده شود که A قبل از انطباق در امتداد شیار به سمت P پیشروی نموده و پس از انطباق در امتداد شیار از P دور می‌گردد. سرعت A بر کمان مدور خود حول C مماس است. اکنون می‌توان رابطه برداری را حل نمود، زیرا تنها دو مجهول اسکالر یعنی مقدار $\mathbf{v}_{A/P}$ و مقدار $\mathbf{v}_A$ باقی مـانده اسـت. بـرای موقعیـت ۴۵°، شـکل ایجـاب می‌کند که $v_{A/P} = ۴۵۰\sqrt{۲} \ \text{mm/s}$ و $v_A = ۹۰۰ \ \text{mm/s}$ و هر کدام در امتداد نشان داده شده می‌باشند. سرعت زاویـــه‌ای AC برابر است با:

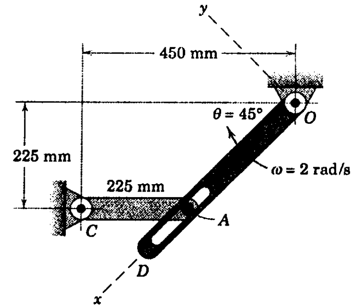
$$[\omega = v/r] \qquad \omega_{AC} = v_A/\overline{AC} = 900/225 = 4 \ \text{rad/s} \qquad \text{پادساعتگرد}$$

نکات مفید

❶ *از لحاظ فیزیکی واضح است که در موقعیت مشخص شده، CA دارای سرعت زاویه‌ای در جهت پادساعتگرد خواهد شد. بنابراین بـرای ω_{CA} مقداری منفی پیش بینی می‌کنیم.*

❷ *برای حل این مسئله ضروری نیست که فقط از همین محورهای مختصات استفاده شود. به نحو دیگری می‌توانستیم مبدا محورهای x-y متصل به CD را همان نقطه انطباقی P واقع بر CD انتخاب کنیم. این انتخاب صرفاً جمله $\mathbf{v}_P$ را جایگزین $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ می‌کند. به عنوان انتخاب بعدی، تمام کمیتهای برداری می‌توانند بر حسب مولفه‌های x-y با استفاده از بردارهای یکه $\mathbf{I}$ و $\mathbf{J}$ بیان شوند. انتقال مستقیم بین دو دستگاه مرجع با استـفاده از هندسـه دایـره یکه انجام می‌شود و چنین نتیجه می‌دهد، $\mathbf{i} = \mathbf{I}\cos\theta - \mathbf{J}\sin\theta$ و $\mathbf{j} = \mathbf{I}\sin\theta + \mathbf{J}\cos\theta$*

مسئله نمونه ۱۸-۵



برای شرایط مسئله نمونه ۱۷-۵، شتاب زاویه‌ای AC و شتاب A نسبت به شیار دوار واقع بر بازوی OD را تعیین کنید.

حل: دستگاه مختصات دوار x-y را بر بازوی OD الصاق کرده و از رابطه ۱۴-۵ استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن مبداء در نقطه ثابت O، جمله $\mathbf{a}_B$ صفر شده، در نتیجه:

$$\mathbf{a}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) + 2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}$$

از حل مسئله نمونه ۱۷-۵، از مقادیر $\boldsymbol{\omega} = ۲\mathbf{k}$ rad/s ، $\boldsymbol{\omega}_{CA} = -٤\mathbf{k}$ rad/s و $\mathbf{v}_{rel} = -۴۵۰\sqrt{۲}\,\mathbf{i}$ mm/s استفاده کرده، می‌نویسیم:

$$\mathbf{a}_A = \dot{\boldsymbol{\omega}}_{CA}\times\mathbf{r}_{CA} + \boldsymbol{\omega}_{CA}\times(\boldsymbol{\omega}_{CA}\times\mathbf{r}_{CA})$$
$$= \dot{\omega}_{CA}\mathbf{k}\times\frac{225}{\sqrt{2}}(-\mathbf{i}-\mathbf{j}) - 4\mathbf{k}\times\left(-4\mathbf{k}\times\frac{225}{\sqrt{2}}[-\mathbf{i}-\mathbf{j}]\right)$$

$\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} = 0$ زیرا $\boldsymbol{\omega}$ ثابت است

$$\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = 2\mathbf{k}\times(2\mathbf{k}\times 225\sqrt{2}\,\mathbf{i}) = -900\sqrt{2}\,\mathbf{i}\ \text{mm/s}^2$$
$$2\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}_{rel} = 2(2\mathbf{k})\times(-450\sqrt{2}\,\mathbf{i}) = -1800\sqrt{2}\,\mathbf{j}\ \text{mm/s}^2$$

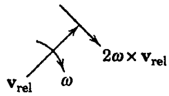
$$\mathbf{a}_{rel} = \ddot{x}\,\mathbf{i}$$ ❶

با قرار دادن عبارتهای فوق در معادله شتاب نسبی، خواهیم داشت:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(225\dot{\omega}_{CA} + 3600)\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}(-225\dot{\omega}_{CA} + 3600)\mathbf{j} = -900\sqrt{2}\,\mathbf{i} - 1800\sqrt{2}\,\mathbf{j} + \ddot{x}\,\mathbf{i}$$

با مساوی قرار دادن ضرایب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ طرفین، بطور مجزا خواهیم داشت:

$$\frac{(225\dot{\omega}_{CA} + 3600)}{\sqrt{2}} = -900\sqrt{2} + \ddot{x}$$
$$\frac{(-225\dot{\omega}_{CA} + 3600)}{\sqrt{2}} = -1800\sqrt{2}$$

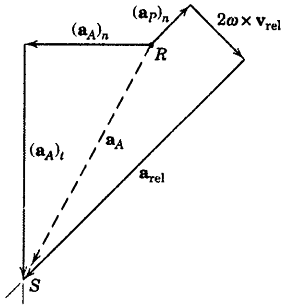


از حل دو معادله فوق دو مجهول به صورت زیر بدست می‌آید.

جواب $\ddot{x} = a_{rel} = 8910 \ \text{mm/s}^2$ و $\dot{\omega}_{CA} = 32 \ \text{rad/s}^2$

اگر در صورت تمایل، شتاب A را بخواهیم؛ می‌توانیم چنین بنویسیم:

$$\mathbf{a}_A = (225/\sqrt{2})(32)(\mathbf{i}-\mathbf{j}) + (3600/\sqrt{2})(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = 7640\mathbf{i} - 2550\mathbf{j} \ \text{mm/s}^2$$



برای آنکه مسئله روشن‌تر شود، از نمایش هندسی رابطه شتاب نسبی استفاده می‌کنیم. می‌توان از روش هندسی به عنوان راه حلی دیگر استفاده کرد. مجدداً نقطه P واقع بر OD را که منطبق بر A است، در نظر می‌گیریم. جمله‌های اسکالر معادل عبارتند از:

عمود بر CA و جهت مجهول $\qquad (a_A)_t = |\dot{\omega}_{CA} \times \mathbf{r}_{CA}| = r\dot{\omega}_{CA} = r\alpha_{CA}$

از A به سمت C $\qquad (a_A)_n = |\omega_{CA} \times (\omega_{CA} \times \mathbf{r}_{CA})| = r\omega_{CA}^2$

از P به سمت O $\qquad (a_P)_n = |\omega \times (\omega \times \mathbf{r})| = \overline{OP}\omega^2$

زیرا ω ثابت است $\qquad (a_P)_t = |\dot{\omega} \times \mathbf{r}| = r\dot{\omega} = 0$

در امتداد نشان داده شده در شکل $\qquad |2\omega \times \mathbf{v}_{rel}| = 2\omega\, v_{rel}$

در امتداد OD و جهت مجهول $\qquad a_{rel} = \ddot{x}$

با بردارهای معلوم شروع نموده و آنها را از انتها به ابتدا برای هر طرف معادله جمع می‌کنیم. از R شروع کرده و به S ختم می‌کنیم. تقاطع امتدادهای معلوم $(\mathbf{a}_A)_t$ و $\mathbf{a}_{rel}$ در S جواب مسئله را می‌دهد. بسته شده چند ضلعی جهت هر کدام از بردارهای مجهول را مشخص نموده و مقدار آنها را به آسانی از هندسه شکل محاسبه می‌نماییم. ❷

نکات مفید

❶ اگر شیار منحنی شکل و با شعاع انحنای ρ می‌بود، عبارت $\mathbf{a}_{rel}$ علاوه بر مولفه مماسی در امتداد شیار، دارای مولفه‌ای برابر v_{rel}^2/ρ عمود بر شیار و به سوی مرکز انحنا نیز می‌گردید.

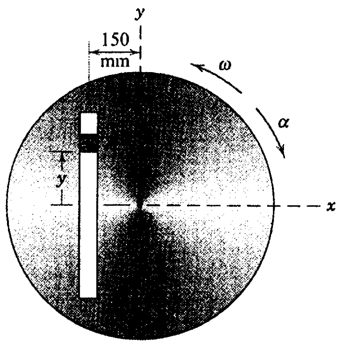
❷ همیشه می‌توان به کمک تصویر کردن بردارها بر روی امتداد عمود بر یکی از مجهولها از حل همزمان دستگاه معادلات اجتناب نمود.

مسائل

مسائل مقدماتی

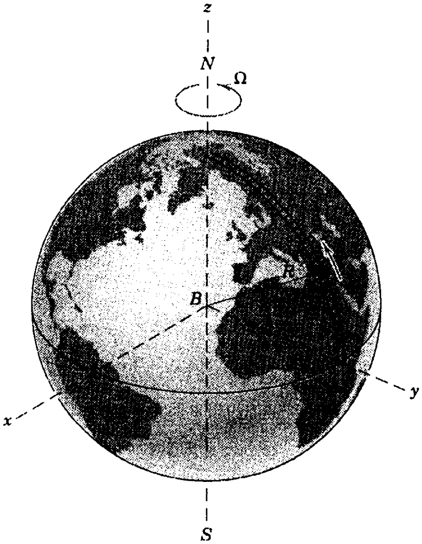
۵-۱۵۱ دیسک حول محور ثابت O با سرعت زاویه‌ای ω = ۵ rad/s و شتاب زاویه‌ای α = ۳ rad/s² در جهت‌های نشان داده شده در لحظه مشخص شده، دوران می‌کند. لغزنده A در راستای شیار حرکت می‌کند. سرعت و شتاب مطلق A را در همان لحظه که y = ۲۵۰ mm و $\dot{y}$ = −۶۰۰ mm/s و $\ddot{y}$ = ۷۵۰ mm/s² است، تعیین کنید.

جواب
$\mathbf{v}_A$ = −۱/۲۵۰**i** − ۱/۳۵۰**j** m/s
$\mathbf{a}_A$ = ۱۰/۵۰**i** − ۵/۰۵**j** m/s²



شکل مسئله ۵-۱۵۱

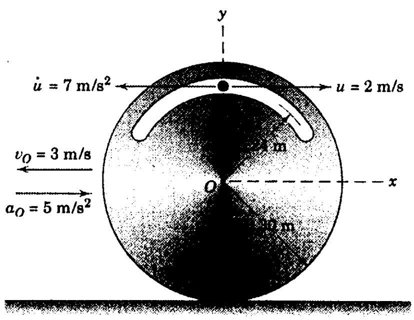
۵-۱۵۲ اتومبیل آزمایشی A با سرعت ثابت v نسبت به زمین در مسیر شمال به جنوب در حرکت است. شتاب کوریولیس $\mathbf{a}_{cor}$ را بر حسب عرض جغرافیایی θ بدست آورید. فرض کنید که محورهای $Bxyz$ متصل شده به مرکز زمین با زمین کروی شکل دوران می‌کند. اگر سرعت اتومبیل برابر v = ۵۰۰ km/h باشد، مقدار شتاب کوریولیس را در نقاط (الف) خط استوا و (ب) قطب شمال، تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۱۵۲

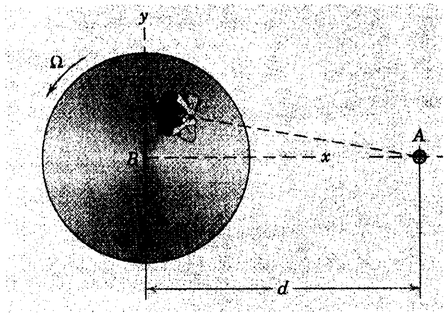
۵-۱۵۳ دیسک بدون لغزش بر روی سطح افقی می‌غلتد و در لحظه نشان داده شده، مرکز O آن دارای سرعت و شتاب مشخص در شکل است. در این لحظه، ذره A دارای سرعت u و میزان تغییرات سرعت نسبت به زمان $\dot{u}$ آن نسبت به دیسک می‌باشد. سرعت و شتاب مطلق ذره A را بدست آورید.

جواب $\mathbf{v}_A$ = −۳/٤**i** m/s و $\mathbf{a}_A$ = ۲**i** − ۰/٦٦٧**j** m/s²



شکل مسئله ۵-۱۵۳

۵-۱۵٤ تیرک ثابت A توسط ناظر P که روی یک چرخ‌فلک افقی که حول محور عمودی ثابت B خود با سرعت زاویه‌ای Ω مطابق شکل دوران می‌کند، مشاهده می‌گردد. سرعت ظاهری A را از دید ناظر P تعیین کنید. آیا این سرعت بستگی به محل ناظر روی چرخ‌فلک دارد؟

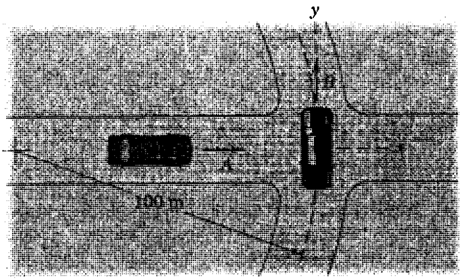


شکل مسئله ۵-۱۵۴

۵-۱۵۵ خط‌آهن مستقیم و مسطحی را که واگن ۵۰۰۰۰ کیلوگرم بر روی آن با سرعت ثابت ۱۵ m/s در حرکت است، در نظر بگیرید. نیروی افقی R که توسط ریل‌ها بر واگن اعمال می‌شود را در صورتیکه مسیر مفروض (الف) در قطب شمال (ب) در خط استوا، در جهت شمال به جنوب باشد، بدست آورید.

جواب $\quad$ (الف) $R = ۱۰۹/٤$ N $\quad$ و $\quad$ (ب) $R = ۰$

۵-۱۵٦ اتومبیل B با سرعت ثابت ٥٤ km/h پیچی را دور می‌زند و اتومبیل A با سرعت ثابت ۷۲ km/h در تقاطع به اتومبیل B نزدیک می‌گردد. سرعت A را نسبت به ناظری که در اتومبیل B قرار گرفته و با آن دوران می‌کند، تعیین کنید. محورهای x-y به اتومبیل B متصل شده‌اند. آیا این سرعت منفی سرعت B نسبت به ناظر غیر چرخان که در اتومبیل A قرار گرفته می‌باشد؟ فاصله دو اتومبیل در لحظه مشخص شده ٤۰ m است.

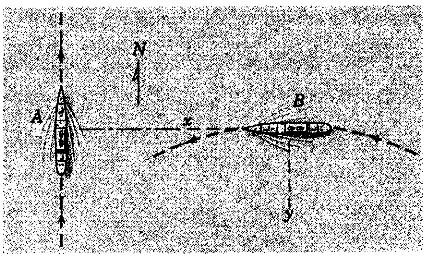


شکل مسئله ۵-۱۵۶

۵-۱۵۷ برای اتومبیل‌های مسئله ۵-۱۵٦ که با سرعت ثابت در حرکت هستند، شتاب اتومبیل A را نسبت به ناظری که در B قرار گرفته و با آن دوران می‌کند، تعیین کنید.

جواب $\quad \mathbf{a}_{rel} = -۱/۳۵\mathbf{i} - ٦\mathbf{j}$ m/s^2

۵-۱۵۸ کشتی A با سرعت ثابت ۱۲ گره به سمت شمال پیش می‌رود، در حالی که کشتی B دارای سرعت ۱۰ گره بوده و با میزان ثابت ۱۰ deg/min به سمت چپ می‌پیچد. موقعی که فاصله دو کشتی در موقعیت نسبی نشان داده شده ۲ مایل دریایی است و کشتی B رو به غرب بوده و کشتی A امتداد دماغه آنرا قطع می‌کند، سکاندار B سرعت ظاهری A را اندازه‌گیری می‌نماید. مقدار این سرعت را بدست آورده و زاویه β را که این سرعت با امتداد شمال در جهت ساعتگرد می‌سازد، تعیین کنید.

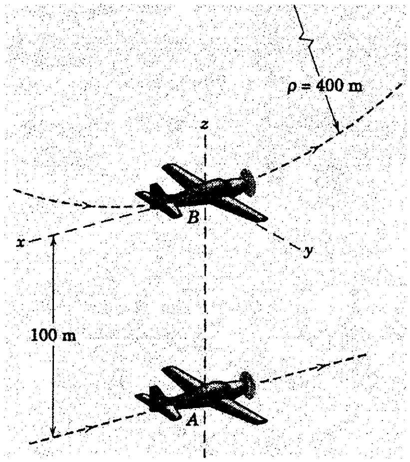


شکل مسئله ۵-۱۵۸

مسائل ویژه

۵-۱۵۹ هواپیمای B در پایین مسیر حلقوی مدور به شعاع ۴۰۰ m دارای سرعت ثابت ۵۴۰ km/h می‌باشد. هواپیمای A در صفحه حلقه مدور و در فاصله ۱۰۰ متری، مستقیماً زیر B با سرعت ثابت ۳۶۰ km/h به طور افقی در حرکت است. با محورهای مختصات متصل شده به B مطابق شکل، شتاب A را نسبت به خلبان B در این لحظه تعیین کنید.

جواب $\mathbf{a}_{rel} = -۴/۶۹\mathbf{k}$ m/s^2



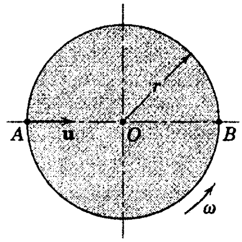
شکل مسئله ۵-۱۵۹

۵-۱۶۰ اتومبیل A جاده مستقیم B را که مماس بر سطح تماس زمین در استوا می‌باشد، با سرعت زیاد به طرف غرب طی می‌کند. جاده هیچ انحنایی در صفحه قائم ندارد. سرعت لازم v_{rel} برای اتومبیل نسبت به جاده را چنان تعیین کنید که شتاب آن در امتداد قائم برابر صفر گردد. فرض کنید مرکز زمین شتاب ندارد.

شکل مسئله ۵-۱۶۰

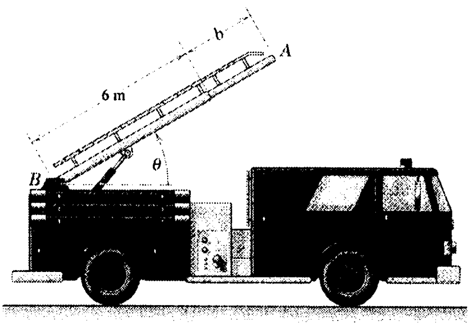
۵-۱۶۱ دو پسر A و B در طرفین یک میز چرخان افقی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω در جهت پادساعتگرد می‌چرخد و از بالا مشاهده می‌شود، نشسته‌اند. پسر A توپی را با سرعت افقی $\mathbf{u}$ نسبت به میز چرخان به طرف B پرتاب می‌کند. فرض کنید توپ در لحظه رها شدن، شتاب افقی نداشته و عبارتی برای شتاب $\mathbf{a}_{rel}$ که توپ از دید ناظر B در صفحه میز چرخان و درست بعد از پرتاب دارد، بنویسید. مسیر توپ در میز چرخان را آنطور که B مشاهده می‌کند، رسم کنید.

جواب $a_{rel} = \omega\sqrt{r^۲\omega^۲ + ۴u^۲}$



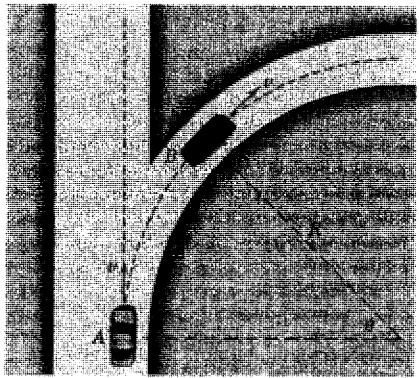
شکل مسئله ۵-۱۶۱

۵-۱۶۲ ماشین آتش‌نشانی با سرعت ۶۰ km/h حرکت می‌کند و سرعت خود را با میزان ۳ m/s^2 کاهش می‌دهد. در همان حال، نردبان آن بالا رفته و باز می‌شود. در لحظه مورد نظر θ برابر °۳۰ و با میزان ثابت ۱۰ deg/s در حال افزایش است. همچنین در این لحظه b، طول نردبان برابر ۱/۵ m بوده و $\dot{b} = ۰/۶$ m/s و $\ddot{b} = -۰/۳$ m/s^2 است. در این لحظه شتاب A، انتهای نردبان را (الف) نسبت به ماشین و (ب) نسبت به زمین، تعیین کنید.



شکل مسئله ۵-۱۶۲

۵-۱۶۳ اتومبیل B با سرعت v به طرف مسیر مدور خروجی می‌پیچد. اتومبیل A که با همان سرعت v حرکت می‌کند به مسیر مستقیم خود ادامه می‌دهد. ثابت کنید، موقعی که اتومبیل A نشان داده شده عبور می‌کند، سرعتش نسبت به ناظری که در اتومبیل B قرار گرفته و با آن دوران می‌کند، به ازای هر زاویه θ برابر صفر است.

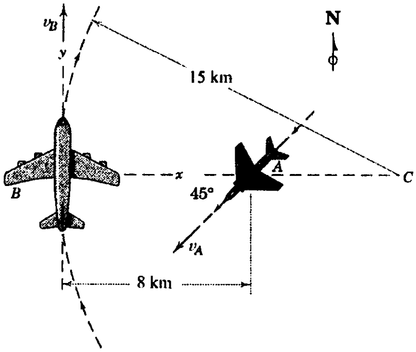


شکل مسئله ۱۶۳-۵

۵-۱۶۴ از شرایط و نتیجه مسئله ۱۶۳-۵ نشان دهید که شتاب اتومبیل A از دید ناظری که در اتومبیل B قرار گرفته و با آن دوران می‌کند، برابر v^2/R در جهت عمود بر سرعت و افقی A می‌باشد.

۵-۱۶۵ هواپیمای مسافری B با سرعت ثابت ۸۰۰ km/h یک قوس افقی به شعاع ۱۵ km را می‌پیماید. هنگامی که B به موقعیت نشان داده شده، می‌رسد. هواپیمای A که در حال پرواز به سوی جنوب غربی با سرعت ثابت ۶۰۰ km/h می‌باشد. خط شعاعی بین B تا مرکز انحنای C مسیر پروازی B را قطع می‌کند. با استفاده از محورهای x-y الصاقی به B، بردار سرعت A را از دید ناظری که در B و با آن در چرخش است، بیان نمایید.

جواب $\quad \mathbf{v}_{rel} = -۱۱۷/۹\mathbf{i} - ۲۲۲\mathbf{j}$ m/s

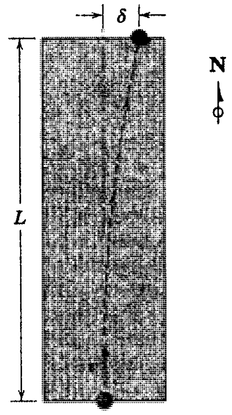


شکل مسئله ۱۶۵-۵

۵-۱۶۶ از شرایط مندرج در مسئله ۱۶۵-۵، بردار شتاب هواپیمای A را از دید ناظری در B که با آن می‌چرخد، بدست آورید؛ در حالیکه محورهای x-y به B الصاق شده‌اند. از نتایج مسئله ۱۶۵-۵ برای $\mathbf{v}_{rel}$ استفاده کنید.

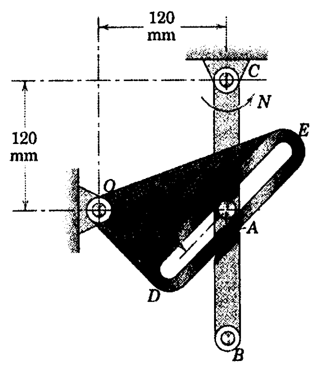
۵-۱۶۷ توپ بولینگی صیقلی مطابق شکل، در راستای شمال ـ جنوب نشان داده شده است. توپ A با سرعت v، مسیر راه نشان داده شده را طی می‌کند. به علت اثر شتاب کوریولیس، به اندازه نشان داده شده δ از مسیر منحرف می‌شود. رابطه‌ای برای δ بدست آورید. توپ بولینگ در عرض جغرافیایی شمالی θ قرار دارد. عبارت خود را در شرایط $L = ۱۸$ m، $v = ۴/۵$ m/s و $\theta = ۴۰^\circ$ محاسبه کنید. آیا بولینگ باز بایستی توپ را به جهت شرق به غرب پرتاب کند؟ کلیه فرضیات را بیان کنید.

جواب $\quad \delta = \dfrac{\Omega L^2}{v}\sin\theta$ و $\delta = ۳/۳۷$ mm



شکل مسئله ۱۶۷-۵

۱۶۸-۵ در لحظه نشان داده شده، لینک CB با میزان ثابت $N = ٤\ rad/s$ در جهت پادساعتگرد دوران می‌کند و پین A آن باعث دوران عضو شیاردار ODE در جهت ساعتگرد می‌گردد. سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α عضو ODE را در این لحظه تعیین کنید.



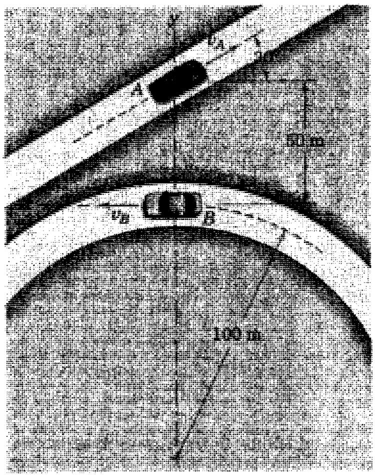
شکل مسئله ۱۶۸-۵

۱۶۹-۵ هر یک از دو اتومبیل A و B با سرعت ثابت ۷۲ km/h در حرکت هستند. سرعت و شتاب اتومبیل A را از دید ناظری که با اتومبیل B در حرکت و چرخش است، در موقعیت نشان داده شده، بدست آورید.

جواب

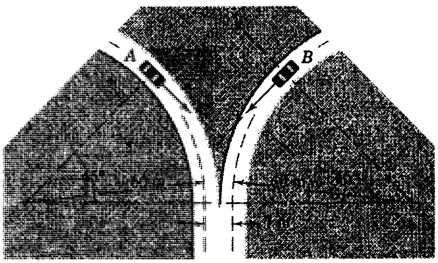
$\mathbf{v}_{rel} = -٤٧/٣\mathbf{i} + ١٠\mathbf{j}$ m/s

$\mathbf{a}_{rel} = -٤\mathbf{i} - ١٢/٩٣\mathbf{j}$ m/s^2



شکل مسئله ۶۹-۵

۱۷۰-۵ اتومبیل‌های A و B هر کدام روی دو جاده منحنی متقاطع با سرعت ثابت یکسان ٤٨ km/h حرکت می‌کند. در موقعیت نشان داده شده، رابطه‌ای برداری برای سرعت و شتاب A نسبت به ناظری که در اتومبیل B و با آن در چرخش است، بدست آورید. محورهای x-y به اتومبیل B الصاق شده‌اند.



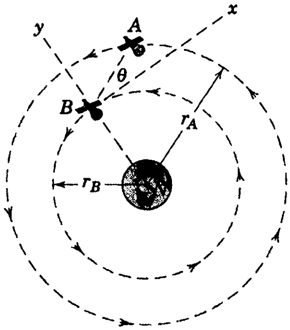
شکل مسئله ۱۷۰-۵

۱۷۱-۵ دو ماهواره در مدارهای مدور استوایی در دو ارتفاع مختلف حرکت می‌کنند. ماهواره A دارای مدار همزمان با زمین است (مداری که پریودش با پریود دوران زمین یکسان می‌باشد و همواره از یک نقطه روی خط استوا «معلق» به نظر می‌رسد). ماهواره B دارای مداری به شعاع $r_B = ٣٠٠٠٠$ km است. سرعت A را از دید ناظر ثابت در B در دو حالت زاویه دید θ حساب کنید. (الف) $°$ ۰ و (ب) $°$ ۹۰. محورهای x-y به B متصل شده، بطوریکه آنتن آن همواره رو به سوی

مرکز زمین دارد (امتداد y-). از بخش ۱۳-۳ و پیوست D برای یافتن اطلاعات مداری مورد لزوم، استفاده کنید.

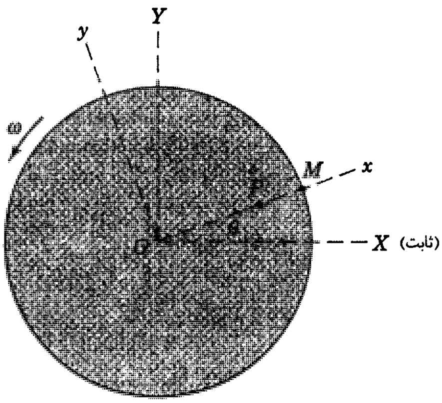
جواب (الف) $\mathbf{v}_{rel} = ۵۲۵۰\mathbf{i} - ۵۱۹۰\mathbf{j}$ km/h

(ب) $\mathbf{v}_{rel} = ۷۳۸۰\mathbf{i}$ km/h



شکل مسئله ۱۷۱-۵

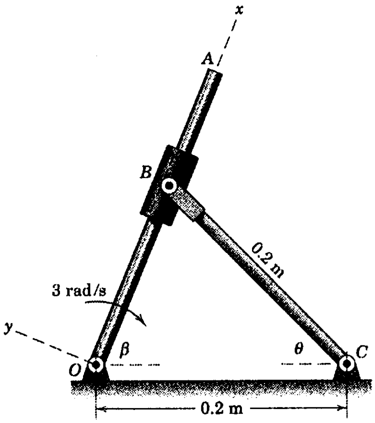
۱۷۲-۵ پسری از مرکز O یک چرخ‌فلک افقی در امتداد خط شعاعی OM شروع به حرکت می‌کند. موقعی که ۲/٤ m از مرکز O فاصله می‌گیرد (در نقطه P)، سرعتش نسبت به صفحه دوار در جهت M برابر ۰/٦ m/s و با میزان ۰/۳ m/s^2 در حال کاهش است. چرخ‌فلک در جهت نشان داده شده با میزان ثابت یک دور در هر ۱۰ ثانیه می‌چرخد. اگر موقعی که پسر به P می‌رسد، موقعیت $\theta = ۳۰°$ باشد، تعیین کنید: (الف) سرعت مطلق او را بر حسب مولفه‌های X-Y ؛ که محورها بر روی زمین، ثابت است (با استفاده از بردارهای یکه $\mathbf{I}$ و $\mathbf{J}$) و (ب) شتاب مطلق او را بر حسب مولفه‌های x-y .



شکل مسئله ۱۷۲-۵

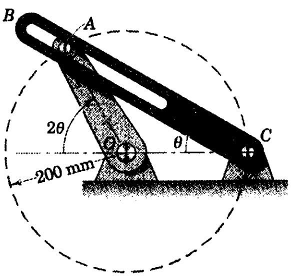
۱۷۳-۵ در برهه‌ای کوتاه از دوران، لینک OA دارای سرعت زاویه‌ای ثابت ۳ rad/s در جهت ساعتگرد است. شتاب زاویه‌ای α_{BC} را در موقعیت $\theta = ٦۰°$ بدست آورید. ابتدا مسئله را با استفاده از دستگاه مرجع دورانی و سپس نتیجه را با روش حرکت مطلق مقایسه کنید.

جواب $\alpha_{BC} = ۰$



شکل مسئله ۱۷۳-۵

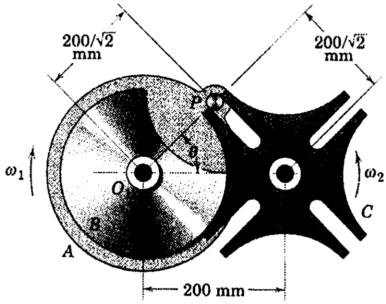
۱۷٤-۵ لنگ OA با سرعت زاویه‌ای ثابت ۱۰ rad/s در جهت ساعتگرد در قوس محدودی از حرکتش، دوران می‌کند. در موقعیت $\theta = ۳۰°$ ، سرعت زاویه‌ای بازوی شیاردار CB و شتاب A را نسبت به شیار واقع در CB تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۷۴-۵

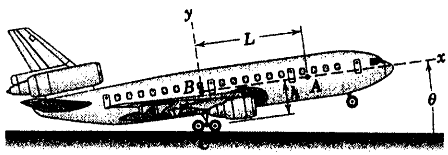
۵-۱۷۵ چرخ ژنوای مسئله ۵-۵۳ مجدداً در اینجا نشان داده شده است. شتاب زاویه‌ای α_2 چرخ C را در موقعیت $\theta = ۲۰°$ تعیین کنید. چرخ A دارای سرعت زاویه‌ای ثابت ۲ rad/s در جهت ساعتگرد است.

جواب $\alpha_2 = ۱۶/۵۳$ rad/s² CCW



شکل مسئله ۵-۱۷۵

۵-۱۷۶ هواپیمای نشان داده شده نزدیک انتهای باند پرواز، درست قبل از بلند شدن «می‌چرخد» (یعنی دماغه هواپیما بالا می‌رود). سرعت و شتاب هواپیما که بر حسب حرکت مجموعه چرخ‌های C بیان شده‌اند، برابر v_C و a_C می‌باشند که هر دو افقی و به طرف جلو هستند. زاویه اوج‌گیری θ بوده و میزان افزایش آن یعنی $\omega = \dot{\theta}$ با میزان $\alpha = \dot{\omega}$ افزایش می‌یابد. اگر شخص A در راهروی مرکزی هواپیما با سرعت و شتاب v_{rel} و a_{rel} که هر دو نسبت به کابین هواپیما به سمت جلو اندازه گیری شوند، از دید ناظر ثابتی که بر روی زمین قرار گرفته، عباراتی برای سرعت و شتاب A بیان کنید.

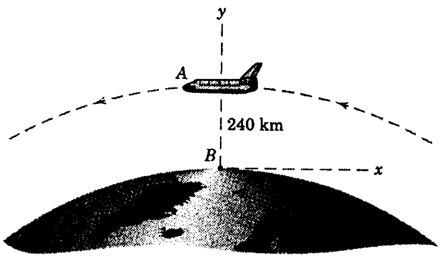


شکل مسئله ۵-۱۷۶

۵-۱۷۷ ◂ شاتل فضایی A در مدار مدور استوایی در ارتفاع ۲۴۰ km قرار گرفته و از غرب به طرف شرق در حرکت است. سرعت و شتاب شاتل را نسبت به ناظری که در B و در روی استوا به زمین متصل شده و با آن دوران می‌کند، هنگامی که شاتل از بالای سر ناظر B می‌گذرد، تعیین کنید. شعاع زمین را $R = ۶۳۷۸$ km بگیرید. همچنین از شکل ۱-۱ برای مقدار g استفاده کنید و محاسبات را با چهار رقم دقت انجام دهید.

جواب $\mathbf{v}_{rel} = -۲۶۲۲۰\mathbf{i}$ km/h

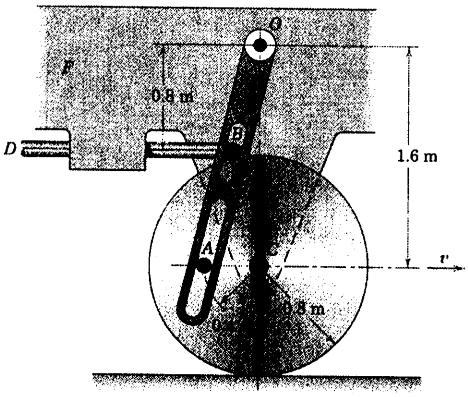
$\mathbf{a}_{rel} = -۸/۰۱۸\mathbf{j}$ m/s² (با استفاده $g = ۹/۸۱۴$ m/s²)



شکل مسئله ۵-۱۷۷

۵-۱۷۸ ◂ یک چرخ وسیله نقلیه آزمایشی F که در شکل نشان داده شده، دارای سرعت ثابت $v = ۳۶$ km/h است. چرخ بدون لغزش می‌غلتد و توسط پین A روی آن باعث نوسان بازوی شیاردار می‌گردد که این نوسان میله کنترل DB را توسط B به جلو و عقب می‌راند. در موقعیت نشان داده شده، شتاب a_B میله کنترل DB را تعیین کنید. (*پیشنهاد:* درستی و امتیاز استفاده از مرجعی که به قاب وسیله نقلیه متصل می‌شود را ملاحظه کنید.)

جواب $a_B = ۲۷/۳$ m/s² (به طرف راست)



شکل مسئله ۵-۱۷۸

دوره فصل

در فصل ۵، معلومات خود را در مورد سینماتیک بنیادی که در فصل ۲ طرح شد، برای حرکت اجسام صلب در صفحه بکار بردیم. اساساً مسئله را به دو روش مطرح نمودیم:

۱- تحلیل حرکت مطلق

ابتدا، معادله‌ای نوشتیم که پیکربندی هندسی کلی مسئله مورد نظر را بر حسب معلومات و مجهولات، توصیف می‌کرد. سپس از معادله نسبت به زمان مشتق گرفتیم تا سرعت‌ها و شتاب‌های خطی و زاویه‌ای بدست آید.

۲- تحلیل حرکت نسبی

اصول حرکت نسبی اجسام صلب را بکار بردیم و دریافتیم که این روش مسائل زیادی را حل می‌نماید که حل آنها از طریق مشتق گیری ریاضی بسیار دشوار است. استفاده از رابطه سرعت نسبی، مرکز آنی بدون سرعت و رابطه شتاب نسبی، همگی لازم است تا حالت حرکت دورانی یک نقطه حول نقطه دیگر را چنانچه از محورهای غیر دوار مشاهده شود، به وضوح مجسم و بدرستی تحلیل نماییم.

حل معادلات سرعت و شتاب

روابط سرعت نسبی و شتاب نسبی، روابط برداری هستند که می‌توانیم آنها را به یکی از سه روش حل نماییم:

۱- روش تحلیل هندسی چند ضلعی برداری به صورت اسکالر

۲- روش جبر برداری، یا

۳- روش تشکیل چند ضلعی برداری به صورت ترسیمی

سیستم‌های مختصات دورانی

بالاخره، در فصل ۵ سیستم‌های مختصات دوار را تعریف نمودیم که توسط آنها قادریم مسائلی را حل کنیم که در آن حرکت مورد نظر نسبت به دستگاه مرجع دوار مشاهده می‌گردد. هرگاه نقطه‌ای در مسیری حرکت نماید که خود آن در دوران است، اگر از روش حرکت نسبی استفاده گردد، تحلیل به کمک محورهای دوار توصیه می‌شود. در استفاده از رابطه ۱۲-۵ برای سرعت نسبی و رابطه ۱۴-۵ برای شتاب نسبی که در آن عبارت‌های نسبی از دستگاه مرجع دواری اندازه گیری می‌شوند، لازم بود که مشتق‌های زمانی بردارهای یکه **i** و **j** را به حساب آوریم. همانطور که در فصل ۷ نشان داده خواهد شد، روابط ۱۲-۵ و ۱۴-۵ در حرکت فضایی نیز بکار خواهد رفت.

یکی از مهمترین نتیجه‌هایی که از تحلیل سیستم‌های مختصات دورانی گرفتیم، شناسایی *شتاب کوریولیس* بود. این شتاب در حقیقت نشان دهنده تغییرات سرعت مطلق، هم از نظر جهت و هم از نظر مقدار است و از دوران بردار سرعت نسبی و تغییر در موقعیت ذره در طول مسیر دورانی بوجود می‌آید.

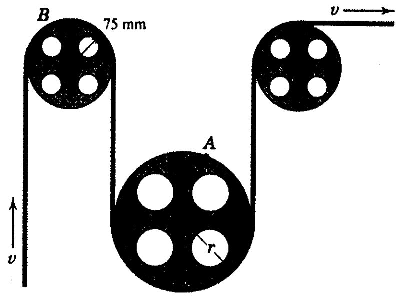
در فصل ٦، سینتیک اجسام صلب در حرکت صفحه‌ای مطالعه خواهد شد. در آنجا در خواهیم یافت که برای بکارگیری روابط نیرو و گشتاوری که نیروهای اعمال شده را به حرکت حاصل مربوط می‌سازد، می‌بایست که در حل شتاب خطی و زاویه‌ای اجسام صلب، توانایی لازم را داشته باشیم. بنابراین مطالب فصل ۵ برای فصل ٦ کاملاً ضروری و اساسی است.

مسائل دوره‌ای

۵-۱۷۹ مقاومت اصطکاکی بر روی دوران یک چرخ طیار تشکیل شده است از مقاومت اصطکاک ناشی از هوا که با مجذور سرعت زاویه‌ای متناسب بوده و یک اصطکاک کننده ثابت در یاتاقان. بنابراین شتاب زاویه‌ای چرخ طیار به صورت $\alpha = -K - k\omega^{2}$ داده می‌شود که در آن K و k ثابت‌اند. رابطه‌ای برای زمان که چرخ طیار را از سرعت زاویه‌ای اولیه ω_{0} به صفر می‌رساند، بدست آورید.

جواب $t = \frac{1}{\sqrt{Kk}} \tan^{-1}\left(\omega_{0}\sqrt{\frac{k}{K}}\right)$

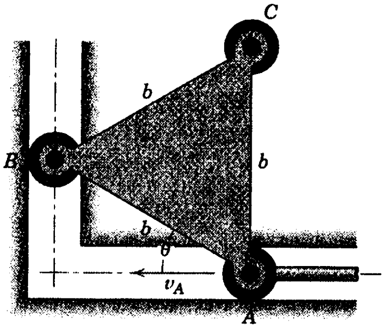
۵-۱۸۰ نوار مغناطیسی یک کامپیوتر از رو و دور قرقره‌های سبکی که روی کامپیوتر سوار شده‌اند، می‌گذرد. اگر سرعت v نوار ثابت بوده و چنانچه نسبت شتاب نقطه A به شتاب نقطه B برابر $\frac{2}{3}$ باشد، شعاع r قرقره بزرگتر را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۱۸۰-۵

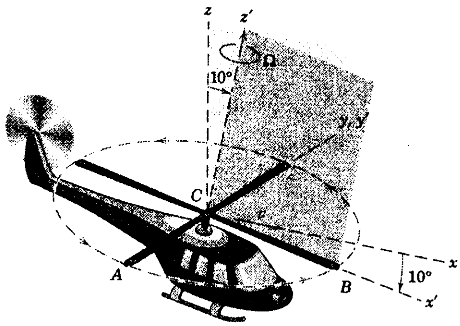
۵-۱۸۱ ورق مثلثی شکل متساوی الاضلاع توسط دو غلتک A و B در حال حرکت در دو شیار عمود بر هم هدایت می‌شود. میله راهنمای A سرعت ثابت v_A به طرف چپ را در برهه‌ای از حرکت ایجاد می‌کند. مقدار θ که در آن مولفه افقی سرعت C صفر می‌گردد را تعیین کنید.

جواب $\theta = 60°$



شکل مسئله ۱۸۱-۵

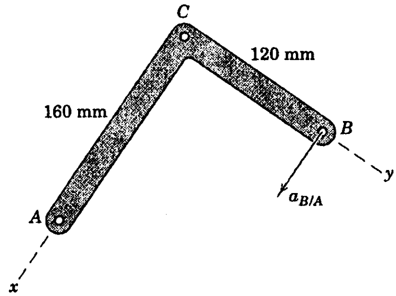
۵-۱۸۲ هلیکوپتر در امتداد افقی x با سرعت $v = 200$ km/h در حال پرواز است، در حالیکه صفحه دوران پروانه آن به قطر ۹ m زاویه $10°$ را نسبت به صفحه افقی x-y می‌سازد. پروانه با سرعت زاویه‌ای $\Omega = 800$ rev/min دوران می‌کند. برای لحظه نشان داده شده، رابطه‌ای برای سرعت‌های مطلق نوک پره A و نوک پره B بنویسید.



شکل مسئله ۱۸۲-۵

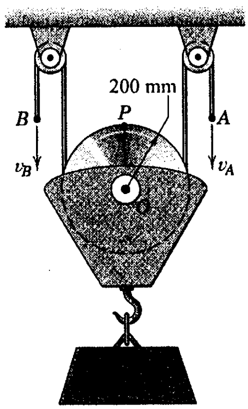
۵-۱۸۳ لینک قائم الزاویه ABC در صفحه x-y حرکت صفحه‌ای دارد. در لحظه نشان داده شده، شتاب B نسبت به A برابر $20\mathbf{i}$ m/s^2 و شتاب C برابر صفر است. شتاب نقطه A را تعیین کنید.

جواب $\mathbf{a}_A = -12.8\mathbf{i} - 9.6\mathbf{j}$ m/s^2



شکل مسئله ۵-۱۸۳

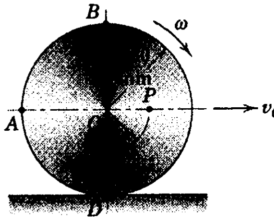
۵-۱۸٤ بار L توسط سرعت‌های به طرف پایین انتهاهای A و B کابل، به سمت بالا به حرکت در می‌آید. شتاب نقطه P واقع در بالای چرخ قرقره را در لحظه‌ای که $v_A =$ ۰/٦ m/s ، $\dot{v}_A =$ ۰/۱۵ m/s^2 ، $v_B =$ ۰/۹ m/s و $\dot{v}_B = -$ ۰/۱۵ m/s^2 است، بدست آورید.



شکل مسئله ۵-۱۸۴

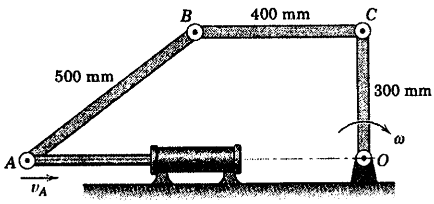
۵-۱۸۵ چرخ نشان داده شده علاوه بر غلتش، لغزش نیز دارد. اگر $v_O =$ ۱/۲ m/s و چنانچه سرعت A نسبت به B برابر ۰/۹$\sqrt{۲}$ m/s باشد، محل مرکز آنی بدون سرعت را مشخص نموده و سرعت نقطه P را پیدا کنید.

جواب $v_P =$ ۱/۲۸۲ m/s



شکل مسئله ۵-۱۸۵

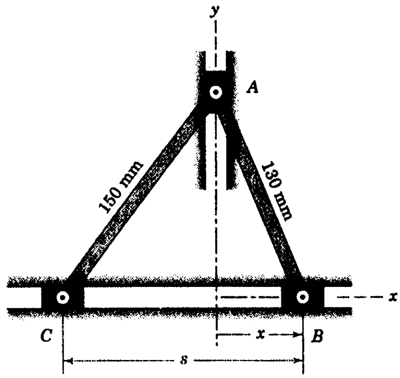
۵-۱۸٦ در اهرم‌بندی نشان داده شده، OC در برهه‌ای از حرکت، دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega =$ ۲ rad/s در جهت ساعتگرد می‌باشد. در حالیکه سیلندر هیدرولیکی به پین A سرعت ثابت ۱/۲ m/s را به سمت راست می‌دهد. در موقعیت نشان داده شده موقعی که OC قائم و BC افقی است، سرعت زاویه‌ای BC را حساب کنید. مسئله را با رسم چند ضلعی سرعت مورد نیاز حل نمایید.



شکل مسئله ۵-۱۸۶

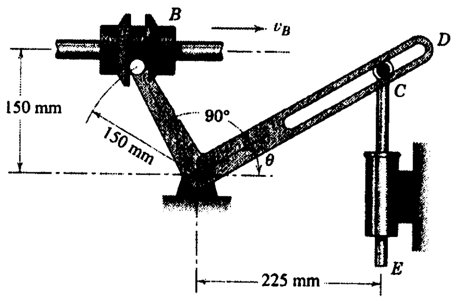
۵-۱۸۷ در لحظه نشان داده شده $x = ۵۰$ mm و $\dot{s} = ۱/۶$ m/s است. سرعت متناظر نقطه B را بدست آورید.

جواب $v_B = ۱/۰۲۹$ m/s



شکل مسئله ۵-۱۸۷

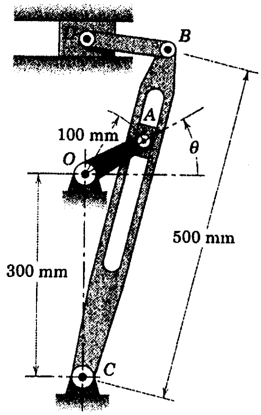
۵-۱۸۸ پین A در لنگ قائم الزاویه AOD توسط لبه‌های بشقابی غلاف B با سرعت ثابت ۰/۹ m/s در امتداد محور افقی ثابت می‌لغزد. در موقعیت $\theta = ۳۰°$ شتاب دسته پیستون CE را بیابید. در حالیکه انتهای بالایی آن در شیار شعاعی لنگ قائم الزاویه قرار دارد.



شکل مسئله ۵-۱۸۸

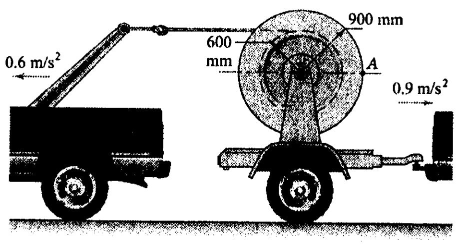
۵-۱۸۹ شکل زیر یک مکانیزم متعارف برگشت سریع را نشان می‌دهد که در ماشین‌های صفحه تراش بکار می‌رود. در این مکانیزم دوره براده برداری از سطح کار توسط تیغچه (متصل به D) به کندی انجام می‌پذیرد و برگشت تیغچه جهت براده برداری مجدد به تندی صورت می‌گیرد. اگر لنگ محرک OA با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = ۳$ rad/s دوران نماید، سرعت نقطه B را به ازای $\theta = ۳۰°$ تعیین کنید.

جواب $v_B = ۲۸۸$ mm/s



شکل مسئله ۵-۱۸۹

۵-۱۹۰ جهت باز شدن کابل تلفن با سرعت، تریلی همراه قرقره کابل از حالت سکون با شتاب اولیه $۰/۹$ m/s^2 شروع به حرکت می‌نماید. همزمان، کامیون یدک‌کش انتهای کابل آزاد را در جهت خلاف به صورت افقی با شتاب اولیه $۰/۶$ m/s^2 می‌کشد. اگر هر دو وسیله از حالت سکون با هم شروع به حرکت نمایند، مقدار شتاب کل نقطه A روی لبه جلویی قرقره را تعیین کنید: (الف) درست در شروع حرکت و (ب) یک ثانیه پس از شروع حرکت.

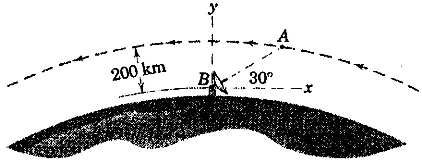


شکل مسئله ۵-۱۹۰

۵-۱۹۱ ایستگاه رادار B واقع در استوا ماهواره A را که در مدار مدور استوایی در ارتفاع ۲۰۰ km از غرب به شرق در حرکت است، ردیابی می‌کند. موقعی که ماهواره زاویه $۳۰°$ را نسبت به افق می‌سازد، اختلاف بین سرعت ماهواره نسبت به ایستگاه رادار را چنانچه از مرجع غیر دوار اندازه گیری شود با

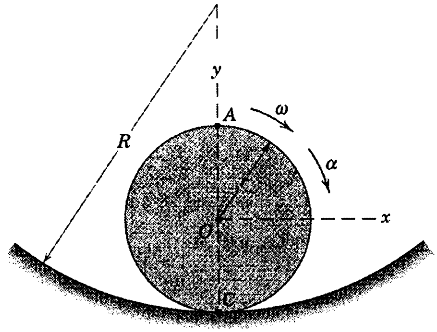
سرعتی که نسبت بـه مرجع دوار ایستگاه رادار انـدازه‌گیـری می‌شود، تعیین کنید.

جواب $\Delta \mathbf{v}_{rel} = -۵۰/۳\mathbf{i} + ۸۷/۱\mathbf{j}$ km/h



شکل مسئله ۱۹۱-۵

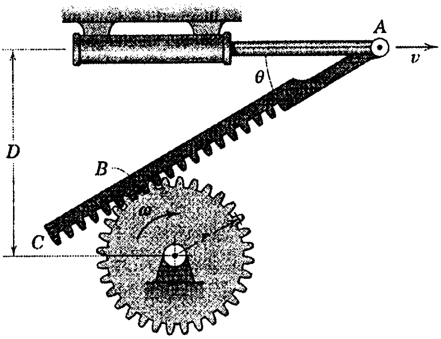
۱۹۲-۵ چرخ روی سطح مدور بدون لغزش می‌غلتد. در پـایین‌ترین موقعیت، چـرخ دارای سـرعت زاویـه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α، هر دو در جهت ساعتگرد می‌باشـد. در ایـن لحظه رابطه‌ای برای شتاب نقطه C واقع بر چرخ که با سطح در تماس است و همچنین برای شتاب نقطه A تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۹۲-۵

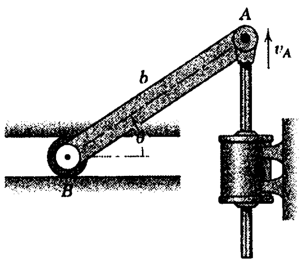
۱۹۳-۵ سیلندر هیدرولیکی، پین A را با سـرعت ثـابت v به سمت راست حرکت می‌دهد. با توجه به اینکـه فاصلـه A تا B تغییر ناپذیر بوده و B بر روی AC است کـه بـه صـورت لحظه‌ای با چرخ‌دنده در تماس می‌باشد، رابطه‌ای برای سـرعت زاویه‌ای ω چرخ‌دنده و سرعت زاویه‌ای شانه‌دنده AC بنویسید.

جواب $\omega = \dfrac{v\cos\theta}{r}$ و $\omega_{AC} = \dfrac{v\sin^{2}\theta}{D - r\cos\theta}$



شکل مسئله ۱۹۳-۵

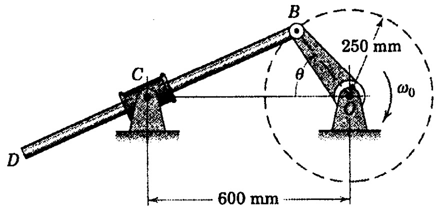
۱۹٤-۵ دسته پیستون سیلندر هیدرولیکی طی برهـه‌ای از حرکت به A سـرعت ثـابت قـائم v_A را می‌دهـد. غلتـک B حرکتش محدود به حرکـت در راهنمـای افقـی اسـت. شـتاب زاویه‌ای لینک AB را بر حسب g تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۹۴-۵

۵-۱۹۵ ◀ لنگ OB با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_0 = ۵\ \text{rad/s}$ در جهت ساعتگرد دوران می‌کند. در لحظه‌ای که $\theta = ۹۰^\circ$ است، شتاب زاویه‌ای α میله BD را، که در داخل غلاف مفصل شده به نقطه C می‌لغزد، تعیین کنید.

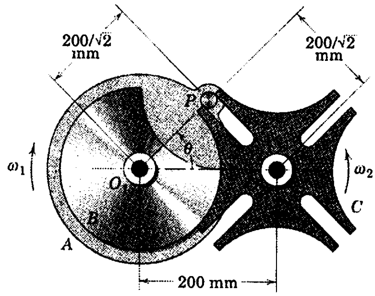
جواب $\alpha = ۶/۲۵\ \text{rad/s}^2$ CW



شکل مسئله ۵-۱۹۵

🖳 مسائل کامپیوتری

***۵-۱۹۶** برای چرخ ژنوای مسئله ۵-۵۳ که مجدداً در اینجا نشان داده شده است، رابطه‌ای برای $\omega_۲$، سرعت زاویه‌ای چرخ شیاردار C طی درگیری با پین P بیان نموده و $\omega_۲$ را در محدوده $-۴۵^\circ \le \theta \le ۴۵^\circ$ رسم نمایید. چرخ محرک A دارای سرعت ثابت $\omega_۱ = ۲\ \text{rad/s}$ می‌باشد.

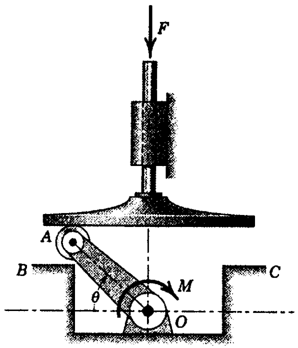


شکل مسئله ۵-۱۹۶

***۵-۱۹۷** گشتاور ثابت M حول نقطه O از گشتاور ناشی از F بر روی دسته پیستون تجاوز می‌کند و شتاب زاویه‌ای $\ddot{\theta} = ۱۰۰(۱ - \cos\theta)\ \text{rad/s}^2$ نتیجه می‌گردد. اگر لنگ OA از حالت سکون در B جایی که $\theta = ۳۰^\circ$ است، رها گشته و در نقطه C جایی که $\theta = ۱۵۰^\circ$ است به مانع برخورد کند، سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ را به صورت تابعی از θ رسم نموده و زمان t را که لنگ از $\theta = ۹۰^\circ$ تا $\theta = ۱۵۰^\circ$ می‌پیماید، پیدا کنید.

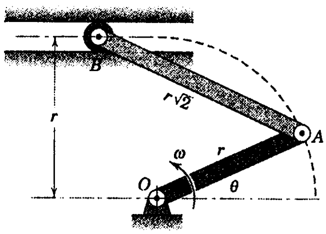
جواب $\dot{\theta} = ۱۰\sqrt{۲}\sqrt{\theta - \sin\theta - ۰/۰۲۳۶}\ \text{rad/s}$

$t = ۰/۰۷۰۱\ \text{s}$



شکل مسئله ۵-۱۹۷

***۵-۱۹۸** به لینک OA سرعت زاویه‌ای ثابت ω در جهت پادساعتگرد داده می‌شود. سرعت زاویه‌ای ω_{AB} لینک AB را به صورت تابعی از θ تعیین کنید. نسبت $\frac{\omega_{A/B}}{\omega}$ را در محدوده $۰ \le \theta \le ۹۰^\circ$ حساب کرده و رسم نمایید. مقدار θ را برای موقعی که سرعت زاویه‌ای AB نصف مقدار مربوط به OA است، تعیین کنید.



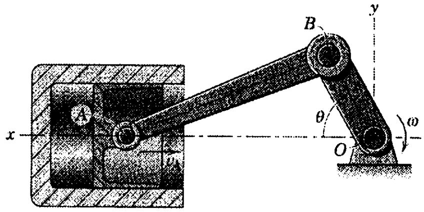
شکل مسئله ۵-۱۹۸

***۵-۱۹۹** برای لنگ ـ لغزنده نشان داده شده، عبارت v_A، سرعت پیستون را (که به سمت راست مثبت در نظر گرفته شده) با قرار دادن مقادیر عددی مسئله نمونه ۵-۱۵ به صورت تابعی از θ در محدوده $۰ \le \theta \le ۱۸۰^\circ$ محاسبه کنید. v_A را بر حسب θ رسم نموده و مقدار ماکزیمم آن و مقدار

متناظر θ را پیدا کنید (به کمک تقارن، نتایج را در محدوده $۱۸۰° \le \theta \le ۳٦۰°$ پیش بینی کنید).

جواب
$$\upsilon_A = r\omega \sin\theta \left(1 + \frac{\cos\theta}{\sqrt{(l/r)^2 - \sin^2\theta}}\right)$$

$(\upsilon_A)_{max} = ۲۰/۹$ m/s در $\theta = ۷۲/۳°$

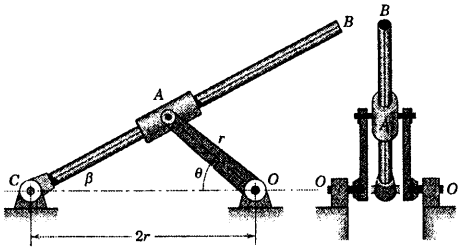


شکل مسئله ۱۹۹-۵

***۵-۲۰۰** برای لنگ ـ لغزنده مسئله ۱۹۹-۵ عبارت a_A، شتاب پیستون را (که به سمت راست مثبت در نظر گرفته شده) بر حسب θ برای $\dot\theta = \omega =$ ثابت بدست آورید. با قرار دادن مقادیر عددی مسئله نمونه ۱۵-۵ شتاب a_A را به صورت تابعی از θ در محدودهٔ $۰ \le \theta \le ۱۸۰°$ محاسبه کنید. a_A را بر حسب θ رسم نموده و مقدار θ را چنان تعیین کنید که به ازای آن $a_A = ۰$ باشد (به کمک تقارن، نتایج را در محدوده $۱۸۰° \le \theta \le ۳٦۰°$ پیش بینی کنید).

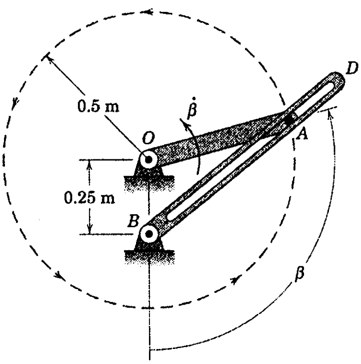
***۵-۲۰۱** زوج لنگی مطابق شکل در نقطه O مفصل شده و بدون مداخله با میله مفصل شده CB هنگام لغزش آن درون غلاف A می‌توانند کاملا دوران کنند. اگر لنگ دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot\theta$ باشد، نسبت $\dot\beta/\dot\theta$ را به صورت تابعی از θ بین $\theta = ۰$ و $\theta = ۱۸۰°$ تعیین و رسم نمایید. زاویه β را برای موقعی که $\dot\beta = ۰$ می‌گردد، تعیین کنید.

جواب
$$\frac{\dot\beta}{\dot\theta} = \frac{۲\cos\theta - ۱}{۵ - ۴\cos\theta}$$



شکل مسئله ۲۰۱-۵

***۵-۲۰۲** میله OA حول مفصل ثابت O با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot\beta = ۰/۸$ rad/s دوران می‌کند. پین A روی میله OA ثابت بوده و درون شیار بازوی BD که حول محور ثابت گذرنده از B دوران می‌کند، درگیر شده است. در محدوده $۰ \le \beta \le ۳٦۰°$ سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای BD و سرعت و شتاب نقطه A را نسبت به بازوی BD تعیین کرده و رسم نمایید.

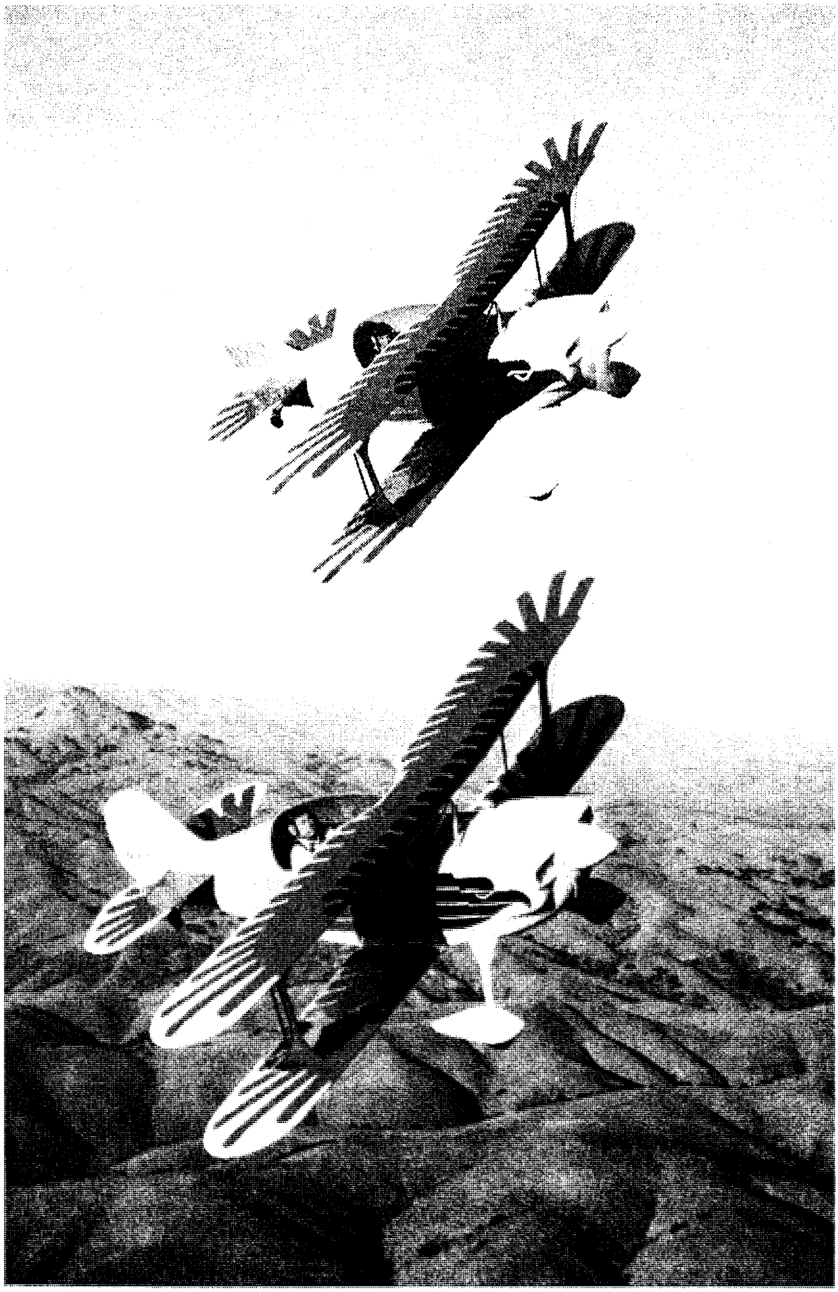


شکل مسئله ۲۰۲-۵

فصل ششم

سینتیک اجسام صلب در صفحه

فهرست مطالب



همانطور که هواپیماهای دوباله مانور مخصوصی را انجام می‌دهند، هر دو دارای حرکت انتقالی دورانی می‌باشند. نیروها و گشتاورهایی که چنین حرکت جسمی صلب را بوجود می‌آورند در این بخش مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۱-۶ مقدمه

سینتیک اجسام صلب در مورد روابط بین نیروهایی که از خارج محدودهٔ جسم بــه آن وارد می‌شـود و حرکت‌هـای انتقالی و دورانی متناظر آنها بحث می‌کند. در فصل ۵ روابط سینماتیکی را بـرای حرکـت جسـم صلـب در صفحـه مطـرح نمودیم، این روابط را در این فصل در مواردی که تاثیر نیروها بر حرکت دو بعدی جسم صلب مورد نظـر اسـت بـه طـور گسترده بکار خواهیم برد.

به این منظور در این فصل، جسم را می‌توان به عنوان یک ورق نازک فرض کرد که حرکتش محدود به صفحه ورق باشد و آنرا تحت عنوان حرکت صفحه‌ای بررسی خواهیم نمود. صفحه حرکت، شامل مرکز جرم است و کلیه نیروهایی که روی جسم عمل می‌کنند در صفحه حرکت تصویر خواهند شد. می‌توان جسمی که ابعاد قابل ملاحظه‌ای عمود بـر صفحـه حرکت دارد اما نسبت به صفحه گذرنده از مرکز جرم متقارن است را به صورت حرکت صفحه‌ای مورد بررســی قـرار داد. آشکار است که این ایده‌آل سازی، دسته بزرگی از حرکت اجسام صلب را در بر می‌گیرد.

سابقه‌ای برای مطالعه سینتیک

در فصل ۳ دریافتیم که برای تعیین حرکت یک ذره در صفحه، در حالتی که حرکت مزبــور دارای دو مولفـه خطـی است، برای بیان حرکت دو معادله نیرو لازم می‌باشد. برای حرکت اجسام صلب در صفحه، وجود یــک معادلـه دیـگر نـیز ضروری است تا وضعیت دوران جسم را مشخص کند. بنابراین دو معادله نیرو و یک معادله گشتاور یـا معـادل آنـها بـرای تعیین وضعیت حرکت صفحه‌ای جسم صلب لازم می‌باشد.

در فصل ٤ روابط سینتیکی که شالوده بسیاری از تحلیل‌های حرکت جسم صلب است، بـرای سیسـتم ذرات مطـرح شدند. از آنجا که این معادلات در فصل ٦ بارها مورد مراجعه قرار گرفته و پس از بسط و گسترش، مشخصاً برای حرکـت صفحه‌ای اجسام صلب استفاده خواهند شد، بنابراین توصیه می‌شود که به موازات مطالعه فصل ٦، مکرراً به مطالب فصل ٤ مراجعه نمایید. همچنین لازم است قبل از تسلط بر محاسبات سرعت و شتاب که در فصل ۵ برای حرکت صفحه‌ای جسـم صلب حاصل شد، به هیچ وجه مبادرت به مطالعه فصل حاضر نشود. زیرا بدون کسب توانایی برای تعیین صحیح شتاب بـا استفاده از اصول سینماتیک، استفاده از اصول نیرو و گشتاور، تلاشی بیــهوده اسـت. بنـابراین قبـل از آنکـه جلوتـر رویـد، ضروری است که سینماتیک لازمه، از جمله محاسبات شتاب نسبی را به طور کامل آموخته و بر آنها تسلط پیدا کنید.

اساس روش سینتیکی، جداسازی جسم یا سیستمی است که تجزیه و تحلیل می‌شود. این جداسازی در فصل ۳ برای سینتیک ذره ارائه و مورد استفاده قرار گرفت و در این فصل به همان روش بکار گرفته خواهد شد. برای مسائلی که شامل روابط لحظه‌ای نیرو، جرم و شتاب یا مومنتم هستند، باید جسم یا سیستم مورد نظر با جداسازی بوسیله *ترسیمه آزاد* به روشنی تعیین شود. هنگامیکه اصول کار ـ انرژی بکار گرفته می‌شود، می‌توان از *ترسیمه نیروهای فعال* که نشان دهنده تنها آن گروه از نیروهای خارجی است که بر روی سیستم کار انجام می‌دهند، به جای ترسیمه آزاد استفاده کرد. *هیچ راه حلی نباید بدون تعیین کامل مرز خارجی جسم یا سیستم و تشخیص نیروهای خارجی که به آن وارد می‌شود بکار رود.*

در بررسی سینتیک اجسام صلبی که حرکت زاویه‌ای دارند، لازم است مشخصه‌ای از جسم که توزیع یا گسترش شعاعی جرم نسبت به محوری که عمود بر صفحه حرکت است را معرفی نماییم. این مشخصه به *ممان اینرسی* جرم معروف است و برای حل مسائل دورانی، توانایی در محاسبه این مشخصه اساسی است. در این بخش فرض می‌شود که شما با محاسبه ممان اینرسی جرم آشنایی دارید. پیوست B این عنوان را برای کسانی که نیاز به آموختن و یا مرور دارند، مطرح می‌نماید.

تنظیم فصل

فصل ٦ با همان سه بخشی که در فصل ۳ در مورد سینتیک ذرات مطر ح شد، تنظیم شده است. در بخشA نیرو و گشتاور به شتابهای خطی و زاویه‌ای لحظه‌ای مربوط می‌شوند. بخش B حل مسائل را توسط روش کار و انرژی مطرح می‌نماید و بخش C روشهای ضربه و مومنتم را شامل می‌شود.

در واقع تمام مفاهیم اساسی و روشهایی که این سه بخش را در بر می‌گیرد در فصل ۳ در سینتیک ذرات بررسی شده‌اند و در صورت تسلط بر سینماتیک حرکت صفحه‌ای جسم صلب این تکرار باعث پیشرفت سریع‌تر در فصل ٦ خواهد شد. در هر یک از سه بخش، سه نوع حرکت، *انتقالی*، *دورانی حول محور ثابت* و *حرکت کلی در صفحه* مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

بخش A ـ نیرو، جرم و شتاب

۶-۲ معادلات کلی حرکت

در بخشهای ٤-۲ و ٤-٤ روابط برداری نیرو و گشتاور را برای سیستم کلی جرم بدست آوردیم. اکنون این نتایج را نخست برای یک جسم صلب در سه بعد بکار می‌بریم. معادله نیرو، رابطه ٤-١، یعنی:

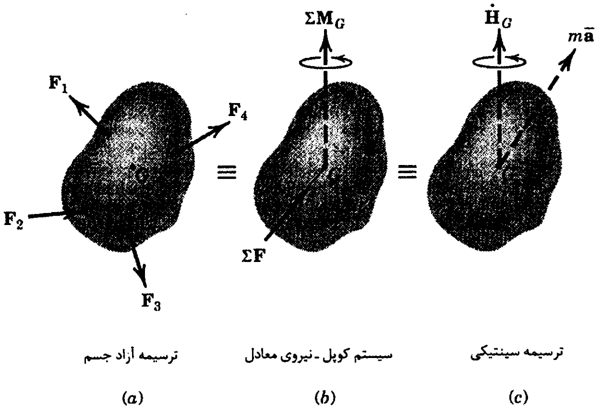
$$\Sigma \mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}} \qquad [٤-١]$$

بیانگر آن است که برآیند $\Sigma \mathbf{F}$ نیروهای خارجی اعمال شده بر جسم مساوی حاصلضرب جرم m در شتاب $\bar{\mathbf{a}}$ مرکز جرم G آن می‌باشد. معادله گشتاور حول مرکز جرم (رابطه ٤-٩) یعنی:

$$\Sigma \mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad [٤-٩]$$

بیانگر آن است که برآیند گشتاور نیروهای خارجی حول مرکز جرم یک جسم برابر مشتق زمانی مومنتم زاویه‌ای جسم حول مرکز جرم می‌باشد.

از استاتیک یادآوری می‌کنیم که به جای سیستم کلی نیروهایی که روی جسم صلب اعمال می‌شوند، می‌توان در یک نقطه اختیاری برآیند نیروهای وارده و کوپل نیروی معادل آن را قرار داد. با جایگزینی نیروهای خارجی توسط سیستم کوپل ـ نیروی معادل، در حالتی که نیروی برآیند بر مرکز جرم وارد می‌شود، می‌توان عمل نیروها و در پی آن پاسخ دینامیکی را به کمک شکل ۱-٦ نشان داد. قسمت (a) از شکل نشانگر ترسیمه آزاد جسم است. قسمت (b) شکل، سیستم کوپل ـ نیروی معادل را با نیروی برآیند عمل کننده بر G نشان می‌دهد. قسمت (c) شکل، اثرات دینامیکی حاصله را که توسط روابط ۱-٤ و ۹-٤ مشخص شدند، نشان داده که *ترسیمه سینتیکی* نامیده شده است.

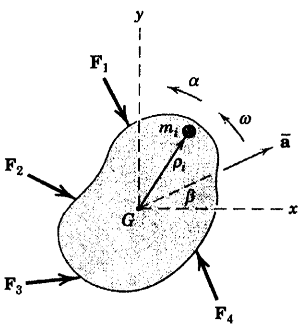


شکل ۱-۶

هم ارزی بین ترسیمه آزاد و ترسیمه سینتیکی به ما اجازه می‌دهد که به طور جداگانه اثرات انتقال و دوران نیروهایی را که به جسم صلب اعمال می‌شود به خوبی نشان داده و بخاطر بسپاریم. از آنجا که این نتایج را در ادامه بحث حرکت صفحه‌ای جسم صلب بکار خواهیم برد، هم ارزی فوق را به صورت ریاضی بیان خواهیم نمود.

معادلات حرکت صفحه‌ای

اکنون روابط پیش گفته شده را برای حالت حرکت صفحه‌ای بکار می‌بریم. شکل ۲-٦ نشانگر یک جسم صلب در حال حرکت است که در صفحه x-y حرکت صفحه‌ای دارد. مرکز جرم G دارای شتاب $\bar{\mathbf{a}}$ بوده و جسم دارای سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{k}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha} = \alpha\mathbf{k}$ است که هر دو در جهت مثبت z می‌باشند. چون جهت z در هر دو مورد $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{\alpha}$ عمود بر صفحه حرکت باقی می‌ماند، می‌توانیم از نمادهای اسکالر ω و $\alpha = \dot{\omega}$ برای نشان دادن سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای استفاده نماییم



شکل ۲-۶

مومنتم زاویه‌ای حول مرکز جرم برای سیستم کلی در رابطه ٤-٨a به صورت $\mathbf{H}_G = \Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ بیان شد که در آن $\boldsymbol{\rho}_i$ بردار موقعیت ذره نمونه‌ای به جرم m_i نسبت به G است. برای جسم صلب سرعت m_i نسبت به G عبارت است از $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ که مقدار آن $\rho_i \omega$ بوده و در صفحه حرکت عمود بر $\boldsymbol{\rho}_i$ می‌باشد. حاصلضرب $\boldsymbol{\rho}_i \times \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ برداری عمود بر صفحه x-y در جهت $\boldsymbol{\omega}$ بوده و مقدار آن $\rho_i^2 \omega$ است. بنابراین مقدار $\mathbf{H}_G$ برابر $H_G = \Sigma \rho_i^2 m_i \omega = \omega \Sigma \rho_i^2 m_i$ می‌باشد. مجموعه را می‌توان همچنین به صورت $\int \rho^2 dm$ نوشت که *ممان اینرسی جرمی* $\bar{I}$ جسم حول محور گذرنده از G تعریف می‌شود (برای محاسبه ممان اینرسی جرمی پیوست B را ببینید).

اکنون می‌توان نوشت:

$$H_G = \bar{I}\omega$$

که در آن $\bar{I}$ خاصیت ثابتی از جسم بوده و بیانگر اندازه اینرسی دورانی، یا مقاومتی در برابر تغییر سرعت دورانی ناشی از توزیع شعاعی جرم حول محور z گذرنده از G است. با این جایگزینی معادله گشتاور یعنی رابطه ٤-٩ به صورت زیر در می‌آید.

$$\Sigma M_G = \dot{H}_G = \bar{I}\dot{\omega} = \bar{I}\alpha$$

که در آن $\alpha = \dot{\omega}$ شتاب زاویه‌ای جسم است.

معادله گشتاور و شکل برداری قانون دوم حرکت نیوتن، یعنی رابطه ٤-١ چنین نوشته می‌شوند:

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= m\bar{\mathbf{a}} \\ \Sigma M_G &= \bar{I}\alpha \end{aligned}} \qquad (٦-١)$$

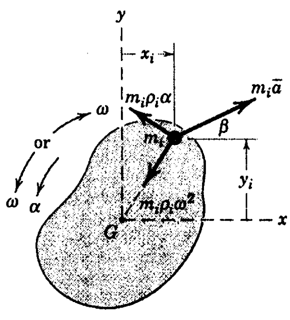
روابط ٦-١ معادلات کلی حرکت برای جسم صلب در حرکت صفحه‌ای است. در بکارگیری روابط ٦-١ معادله برداری نیرو به تناسب مسئله مورد نظر با استفاده از مختصات x-y ، n-t و یا r-θ با دو مولفه اسکالرش بیان می‌شود.

روش دیگر

روش دیگر برای بدست آوردن معادله گشتاور، مراجعه مستقیم به نیروهایی است که روی ذره نمونه m_i که در شکل ٦-٣ نشان داده شده است، عمل می‌کنند. شتاب m_i مساوی جمع برداری $\bar{a}$ و جملات نسبی $\rho_i\omega^2$ و $\rho_i\alpha$ است که در آن مرکز جرم G به عنوان نقطه مرجع در نظر گرفته شده است. در نتیجه، برآیند نیروهای وارد بر m_i دارای مولفه‌های $m_i\bar{a}$ ، $m_i\rho_i\omega^2$ و $m_i\rho_i\alpha$ در امتدادهای نشان داده شده است.

مجموع گشتاور این مولفه‌های نیرو حول G در جهت α عبارت است از:

$$M_{G_i} = m_i\rho_i^2\alpha + \left(m_i\bar{a}\sin\beta\right)x_i - \left(m_i\bar{a}\cos\beta\right)y_i$$



شکل ۳-۶

رابطه مشابهی برای گشتاور تمام ذرات جسم وجود دارد و مجموع این گشتاورها حول G برای برآیند نیروهای وارده بر روی کلیه ذرات به شکل زیر خواهد بود.

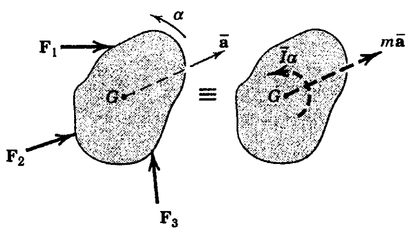
$$\Sigma M_G = \Sigma m_i \rho_i^2 \alpha + \bar{a} \sin\beta\, \Sigma m_i x_i - \bar{a} \cos\beta\, \Sigma m_i y_i$$

اما مبدا مختصات در مرکز جرم قرار گرفته و در نتیجه $\Sigma m_i x_i = m\bar{x} = 0$ و $\Sigma m_i y_i = m\bar{y} = 0$. بنابراین مجموع گشتاورها همچون قبل به صورت زیر در می‌آید.

$$\Sigma M_G = \Sigma m_i \rho_i^2 \alpha = \bar{I}\alpha$$

البته سهم ΣM_G نیروهای داخلی جسم صفر است. زیرا نیروهای مساوی و مخالف عمل و عکس العمل بین ذرات مجاور، یکدیگر را خنثی می‌سازند. بنابراین، ΣM_G نشان دهنده مجموع گشتاورها حول مرکز جرم است که فقط ناشی از نیروهای خارجی اعمال شده بر روی جسم است و در ترسیمه آزاد نشان داده شده‌اند. توجه داریم که مولفه نیروی $m_i\rho_i\omega^2$ هیچ گشتاوری حول G ندارد. در نتیجه سرعت زاویه‌ای ω هیچ اثری بر معادله گشتاور حول مرکز جرم G نخواهد داشت.

نتایج حاصل از معادلات اساسی حرکت برای یک جسم صلب در حرکت صفحه‌ای، یعنی رابطه ۱-۶، در شکل ٤-٦ به صورت ترسیمه‌ای نشان داده شده‌اند که نمونه‌هایی دو بعدی از بخشهای a و c شکل ۱-٦ برای یک جسم سه بعدی می‌باشند. ترسیمه آزاد، نشان دهنده نیروها و گشتاورهایی است که در سمت چپ معادلات حرکت ظاهر می‌شوند. ترسیمه سینتیکی، پاسخ دینامیکی برآیند را بر حسب جمله انتقالی $m\bar{\mathbf{a}}$ و جمله دورانی $\bar{I}\alpha$ نشان می‌دهد که در سمت راست رابطه ۱-٦ ظاهر می‌شود.



شکل ۴-۶

چنانکه قبلاً اشاره شد. جمله انتقالی $m\bar{\mathbf{a}}$ بعد از انتخاب دستگاه مرجع اینرسی مناسب توسط مولفه‌های x-y، n-t و یا r-θ بیان خواهد شد. هم ارزی مشخص شده در شکل ٤-٦ اساس درک سینتیک حرکت صفحه‌ای بوده و در حل مسائل مرتباً مورد استفاده واقع خواهد شد.

نمایش برآیندهای $m\bar{\mathbf{a}}$ و $\bar{I}\alpha$ کمک می‌کنند تا از برابری مجموع نیرو و گشتاور تعیین شده از ترسیمه آزاد با برآیندهای صحیح آنها مطمئن شویم.

شکل دیگری از معادلات گشتاور

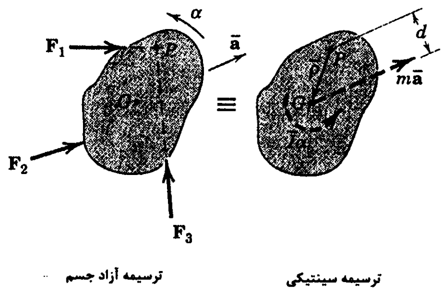
در بخش ٤-٤ از فصل ٤ در مورد سیستم ذرات، معادله کلی گشتاور را برای یک نقطه دلخواه P مطرح کردیم. یعنی معادله ۱۱-٤ که عبارت بود از:

$$\Sigma \mathbf{M}_P = \dot{\mathbf{H}}_G + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\bar{\mathbf{a}} \qquad [٤\text{-}۱۱]$$

که در آن $\bar{\rho}$ بردار موقعیت P تا مرکز جرم G و $\bar{\mathbf{a}}$ شتاب مرکز جرم است. همانطور که قبلاً در این بخش نشان دادیم برای یک جسم صلب در حرکت صفحه‌ای، $\dot{\mathbf{H}}_G$ مساوی $\bar{I}\alpha$ می‌باشد. همچنین حاصلضرب برداری $\bar{\rho}\times m\bar{\mathbf{a}}$ برابر با مقدار گشتاور $m\bar{\mathbf{a}}$ حول نقطه P یعنی $m\bar{a}\,d$ است. بنابراین برای جسم دو بعدی که در شکل ۵-۶ با ترسیمه‌های آزاد و سینتیکی‌اش نشان داده شده است. رابطه ۱۱-۴ را می‌توان به صورت ساده زیر نوشت:

$$\boxed{\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d} \qquad (۶-۲)$$

روشن است در این مثال تمام جملات در جهت پادساعتگرد، مثبت هستند و انتخاب P به عنوان مرجع، نیروهای $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_3$ را حذف می‌کند.



شکل ۵-۶

اگر قصد داشتیم به عنوان مثال $\mathbf{F}_2$ و $\mathbf{F}_3$ را حذف کنیم با انتخاب محل تقاطع آنها به عنوان مرجع، می‌بایستی P در طرف دیگر بردار $m\bar{\mathbf{a}}$ قرار می‌گرفت و گشتاور $m\bar{\mathbf{a}}$ حول P در جهت ساعتگرد، جمله‌ای منفی در معادله می‌گردید. رابطه ۲-۶ صرفاً اصل گشتاورها را یادآوری می‌کند و بیان می‌دارد که مجموع گشتاورهای کلیه نیروها حول P مساوی گشتاور برآیند آنها حول P می‌باشد و توسط کوپل برآیند $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$ و نیروی برآیند $\Sigma\mathbf{F} = m\bar{\mathbf{a}}$ بیان می‌شود.

در بخش ٤-٤ یک رابطه دیگر نیز حول P مطرح کردیم. یعنی معادله ۱۳-٤ که چنین است:

$$\Sigma\mathbf{M}_P = \left(\dot{\mathbf{H}}_P\right)_{rel} + \bar{\rho}\times m\mathbf{a}_P \qquad [٤-۱۳]$$

برای حرکت صفحه‌ای جسم صلب، اگر P به عنوان یک نقطه ثابت بر روی جسم انتخاب شود، در این صورت شکل اسکالر $\left(\dot{\mathbf{H}}_P\right)_{rel}$ برابر $I_P\alpha$ می‌گردد که در آن I_P ممان اینرسی جرمی حول محور گذرنده از P بوده و α شتاب زاویه‌ای جسم است. بنابراین رابطه را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M}_P = I_P\alpha + \bar{\rho}\times m\mathbf{a}_P} \qquad (۶-۳)$$

که در آن شتاب P برابر $\mathbf{a}_P$ بوده و بردار موقعیت P تا G برابر $\bar{\rho}$ می‌باشد. وقتی $\bar{\rho}=\mathbf{0}$ است، نقطه P به مرکز جرم G منطبق شده و رابطه ۳-۶ به شکل اسکالر $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$ خلاصه می‌شود که قبلاً بدست آمد. موقعی که $\mathbf{a}_P = \mathbf{0}$ است،

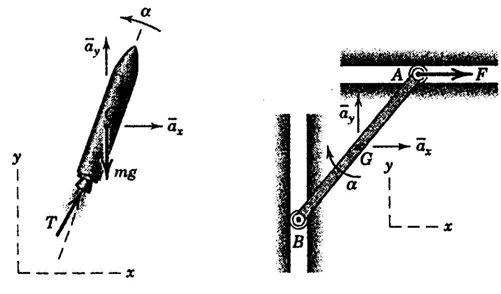
نقطه P همان نقطه O خواهد شد که در دستگاه مرجع اینرسی ثابت بوده و به جسم (یا گستره جسم) متصل است و رابطه ۳-٦ به شکل اسکالر به صورت زیر خلاصه می‌گردد.

$$\boxed{\Sigma M_O = I_O \alpha} \qquad (٦-٤)$$

رابطه ٤-٦ در مورد دوران جسم صلب حول یک نقطه بدون شتاب O که به جسم ثابت شده است، نیز بکار برده می‌شود و حالت ساده شده دو بعدی رابطه ٧-٤ می‌باشد.

حرکت غیر مقید و مقید

حرکت جسم صلب ممکن است غیر مقید یا مقید باشد. راکتی که در صفحه قائم حرکت می‌کند. مانند شکل ٦a-٦ نمونه‌ای از حرکت غیر مقید است که هیچ محدودیتی برای حرکتش وجود ندارد. دو مولفه $\bar{a}_x$ و $\bar{a}_y$ مربوط به شتاب مرکز جرم و شتاب زاویه‌ای α را می‌توان با استفاده از روابط ١-٦ به طور مستقل از هم بدست آورد.



(a) حرکت غیر مقید (b) حرکت مقید

شکل ۶-۶

از طرف دیگر میله شکل ٦b-٦ نشانگر یک حرکت مقید است که در آن راهنمـــای عمـودی و افقـی دو انتـهای آن، رابطه سینماتیکی بین مولفه‌های شتاب مرکز جرم و شتاب زاویه‌ای آن را برقرار می‌کنند. بنابراین قبل از حل سـینتیکی، لازم است از اصول روابط سینماتیکی که در فصل ٥ مطرح گردید، استفاده نموده و سپس آنـها را بـا معـادلات نـیرو و گشـتاور ترکیب کنیم. معمولاً در مسائل دینامیکی که قیدهای فیزیکی در برابر حرکت وجود دارنـد، قبـل از آنکـه معـادلات نـیرو و گشتاور را حل کنیم، باید رابطه‌ای بین شتاب خطی و شتاب زاویه‌ای برقرار نماییم. به همین دلیل است کـه درک اصـول و روشهای فصل ٥ برای کار در فصل ٦ حیاتی است.

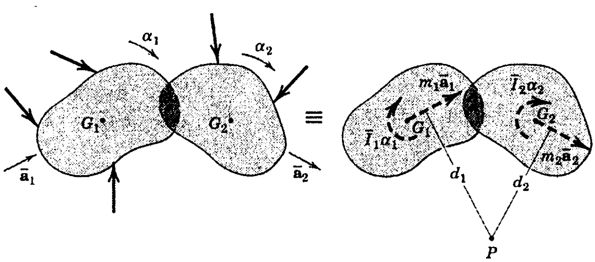
سیستم اجسام به هم پیوسته

وقتی با سیستمی که از دو یا چند جسم به هم متصل شده سر و کار داریم، به طوری کـه حرکـات آنـها بـا روابـط سینماتیکی به هم مربوط می‌شود، مناسب است که سیستم را به صورت یک جسم کامل تجزیه و تحلیل نماییم.

شکل ٧-٦ دو جسم صلب را نشان می‌دهد که در نقطه A به یکدیگر لولا شده و در معرض نیروهای خـارجی قـرار گرفته‌اند. نیروهای موجود در اتصال A برای سیستم، نیروهای داخلی محسوب می‌شوند. بنابراین نشان داده نشده‌اند. برآینـد

نیروهای خارجی باید معادل حاصل جمع برداری دو برآیند $m_1\bar{\mathbf{a}}_1$ و $m_2\bar{\mathbf{a}}_2$ و حاصل جمع گشتاورهای کلیه نیروهای خارجی حول نقطه دلخواهی نظیر P باید معادل گشتاور برآیند آنها یعنی $\bar{I}_1\alpha_1+\bar{I}_2\alpha_2+m_1\bar{a}_1d_1+m_2\bar{a}_2d_2$ باشد. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\boxed{\begin{aligned}&\Sigma\mathbf{F}=\Sigma m\bar{\mathbf{a}}\\&\Sigma M_P=\Sigma\bar{I}\alpha+\Sigma m\bar{a}d\end{aligned}} \qquad (۶-۵)$$

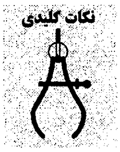


ترسیمه سینتیکی سیستم $\equiv$ ترسیمه آزاد جسم سیستم

شکل ۷-۶

که در آن مجموع سمت راست معادله، معرف جملاتی است که برابر تعداد اجسام جدا شده از هم می‌باشد. اگر بیش از سه مجهول در سیستم باقی بماند، سه معادله اسکالر حرکت که برای سیستم بکار می‌بریم، برای حل مسئله کافی نخواهد بود. در این موارد باید روشهای پیشرفته‌تری مثل استفاده از کار مجازی (بخش ۷-۶) یا معادلات لاگرانژ (که در این کتاب بحث نشده است*) را بکار برد یا سیستم را به عضوهایی تبدیل کرده و هر عضو را جداگانه تحلیل و با معادلات حاصل به طور همزمان حل کرد.

روش تحلیل



در حل مسائل نیرو ـ جرم ـ شتاب در حرکت صفحه‌ای اجسام صلب، بعد از آنکه شرایط و موارد مورد نیاز مسئله به طور روشن در نظر گرفته شدند، باید مراحل زیر را انجام دهید:

۱- سینماتیک. ابتدا نوع حرکت را مشخص کنید و سپس شتاب‌های خطی و زاویه‌ای که تنها از روی اطلاعات سینماتیکی داده می‌شوند را بدست آورید. در حالت حرکت صفحه‌ای مقید اغلب لازم است با حل معادلات سرعت نسبی و شتاب نسبی مناسب، روابط بین شتاب خطی مرکز جرم و شتاب زاویه‌ای جسم را تعیین کرد. مجدداً تاکید می‌شود که

* وقتی یک سیستم به هم پیوسته بیش از یک درجه آزادی دارد. یعنی، برای تعیین پیکربندی سیستم به بیش از یک مختص نیاز است، عموماً معادلات پیشرفته لاگرانژ مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای مطالعه معادلات لاگرانژ، به کتاب *دینامیک ویرایش دوم* SI ، سال ۱۹۷۵ تالیف مریام از انتشارات J.Wiley & Sons مراجعه کنید.

موفقیت در حل مسائل نیرو ـ جرم ـ شتاب در این فصل بستگی به توانایی در تشریح سینماتیک مورد نیاز دارد. بنابراین مرور مکرر فصل ۵ توصیه می‌شود.

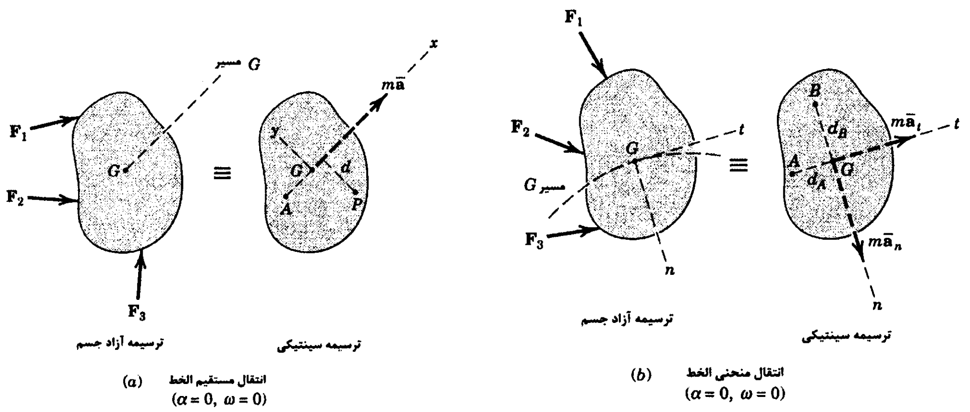
۲- ترسیمه‌ها. همیشه ترسیمه آزاد جسم مورد تحلیل را به طور کامل رسم کنید. دستگاه مختصات اینرسی مناسب را انتخاب و تمام کمیت‌های معلوم و مجهول را مشخص نمایید. ترسیمه سینتیکی نیز باید به گونه‌ای رسم شود که هم ارزی بین نیروهای اعمال شده و پاسخ دینامیکی برآیند به وضوح نشان دهد.

۳- معادلات حرکت. از سه معادله حرکت رابطه ۱-۶ استفاده نموده و با علائم جبری مرتبط با محورهای مرجع انتخاب شده سازگاری ایجاد کنید. رابطه ۲-۶ یا ۳-۶ را می‌توان به جای یکی از روابط ۱-۶ بکار برد. نتایج حاصل از تحلیل سینماتیکی مورد نیاز را بررسی کنید. تعداد مجهول‌ها را شمارش نموده و از برابری آنها با تعداد معادلات مستقل از هم مطمئن شوید. برای یک مسئله قابل حل در حرکت صفحه‌ای یک جسم صلب بیش از پنج مجهول اسکالری نمی‌توان مشخص کرد که از سه معادله حرکت حاصل از روابط ۱-۶ و دو مولفه اسکالر از معادلات شتاب نسبی تعیین می‌شوند.

در سه بخش بعدی مطالبی که قبلاً در سه مورد حرکت در صفحه یعنی *انتقالی*، *دورانی حول محور ثابت* و *حرکت کلی در صفحه* مطرح نمودیم، بکار خواهیم برد.

۳-۶ انتقال

انتقال جسم صلب در حرکت صفحه‌ای در بخش ۱-۵ تشریح و در شکل‌های ۵-۱a و ۵-۱b نشان داده شده است. در شکل‌های مزبور مشاهده شد که هر خط واقع بر جسم در انتقال همواره به موزات موقعیت اولیه خود باقی می‌ماند. در انتقال مستقیم‌الخط تمام نقاط در یک امتداد حرکت می‌کنند. در حالی که در انتقال منحنی الخط، نقاط مسیرهای منحنی یکسانی را طی می‌کنند. در هر دو حالت جسم هیچ حرکت دورانی نداشته و در نتیجه هم ω و هم α صفر هستند. بنابراین از رابطه گشتاور یعنی ۱-۶ ملاحظه می‌شود که رجوع به ممان اینرسی برای جسم صلب حذف می‌گردد.



شکل ۸-۶

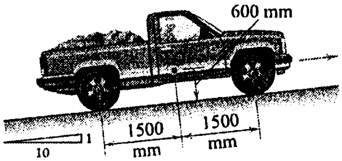
بنابراین برای جسم انتقالی، معادلات کلی در حرکت صفحه‌ای یعنی معادله ۱-٦ را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma \mathbf{F} &= \Sigma m\bar{\mathbf{a}} \\ \Sigma M_G &= \bar{I}\alpha = 0 \end{aligned}} \qquad (٦-٦)$$

برای انتقال مستقیم الخط نشان داده شده در شکل ٦-٨a، اگر محور x در امتداد شتاب انتخاب گردد، دو معادله اسکالر نیرو به صورت $\Sigma F_x = m\bar{a}_x$ و $\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0$ می‌شود. برای انتقال منحنی الخط، شکل ٦-٨b اگر از مختصات n-t استفاده نماییم، دو معادله اسکالر نیرو به صورت $\Sigma F_n = m\bar{a}_n$ و $\Sigma F_t = m\bar{a}_t$ می‌گردد. در هر دو حالت، $\Sigma M_G = 0$ است.

همچنین رابطه دیگر گشتاور یعنی رابطه ۲-٦ را می‌توان به کمک ترسیمه سینتیکی بکار برد. برای انتقال مستقیم الخط ملاحظه می‌شود که $\Sigma M_P = m\bar{a}d$ و $\Sigma M_A = 0$ است. برای انتقال منحنی الخط ترسیمه سینتیکی این اجازه را می‌دهد که در جهت ساعتگرد بنویسیم $\Sigma M_A = m\bar{a}_n\, d_A$ و در جهت پادساعتگرد $\Sigma M_B = m\bar{a}_t\, d_B$ می‌باشند. بنابراین در انتخاب مرکز گشتاورگیری مناسب اختیار کامل داریم.

مسئله نمونه ۱-۶



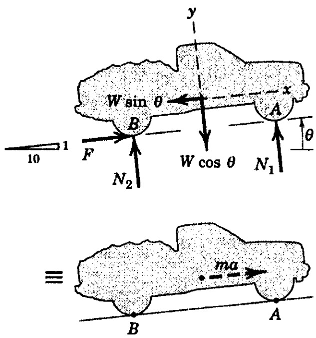
وانت‌باری به جرم kg ۱۵۰۰ از حالت سکون شروع به حرکت نموده و از جاده‌ای با شیب ۱۰ درصد با شتابی ثابت بالا می‌رود و پس از پیمودن فاصله m ۶۰ سرعتش به km/h ۵۰ می‌رسد. نیروی عمودی وارده به هر جفت چرخ‌های جلو و عقب و نیروی اصطکاک وارده بر چرخهای محرک عقب را پیدا کنید. ضریب اصطکاک موثر بین تایرها و جاده حداقل برابر ۰/۸ در نظر گرفته شده است.

---

❶ **حل:** فرض می‌کنیم جرم چرخها در مقایسه با جرم کل وانت قابل صرفنظر کردن است. اکنون می‌توان وانت را با یک جسم صلب شبیه سازی کرد که دارای حرکت انتقالی مستقیم الخط با شتاب ثابت زیر می‌باشد.

❷

$$[v^2 = 2as] \qquad \bar{a} = \frac{\left(\frac{50}{3.6}\right)^2}{2(60)} = 1.608 \text{ m/s}^2$$



ترسیمه آزاد وانت به صورت کامل، نیروهای عمودی N_1 و N_2، نیروی اصطکاک F در جهت خلاف لغزش چرخهای محرک و وزن W را با دو مولفه‌اش نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن $\theta = \tan^{-1}\frac{۱}{۱۰} = ۵/۷۱°$ مولفه‌های وزن برابرند با:

$W\cos\theta = ۱۵۰۰(۹/۸۱)\cos ۵/۷۱° = ۱۴/۶۴(۱۰^۳)$ N و

$W\sin\theta = ۱۵۰۰(۹/۸۱)\sin ۵/۷۱° = ۱۴۶۴$ N.

ترسیمه سینتیکی، نیروی برآیند را نشان می‌دهد که از مرکز جرم می‌گذرد و در امتداد شتاب آن است و مقدارش برابر است با:

$$m\bar{a} = 1500(1.608) = 2410 \text{ N}$$

با استفاده از سه معادله حرکت از روابط ۱-۶ برای سه مجهول داریم:

❸ جواب $\quad [\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad F - 1464 = 2410 \qquad F = 3880 \text{ N}$

(a) $\quad [\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0] \qquad N_1 + N_2 - 14.64(10^3) = 0$

(b) $\quad [\Sigma M_G = \bar{I}\alpha = 0] \qquad 1.5\,N_1 + 3880\,(0.6) - N_2\,(1.5) = 0$

با حل همزمان (a) و (b) خواهیم داشت:

جواب $\quad N_1 = 6550 \text{ N} \qquad N_2 = 8100 \text{ N}$

برای تحمل نیروی اصطکاک N ۳۸۸۰، حداقل ضریب اصطکاک $\frac{F}{N_2} = \frac{۳۸۸۰}{۸۱۰۰} = ۰/۴۸$ لازم است. چون ضریب اصطکاک حداقل ۰/۸ می‌باشد، سطوح به اندازه کافی زبر هستند تا مقدار محاسبه شده F را تحمل نمایند. بنابراین نتیجه بدست آمده صحیح است.

راه حل دیگر. از روی ترسیمه سینتیکی ملاحظه می‌کنیم که N_1 و N_2 می‌توانند به طور مستقل از یکدیگر با نوشتن معادلات گشتاور حول A و B بدست آیند.

$$[\Sigma M_A = m\bar{a}d] \qquad 3N_2 - 1.5(14.64)(10^3) - 0.6(1464) = 2410(0.6)$$

❹ جواب $N_2 = 8100\ \text{N}$

$$[\Sigma M_B = m\bar{a}d] \qquad 14.64(10^3)(1.5) - 1464(0.6) - 3N_1 = 2410(0.6)$$

جواب $N_1 = 6550\ \text{N}$

نکات مفید

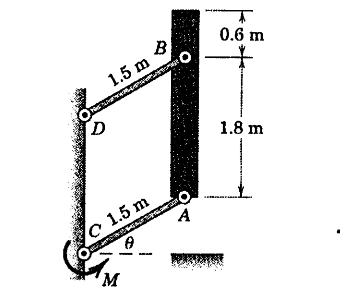
❶ *بدون این فرض، مجبور بودیم نیروهای اضافی کوچکی را که گشتاورهای ایجاد کرده و به چرخها شتاب زاویه‌ای می‌دهند، به حساب آوریم.*

❷ *به خاطر داشته باشید که ۳/۶ km/h برابر ۱ m/s می‌باشد.*

❸ *باید دقت کرد که از معادله اصطکاک $F = \mu N$ در اینجا استفاده نکنیم. زیرا حالت لغزش یا در شرف لغزش نداریم. اگر ضریب اصطکاک کمتر از ۰/۴۸ می‌بود، نیروی اصطکاک برابر μN_2 می‌گشت و اتومبیل نمی‌توانست به شتاب ۱/۶۰۸ m/s^2 برسد. در این حالت مجهولات عبارت بودند از N_1، N_2 و a.*

❹ *طرف چپ معادله از ترسیمه آزاد جسم و طرف راست از ترسیمه سینتیکی بدست می‌آید. جهت مثبت برای جمع گشتاورها اختیاری است اما باید برای دو طرف معادله یکسان باشد. در این مسئله، جهت ساعتگرد را برای گشتاور نیروی برآیند حول B مثبت گرفتیم.*

مسئله نمونه ۲-۶



جرم تیرچه قائم AB برابر ۱۵۰ kg و مرکز جرم G آن در وسط تیرچه قرار دارد. این تیرچه توسط دو لینک موازی به جرمهای ناچیز از حالت سکون در $\theta = ۰$ با گشتاور $M = ۵$ kN.m که به لینک پایینی در C وارد می‌شود، به سوی بالا برده می‌شود. شتاب زاویه‌ای α لینک‌ها را بر حسب θ تعیین نموده و نیروی B در لینک DB را موقعی که $\theta = ۳۰°$ است، پیدا کنید.

حل: حرکت تیرچه انتقالی منحنی الخط است. زیرا خود تیرچه حین حرکت دوران نمی‌کند. برای حرکت دایره‌ای مرکز جرم G از مختصات n و t استفاده می‌کنیم که مناسب‌ترین مختصات برای توصیف این حرکت می‌باشد. ❶ با صرفنظر کردن از جرم لینک‌ها، مولفه مماسی A_t نیرو در A از ترسیمه آزاد جسم AC بدست می‌آید که در آن $\Sigma M_C \cong 0$ و

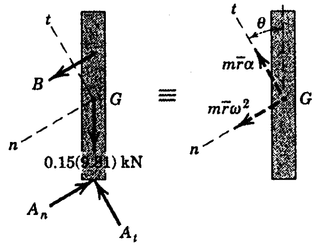
❷ $A_t = \dfrac{M}{AC} = \dfrac{۵}{۱/۵} = ۳/۳۳$ kN می‌باشد. نیرو در B در امتداد لینک می‌باشد. کلیه نیروهای وارده بر روی ترسیمه آزاد تیرچه نشان داده شده‌اند و در ترسیمه سینتیکی نیز برآیند $m\bar{a}$ بر حسب دو مولفه‌اش مشخص شده‌اند.

ترتیب حل مسئله با توجه به اینکه A_n و B به مجموع نیروها در امتداد n و در نتیجه به مقدار $m\bar{r}\omega^2$ در $\theta = ۳۰°$ بستگی دارد، مشخص می‌شود. مقدار ω به تغییر $\alpha = \ddot{\theta}$ با θ بستگی دارد. این وابستگی با جمع نیروها در امتداد t به ازای مقدار کلی θ مشخص می‌گردد که در آن $\bar{a}_t = (a_t)_A = \overline{AC}\,\alpha$ است. بنابراین، چنین شروع می‌کنیم:

$[\Sigma F_t = m\bar{a}_t]$ $\qquad 3.33 - 0.15\,(9.81)\cos\theta = 0.15\,(1.5\alpha)$

جواب $\qquad \alpha = 14.81 - 6.54\cos\theta \ \text{rad/s}^2$

با معلوم بودن α بر حسب تابعی از θ، سرعت زاویه‌ای ω لینک‌ها از رابطه زیر قابل محاسبه است.



$[\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta]$ $\qquad \int_0^{\omega} \omega\, d\omega = \int_0^{\theta}(14.81 - 6.54\cos\theta)\,d\theta$

$$\omega^2 = 29.6\,\theta - 13.08\sin\theta$$

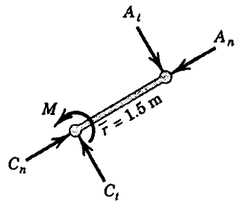
از جایگذاری $\theta = ۳۰°$ نتیجه می‌شود:

$$(\omega^2)_{30°} = 8.97\ (\text{rad/s})^2 \qquad \alpha_{30°} = 9.15\ \text{rad/s}^2$$

و

$$m\bar{r}\omega^2 = 0.15\,(1.5)(8.97) = 2.02\ \text{kN}$$

$$m\bar{r}\alpha = 0.15\,(1.5)(9.15) = 2.06\ \text{kN}$$



نیروی B را می‌توان توسط گشتاورگیری حول A بدست آورد که در اینصورت A_n و A_t و نیروی وزن خود به خود حذف می‌گردند یا می‌توان حول نقطه تقاطع خط اثر نیرو A_n و $m\bar{r}\alpha$ گشتاور گرفت که در این صورت A_n و $m\bar{r}\alpha$ حذف می‌شوند. با استفاده از A به عنوان مرکز گشتاورگیری داریم:

$[\Sigma M_A = m\bar{a}d]$ $\qquad 1.8\cos 30°\, B = 2.02\,(1.2)\cos 30° + 2.06\,(0.6)$

جواب $\qquad B = 2.14\ \text{kN}$

مولفه A_n می‌تواند از جمع بندی نیروها در امتداد n یا از طریق گشتاورگیری حول G یا حول محل تقاطع B و خط اثر $m\bar{r}\alpha$ بدست آید.

نکات مفید

❶ معمولاً بهترین انتخاب برای محورهای مرجع آن است که منطبق بر امتداد مولفه‌های شتاب مرکز جرم در نظر گرفته شوند. در این مسئله نتایج انتخاب محورهای افقی و قائم را بررسی نمایید

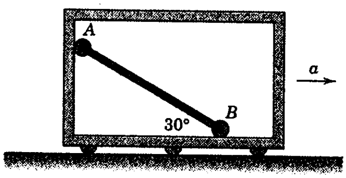
❷ معادلات نیرو و گشتاور برای جسمی با جرم ناچیز با معادلات تعادل یکی هستند. بنابراین لینک BD مانند یک عضو دو نیرویی در حالت تعادل عمل می‌کند.

مسائل

مسائل مقدماتی

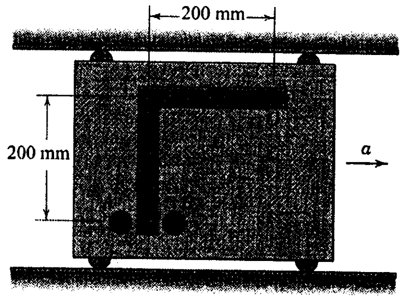
۱-٦ شتاب a قاب چقدر باشد تا میله باریک یکنواخت مطابق شکل ثابت باقی بماند؟ از اصطکاک و جرم غلتکهای کوچک A و B صرفنظر کنید.

جواب $a = g\sqrt{۳}$



شکل مسئله ۱-۶

۲-٦ میله قائم الزاویه با لبه‌های مساوی به جرم ۳ kg آزادانه در نقطه C ورق قائم مفصل شده است. از دوران میله توسط دو میخ A و B ممانعت بعمل می‌آید. شتاب a ورق را طوری تعیین کنید که هیچ نیرویی توسط هیچکدام از میخ‌های A یا B به میله وارد نگردیده است.

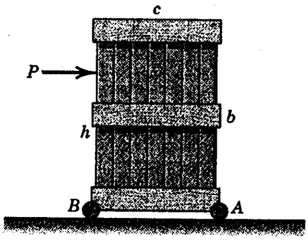


شکل مسئله ۲-۶

۳-٦ در مسئله ۲-٦ اگر به ورق شتاب افقی $a = ۲g$ داده شود، نیروی وارد به میله را توسط هر کدام از میخ‌های A یا B تعیین کنید.

جواب $B = ۷/۳٦$ N

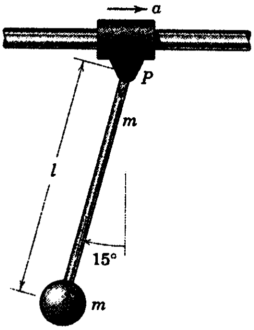
٤-٦ صندوق یکپارچه‌ای به جرم m بر روی چرخ‌های کوچکی مطابق شکل سوار شده است. حداکثر نیروی P را که می‌توان به جعبه اعمال کرد بدون آنکه (الف) حول لبه جلویی آن در موقعیت $h = b$ و (ب) حول لبه عقبی آن در موقعیت $h = ۰$ واژگون شود، تعیین کنید.



شکل مسئله ۴-۶

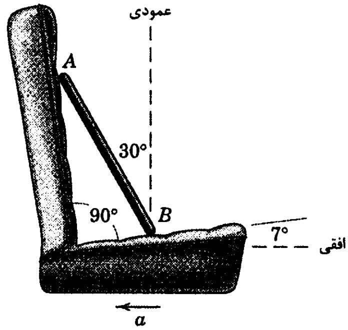
۵-٦ چه مقدار شتاب a طوقه در امتداد راهنمای افقی باعث می‌شود که آونگ از حالت قائم خود زاویه پایای ۱۵° را به خود بگیرد؟ میله باریک دارای طول l و جرم آن و گوی متصل به آن هر کدام m می‌باشد. اصطکاک در مفصل P قابل صرفنظر کردن است.

جواب $a = ۰/۲٦۸\, g$



شکل مسئله ۵-۶

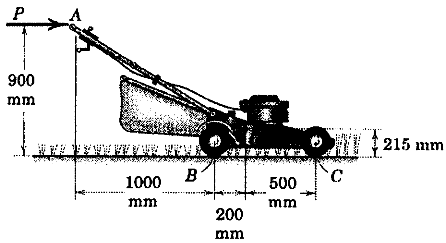
٦-٦ میله باریک یکنواختی مطابق شکل بر روی صندلی اتومبیلی قرار گرفته است. شتاب کند شونده a را طوری تعیین کنید که میله به طرف جلو واژگون گردد. فرض کنید اصطکاک در B برای جلوگیری از لغزش کافی است.



شکل مسئله ۶-۶

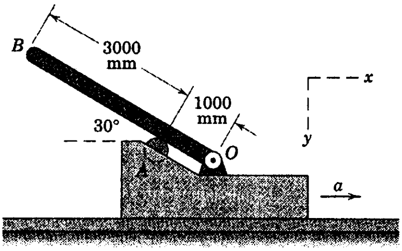
٦-٧ چرخ محرک ماشین چمن‌زنی نشان داده شده موقعی که در حالت سکون به دنده گذاشته می‌شود، مشاهده می‌شود که تایرهای عقب آن شروع به چرخش کرده و شتاب می‌گیرد. اگر ضرایب اصطکاک بین تایرهای عقب و زمین برابر μ_s = ۰/۷ و μ_k = ۰/۵ باشند، شتاب a رو به جلوی چمن‌زن را تعیین کنید. جرم چمن‌زن همراه کیسه متصل به آن ۵۰ kg است و مرکز جرم آن در G قرار دارد. فرض کنید که شخص چمن‌زن هیچ نیروی جلوبرنده‌ای بر دسته‌ها اعمال نمی‌کند. به طوریکه P = ۰ است.

جواب a = ٤/١٤ m/s^2



شکل مسئله ۷-۶

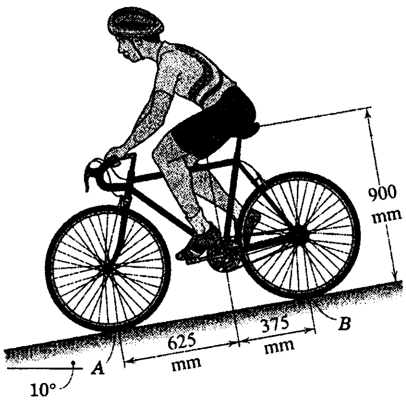
٦-٨ میله یکنواخت OB به جرم ۳۰ kg تحت زاویه ۳۰° نسبت به افق بر روی قاب شتاب‌دار توسط لولای O و غلتک A مهار شده است. اگر قاب دارای شتاب افقی a = ۲۰ m/s^2 باشد، نیروی F_A بر روی غلتک و مولفه‌های x و y نیروی وارده توسط پین واقع در O را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۸-۶

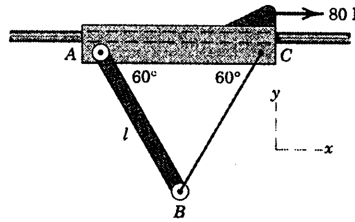
٦-٩ دوچرخه سواری به هنگام پایین آمدن از شیب ۱۰° ترمز می‌کند. شتاب کند شونده a چقدر باشد که باعث واژگونی دوچرخه حول A گردد؟ مرکز جرم مشترک دوچرخه سوار و دوچرخه در G واقع است.

جواب a = ۰/۵۱۰ g



شکل مسئله ۹-۶

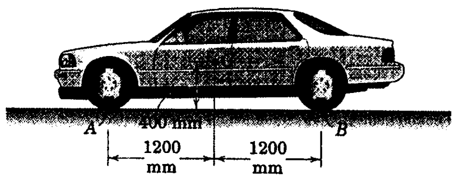
۶-۱۰ قاب AC به جرم ٦ kg و میله باریک یکنواخت AB به جرم ٤ kg و طول l با اصطکاک ناچیزی در امتداد میله افقی ثابت، تحت اثر نیروی ۸۰ N می‌لغزد. نیروی کشش T در سیم BC و مولفه‌های x و y نیروی وارد بر میله را توسط پین واقع در A محاسبه کنید. حرکت در صفحه قائم انجام می‌شود.



شکل مسئله ۱۰-۶

۶-۱۱ مرکز جرم اتومبیلی به جرم ۱٦۵۰ kg در G واقع شده است. نیروهای قائم N_A و N_B بین جاده و جفت چرخ جلو و جفت چرخ عقب را تحت شرایط شتاب ماکزیمم حساب کنید. جرم چرخها در مقایسه با جرم کل اتومبیل ناچیز است. ضریب اصطکاک استاتیکی بین جاده و چرخهای محرک عقب برابر ۰/۸ می‌باشد.

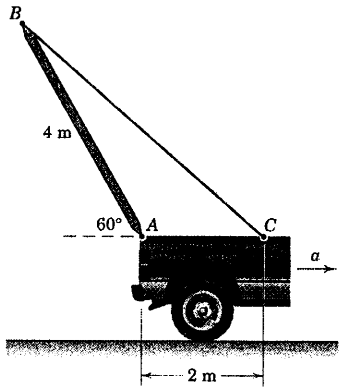
جواب N_A = ٦/۸۵ kN و N_B = ۹/۳٤ kN



شکل مسئله ۱۱-۶

مسائل ویژه

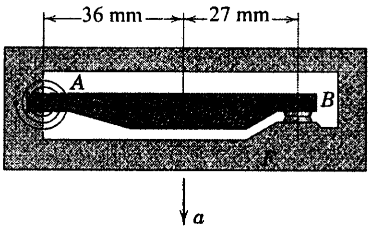
۶-۱۲ میله یکنواخت ٤ متری دارای جرم ٦۰ kg بوده و در پشت وانت در نقطه A لولا شده و بوسیله کابل متصل در C نگهداشته می‌شود. در صورتیکه وانت از حالت سکون با شتاب ۵ m/s^2 شروع به حرکت نماید، کل نیرویی که توسط اتصال در A تحمل می‌شود را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۱۲-۶

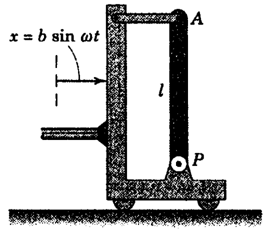
۶-۱۳ بازوی AB شتاب‌سنج نشان داده شده دارای وزن ۰/۱ kg و مرکز جرم G بوده و آزادانه به قاب F در A لولا شده است. فنر پیچشی A بازو را در جهت ساعتگرد تحت گشتاور ۲۲۵ N.mm قرار می‌دهد. شتاب به طرف پایین a قاب را که به ازای آن اتصال‌ها در B از هم جدا شده و مدار الکتریکی قطع خواهد شد، تعیین کنید.

جواب a = ۷۲/۳ m/s^2



شکل مسئله ۱۳-۶

۶-۱٤ وسیله نشان داده شده طبق رابطه $x = b \sin\omega t$ در امتداد افق نوسان می‌کند که در این رابطه b و ω ثابت هستند. نیروی T را در نقطه A از لینک سبک بر حسب تابعی از زمان تعیین و رسم کنید. جرم میله باریک یکنواخت AP برابر m است.

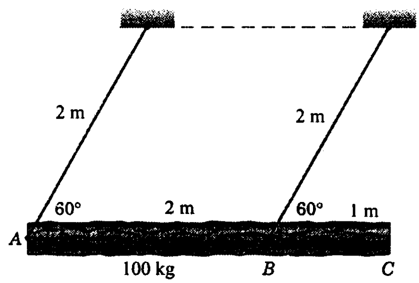


شکل مسئله ۱۴-۶

۱۵-٦ کُندهٔ درخت یکنواخت ۱۰۰ کیلوگرمی توسط دو کابل آویزان شده و به عنوان کوبه استفاده می‌گردد. اگر کُنده در موقعیت نشان داده شده از حالت سکون رها شود، کشش اولیه بوجود آمده در هر کابل را بلافاصله پس از رها شدن محاسبه نموده و شتاب زاویه‌ای متناظر α کابل ω را بدست آورید.

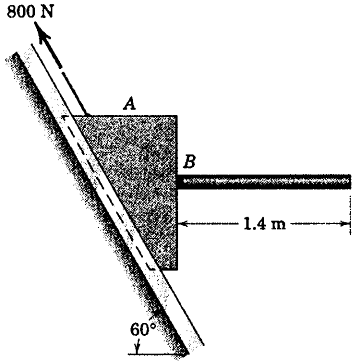
جواب T_A = ٢١٢ N و T_B = ٦٣٧ N

α = ٢/٤٥ rad/s^2



شکل مسئله ۱۵-۶

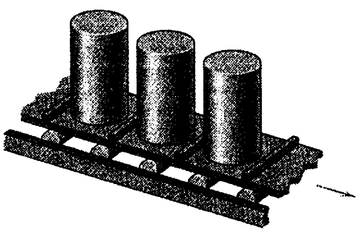
۱٦-٦ قطعه A و میله متصل به آن مجموعاً ٦٠ kg جرم داشته و تحت تاثیر نیروی ٨٠٠ N مقید به حرکت در امتداد راهنمای شیبدار ٦٠° هستند. میله افقی یکنواخت دارای جرم ٢٠ kg بوده و در نقطه B به قطعه جوش داده شده است. گشتاور خمشی M را که توسط جوش در نقطه B بر میله وارد می‌شود، حساب کنید. اصطکاک سطح راهنما قابل صرفنظر کردن است.



شکل مسئله ۱۶-۶

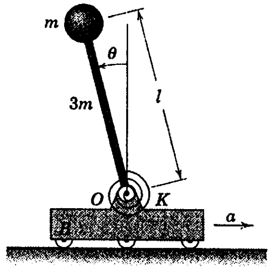
۱۷-٦ استوانه‌های توپر همگنی به ارتفاع ٤٠٠ mm و قطر ٢٥٠ mm توسط تسمه نقاله تخت در امتداد افق انتقال می‌یابند. اگر سرعت تسمه نقاله بر طبق رابطه v = ١/٢+٠/٩$t^٢$ m/s افزایش یابد که در آن t زمان بر حسب ثانیه از لحظه شروع افزایش سرعت باشد، زمان t را که استوانه‌ها در شرف واژگونی قرار می‌گیرند، حساب کنید. تیغه‌های تعبیه شده روی تسمه نقاله مانع از لغزش استوانه‌ها می‌گردند.

جواب t = ٣/٤١ s



شکل مسئله ۱۷-۶

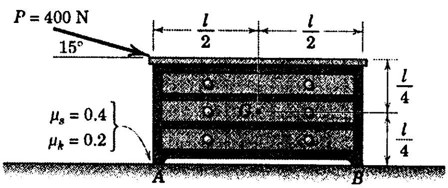
۶-۱۸ ارابه B با شتاب $a = ۲g$ به سمت راست در حرکت است. اگر جابجایی زاویه‌ای پایای میله باریک یکنواخت به جرم $۳m$ برابر $۲۰°$ باشد، مقدار ثابت فنر پیچشی K را حساب کنید. فنر که گشتاوری به اندازه $M = K\theta$ به میله وارد می‌کند، در وضعیتی که میله قائم است حالت آزاد خود را دارد. مقادیر m و l به ترتیب $۰/۵$ kg و $۰/۶$ m می‌باشند. گوی کوچک انتهایی به جرم m را به عنوان یک ذره تلقی کنید.



شکل مسئله ۱۸-۶

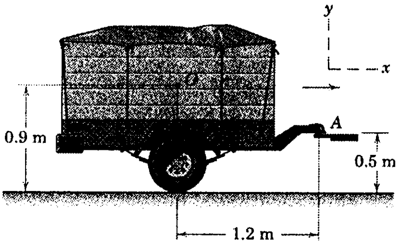
۶-۱۹ نیروی $P = ۴۰۰$ N بر صندوق نشان داده شده به جرم ۷۵ kg وارد می‌شود. G مرکز جرم صندوق در مرکز هندسی‌اش قرار گرفته است. n_A و n_B، درصد تغییرات نیروهای قائم در A و B را نسبت به مقادیر استاتیکی این نیروها موقعی که $P = ۰$ است، تعیین کنید.

جواب $n_A = \% -۹/۵۲$ و $n_B = \% ۳۷/۷$



شکل مسئله ۱۹-۶

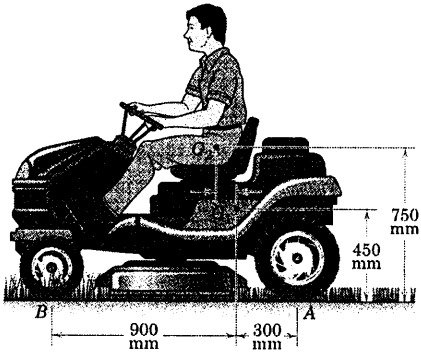
۶-۲۰ جرم یدکی با محموله‌اش ۹۰۰ kg بوده و مرکز جرم آن در G واقع شده است. یدکی در نقطه A به سپر عقب اتومبیلی وصل شده است. اگر سرعت اتومبیل و یدک بر روی یک جاده مسطح پس از پیمودن ۳۰ m از حالت سکون به ۶۰ km/h برسد، مولفه قائم نیروی وارده بر اتصال A را حساب کنید. از اصطکاک ناچیزی که بر چرخهای نسبتاً سبک اعمال می‌شود، صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۲۰-۶

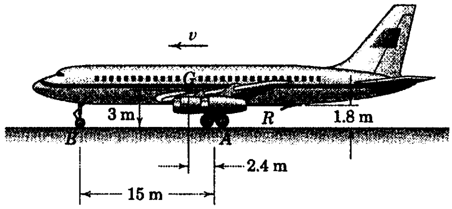
۶-۲۱ جرم ماشین چمن‌زنی ۱۴۰ kg بوده و در مرکز $G_۱$ متمرکز است. جرم راننده ۹۰ kg بوده و مرکز جرم آن $G_۲$ است. حداقل ضریب اصطکاک موثر μ را چنان بیابید که به محض شروع به حرکت به جلو، چرخ‌های جلویی چمن‌زن از زمین بلند شود.

جواب $\mu = ۰/۵۹۸$



شکل مسئله ۲۱-۶

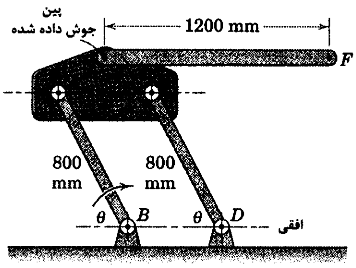
۶-۲۲ یک هواپیمای مسافربری با سرعت فرود ۲۰۰ km/h، بر اثر نیروی رانش منفی R در فاصله ۴۲۵ m با شتاب کند شونده ثابت، سرعت خود را به ۶۰ km/h کاهش می‌دهد. جرم کل هواپیما ۱۴۰ Mg بوده و مرکز جرم آن در G واقع است. عکس العمل N زیر چرخ جلویی B را در انتهای مدت زمان ترمز گیری و قبل از اعمال ترمز مکانیکی حساب کنید. در سرعت‌های کم، نیروهای آیرودینامیکی بر روی هواپیما ناچیز و قابل صرفنظر کردن می‌باشند.



شکل مسئله ۲۲-۶

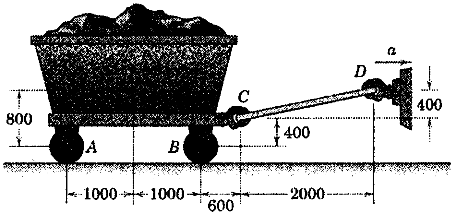
۲۳-٦ اهرم‌بندی موازی نشان داده شده، در صفحه قائم به همراه میله یکنواخت EF به جرم ۸ kg که به ورق در نقطه E جوش شده است، حرکت می‌کند. گشتاوری (نشان داده نشده) به لینک AB در پین پایینی آن وارده شده و باعث دوران آن در جهت ساعتگرد می‌شود. موقعی که θ به ٦۰° می‌رسد، لینک‌ها دارای شتاب زاویه‌ای ٦ rad/s^2 و سرعت زاویه‌ای ۳ rad/s می‌باشند. در این لحظه مقادیر F و گشتاور M را که توسط پین در E تحمل می‌شود، حساب کنید.

جواب F = ۷۸/۳ N و M = ۲۸/۷ N.m CCW



شکل مسئله ۲۳-۶

۲٤-٦ واگن معدنی، حامل باری به جرم ۲۰۰۰ kg بوده و توسط لینک سبک CD به یدک‌کش به صورت مفصلی متصل شده است. اگر یدک‌کش دارای شتاب ۳ m/s^2 باشد، عکس العمل‌های متناظر زیر چرخهای کوچک A و B را حساب کنید.



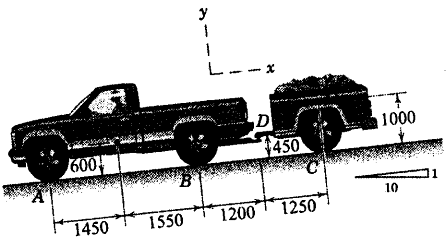
ابعاد بر حسب میلیمتر

شکل مسئله ۲۴-۶

۲۵-٦ وانت‌بار یدک‌کشی به جرم ۱۸۰۰ kg با مرکز جرم G_1، یدک ۹۰۰ kg و با مرکز جرم G_2 را به دنبال خود می‌کشد. در حال سرازیر شدن از یک شیب ۱۰ درصدی، راننده وانت ترمزهای خود را به کار انداخته و سرعتش را از ۹٦ km/h به ٤۸ km/h در فاصله ۱۱۰ m کاهش می‌دهد. در این برهه از حرکت، مولفه‌های نیروی وارده بر اتصال D یدکی به وانت را حساب کنید. همچنین نیروی قائم متناظر زیر هر جفت از چرخهای B و C را بیابید. از اثر چرخشی چرخها صرفنظر کنید.

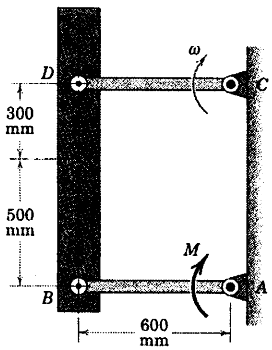
جواب D_x = ۳۰٦۰ N و D_y = ۱۳٤۷ N

N_B = ۸٦۹۰ N و N_C = ۷٤٤۰ N



شکل مسئله ۲۵-۶

۶-۲۶ تیرچه BD به جرم ۲۵ kg به دو لینک سبک AB و CD مفصل شده و در صفحه قائم حرکت می‌کند. لینک پایینی تحت تاثیر گشتاور M = ۲۰۰ N.m که به محور A اعمال می‌شود، قرار گرفته است. اگر هر یک از لینک‌ها با سرعت زاویه‌ای ω = ۵ rad/s از موقعیت افقی بگذرد، نیرویی که لینک بالا به نقطه D تیرچه در این لحظه وارد می‌کند را حساب کنید. همچنین شتاب زاویه‌ای لینک‌ها را در این موقعیت پیدا کنید.

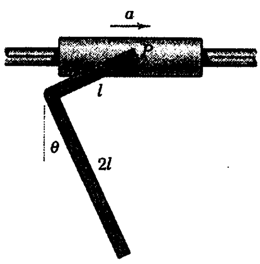


شکل مسئله ۶-۲۶

۶-۲۷ میله باریک L شکلی آزادانه در نقطه P لغزنده‌ای، که در امتداد میله افقی حرکت می‌کند، مفصل شده است. مقدار حالت پایای زاویه θ را در صورتیکه (الف) a = ۰ و (ب) a = g/۲ باشد، تعیین کنید. به ازای چه مقادیری از a مقدار حالت پایای θ برابر صفر می‌گردد.

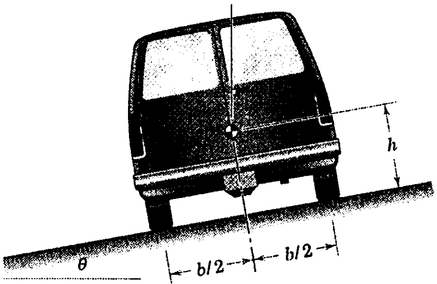
جواب (الف) θ = ۵۱/۳ °

(ب) θ = ۲٤/۸° و $a = \frac{۵}{۴} g$



شکل مسئله ۶-۲۷

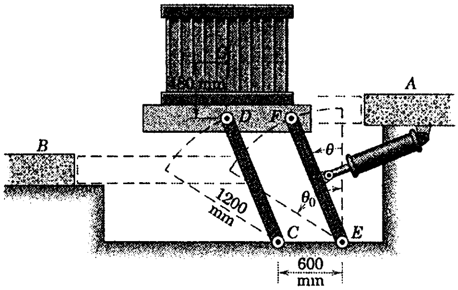
۶-۲۸ اتومبیلی که از پشت دیده می‌شود، روی پیچی به شعاع r با سرعت v دور می‌زند. پیچ مزبور تحت زاویه θ به سمت داخل پیچ قرار دارد. ضریب اصطکاک بین چرخها و جاده μ است. مطلوب است (الف) زاویه صحیح شیب به ازای مقدار معلوم v جهت جلوگیری از لغزش یا واژگون شدن اتومبیل و (ب) حداکثر سرعت v برای لغزش یا واژگونی قریب الوقوع اتومبیل به ازای مقدار معلوم θ. توجه کنید که نیروهای وارده به شتاب‌های مربوطه در صفحه شکل قرار دارند. لذا این مسئله را علیرغم اینکه امتداد سرعت عمود بر صفحه شکل است، می‌توان حرکت را، حرکت در صفحه تلقی کرد.



شکل مسئله ۶-۲۸

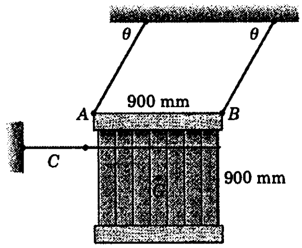
۶-۲۹ اهرم بندی موازی نشان داده شده با استفاده از مکانیزم هیدرولیکی برای انتقال جعبه‌ها از سکوی A به سکوی B مورد استفاده قرار می‌گیرد. فشار روغن در سیلندر طوری تنظیم شده است که عمل انتقال از θ = ۰ تا $\theta = \theta_۰ = \pi/۳$ rad به آرامی بر اساس رابطه $\theta = \frac{\pi}{۶}\left(۱ - \cos\frac{\pi t}{۲}\right)$ حرکت نماید که در آن t بر حسب ثانیه است. نیروی وارده بر پین در نقطه D را (الف) درست پس از شروع حرکت که θ و t عملاً صفر هستند و (ب) موقعی که t = ۱ s است، تعیین کنید. جعبه و سکو مجموعاً دارای جرم ۲۰۰ kg بوده و مرکز آنها در G است. جرم هر کدام از لینک‌ها ناچیز بوده و می‌توان از آن صرفنظر کرد.

جواب (الف) D = ۱۷۱٤ N و (ب) D = ۲۱۷۸ N



شکل مسئله ۲۹-۶

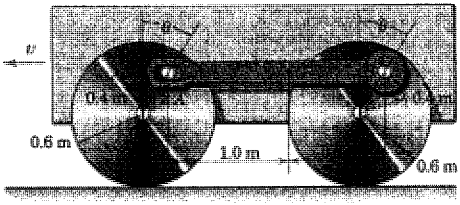
۶-۳۰ جعبه ۹۰۰ کیلوگرمی به مرکز جرم G واقع بر مرکز هندسی‌اش توسط دو کابل A و B آویزان شده و توسط طناب C در صفحه قائم قرار گرفته است. اگر طناب C ناگهان در $\theta = ۶۰°$ رها شود، کشش در کابل A را درست لحظه‌ای پس از رها شدن حساب کنید. ابتدا مسئله را با نوشتن سه معادله حرکت بر حسب سه مجهول و سپس با نوشتن تنها یک معادله حل نمایید. مزایای دو روش را مقایسه کنید.



شکل مسئله ۳۰-۶

۶-۳۱ دو چرخ ارابه‌ای توسط لینک AB به جرم ۲۰ kg که مرکز جرم آن در G است، مرتبط شده‌اند. لینک در نقطه B به چرخ جلویی مفصل شده و پین A در یک شیار صیقلی افقی لینک قرار گرفته است. اگر ارابه دارای سرعت ثابت ۴ m/s باشد، مقدار نیروی وارد شده بر پین B را در موقعیت $\theta = ۳۰°$ تعیین کنید.

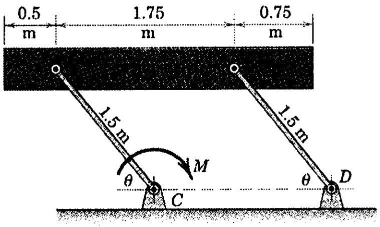
جواب $B = ۱۸۸/۳$ N



شکل مسئله ۳۱-۶

۶-۳۲ ◀ تیرچه یکنواخت AB به جرم ۲۰۰ kg با اعمال کوپل ثابت $M = ۳$ kN.m به نقطه C از لینک در صفحه قائم به طرف بالا رانده می‌شود. جرم لینک‌ها ناچیز بوده و می‌توان از آنها صرفنظر کرد. اگر تیرچه از حالت سکون در $\theta = ۰$ شروع به حرکت نماید، مقدار نیروی وارده به پین A را موقعی که از $\theta = ۶۰°$ می‌گذرد، تعیین کنید.

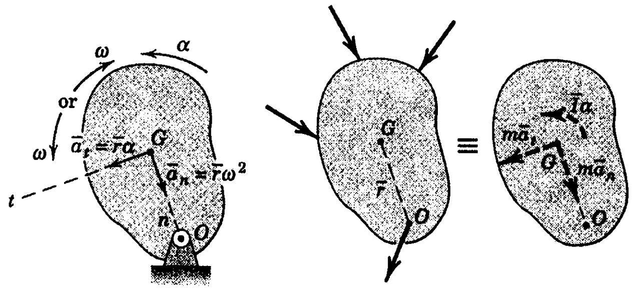
جواب $A = ۲/۰۲$ kN



شکل مسئله ۳۲-۶

۶-۴ دوران حول محور ثابت

دوران یک جسم صلب حول محور ثابت O در بخش ۲-۵ توصیف و در شکل ۱c-۵ نشان داده شد. در این حرکت، دیدیم که تمام نقاط جسم دوایری را حول محور دوران طی کرده و کلیه خطوط جسم در صفحه حرکت دارای سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α می‌باشند.



دوران حول محور ثابت
(a)

ترسیمه آزاد جسم
(b)

ترسیمه سینتیکی
(c)

شکل ۹-۶

مولفه‌های شتاب مرکز جرم برای حرکت دایره‌ای به آسانی در مختصات n-t بیان می‌شوند. بنابراین داریم $a_n = \bar{r}\omega^2$ و $a_t = \bar{r}\alpha$ که در شکل ۹a-۶ برای دوران جسم صلب حول محور ثابت گذرنده از O نشان داده شده است. قسمت b شکل نشانگر ترسیمه آزاد جسم است و ترسیمه سینتیکی برآیند در قسمت c شکل، مولفه‌های نیروی برآیند $m\bar{a}$ در مختصات n-t و کوپل برآیند $\bar{I}\alpha$ را نشان می‌دهد. معادلات کلی برای حرکت صفحه‌ای یعنی معادلات ۱-۶ مستقیما قابل استفاده بوده و در اینجا تکرار می‌شوند.

$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= m\bar{\mathbf{a}} \\ \Sigma M_G &= \bar{I}\alpha\end{aligned}} \qquad [6\text{-}1]$$

بنابراین دو مولفه اسکالر معادله نیرو برابر $\Sigma F_n = m\bar{r}\omega^2$ و $\Sigma F_t = m\bar{r}\alpha$ می‌گردد. در بکارگیری معادلات گشتاور حول G لازم است گشتاور نیروی اعمال شده به جسم در نقطه O در نظر گرفته شود، بنابراین نباید نیرو از ترسیمه آزاد جسم حذف گردد.

برای دوران حول محور ثابت معمولا استفاده مستقیم از معادلات گشتاور حول محور دوران O مفید است. ما این معادله را قبلا در رابطه ٤-٦ بدست آوردیم که در اینجا تکرار می‌شود.

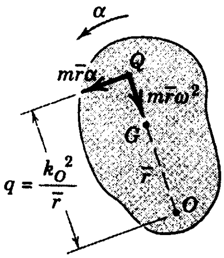
$$\boxed{\Sigma M_O = I_O\alpha} \qquad [6\text{-}4]$$

از ترسیمه سینتیکی شکل ۶-۹c می‌توان رابطه ٤-٦ را به سادگی با اندازه گیری گشتاور برآیند حول O بدست آورد که عبارت خواهد بود از $\Sigma M_O = \bar{I}\alpha + m\bar{a}_t\,\bar{r}$. بـا اسـتفاده از رابطـه انتقـال محورهـای ممـان اینرسـی جرمـی، یعنـی : $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$ ، خواهیم داشت: $\Sigma M_O = \left(I_O - m\bar{r}^2\right)\alpha + m\bar{r}^2\alpha = I_O\alpha$.

برای مورد خاص دوران جسم حول محور ثابت گذرنـده از مرکـز G روشـن اسـت کـه $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}$ اسـت و در نتیجـه $\Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$ می‌شود، پس برآیند نیروهای اعمال شده تنها ایجاد کوپل $\bar{I}\alpha$ می‌نماید.

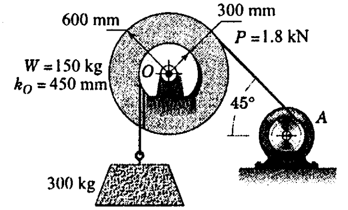
می‌توان نیروی برآیند $m\bar{a}_t$ و برآیند کوپل $\bar{I}\alpha$ را ترکیـب کـرد. بـه ایـن طریـق که $m\bar{a}_t$ را به موازات خود به نقطه Q انتقال داد که مطابق شکل ۱۰-٦ موقعیتش توسـط رابطه $m\bar{r}\alpha\, q = \bar{I}\alpha + m\bar{r}\alpha(\bar{r})$ تعیین مـی‌گردد. بـا اسـتفاده از قضیـه انتقـال محورهـا و $I_O = k_O^2 m$ نتیجه می‌گیریم که $q = k_O^2/\bar{r}$ می‌باشد.

نقطه Q مرکز ضربه نامیده می‌شود و تنها خاصیتی که دارد این اسـت کـه برآینـد کلیه نیروهای اعمال شده به جسم باید از آن بگذرد. به این ترتیب مجموع گشـتاورهای کلیه نیروها حول مرکز ضربه همواره صفر است، یعنی: $\Sigma M_Q = 0$ است.

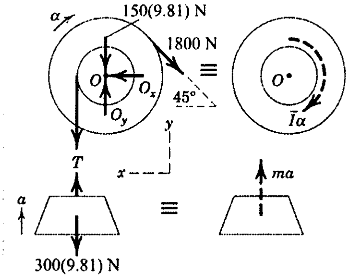


شکل ۱۰-۶

مسئله نمونه ۳-۶



بلوک بتنی به جرم ۳۰۰ kg توسط مکانیزم بالابر نشان داده شده از زمین بلند می‌شود و کابل‌ها به دور طبلک‌های مربوطه خود محکم پیچیده شده‌اند. طبلک‌ها که به یکدیگر متصل شده و مانند یک مجموعه واحد حول مرکز جرم خود در O دوران می‌کنند، دارای جرم کل ۱۵۰ kg و شعاع ژیراسیون ۴۵۰ mm حول O می‌باشند. اگر کشش ثابت P برابر ۱/۸ kN توسط موتور A تامین شود، شتاب قائم بلوک و نیروی وارد بر یاتاقان O را تعیین کنید.



حل I. ترسیمه‌های آزاد جسم و سینتیکی طبلک‌ها و بلوک بتنی و کلیه نیروهای وارد بر آنها در شکل نشان داده شده‌اند که شامل مولفه‌های O_x و O_y عکس العمل یاتاقان می‌شود. برآیند مجموعه نیرو بر روی طبلک‌ها برای چرخش حول مرکز جرم برابر کوپل $\bar{I}\alpha = I_O\alpha$ است که در آن: ❶

$$\left[I = k^2m\right] \qquad \bar{I} = I_O = (0.450)^2(150) = 30.4 \ \text{kg.m}^2$$ ❷

با گشتاور گیری حول مرکز جرم O برای طبلک در جهت شتاب زاویه‌ای α نتیجه می‌شود:

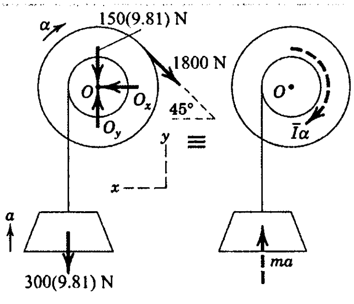
$$\left[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha\right] \qquad 1800(0.600) - T(0.300) = 30.4\alpha \qquad \text{(a)}$$

شتاب بلوک توسط رابطه زیر بدست می‌آید.

$$\left[\Sigma F_y = ma_y\right] \qquad T - 300(9.81) = 300a \qquad \text{(b)}$$

از $a_t = r\alpha$ داریم $a = (۱۲/۱۲)\alpha$. جایگذاری این مقدار و ترکیب کردن روابط (a) و (b) نتیجه می‌شود:

جواب $\qquad a = 1.031 \ \text{m/s}^2 \qquad \alpha = 3.44 \ \text{rad/s}^2 \qquad T = 3250 \ \text{N}$



عکس العمل یاتاقان توسط مولفه‌هایش محاسبه می‌گردد. از آنجا که $\bar{a} = ۰$ است، از معادلات تعادل استفاده می‌کنیم:

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad O_x - 1800\cos 45° = 0 \qquad O_x = 1273 \ \text{N}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \quad O_y - 150(9.81) - 3250 - 1800\sin 45° = 0 \quad O_y = 6000 \ \text{N}$$

جواب $\qquad O = \sqrt{(1273)^2 + (6000)^2} = 6130 \ \text{N}$

حل ۲: با رسم ترسیمه آزاد کل سیستم، می‌توانیم از روش کوتاه‌تری استفاده کنیم و به این ترتیب نیروی T را که در سیستم جدید نیروی داخلی محسوب می‌شود، حذف کنیم. از ترسیمه سینتیکی برای سیستم، ملاحظه می‌کنیم که مجموع گشتاورها حول O باید برابر کوپل برآیند $\bar{I}\alpha$ طبلک‌ها بعلاوه گشتاور برآیند ma بلوک باشد. بنابراین از اصل مربوط به رابطه ٦-٥ داریم:

$$\left[\Sigma M_O = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d\right] \qquad 1800(0.600) - 300(9.81) = 30.4\alpha + 300(0.300)a$$

با جایگذاری $a = 0.300\alpha$ مثل قبل داریم: $a = ۱/۰۳۱ \ \text{m/s}^2$

می‌توانیم مجموع نیروهای وارده بر تمامی سیستم را برابر با مجموع برآیندها قرار دهیم. بنابراین:

$$[\Sigma F_y = \Sigma m\bar{a}_y] \qquad O_y - 150(9.81) - 300(9.81) - 1800\sin 45° = 150(0) + 300(1.031)$$

$$O_y = 6000 \text{ N}$$

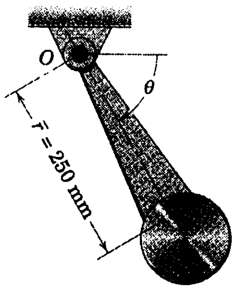
$$[\Sigma F_x = \Sigma m\bar{a}_x] \qquad O_x - 1800\cos 45° = 0 \qquad O_x = 1273 \text{ N}$$

نکات مفید

❶ *توجه کنید که کشش T برابر N (۹/۸۱)۳۰۰ نیست. اگر چنین بود، بلوک شتابی نداشت.*

❷ *فراموش نکنید که عبارت k_O را هنگام استفاده از g بر مسب m/s^2 بر مسب m بیان کنید.*

مسئله نمونه ۴-۶



آونگ نشان داده شده دارای جرم ۷/۵ kg و مرکز جرم G و شعاع ژیراسیونی برابر ۲۹۵ mm حول لولای O است. اگر آونگ از حالت سکون در $\theta = ۰$ رها گردد، نیروی کلی وارد شده بر یاتاقان را در$\theta = ۶۰°$ تعیین کنید. اصطکاک در یاتاقان قابل صرفنظر کردن است.

حل: ترسیمه آزاد پاندول در موقعیت کلی به همراه ترسیمه سینتیکی مربوطه در حالتی که مولفه‌های برآیند نیروها از G می‌گذرد، رسم شده است.

❶ مولفهٔ عمودی O_n از معادله نیرو و در امتداد n بدست می‌آید که شامل شتاب عمودی $\bar{r}\omega^2$ است. از آنجاییکه سرعت زاویه‌ای ω پاندول از انتگرال شتاب زاویه‌ای بدست می‌آید و نظر به اینکه O_t وابسته به شتاب مماس $\bar{r}\alpha$ است، نتیجه می‌شود که ابتدا باید α را محاسبه کرد. با توجه به رابطه $I_O = k_O^2 m$، معادله گشتاور حول O چنین نتیجه می‌دهد:

❷
$$[\Sigma M_O = I_O\alpha] \qquad 7.5\,(9.81)(0.25)\cos\theta = (0.295)^2(7.5)\alpha$$

$$\alpha = 28.2\cos\theta \quad \text{rad/s}^2$$

و برای $\theta = ۶۰°$

$$[\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta] \qquad \int_0^\omega \omega\, d\omega = \int_0^{\pi/3} 28.2\cos\theta\, d\theta$$

$$\omega^2 = 48.8 \ (\text{rad/s})^2$$

دو معادله باقیمانده حرکت در موقعیت‌°۶۰ نتیجه می‌دهد:

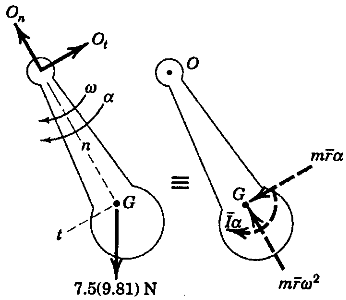
$$[\Sigma F_n = m\bar{r}\omega^2] \qquad O_n - 7.5\,(9.81)\sin 60° = 7.5\,(0.25)(48.8)$$

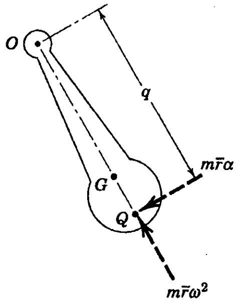
$$O_n = 155.2 \text{ N}$$ ❸

$$[\Sigma F_t = m\bar{r}\alpha] \qquad -O_t + 7.5\,(9.81)\cos 60° = 7.5\,(0.25)(28.2)\cos 60°$$

$$O_t = 10.37 \text{ N}$$

جواب
$$O = \sqrt{(155.2)^2 + (10.37)^2} = 155.6 \text{ N}$$





جهت صحیح O_t را می‌توان با استفاده از معادله گشتاور $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$ بدست آورد، به طوری که گشتاور O_t حول G باید در جهت ساعتگرد باشد تا با α سازگاری داشته باشد. همچنین نیروی O_t را می‌توان در ابتدا با نوشتن معادله گشتاور حول مرکز ضربه Q که در پایین شکل نشان داده شده است، بدون اینکه نیازی به محاسبه α باشد، بدست آورد. نخست، باید فاصله q را بدست آوریم که چنین می‌شود:

$$\left[q = k_O^2/\bar{r}\right] \qquad q = \frac{(0.295)^2}{0.250} = 0.348 \text{ m}$$

$$[\Sigma M_Q = 0] \quad O_t = (0.348 \quad 7.5\,(9.81)(\cos 60°)(0.348 - 0.250) = 0$$

$$O_t = 10.37 \text{ N}$$ جواب

نکات مفید

❶ البته مولفه‌های شتاب G عبارتند از: $\bar{a}_t = \bar{r}\alpha$ و $\bar{a}_n = \bar{r}\omega^2$.

❷ دوباره تئوری را مرور کرده و به خاطر آورید که: $\Sigma M_O = I\alpha = \bar{I}\alpha + m\bar{r}^2\alpha = m\bar{r}\alpha q$

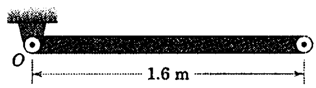
❸ در اینجا مخصوصاً توجه کنید که مجموع نیروها در جهت مثبت مولفه‌های شتاب مرکز جرم G گرفته شده‌اند.

مسائل

مسائل مقدماتی

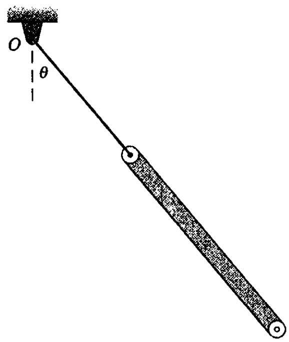
۶-۳۳ میله باریک و یکنواختی به جرم ۲۰ kg در نقطه O لولا شده و آزادانه در صفحه قائم نوسان می‌کند. اگر میله از موقعیت افقی و از حالت سکون رها گردد، مقدار نیروی اولیه R وارد شده به میله یا یاتاقان را لحظه‌ای پس از رها شدن حساب کنید.

جواب $R = ٤٩/٠$ N



شکل مسئله ۶-۳۳

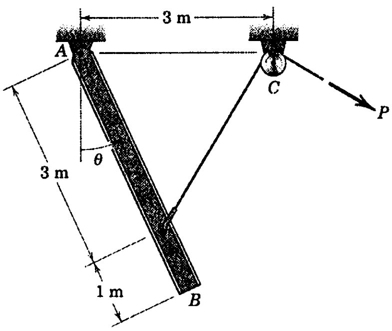
۶-۳٤ میله توسط طنابی سبک از نقطه ثابت O آویزان گشته و از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده، رها می‌گردد. با کمک از ترسیمه آزاد جسم، ثابت کنید که میله به هنگام نوسان، در امتداد ریسمان باقی نخواهد ماند.



شکل مسئله ۶-۳۴

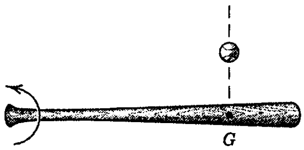
۶-۳۵ تیر آهن نشان داده شده به جرم ۱۰۰ kg آزادانه حول انتهای بالای خود در A لولا شده و ابتدا در موقعیت قائم $\theta = ٠$ در حالت سکون است. شتاب زاویه‌ای اولیه تیر را تعیین نموده و مقدار نیروی F_A وارد شده به پین واقع در A را هنگامیکه نیروی $P = ٣٠٠$ N به کابل متصل به آن وارد می‌گردد، حساب کنید.

جواب $\alpha = ١/١٩٣\ \text{rad/s}^2$ و $F_A = ٧٦٩$ N



شکل مسئله ۶-۳۵

۶-۳٦ توضیح دهید چرا چوگان بیسبال باید طوری بچرخد که ضربه توپ به چوگان مطابق شکل به مرکز جرم چوبدستی وارد نیاید. ضربه در کجا باید وارد شود.

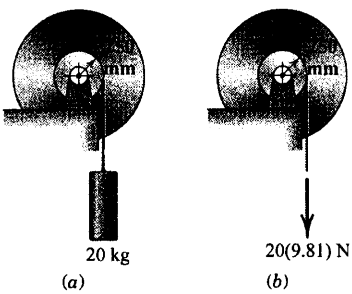


شکل مسئله ۶-۳۶

۶-۳۷ هر یک از دو طبلک و توپی‌های به شعاع ۲۰۰ mm متصل به آنها ۲۰۰ kg جرم داشته و شعاع ژیراسیون آنها حول مرکزشان ۳۷۵ mm است. شتاب زاویه‌ای هر یک از طبلک‌ها را حساب کنید. اصطکاک در هر یاتاقان قابل صرفنظر کردن است.

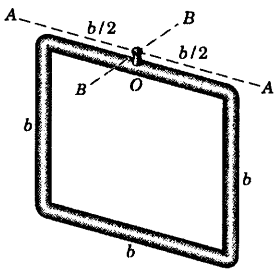
جواب $\alpha_a = ٣/٢٠\ \text{rad/s}^2$

$\alpha_b = ٣/٤٩\ \text{rad/s}^2$



شکل مسئله ۶-۳۷

۶-۳۸ قاب مربع شکل نشان داده شده متشکل از چهار میله باریک یکنواخت یکسان بوده و از اتصال کاسه ساچمه خود در O (نشان داده نشده) آویزان شده است. از موقعیت نشان داده شده قاب به اندازه 45° حول محور A-A چرخانده شده، سپس رها می‌گردد. شتاب زاویه‌ای اولیه قاب را حساب کنید. همین عمل را برای چرخش حول B - B تکرار کنید. از جرم کوچک ناچیز خم‌ها و همچنین اصطکاک اتصال ساچمه‌ای صرفنظر کنید.

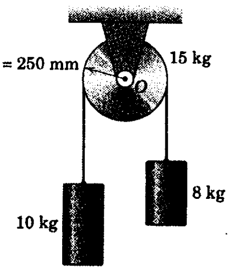


شکل مسئله ۳۸-۶

۶-۳۹ شتاب a به طرف پایین استوانه ۱۰ کیلوگرمی را حساب کنید. قرقره را یک استوانه یکنواخت در نظر گرفته و از اصطکاک در یاتاقان صرفنظر کنید. جواب بدست آمده را با حالتی که اثرات اینرسی قرقره را در نظر نمی‌گیرید، مقایسه کنید.

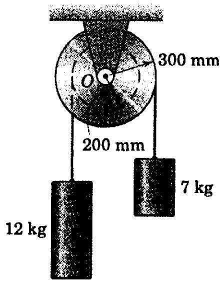
جواب $a = ۰/۷۶۹ \text{ m/s}^2$

وقتی $I_O = ۰$: $a = ۱/۰۹۰ \text{ m/s}^2$



شکل مسئله ۳۹-۶

۶-۴۰ اگر گشتاور اصطکاکی موجود در لولای O برابر ۲ N.m باشد، شتاب زاویه‌ای قرقره شیاردار را حساب کنید. جرم قرقره ۸ kg و شعاع ژیراسیون آن $k_O = ۲۲۵$ mm است.

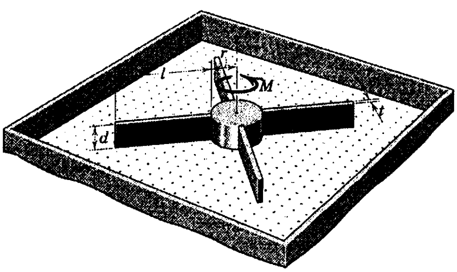


شکل مسئله ۴۰-۶

۶-۴۱ از یک *میز دمنده هوا* برای مطالعه حرکت الاستیکی مدل‌های فضاپیماهای انعطاف پذیر استفاده می‌گردد. خروج هوای فشرده از داخل سوراخ‌های متعدد کوچک در سطح افقی باعث پوشش لایه‌ای از هوا زیر مدل می‌گردد که به طور محسوسی اصطکاک را کاهش می‌دهد. مدل نشان داده شده تشکیل شده از یک توپی استوانه‌ای به شعاع r و چهار تیغه به طول l و ضخامت ناچیز t. توپی و چهار تیغه همگی دارای ارتفاع یکسان d بوده و از مواد یکسانی با جرم مخصوص ρ ساخته شده‌اند. فرض کنید فضاپیما صلب بوده و گشتاور M را که باید بر توپی وارد نمود تا آنرا طی پریود زمانی τ ثانیه از حالت سکون به سرعت زاویه‌ای ω برساند، تعیین کنید (توجه داشته باشید که برای فضاپیمایی که دارای تیغه‌های بسیار انعطاف پذیر باشد، گشتاور باید طوری وارد شود تا از تغییر شکل الاستیکی نامطلوب تیغه‌ها جلوگیری می‌شود).

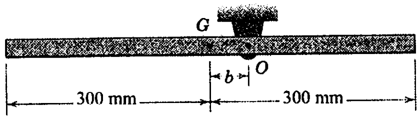
جواب

$$M = \frac{\omega \rho d}{\tau}\left[\frac{1}{2}\pi r^4 + 4lt\left(\frac{1}{3}l^2 + rl + r^2\right)\right]$$



شکل مسئله ۴۱-۶

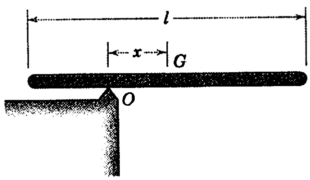
۴۲-٦ میله باریک یکنواخت ۸ کیلوگرمی حول محور افقی گذرنده از O لولا شده است و از حالت سکون در موقعیت افقی رها می‌شود. فاصله b از مرکز جرم O را چنان تعیین کنید که باعث شود میله شتاب زاویه‌ای اولیه ١٦ rad/s^2 را کسب کند و همچنین نیروی وارد بر میله در نقطه O را درست پس از رها شدن میله پیدا کنید.



شکل مسئله ۴۲-۶

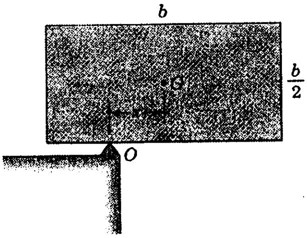
۴۳-٦ میله باریک یکنواخت از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌گردد. مقدار x را طوری تعیین کنید که شتاب زاویه‌ای ماکزیمم شود و شتاب زاویه‌ای متناظر α را حساب کنید.

جواب $x = \dfrac{l}{2\sqrt{3}}$ و $\alpha = \dfrac{g\sqrt{3}}{l}$



شکل مسئله ۴۳-۶

۴۴-٦ ورق مستطیل شکل یکنواختی از حالت سکون از موقعیت نشان داده شده رها می‌گردد. مقدار x را طوری تعیین کنید که شتاب زاویه‌ای ماکزیمم شود و شتاب زاویه‌ای متناظر را حساب کنید. جوابها را با جوابهای درست بدست آمده از مسئله ٤٣-٦ مقایسه کنید.

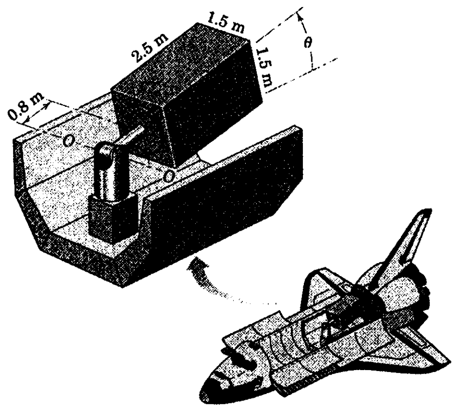


شکل مسئله ۴۴-۶

مسائل ویژه

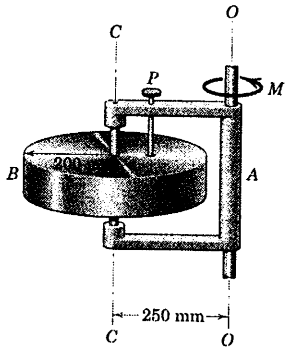
۴۵-٦ پایه یاتاقان یک شاتل فضایی محموله‌ای را حمل نموده و موقعی که در مدار قرار می‌گیرد دربها باز شده و محموله را به خارج پرتاب می‌کند. محموله به صورت بلوک مستطیلی یکنواخت به جرم ٦٠٠٠ kg شبیه سازی شده است. گشتاور نیروی مورد نیاز جهت چرخاندن محور O-O یاتاقان برابر ٣٠ N.m بوده و توسط یک موتور d-c تامین می‌شود. اگر شاتل در مدار و در شرایط «بی وزنی» قرار گیرد، زمان لازم t را برای انتقال محموله از موقعیت جاسازی شده در $\theta = ٠$ تا موقعیت پرتاب آن در $\theta = ٩٠°$ حساب کنید به شرطی که گشتاور در $٤٥°$ دوران اولیه اعمال شده و در $٤٥°$ بعدی در جهت خلاف اعمال گردد تا محموله به توقف برسد ($\dot{\theta} = ٠$).

جواب $t = ٧٨/٦$ s



شکل مسئله ۴۵-۶

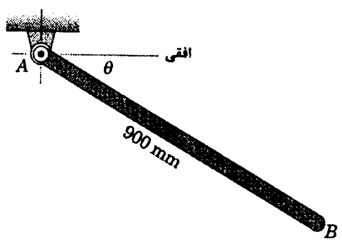
۶-۴۶ روتور استوانه‌ای توپر B دارای جرم ۴۳ kg بوده و بر روی محور مرکزی C-C خود سوار شده است. قاب A تحت تاثیر گشتاور M = ۳۰ N.m حول محور قائم ثابت O-O دوران می‌کند. روتور را می‌توان با بیرون کشیدن پین قفل کننده P از قاب آزاد کرد. شتاب زاویه‌ای α قاب A را به شرطی که پین قفل کننده (الف) در جای خود باشد و (ب) بیرون کشیده شده باشد، حساب کنید. از کلیه اصطکاک‌ها و جرم قاب صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۶-۴۶

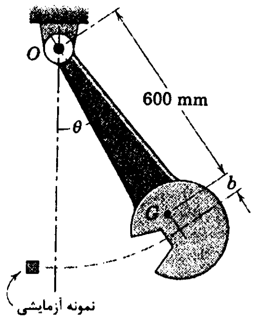
۶-۴۷ میله باریک و یکنواخت AB دارای جرم ۸ kg بوده و در صفحه قائم حول لولا واقع در A نوسان می‌کند. اگر در θ = ۳۰°، $\dot{\theta}$ = ۲ rad/s باشد، نیروی وارده به A توسط پین را در آن لحظه حساب کنید.

جواب A = ۵۶/۳ N



شکل مسئله ۶-۴۷

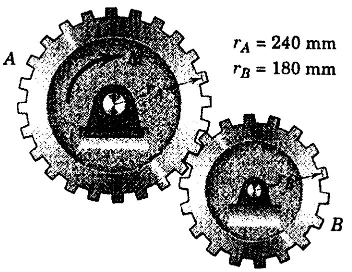
۶-۴۸ برای آزمایش ضربه از وسیله‌ای متشکل از یک آونگ به جرم ۳۴ kg به مرکز جرم G و شعاع ژیراسیون ۶۲۰ mm حول O استفاده می‌گردد. فاصله b در آونگ طوری انتخاب شده که نیروی وارد بر یاتاقان O در طی ضربه زدن به نمونه حداقل مقدار خودرا دارا می‌باشد. b را تعیین کرده و مقدار کل نیروی R وارد بر یاتاقان O را در لحظه‌ای پس از رها شدن آونگ از حالت سکون در θ = ۶۰° حساب کنید.



شکل مسئله ۶-۴۸

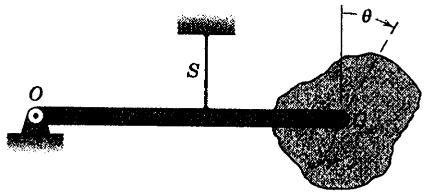
۶-۴۹ جرم چرخ‌دنده A برابر ۲۰ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول مرکز جرم برابر ۱۵۰ mm است. جرم چرخ‌دنده B برابر ۱۰ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول مرکز جرمش ۱۰۰ mm می‌باشد. هنگامیکه گشتاور ۱۲ N.m بر محور چرخ‌دنده A وارد می‌شود، شتاب زاویه‌ای چرخ‌دنده B را حساب کنید. از اصطکاک صرفنظر کنید.

جواب α_B = ۲۵/۵ rad/s^2 CCW



شکل مسئله ۶-۴۹

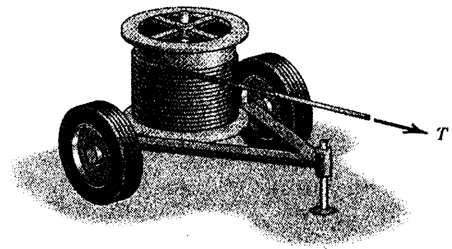
۶-۵۰ میله‌ای مطابق شکل به مرکز جرم G ورقی نامنظم جوش شده است. نشان دهید موقعی که طناب S پاره می‌شود، شتاب زاویه‌ای ایجاد شده مستقل از موقعیت زاویه‌ای θ ورق نسبت به میله می‌باشد.



شکل مسئله ۵۰-۶

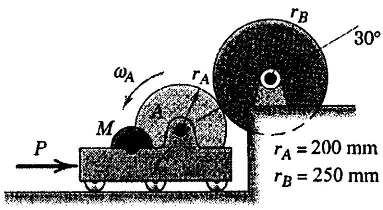
۶-۵۱ قرقره کابل انعطاف پذیر برق بر روی یک بارکش که در موقعیت خود ثابت شده، سوار شده است. کابلی به طول ۶۰ m و جرم ۰/۶۵ kg بر واحد طول به دور قرقره‌ای به شعاع ۳۷۵ mm پیچیده شده است. جرم قرقره خالی برابر ۲۸ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول محورش ۳۰۰ mm است. برای غلبه بر مقاومت اصطکاکی در مقابل چرخش به نیروی کششی T برابر ۹۰ N نیاز می‌باشد. چنانچه کشش ۱۸۰ N به انتهای آزاد کابل وارد شود، شتاب زاویه‌ای α قرقره را محاسبه کنید.

جواب $\alpha =$ ٤/٢٢ rad/s^2



شکل مسئله ۵۱-۶

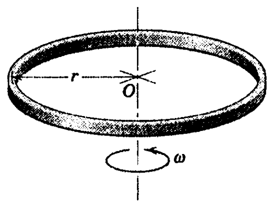
۶-۵۲ دیسک B به جرم ۲۲ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول مرکز جرمش ۲۰۰ mm است. واحد تامین قدرت C تشکیل شده از موتور M و دیسک A که با سرعت زاویه‌ای ثابت ١٦٠٠ rev/min دوران می‌کنند. ضرایب اصطکاک استاتیکی و سینتیکی بین دو دیسک به ترتیب برابر $\mu_s =$ ۰/۸۰ و $\mu_k =$ ۰/٦۰ می‌باشد. دیسک B که ابتدا در حال سکون است با دیسک A که تحت تاثیر نیروی ثابت $P =$ ١٤ N قرار گرفته تماس برقرار می‌کند. شتاب زاویه‌ای α دیسک B و زمان لازم t را برای آنکه B به سرعت پایا برسد، تعیین کنید.



شکل مسئله ۵۲-۶

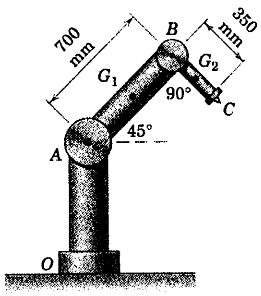
۶-۵۳ حلقه نشان داده شده به شعاع متوسط r و سطح صیقلی کوچک در یک صفحه افقی حول مرکز O خود با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. کشش T در حلقه را تعیین کنید. برای حل، یک بار نصف حلقه را به صورت یک جسم آزاد تحلیل کنید و بار دیگر المان کوچکی از قوس را به عنوان جسم آزاد تحلیل نمایید.

جواب $T = \rho r^2 \omega^2$



شکل مسئله ۵۳-۶

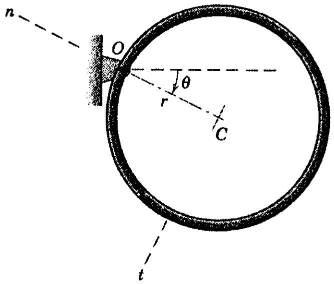
۶-۵۴ دستگاه روباتیک نشان داده شده از پایه ثابت OA، بازوی AB مفصل شده در A، و بازوی BC مفصل شده در B تشکیل شده است. محورهای چرخش عمود بر صفحه شکل می‌باشند. مطلوبست (الف) گشتاور M_A که لازم است به مفصل A وارد گردد تا بازوی AB را با شتاب ۴ rad/s^2 در موقعیت نشان داده شده بچرخاند. فرض اینکه مفصل B قفل باشد و (ب) گشتاور M_B که لازم است به مفصل B وارد گردد تا بازوی BC را با همان شتاب بچرخاند، با فرض اینکه مفصل A این بار قفل باشد. جرم بازوی AB برابر ۲۵ kg و جرم بازوی BC برابر ۴ kg است. با توجه به اینکه قسمت مفصل ثابت A به طور کلی به حساب نمی‌آید و جرم مفصل B به دو بازو به طور مساوی تقسیم شده است. فرض کنید مراکز جرم $G_۱$ و $G_۲$ در مراکز هندسی بازوها قرار گرفته و بازوها به صورت میله‌های باریک شبیه سازی می‌شوند.



شکل مسئله ۶-۵۴

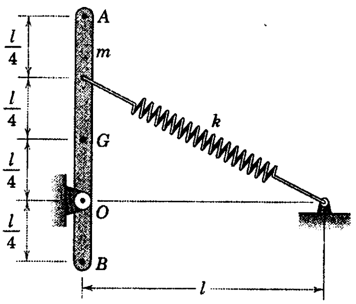
۶-۵۵ حلقه باریک نشان داده شده به جرم m آزادانه حول O در صفحه قائم دوران می‌کند. اگر حلقه از حالت سکون در $\theta = ۰$ رها گردد، روابطی برای مولفه‌های n و t نیرو در O بر حسب θ تعیین کنید.

جواب $O_n = ۲\, mg \sin\theta$ و $O_t = -\frac{mg}{۲}\cos\theta$



شکل مسئله ۶-۵۵

۶-۵۶ موقعی که میله باریک یکنواخت مطابق شکل در موقعیت قائم قرار گرفته است، فنر فشردگی ندارد. اگر میله از موقعیت نشان داده شده به اندازه °۳۰ در جهت ساعتگرد چرخیده و سپس از حالت سکون رها شود، شتاب زاویه اولیه α میله را حساب کنید. از شکم دادن فنر و همچنین جرم آن صرفنظر کنید.

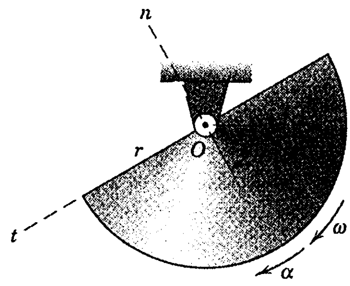


شکل مسئله ۶-۵۶

۶-۵۷ دیسک نیمدایره‌ای به جرم m و شعاع r از حالت سکون در $\theta = ۰$ رها گشته و آزادانه در صفحه قائم حول یاتاقان ثابت خود واقع در O دوران می‌کند. رابطه‌ای برای مولفه‌های n و t نیروی F وارد بر یاتاقان به صورت توابعی از θ بدست آورید.

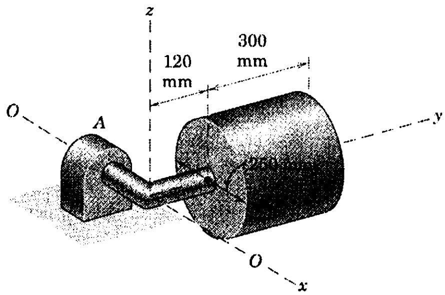
جواب $F_n = ۱/۷۲۱\, mg \sin\theta$

$F_t = ۰/۶۴\, mg \cos\theta$



شکل مسئله ۵۷-۶

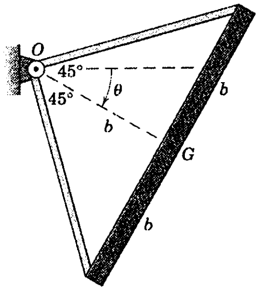
۵۸-٦ استوانه توپر یکنواخت نشان داده شده دارای جرم ۱۰۰ kg بوده و بر روی شافت قائم الزاویه‌ای که آزادانه حول محور افقی O-O دوران می‌کند، سوار شده است. اگر استوانه از حالت سکون، موقعی که شافت خودش در صفحه افقی قرار گرفته است، رها گردد. شتاب زاویه‌ای اولیه مجموعه را حساب کرده و نیروی حاصله F را که توسط یاتاقان A بر روی شافت اعمال می‌گردد، تعیین کنید. از جرم محور می‌توان صرفنظر کرد.



شکل مسئله ۵۸-۶

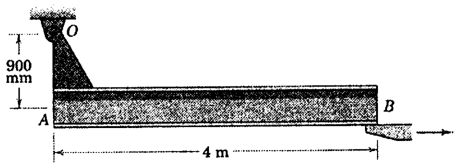
۵۹-٦ میله باریک یکنواختی به جرم m و طول $2b$ بر روی قاب قائم الزاویه‌ای با جرم ناچیز سوار شده است. میله و قاب در صفحه قائم حول محور ثابت واقع در O دوران می‌کنند. اگر میله از حالت سکون در موقعیت قائم ($\theta = 0$) رها گردد، عبارتی برای مقدار نیروی اعمال شده توسط یاتاقان واقع در O بر روی قاب به صورت تابعی از θ بدست آورید.

جواب $O = \frac{1}{4}mg\sqrt{\cos^2\theta + 100\sin^2\theta}$



شکل مسئله ۵۹-۶

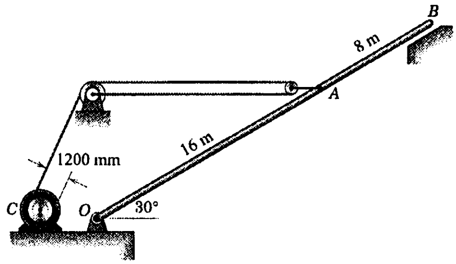
٦۰-٦ تیرآهن I شکل یکنواختی به جرم ۳۰۰ kg مطابق شکل در صفحه قائم نگهداشته شده است. نیروی R وارده بر پین O را بلافاصله پس از برداشتن ناگهانی تکیه‌گاه B حساب کنید. جرم لچکی سمت چپ کوچک بوده و می‌توان از آن صرفنظر کرد. همچنین تیر را مانند یک میله باریک یکنواخت تلقی نمایید.



شکل مسئله ۶۰-۶

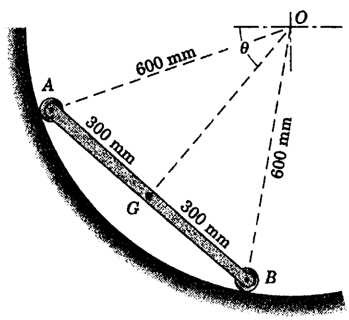
۶۱-۶ دکل یکنواختی به طول ۲۴ m و وزن ۳۰۰ kg در انتهای پایینی خود به پایه ثابتی در O لولا شده است. اگر وینچ C گشتاور راه‌اندازی ۱۳۰۰ N.m را ایجاد کند، کل نیروی وارد شده به پین O را موقعی که دکل از تکیه‌گاه B بلند می‌شود، حساب کنید. همچنین شتاب زاویه متناظر α دکل را پیدا کنید. کابل در A افقی بوده و از جرم قرقره‌ها و وینچ صرفنظر کنید.

جواب $\alpha = ۰/۰۷۰۹\ \text{rad/s}^2$ و $O = ۵۲۶۰\ \text{N}$



شکل مسئله ۶۱-۶

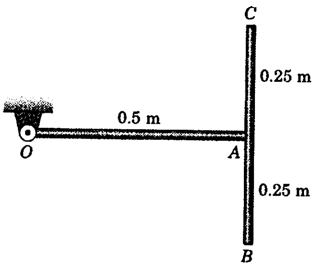
۶۲-۶ میله باریک یکنواخت AB به جرم ۲۴ kg روی غلتک‌هایی به جرم ناچیز سوار شده و حول نقطه ثابت O در حین حرکت در امتداد مسیر مدور، در صفحه قائم دوران می‌کند. میله از موقعیتی رها می‌شود که وقتی از موقعیت $\theta = ۴۵°$ می‌گذرد، دارای سرعت $\omega = ۲\ \text{rad/s}$ گردد. نیروهای F_A و F_B وارده بر غلتک‌ها توسط مسیر راهنما را در این موقعیت محاسبه کنید.



شکل مسئله ۶۲-۶

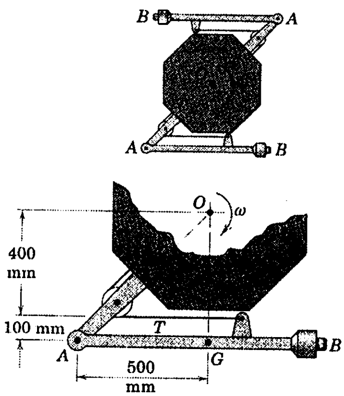
۶۳-۶ جرم هر کدام از میله‌های باریک یکنواخت OA و BC برابر ۸ kg می‌باشد. میله‌ها به شکل T در نقطه A به یکدیگر جوش داده شده‌اند و آزادانه حول محور افقی گذرنده از O دوران می‌کنند. اگر سرعت زاویه‌ای میله‌ها موقعی که از موقعیت نشان داده شده می‌گذرند، برابر $\omega = ۴\ \text{rad/s}$ باشد. نیروی کل R اعمال شده بر پایه یاتاقان O را حساب کنید.

جواب $R = ۱۰۱/۳\ \text{N}$



شکل مسئله ۶۳-۶

۶۴-۶ فضاپیمایی که از نمای بالا نشان داده شده است، قبل از باز کردن دو بازوی اندازه گیری AB خود با میزان ثابت ۱ دور بر ثانیه دوران می‌کند. هر یک از بازوها که در شکل پایینی نشان داده شده، دارای جرم ۱۰ kg بوده و مرکز جرم آن در G واقع است. کشش T در کابل باز کننده بازوها را قبل از رها شدن آن محاسبه کنید. همچنین مقدار نیروی وارد بر پین A را پیدا کنید. از هرگونه شتاب مرکز O فضاپیما صرفنظر کنید.

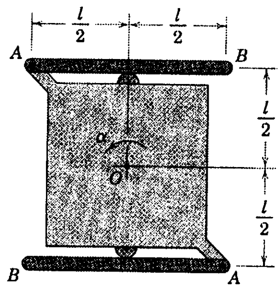


شکل مسئله ۶۴-۶

٦-٦٥ دو میله باریک AB هر یک به جرم m و طول l در A به ورقی لولا شده‌اند. ورق در صفحه افقی حول محور ثابت قائم گذرنده از مرکز O خود دوران نموده و به آن شتاب زاویه‌ای ثابت α داده می‌شود. (الف) نیروی F وارد بر هر یک از دو غلتک را وقتی که مجموعه شروع به دوران می‌کند، تعیین کنید؛ (ب) کل نیروی وارد بر پین A را پیدا کرده و نشان دهید که این نیرو تا وقتی که $F > ۰$ است، ثابت باقی می‌ماند و (ج) سرعت زاویه‌ای ω را که به ازای آن تماس با غلتک‌ها قطع می‌شود را تعیین کنید.

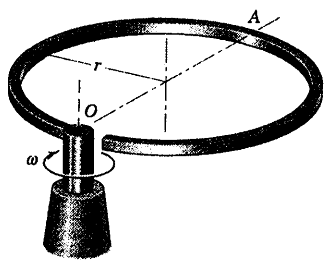
جواب (الف) $F = ml\alpha/٦$ (ب) $A = \frac{\sqrt{۱۰}}{۶}ml\alpha$

(ج) $\omega = \sqrt{\alpha/۳}$



شکل مسئله ۶۵-۶

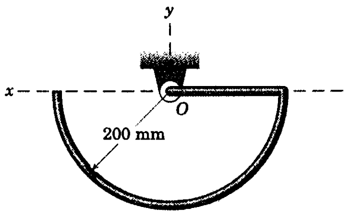
٦-٦٦ حلقه شکاف‌داری به جرم m و شعاع r در صفحه افقی حول محور قائم گذرنده از O متصل به یکی از دو انتهای حلقه با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کنند. گشتاور خمشی M و نیروی برشی V حلقه را در A تعیین کنید. فقط نیروهایی را که در صفحه حلقه وجود دارند، در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۶۶-۶

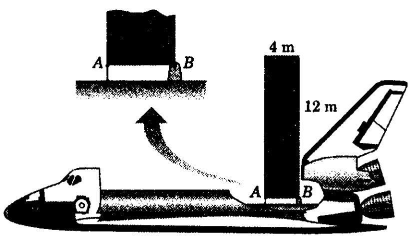
٦-٦٧ میله فلزی یکنواختی با جرم ۰/٦۰ kg در هر متر طول، مطابق شکل در صفحه قائم خم شده و آزادانه حول محور افقی که در O بر صفحه عمود است، لولا شده است. اگر میله از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده که قسمت مستقیم آن افقی است، رها شود. مولفه‌های اولیه x و y عکس العمل $\mathbf{R}$ را که توسط یاتاقان O تحمل می‌شود، محاسبه کنید.

جواب $R_x = ۰/۳۳۹$ N و $R_y = ٤/۷۹$ N



شکل مسئله ۶۷-۶

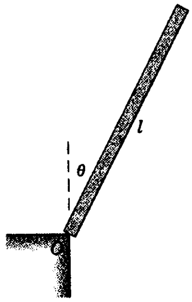
٦-٦٨ در سال ۱۹۹۳ شاتل فضایی، تلسکوپ هابل را در مدار آن در فضا گرفت و جهت تعمیرات آنرا به داخل خود منتقل کرد به صورتی که در شکل شبیه سازی شده است. در حین تعمیرات جهت جلوگیری از ایجاد نیروهای اضافی در اتصالات تلسکوپ به شاتل این مسئله مهم بود که هرگونه شتاب زاویه‌ای شاتل محدود شود. برای واضح شدن دینامیک مسئله، تلسکوپ را با یک ورق مسطح همگن به جرم ۳۰۰۰ kg متشابه گرفته و به صورت ساده نشان داده در شکل بالایی جایگزین کنید. حداکثر شتاب زاویه‌ای α شاتل در جهت پادساعتگرد را طوری محاسبه کنید که کشش T_A در اتصال A از ۲ kN تجاوز ننماید. با این شرط همچنین نیروی متناظر F_B که به پین B وارد می‌شود را محاسبه کنید. محاسبه خود را نسبت به دستگاه مرجع غیردوار که همراه شاتل در مدار آن حرکت می‌کند، انجام دهید.



شکل مسئله ۶۸-۶

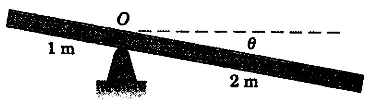
۶-۶۹ میله باریک یکنواختی بـه جـرم m و طـول l از حالت سکون در موقعیت قـائم رهـا شـده و بـر روی انتـهای چهارگوش خود حول لبـه O دوران می‌کنـد. (الـف) اگر میلـه وقتی که $\theta = ۳۰°$ است، بلغزد؛ ضریب اصطکاک اسـتاتیکی μ_s بین میله و لبه را پیدا کنیـد؛ (ب) اگر انتـهای میلـه، شـکاف‌دار باشد به طوری که نتواند بلغزد، زاویه θ را که به ازای آن تماس بین میله و لبه قطع می‌شود، بیابید.

جواب (الف) μ_s = ۰/۱۸۸ و (ب) θ = ۵۳/۱°



شکل مسئله ۶-۶۹

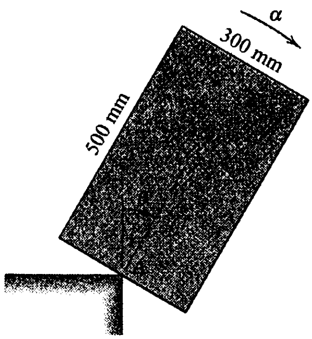
۶-۷۰ تیری بـه طـول ۳ m و جـرم ۵۰ kg از حـالت سکون در موقعیت افقی در θ = ۰ رهـا مـی‌گردد. اگر ضریـب اصطکاکی استاتیکی بیـن تکیـه‌گاه ثـابت O و تـیر برابـر ۰/۳۰ باشد، زاویه θ را که به ازای آن در نقطـه O اولیـن لغـزش رخ می‌دهد، تعیین کنید. آیا جواب بدست آمده به جرم تیر بسـتگی دارد؟



شکل مسئله ۶-۷۰

۶-۷۱ ◀ بلـوک مسـتطیل شـکل یکنواختـی از حـالت سکون جایی که θ اساسا صفر است، رها می‌شود و در صفحـه قائم حول نقطه A وسط وجه پایینی خـود بـر روی لبـه ثـابت تکیه‌گاه می‌چرخد. (الف) اگر مشاهده شود بلـوک موقعی کـه θ = ۳۰° اسـت شـروع بـه لغـزش نمـاید، ضریـب اصطکـاک استاتیکی بین بلوک و لبه را پیدا کنیـد. (ب) اگر وجـه پـایینی بلوک دارای شکافی باشد که نتوانـد بلغـزد، زاویـه θ را چنـان تعیین کنید که در آن، تماس بین بلوک و لبه تکیه‌گاه قطع شود.

جواب (الف) μ_s = ۰/۲۲۹ و (ب) θ = ۵۴/۶°



شکل مسئله ۶-۷۱

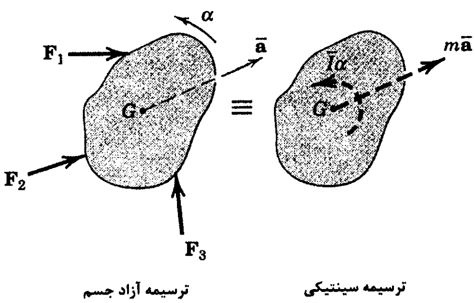
۶-۷۲ ◀ برای تیر تشریح شده در مسئله ۶-۶۰، حداکثر سرعت زاویه‌ای ω تیر را در حال دوران در صفحه قائم، حـول یاتاقان O تعیین کنید. همچنین نیروی متناظر R وارده بـر پیـن O را در این شرایط حساب کنید. مجددا تیر را میله‌ای بـاریک یکنواخت به جـرم ۳۰۰ kg در نظر گرفتـه و از جـرم لچکـی نگهدارنده صرفنظر کنید.

جواب ω = ۲/۰۳ rad/s و R = ۵/۶۶ kN

۵-۶ حرکت کلی در صفحه

دینامیک حرکت کلی اجسام صلب در صفحه ترکیبی از حرکت‌های انتقالی و دورانی است. در بخش ۲-٦ توسط شکل ٤-٦ جسمی را با ترسیمه آزاد و سینتیکی آن نشان دادیم و در آن برآیندهای دینامیکی نیروهای اعمال شده را مشاهده کردیم. برای مراجعه آسانتر، شکل ٤-٦ و رابطه ١-٦ را که در حرکت کلی صفحه‌ای بکار می‌روند، دوباره در اینجا تکرار می‌کنیم.

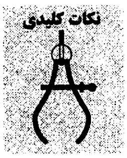
$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma \mathbf{F} &= m\bar{\mathbf{a}}\\ \Sigma M_G &= \bar{I}\alpha\end{aligned}} \qquad [٦-١]$$



شکل تکرار شده ۴-۶

بکارگیری مستقیم این معادلات، هم ارزی میان نیروهای اعمال شده از خارج را که با ترسیمه آزاد جسم نشان داده شده است، با برآیندهای نیرو و گشتاور که با ترسیمه سینتیکی نمایش داده شده‌اند، بیان می‌کند.

حل مسائل حرکت صفحه‌ای



موقع حل مسائل حرکت صفحه‌ای ملاحظات زیر را مد نظر داشته باشید.

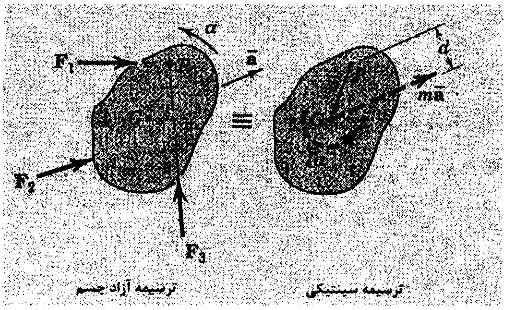
انتخاب دستگاه مختصات. معادله نیرو از رابطه ١-٦ بایستی در دستگاه مختصات مناسبی که شتاب مرکز جرم در آن توصیف شده، بیان گردد. شما باید مختصات کارتزین، عمودی ـ مماسی و قطبی را در نظر داشته باشید.

انتخاب رابطه گشتاور. در بخش ٢-٦ به کمک شکل ٥-٦ استفاده از رابطه دیگر گشتاور حول هر نقطه P را با معادله ٢-٦ مشاهده کردیم. جهت مراجعه آسانتر، این شکل و رابطه آن نیز دوباره در اینجا تکرار می‌شوند.

$$\boxed{\Sigma M_P = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d} \qquad [٦-٢]$$

در بعضی مواقع بجای گشتاورگیری حول نقطه P که شتاب آن معلوم است، شاید مناسب‌تر باشد که از رابطه دیگر گشتاور یعنی معادله ٣-٦ استفاده گردد. همچنین به این نکته توجه داریم که معادله گشتاور حول نقطه بدون شتاب O از جسم یعنی معادله ٤-٦ رابطه دیگری از گشتاور را تشکیل می‌دهد که در بعضی از موارد استفاده از آن دارای مزیت است.

مقایسه حرکت مقید و حرکت نامقید. در حل یک مسئله حرکت کلی در صفحه، ابتدا باید بـه مقید بودن و نامقید بودن حرکت دقت کـرد کـه هـر دو در مثال‌های شکل ٦-٦ نشـان داده شـده‌اند. اگر حرکت مقید باشد، باید رابطه سـینتیکی بیـن شـتاب خطـی و شتاب زاویه‌ای را حسـاب کـرده و آن را در معـادلات حرکتی نیرو و گشتاور مشارکت داد. اگر حرکت نامقید باشد، می‌توان شتابها را مستقل از یکدیگر مسـتقیماً بـا استفاده از سه معادله حرکـت یعنـی از معـادلات ١-٦ تعیین کرد.



شکل تکرار شده ۵-۶

تعداد مجهولات. برای حل مسائل اجسام صلب، تعداد مجهولات نباید از تعداد معادلات مستقلی که برای بیان آنـها موجود است بیشتر باشد و همواره از کافی بودن تعداد رابطه‌ها مطمئن شوید. برای حرکـت صفحـه‌ای مقیـد حداکـثر سـه معادله اسکالر از معادلات حرکت و دو مولفه اسکالر از رابطه برداری شتاب نسبی وجود دارند. بنابراین تا پنـج مجهـول را می‌توان بدست آورد.

شناسایی جسم یا سیستم. تاکید می‌کنیم انتخاب واضح جسمی که باید از محیط مجزا شده و نشان دادن صحیح این جسم جدا شده توسط ترسیمه آزاد جسم از اهمیت زیادی برخوردار است. تنها بعد از برداشتن کامل این گام مهم می‌تـوان تحلیل مناسبی از هم ارزی بین نیروهای خارجی و برآیندهای آنها داشته باشیم.

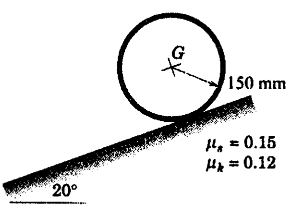
سینماتیک. در تحلیل حرکت صفحه‌ای شناخت کامل سـینماتیک مسـئله نـیز بـه همـان انـدازه اهمیـت دارد. غالبـاً مشکلاتی که در این مرحله با آن مواجه می‌شویم ناشی از عدم شناخت سینماتیک بوده و از اینرو بازنگری در روابط شتاب نسبی در حرکت صفحه‌ای بسیار مفید خواهد بود.

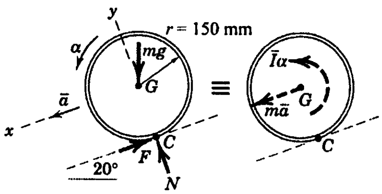
مطابقت فرضیات. در فرمول بندی حل مسئله در می‌یابیم که ممکن است در ابتدا جهت بعضی از نیروها یـا شـتابها معلوم نباشد، در این موارد لازم است که اول جهت‌های فرضی در نظر گرفته شـوند تـا صحـت آنـها بعـد از حـل مسـئله مشخص شود. در هر حال باید تمام فرضها با اصل عمل و عکس العمل و هرگونه شرایط سینماتیکی مسئله که *شرایط قید* نامیده می‌شوند، مطابقت داشته باشد.

بنابراین، اگر چرخی بر روی یک سطح افقی بغلتد، مرکز آن مقید به حرکت بر روی خط افقی است. بـه عـلاوه اگر جهت فرضی شتاب خطی مجهول a مرکز چرخ به سمت راست مثبت گرفته شود، جهت مثبت شتاب زاویـه‌ای مجـهول α بایستی در جهت ساعتگرد اختیار گردد تا رابطه $a=+r\alpha$ رعایت شود. البته به شرطی که چرخ، لغزش نداشته باشد. همینطور برای چرخی که بدون لغزش می‌غلتد، باید دانست که نیروی اصطکاک استاتیکی بین چـرخ وسـطحی کـه روی آن اسـت، معمولاً کمتر از مقدار ماکزیمم می‌باشد. بنابراین $F\neq\mu_s N$ است. اما اگر چرخ همراه غلتش، لغزش نیز داشته باشد، $a \neq r\alpha$ بوده و نیروی اصطکاک سینتیکی ایجاد شده از رابطه $F=\mu_k N$ تعیین می‌شود. بنابراین در مسائل ضروری است کـه صحـت هر یک از دو فرض لغزش یا عدم لغزش امتحان شود. گاهی اختلاف بین ضرایب اصطکاک استاتیکی و سینتیکی یعنی μ_s و μ_k نادیده گرفته می‌شود که در این حالت از μ به جای یکی یا هر دو استفاده می‌گردد.

مسئله نمونه ۵-۶

حلقه‌ای فلزی به شعاع r = ۱۵۰ mm از حالت سکون بر روی شیبی °۲۰ رها می‌گردد. اگر ضرایب اصطکاک استاتیکی و سینتیکی به ترتیب برابر μ_s = ۰/۱۵ و μ_k = ۰/۱۲ باشند، شتاب زاویه‌ای α حلقه را تعیین نموده و زمان t برای اینکه حلقه مسافت ۳ m را به سوی پایین شیب طی کند، تعیین کنید.





حل: ترسیمه آزاد جسم، وزن نامشخص mg ، نیروی قائم N و نیروی اصطکاک F وارد بر حلقه در نقطه تماس C با سطح شیبدار را نشان می‌دهد. ترسیمه سینتیکی نیروی برآیند $m\bar{a}$ گذرنده از G در امتداد شتابش و کوپل $\bar{I}\alpha$ را نشان می‌دهد. شتاب زاویه‌ای در جهت پادساعتگرد مستلزم وجود گشتاور در جهت پادساعتگرد حول G است، در نتیجه F باید به طرف بالای شیب باشد.

فرض کنید حلقه بدون لغزش بغلتد. بنابراین $\bar{a} = r\alpha$ است. با استفاده از مولفه‌های معادله ۱-٦ برای محورهای x و y نتیجه می‌دهد:

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad mg\sin 20° - F = m\bar{a}$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y = 0] \qquad N - mg\cos 20° = 0$$

❶ $$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \qquad F\,r = m\,r^2\,\alpha$$

با حذف F بین اولین و سومین معادله و قرار دادن فرض سینماتیکی $\bar{a} = r\alpha$ داریم:

❷ $$\bar{a} = \frac{g}{2}\sin 20° = \frac{9.81}{2}(0.342) = 1.678 \ \text{m/s}^2$$

از طرف دیگر با فرض $\bar{a} = r\alpha$ برای غلتش خالص، جمع گشتاورها حول C مستقیماً $\bar{a}$ از معادله ۲-٦ بدست می‌آید. بنابراین:

$$[\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + m\bar{a}d] \qquad mgr\sin 20° = mr^2\frac{\bar{a}}{r} + m\bar{a}r \qquad \bar{a} = \frac{g}{2}\sin 20°$$

برای امتحان فرض عدم لغزش، F و N را حساب کرده و با مقدار حدی آن مقایسه می‌کنیم. از معادلات فوق داریم:

$$F = mg\sin 20° - m(g/2)\sin 20° = 0.1710\,mg$$
$$N = mg\cos 20° = 0.940\,mg$$

اما حداکثر نیروی اصطکاک ممکن برابر است با:

$$[F_{max} = \mu_s N] \qquad F_{max} = 0.15\,(0.940\,mg) = 0.1410\,mg$$

چون مقدار محاسبه شده ۰/۱۷۱۰ mg بیشتر از مقدار حدی ۰/۱٤۱۰ mg می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که فرض غلتش خالص صحیح نبوده است. بنابراین، حلقه حین غلتش، لغزش نیز دارد و $\bar{a} \neq r\alpha$ است. بنابراین نیروی اصطکاک برابر مقدار سینتیکی می‌شود.

$$[F = \mu_k N] \qquad F_{max} = 0.12\,(0.940\,mg) = 0.1128\,mg$$

اکنون از معادلات حرکت چنین نتیجه می‌شود .

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad mg\sin 20^\circ - 0.1128\, mg = m\bar{a}$$

$$\bar{a} = 0.229(9.81) = 2.25 \text{ m/s}^2$$

❸ $$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha] \qquad 0.1128\, mg\,(r) = mr^2\alpha$$

جواب $$\alpha = \frac{0.1128(9.81)}{0.15} = 7.37 \text{ rad/s}^2$$

زمان لازم t برای اینکه مرکز G حلقه از حالت سکون با شتاب ثابت به اندازه ۱۰ ft حرکت نماید، برابر است با:

جواب $$\left[x = \frac{1}{2}at^2\right] \qquad t = \sqrt{\frac{2x}{a}} = \sqrt{\frac{2(3)}{2.25}} = 1.633 \text{ s}$$

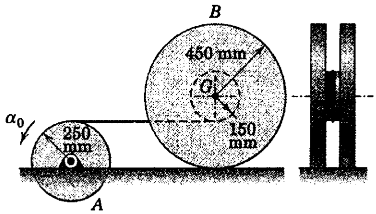
نکات مفید

❶ چون کل جرم حلقه به فاصله r از مرکز G آن قرار دارد، ممان اینرسی‌اش حول G برابر mr^2 می‌گردد.

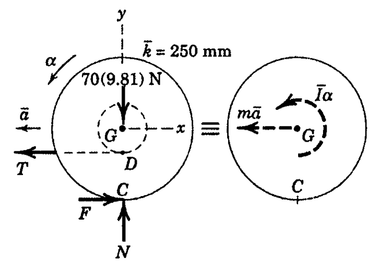
❷ توجه کنید که $\bar{a}$ مستقل از m و r می‌باشد.

❸ توجه کنید که α مستقل از m بوده و لیکن به r وابسته است.

مسئله نمونه ۶-۶



به طبلک A شتاب زاویه‌ای ثابت α_0 برابر 3 rad/s^2 داده شده و موجب می‌شود که قرقره B به جرم ۷۰ kg به واسطه کابل اتصالی که به دور توپی آن پیچیده شده است، بر روی سطح افقی شروع به غلتش نماید. شعاع ژیراسیون $\bar{k}$ قرقره حول مرکز جرم G برابر ۲۵۰ mm بوده و ضریب اصطکاک استاتیکی بین قرقره و سطح افقی ۰/۲۵ است. کشش T کابل و نیروی اصطکاک F وارد از طرف سطح افقی را تعیین کنید.



حل: ترسیمه آزاد جسم و ترسیمه سینتیکی قرقره مطابق شکل رسم شده‌اند. جهت صحیح نیروی اصطکاک در این مسئله با توجه به هر دو ترسیمه مشاهده می‌شود که به علت در جهت پادساعتگرد بودن شتاب زاویه‌ای، جمع گشتاورها حول G (و همچنین حول D) نیز باید در جهت پادساعتگرد باشد. نقطه‌ای واقع بر کابل دارای شتاب $a_t = r\alpha = ۰/۲۵\ (۳) = ۰/۷۵ \text{ m/s}^2$ است، که مولفه افقی شتاب نقطه D قرقره نیزمی‌باشد. در ابتدا فرض می‌کنیم که قرقره بدون لغزش می‌غلتد که در این صورت شتاب زاویه‌ای قرقره

❶ $\alpha = \dfrac{(a_D)}{DC} = \dfrac{۰/۷۵}{۰/۳۰} = ۲/۵ \text{ rad/s}^2$ در جهت پادساعتگرد است. بنابراین، شتاب مرکز جرم G برابر است با: $\bar{a} = r\alpha = ۰/۴۵\ (۲/۵) = ۱/۱۲۵ \text{ m/s}^2$.

با مشخص شدن سینماتیک مسئله، اکنون می‌توان از سه معادله حرکت رابطه ۱-۶ استفاده کرد.

$$\left[\Sigma F_x = m\bar{a}_x\right] \qquad F - T = 70\,(-1.125) \qquad \text{(a)}$$

$$\left[\Sigma F_y = m\bar{a}_y\right] \qquad N - 70\,(9.81) = 0 \qquad N = 687 \text{ N}$$

❷ $$\left[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha\right] \qquad F\,(0.450) - T\,(0.150) = 70\,(0.250)^2\,(2.5) \qquad \text{(b)}$$

با حل همزمان (a) و (b) داریم:

جواب $\quad F = 75.8 \text{ N} \quad$ و $\quad T = 154.6 \text{ N}$

برای اثبات صحت فرض عدم لغزش، مشاهده می‌شودکه سطح قادر است نیروی اصطکاک ماکزیمم $F_{max} = \mu_s N =$ ۰/۲۵(۶۸۷) = ۱۷۱/۷ N را تحمل کند. چون فقط نیروی اصطکاک ۷۵/۸ N نیاز است. نتیجه می‌گیریم که فرض غلتش بدون لغزش صحیح است.

اگر ضریب اصطکاک استاتیکی برای مثال ۰/۱ می‌بود، نیروی اصطکاک حداکثر به ۶۸/۷ N = (۶۸۷) ۰/۱ محدود می‌شد که کمتر از ۷۵/۸ N است و در این صورت قرقره می‌توانست بلغزد. در این حالت رابطه سینماتیکی $\bar{a} = r\alpha$ دیگر صادق نبود. با معلوم بودن $(a_D)_x$مقدار شتاب زاویه‌ای برابر $\alpha = \left[\bar{a} - (a_D)_x\right] / \overline{GD}$ خواهد بود. با استفاده از این رابطه و $F = \mu_k N <$ ۶۸/۷ N دوباره سه معادله حرکت را حل کرده و مجهولات T ، $\bar{a}$ و α را بدست می‌آوریم. ❸

به روش دیگر، با در نظر گرفتن نقطه C به عنوان مرکز گشتاورگیری می‌توان از معادله ۲-۶ استفاده کرد و T را مستقیماً بدست آورد. در نتیجه:

$$\left[\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + m\bar{a}r\right] \qquad 0.3T = 70\,(0.25)^2\,(2.5) + 70\,(1.125)(0.45)$$

جواب $\quad T = 154.6 \text{ N}$

❹ که در آن شرط سینماتیکی عدم لغزش $\bar{a} = \bar{r}\alpha$ در نظر گرفته شده است. همچنین می‌توانستیم معادله گشتاور را حول نقطه D نوشته و F را مستقیماً بدست آوریم.

نکات مفید

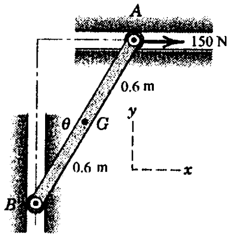
❶ *رابطه بین $\bar{a}$ و α سینماتیکی بوده و با قیدی که فرض غلتیدن بدون لغزش قرقره، بر حرکت اعمال می‌کند به هم ارتباط پیدا می‌کنند.*

❷ *دقت کنید که اشتباهاً $\frac{۱}{۲}mr^{۲}$ را بجای $\bar{I}$ قرقره بکار نبرید، زیرا یک دیسک مدور شکل یکنواخت نیست.*

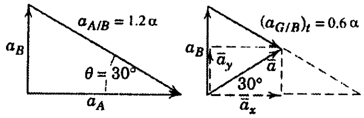
❸ *اصول شتاب نسبی در اینجا مورد نیاز است. بنابراین باید از رابطه $\left(a_{G/D}\right)_t = \overline{GD}\alpha$ استفاده نماییم.*

❹ *از انعطافی که برای انتخاب مراکز گشتاورگیری توسط ترسیمه سینتیکی فراهم می‌شود، معمولاً می‌توان برای ساده کردن تحلیل استفاده نمود.*

مسئله نمونه ۷-۶



میله باریک AB به جرم ۳۰ kg در صفحه قائم حرکـت نمـوده و دو انتهای آن مقید است که راهنماهای صیقلی افقی و عمـودی را بپیمـاید. اگر نیروی ۱۵۰ N در موقعیت $\theta = ۳۰°$ که میله در حالت سـکون است بـه A وارد گردد، شتاب زاویه‌ای حاصله میله و نیروهای وارد به غلتکهای کوچک انتهایی در A و B را محاسبه کنید.



حل: میله حرکت مقید دارد، بنابراین باید رابطه‌ای بین شـتاب مرکـز جرم و شتاب زاویه‌ای میله برقرار نمود. رابطه شتاب نسبی $\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B}$ ابتدا باید حل شود، و سپس معادله $\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{G/B}$ را بـرای بدسـت آوردن رابطه‌هایی بین $\bar{a}$ و α حـل کـرد. بـا در نظر گرفتـن α در جـهت ساعتگرد، چند ضلعی شتاب را که نمایش دهنده این معادلات اسـت رسـم کرده و از حل آنها نتیجه می‌گیریم: ❶

$$\bar{a}_x = \bar{a}\cos 30° = 0.6\alpha\cos 30° = 0.520\alpha \text{ m/s}^2$$

$$\bar{a}_y = \bar{a}\sin 30° = 0.6\alpha\sin 30° = 0.3\alpha \text{ m/s}^2$$

اکنون ترسیمه آزاد جسم را ساخته و ترسیمه سینتیکی را رسم می‌کنیم. با مشخص شدن $\bar{a}_x$ و $\bar{a}_y$ بـر حسـب α مجهولهای باقیمانده عبارتند از α و نیروهای A و B. اکنون از معادلات ۱-۶ استفاده کرده و داریم:

$$[\Sigma M_G = \bar{I}\alpha]$$ ❷

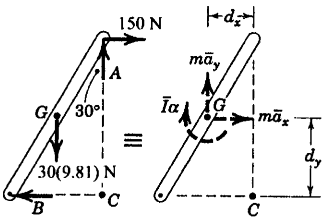
$$150(0.6\cos 30°) - A\,(0.6\sin 30°) + B\,(0.6\cos 30°) = (1/12)(30)(1.2)^2\,\alpha$$

$$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x] \qquad 150 - B = (30)(0.520\alpha)$$

$$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y] \qquad A - 30(9.81) = (30)(0.3\alpha)$$

با حل هم زمان سه رابطه فوق نتایج زیر بدست می‌آید.

جواب $\qquad A = 337 \text{ N} \qquad B = 76.8 \text{ N} \qquad \alpha = 4.68 \text{ rad/s}^2$



روش دیگر حل، استفاده از معادله ۲-۶ با در نظر گرفتن نقطه C به عنوان مرکز گشتاور گیری و اجتناب از حل همزمان سه معادله است. با انتخـاب ایـن روش دیگر نیازی به مراجعه بـه نیروهـای A و B نبـوده و مسـتقیما α بدسـت می‌آید. بنابراین:

$$[\Sigma M_C = \bar{I}\alpha + \Sigma m\bar{a}d]$$ ❸

$$150(1.2\cos 30°) - 30(9.81\sin 30°) = (1/12)(30)(1.2)^2\,\alpha$$
$$+ (30)(0.520\alpha)(0.6\cos 30°) + (30)(0.3\alpha)(0.6\sin 30°)$$

جواب $\qquad 67.6 = 14.40\alpha \qquad \alpha = 4.69 \text{ rad/s}^2$

با مشخص شدن α، اکنون می‌توان از معادلات نیرو به طور مستقل استفاده نموده و در نتیجه:

$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y]$ $\qquad A - 30(9.81) = (30)(0.3)(4.69) \qquad A = 337\ \text{N}$ جواب

$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x]$ $\qquad 150 - B = (30)(0.520)(4.69) \qquad B = 76.8\ \text{N}$ جواب

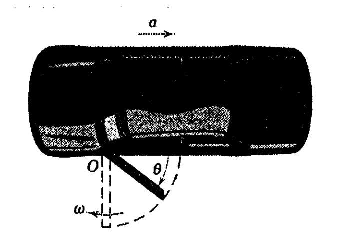
نکات مفید

❶ *اگر کاربرد روابط شتاب نسبی هنوز برای شما کاملاً روشن نیست، بخش ۶-۵ را مرور کنید. توجه کنید که جمله شتاب نسبی عمودی وجود ندارد، زیرا میله سرعت زاویه‌ای ندارد.*

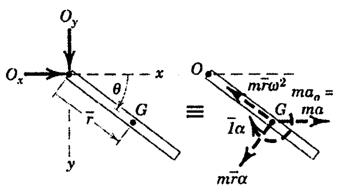
❷ *به یاد آورید که ممان اینرسی یک میله باریک حول مرکز آن برابر $\frac{1}{12}ml^2$ است.*

❸ *از ترسیمه سینتیکی، جمله‌های $\Sigma m\bar{a}d$ عبارتند از $m\bar{a}_x d_y + m\bar{a}_y d_x$. چون هر دو در جهت ساعتگرد و هم‌جهت با $\bar{I}\alpha$ هستند، مثبت می‌باشند.*

مسئله نمونه ۸-۶



درب اتومبیلی به هنگام ترمز که به اتومبیل شتاب ثابت رو به عقب a اعمال می‌شود، سهواً اندکی باز گذاشته شده است. روابطی برای سرعت زاویه‌ای درب، حین عبور از موقعیت ۹۰° و مولفه‌های نیروی عکس العمل لولای درب را به ازای هر مقدار θ بدست آورید. جرم درب m بوده و مرکز جرم آن به فاصله $\bar{r}$ از محور O لولا واقع شده است و شعاع ژیراسیون آن حول O برابر k_O می‌باشد.



حل: چون سرعت زاویه‌ای ω با افزایش θ افزایش می‌یابد، برای پیدا کردن ω ضروری است که تغییرات شتاب زاویه‌ای α را با θ پیدا نموده و در فاصله مزبور از آن انتگرال بگیریم. مقدار α را از معادله گشتاور حول O بدست می‌آوریم. ابتدا ترسیمه آزاد جسم را در صفحه افقی برای حالت کلی θ رسم می‌کنیم. تنها نیروی موجود در این صفحه مولفه‌های نیروهای عکس العمل لولا هستند که مطابق شکل در امتدادهای x و y قرار دارند. در ترسیمه سینتیکی، علاوه بر کوپل $\bar{I}\alpha$ نشان داده شده در جهت α، نیروهای برآیند $m\bar{\mathbf{a}}$ بر حسب مولفه‌هایش با استفاده از رابطه شتاب نسبی نسبت به
❶ O نشان داده شده‌اند. این معادله به صورت معادله سینماتیکی مقید درآمده و برابر است با:

$$\bar{\mathbf{a}} = \mathbf{a}_G = \mathbf{a}_O + (\mathbf{a}_{G/O})_n + (\mathbf{a}_{G/O})_t$$

پس مقادیر مولفه‌های $m\bar{\mathbf{a}}$ برابرند با:

❷ $$ma_O = ma \qquad m(a_{G/O})_n = m\bar{r}\omega^2 \qquad m(a_{G/O})_t = m\bar{r}\alpha$$

که در آن $\omega = \dot{\theta}$ و $\alpha = \ddot{\theta}$ است.

به ازای θ معلوم، سه مجهول عبارتند از α، O_x و O_y . با استفاده از معادله گشتاور حول O می‌توان نیروهای O_x و O_y را حذف نموده و در نتیجه:

❸ $[\Sigma M_O = \bar{I}\alpha + \Sigma m\bar{a}d]$ $$0 = m(k_O^2 - \bar{r}^2)\alpha + m\bar{r}\alpha(\bar{r}) - ma(\bar{r}\sin\theta)$$

❹ از حل رابطه بالا α بدست می‌آید. $$\alpha = \frac{a\bar{r}}{k_O^2}\sin\theta$$

اکنون از α تا یک وضعیت کلی انتگرال می‌گیریم:

$[\omega\, d\omega = \alpha\, d\theta]$ $$\int_0^\omega \omega\, d\omega = \int_0^\theta \frac{a\bar{r}}{k_O^2}\sin\theta d\theta$$

$$\omega^2 = \frac{2a\bar{r}}{k_O^2}(1-\cos\theta)$$

جواب به ازای $\theta = \pi/۲$: $$\omega = \frac{1}{k_O}\sqrt{2a\bar{r}}$$

❺ برای پیدا کردن O_x و O_y به ازای هر مقدار θ از معادله نیرو نتیجه می‌شود:

$[\Sigma F_x = m\bar{a}_x]$ $$O_x = ma - m\bar{r}\omega^2\cos\theta - m\bar{r}\alpha\sin\theta$$

$$= m\left[a - \frac{2a\bar{r}^2}{k_O^2}(1-\cos\theta)\cos\theta - \frac{a\bar{r}^2}{k_O^2}\sin^2\theta\right]$$

جواب $$= ma\left[1 - \frac{\bar{r}^2}{k_O^2}(1+2\cos\theta - 3\cos^2\theta)\right]$$

$[\Sigma F_y = m\bar{a}_y]$ $$O_y = m\bar{r}\alpha\cos\theta - m\bar{r}\omega^2\sin\theta$$

$$= \left[m\bar{r}\frac{a\bar{r}}{k_O^2}\sin\theta\cos\theta - m\bar{r}\frac{2a\bar{r}^2}{k_O^2}(1-\cos\theta)\sin\theta\right]$$

جواب $$= \frac{ma\bar{r}^2}{k_O^2}(3\cos\theta - 2)\sin\theta$$

نکات مفید

❶ نقطه O انتخاب شده است زیرا تنها نقطه‌ای واقع بر درب می‌باشد که شتابش معلوم است.

❷ دقت کنید $m\bar{r}\alpha$ را با توجه به چرخش حول O در جهت مثبت α قرار دهید.

❸ ترسیمه آزاد جسم نشان می‌دهد که گشتاور حول O صفر است. از قضیه انتقال محور استفاده کرده و $k_O^2 = \bar{k}^2 + \bar{r}^2$ را جایگزین می‌کنیم. اگر این رابطه کاملاً آشنا نیست، بخش B-1 از پیوست B را مرور کنید.

❹ می‌توانیم از رابطه ۳-۶ با انتخاب O به عنوان مرکز گشتاور استفاده کنیم.

$$\Sigma \mathbf{M}_O = I_O\bar{\boldsymbol{\alpha}} + \bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_O$$

که در آن مقادیر اسکالر هر یک از جملات عبارتند از: $I_O\alpha = mk_O^2\alpha$ و $\bar{\boldsymbol{\rho}} \times m\mathbf{a}_O$ برابر $-\bar{r}ma\sin\theta$ می‌گردد.

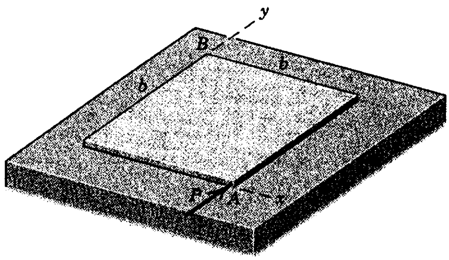
❺ ترسیمه سینتیکی به روشنی عبارت‌هایی را نشان می‌دهد که $m\bar{a}_x$ و $m\bar{a}_y$ می‌سازند.

مسائل

مسائل مقدماتی

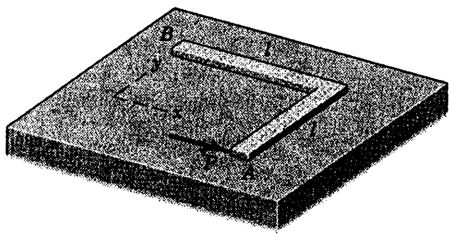
۶-۷۳ ورق مربع شکل یکنواختی بـه جـرم m مطـابق شکل بر اثر اعمال نیروی P در نقطه A بـر روی صفحـه افقی شروع به حرکت می‌نماید. شتاب اولیه حاصله مربوط به نقطـه B را تعیین کنید. از اصطکاک صرفنظر کنید.

جواب $\mathbf{a}_B = \frac{P}{2m}(-3\mathbf{i}-\mathbf{j})$



شکل مسئله ۷۳-۶

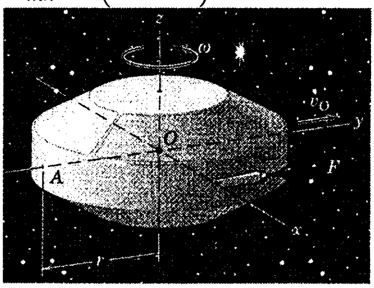
۶-۷۴ میله L شکلی به جرم m مطـابق شـکل بـر اثـر اعمال نیروی P در نقطه A بـر روی صفحـه افقـی شـروع بـه حرکـت می‌نمـاید. شـتاب اولیـه نقطـه A را تعییـن کنیـد. از اصطکاک صرفنظر کرده و از ابعاد سطح مقطع میله چشم پوشی کنید.



شکل مسئله ۷۴-۶

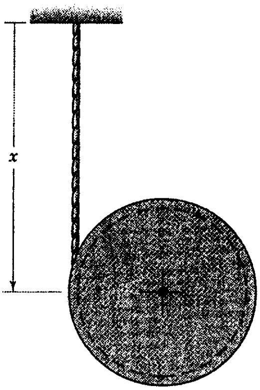
۶-۷۵ فضاپیمای نشان داده شـده بـا سـرعت زاویـه‌ای ثابت ω حول محور z دوران می‌کنـد و همزمـان، مرکـز جـرم Oاش بـا سـرعت v_O در امتـداد y حرکـت می‌کنـد. اگر در موقعیت نشان داده شده، موتور جت جانبی با سوخت پراکسید هیدروژن روشن گردد، رابطه‌ای برای شتاب مطلق نقطه A واقع بر لبه فضاپیما در لحظه‌ای که نیروی جت برابر F است، تعیین کنید. شعاع ژیراسیون فضاپیما حـول محـور z برابـر k بـوده و جرم آن m است.

جواب $\mathbf{a}_A = -\frac{F r^2}{mk^2}\mathbf{i} - \left(\frac{F}{m} - r\omega^2\right)\mathbf{j}$



شکل مسئله ۷۵-۶

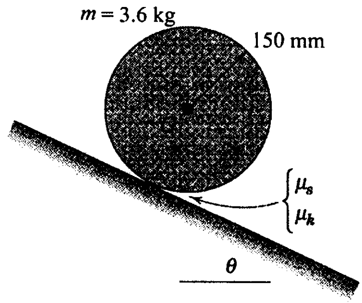
۶-۷۶ کابل بلندی به طول l و جرم بر واحد طـول ρ، دور یک قرقره با جرم ناچیز پیچانده شده اسـت. یـک انتهای کابل ثابت است و قرقره از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌گردد. شتاب اولیه α مرکز قرقره را بدست آورید.



شکل مسئله ۷۶-۶

۶-۷۷ استوانه همگن توپری مطابق شکل از حالت سکون بر روی سطح شیبداری رها می‌گردد. اگر $\theta = ٤٠^\circ$، $\mu_s = ٠/٣٠$ و $\mu_k = ٠/٢٠$ باشد، شتاب مرکز جرم G و نیروی اصطکاک اعمال شده از طرف سطح شیبدار به استوانه را تعیین کنید.

جواب $a = ٤/٢٠\ \text{m/s}^2$ و $F = ٧/٥٧\ \text{N}$

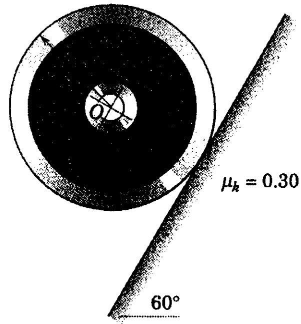


شکل مسئله ۶-۷۷

۶-۷۸ مسئله ۶-۷۷ را این بار با فرض $\theta = ٣٠^\circ$، $\mu_s = ٠/١٥$ و $\mu_k = ٠/١٠$ حل کنید.

۶-۷۹ چرخی به جرم ۱۰ kg و شعاع ژیراسیون ۱۸۰ mm حول مرکز O آن، از حالت سکون روی سطح شیبدار ۶۰° رها می‌گردد و در حال غلتش لغزش هم دارد. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی $\mu_k = ٠/٣٠$ باشد، شتاب a_O مرکز O چرخ و شتاب زاویه‌ای آنرا حساب کنید.

جواب $a_O = ٧/٠٢\ \text{m/s}^2$ و $\alpha = ٩/٠٨\ \text{rad/s}^2$



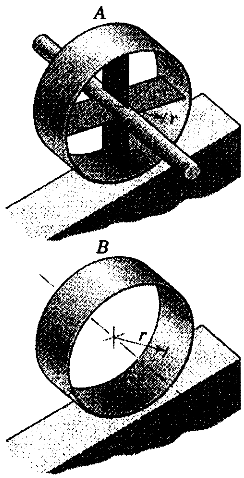
شکل مسئله ۶-۷۹

۶-۸۰ حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s چرخ در مسئله ۶-۷۹ چقدر باشد که چرخ در حال غلتش، لغزش نداشته باشد.

۶-۸۱ شتاب زاویه‌ای هر کدام از دو چرخ نشان داده شده را که بدون لغزش بر روی سطح شیبدار فرو می‌غلتند، تعیین کنید. برای چرخ A حالتی را بررسی کنید که جرم طوقه و پره‌های حلقه، قابل اغماض بوده و جرم میله میانی آن، در امتداد خط مرکزی آن متمرکز باشد. برای چرخ B فرض کنید که ضخامت طوقه در مقایسه با شعاع آن ناچیز و تمام جرم در سطح طوقه متمرکز است. همچنین حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s را که برای جلوگیری از لغزش هر چرخ لازم است، مشخص کنید.

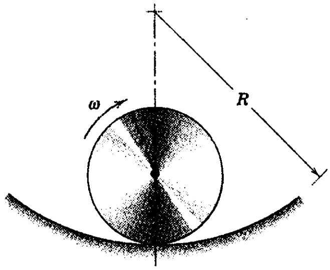
جواب $\alpha_A = \frac{g}{r}\sin\theta$ و $\mu_s = ٠$

$\alpha_B = \frac{g}{٢r}\sin\theta$ و $\mu_s = \frac{١}{٢}\tan\theta$



شکل مسئله ۶-۸۱

۶-۸۲ دیسک مدوری به جرم m و شعاع r در قعر مسیری مدور به شعاع R می‌غلتد. اگر دیسک دارای سرعت زاویه‌ای ω باشد، نیروی N که توسط مسیر بر دیسک وارد می‌شود را تعیین کنید.



شکل مسئله ۸۲-۶

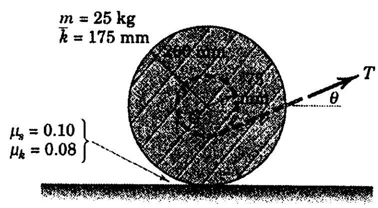
مسائل ویژه

۸۳-۶ دیسک مدوری به شعاع ۲۰۰ mm و جرم ۲۵ kg دارای شعاع ژیراسیونی برابر $\bar{k}$ = ۱۷۵ mm حول مرکز جرمش بوده و بر روی آن یک شیار مدور هم مرکز به شعاع ۷۵ mm وجود دارد. مطابق شکل تحت زاویه θ نیروی پایای T به طناب پیچیده شده دور شیار اعمال می‌شود. اگر T = ۳۰ N ، θ = ۰، μ_s = ۰/۱۰ و μ_k = ۰/۰۸ باشد، شتاب زاویه‌ای α دیسک، شتاب a مرکز جرم G و نیروی اصطکاک F را که از طرف سطح به دیسک اعمال می‌شود، تعیین کنید.

جواب α = ۲/۱۲ rad/s^2 CW

a = ۰/٤۲۵ m/s^2 به سمت راست

F = ۱۹/۳۸ N



شکل مسئله ۸۳-۶

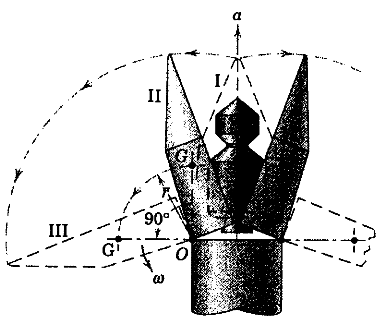
۸٤-۶ مسئله ۸۳-۶ را به ازای T = ۵۰ N و θ = ۳۰° حل کنید.

۸۵-۶ مسئله ۸۳-۶ را به ازای T = ۳۰ N و θ = ۷۰° حل کنید.

جواب α = ۰/۱۱۲۱ rad/s^2 CCW

a = ۰/۰۲۲٤ m/s^2 و به چپ F = ۱۰/۸۲ N

۸۶-۶ هنگامیکه راکت در فضا به ناحیه‌ای می‌رسد که جاذبه ثقل قابل صرفنظر کردن است، جداره‌ای که دماغه راکت فضاپیما را می‌پوشاند، باز می‌شود و یک محرک مکانیکی به آرامی دو نیمه جداره را از حالت بسته I به حالت نیمه باز II در آورده و در این حالت، جداره‌ها رها می‌شوند تا در اثر شتاب ثابت راکت a ، حول لولای خود در O آزادانه دوران کنند. هنگام رسیدن به حالت III ، لولای O از راکت رها شده و دو نیمه جداره از راکت جدا می‌شوند. سرعت زاویه‌ای ω جداره‌ها را در موقعیت ۹۰° تعیین کنید. جرم هر نیمه جداره برابر m بوده و مرکز جرم آن در G و شعاع ژیراسیون آن حول O برابر k_O است.



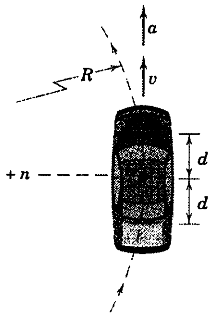
شکل مسئله ۸۶-۶

۶-۸۷ در حین یک آزمایش، اتومبیلی دایره‌ای افقی به شعاع R را با شتاب مماسی رو به جلوی a طی می‌کند. عکس العمل‌های جانبی به جفت چرخ‌های جلو و عقب را موقعی که سرعت اتومبیل (الف) $v = ۰$ و (ب) $v \neq ۰$ است، تعیین کنید. جرم اتومبیل m بوده و ممان اینرسی قطبی آن (حول محور قائم گذرنده از G) برابر $\bar{I}$ می‌باشد. فرض کنید $R >> d$ است.

جواب

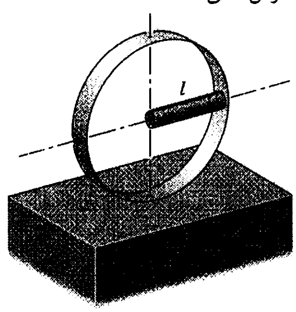
(برای یک جفت چرخ) $R_f = \frac{\bar{I}\alpha}{۲dR}$ و $R_r = -\frac{\bar{I}\alpha}{۲dR}$ (الف)

(ب) $R_f = \frac{mv^۲d + \bar{I}\alpha}{۲Rd}$ و $R_r = \frac{mv^۲d - \bar{I}\alpha}{۲Rd}$



شکل مسئله ۸۷-۶

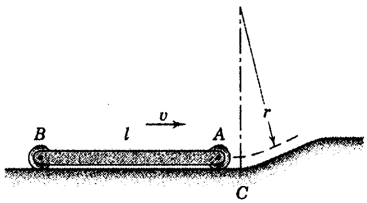
۶-۸۸ مطابق شکل، میله یکنواختی به طول l و جرم m به حلقه مدوری به شعاع l متصل شده است. اگر در موقعیت نشان داده شده، مجموعه میله و حلقه روی یک سطح افقی و از حالت سکون رها شود، مقدار نیروی اصطکاک F و نیروی عکس العمل قائم N سطح را تعیین کنید. مقدار اصطکاک برای جلوگیری از لغزش کافی است.



شکل مسئله ۸۸-۶

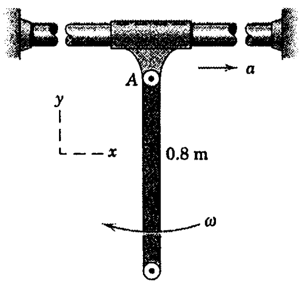
۶-۸۹ میله سنگین یکنواخت AB به جرم m روی غلتک‌های سبک دو انتهای خود در امتداد افق با سرعت v حرکت می‌کند و موقعی که انتهای A آن از نقطه C عبور می‌کند، شروع به حرکت روی بخش منحنی مسیر به شعاع r می‌کند. نیروی وارده از مسیر بر غلتک A را بلافاصله پس از عبور از C تعیین کنید.

جواب $A = mg\left(\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}\frac{v^2}{gr}\right)$



شکل مسئله ۸۹-۶

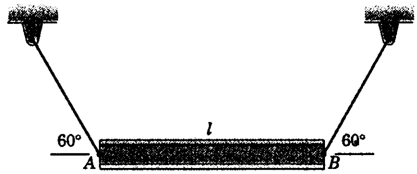
۶-۹۰ انتهای A از میله یکنواخت به جرم ۵ kg آزادانه به طوقه‌ای که با شتاب $a = ٤\ \text{m/s}^2$ در امتداد شافت ثابت افقی حرکت می‌کند، لولا شده است. اگر میله در حین عبور از وضعیت قائم دارای سرعت زاویه‌ای $\omega = ۲\ \text{rad/s}$ باشد، مولفه‌های نیروی وارد بر میله در نقطه A را در این لحظه تعیین کنید.



شکل مسئله ۹۰-۶

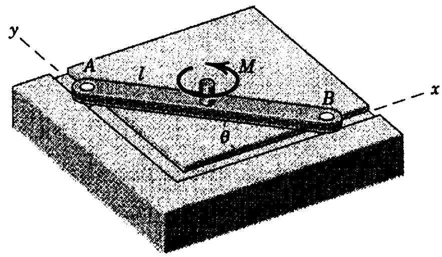
۶-۹۱ تیرآهن یکنواختی به جرم m و طول l توسط دو کابل در A و B آویزان شده است. اگر کابل B ناگهان پاره شود، کشش T در کابل A را بلافاصله پس از پاره شدن، تعیین کنید. تیر را به مثابه میله‌ای باریک در نظر گرفته و نشان دهید که مستقل از طول تیر می‌باشد.

جواب $T = \frac{۲\sqrt{۳}}{۱۳} mg$



شکل مسئله ۹۱-۶

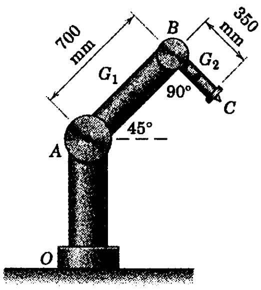
۹۲-٦ به دو انتهای میله باریکی بـه جـرم m و طول l غلتک‌های کوچک بلبرینگی نصب شـده و میلـه را مقیـد بـه حرکت در شیار افقی x-y می‌نمـاید. اگر بـه میلـه کـه ابتـدا در $\theta = ٤٥°$ ساکن است، گشتاور M اعمـال گردد، نیروهـای وارد بـر غلتک‌هـای A و B را وقتـی کـه میلـه شـروع بـه حرکـت می‌نماید، تعیین کنید.



شکل مسئله ۹۲-۶

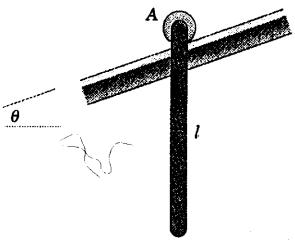
۹۳-٦ روبـات مسـئله ٥٤-٦ مجـددا در اینجا تکـرار مـی‌گردد. بـازوی AB حـول مفصـل A بـا سـرعت زاویـه‌ای ۲ rad/s در جهت پادساعتگرد دوران نمـوده و ایـن مقـدار بـا میزان ٤ rad/s^2 افزایـش می‌یابد. اگر مفصل B ثـابت نگهداشـته شود، گشتاور M_B اعمال شده از بازوی AB بـه بـازوی BC را تعیین کنید. جرم بازوی BC برابر ٤ kg بوده و آن را بـه مثابـه یک میله باریک یکنواخت در نظر بگیرید.

جواب $M_B = ۳/٥٥$ N.m CCW



شکل مسئله ۹۳-۶

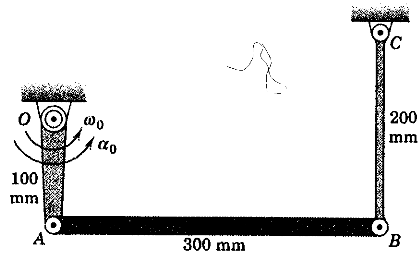
۹٤-٦ در انتهای A میله باریکی به جرم m و طـول l، غلتک کوچکی نصب شـده و بـر روی سـطح شـیبداری قـرار گرفته است. اگر میله مزبور از حالت سکون در موقعیـت قـائم رها شود، شتاب اولیه A را بیابید.



شکل مسئله ۹۴-۶

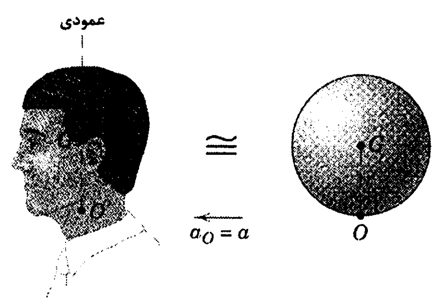
۶-۹۵ میله باریک یکنواخت AB دارای جرم ۰/۸ kg بوده و توسط لنگ OA رانده شده و توسط لینک CB که جرمش قابل اغماض است، مقید گشته است. اگر OA دارای شتاب زاویه‌ای $\alpha_0 = ٤\ rad/s^2$ و سرعت زاویه‌ای $\omega_0 = ٢\ rad/s$ باشد، در حالی که OA و CB هر دو عمود بر AB می‌باشند، نیروی وارد بر CB را در این لحظه حساب کنید. (*پیشنهاد:* با استفاده از رابطه ۳-۶ و اختیار A به عنوان مرکز گشتاور گیری مسئله را حل کنید.)

جواب $BC = ٤/٠٣\ N$ (کششی)



شکل مسئله ۹۵-۶

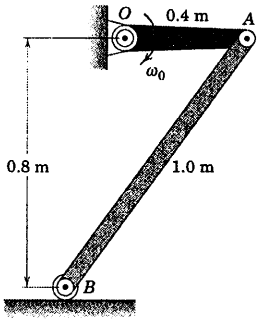
۶-۹۶ در یک تحقیق بر روی چرخش ناگهانی سر انسان که از پشت سر مورد اصابت قرار می‌گیرد، از گوی کروی شکل یکنواخت توپری به جرم m و شعاع r که حول محور مماسی (ناحیه گردن) لولا شده، استفاده می‌شود. اگر به این محور در نقطه O در حالی که ابتدا سر در حال سکون است، شتاب ثابت a داده شود، رابطه‌ای برای شتاب زاویه‌ای اولیه α سر و سرعت زاویه‌ای ω آن به صورت تابعی از زاویه چرخش θ تعیین کنید. فرض کنید که گردن شل می‌باشد، به طوریکه هیچ گشتاوری در نقطه O بر سر اعمال نمی‌گردد.



شکل مسئله ۹۶-۶

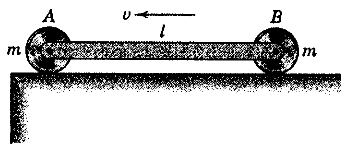
۶-۹۷ لنگ OA در صفحه قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_0 برابر ٤/٥ rad/s در جهت ساعتگرد دوران می‌کند. برای موقعیتی که OA افقی است، نیروی وارد بر زیر غلتک سبک B متصل به میله باریک AB به جرم ۱۰ kg را حساب کنید.

جواب $B = ٣٦/٤\ N$



شکل مسئله ۹۷-۶

۶-۹۸ دو چرخ دیسک مانند، هر کدام به جرم m توسط میله سبک ولی صلب به طول l به یکدیگر مرتبط شده‌اند. مطابق شکل، مجموعه با سرعت v بر روی سطح افقی پرتاب می‌گردد. اگر سرعت v به اندازه کافی زیاد باشد به نحوی که میله پس از آنکه A سطح را ترک کرده، با گوشه سطح برخورد نکند، مقدار تقریبی سرعت زاویه‌ای ω سیستم را در لحظه‌ای که B سطح را ترک می‌کند، تعیین کنید. چرخ‌ها را به مثابه جرم‌های متمرکز در نظر گرفته و فرضیات ساده کننده دیگر را بیان کنید.

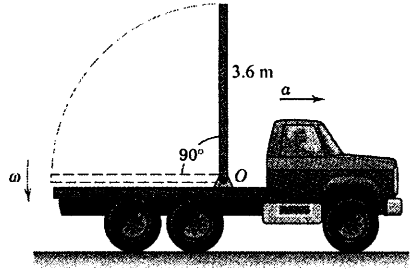


شکل مسئله ۹۸-۶

۶-۹۹ تیرک یکنواختی به طول ۳/٦ m به کفی کامیون لولا شده و موقعی که کامیون از حالت سکون با شتاب ۰/۹ m/s^2 شروع به حرکت می‌نماید، از موقعیت قائم رها می‌گردد. اگر طی حرکت تیرک، شتاب ثابت باقی بماند،

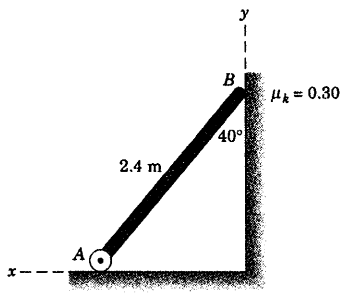
سرعت زاویه‌ای ω تیرک را موقعی که به موقعیت افقی می‌رسد، محاسبه کنید.

جواب $\omega = ۲/۹۹$ rad/s



شکل مسئله ۹۹-۶

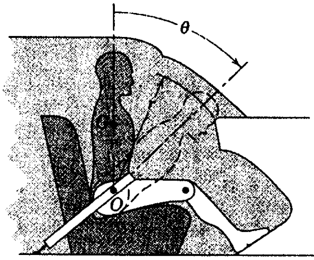
۱۰۰-۶ میله یکنواختی به جرم ۱۵ kg توسط غلتک کوچک با جرم ناچیز در نقطه A بر روی سطح افقی تکیه کرده است. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی بین انتها B و سطح قائم برابر ۰/۳۰ باشد، شتاب زاویه‌ای انتهای A را هنگامیکه میله از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌گردد، حساب کنید.



شکل مسئله ۱۰۰-۶

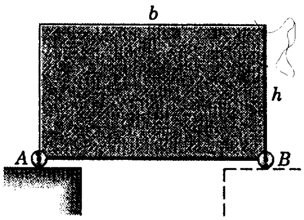
۱۰۱-۶ در مطالعه صدمات وارد به جمجمه سر در برخورد با داشبورد اتومبیل در هنگام تصادف یا ترمز ناگهانی زمانی که از کمربند ایمنی بدون تسمه شانه استفاده شود، مطابق شکل، مدل مصنوعی انسان مورد تجزیه و تحلیل قرار می‌گیرد. فرض می‌شود که مفصل ران O نسبت به اتومبیل ثابت باقی مانده و قسمت بالای بدن به مثابه جسم صلبی به جرم m که آزادانه حول O لولا شده است، در نظر گرفته می‌شود. مرکز جرم قسمت بالای بدن G بوده و امتداد اولیه OG قائم فرض می‌شود. شعاع ژیراسیون قسمت بالای بدن حول O برابر k_O است. اگر اتومبیل ناگهان با شتاب کند شونده a توقف کند، سرعت v برخورد سر به داشبورد را نسبت به اتومبیل تعیین کنید. مقادیر $m = ۵۰$ kg، $\bar{r} = ۴۵۰$ mm ، $r = ۸۰۰$ mm، $k_O = ۵۵۰$ mm، $\theta = ۴۵°$ و $a = ۱۰g$ را جایگزین کرده و v را حساب کنید.

جواب $v = ۱۱/۷۳$ m/s



شکل مسئله ۱۰۱-۶

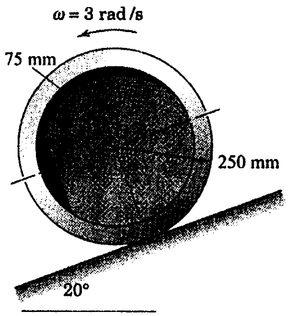
۱۰۲-۶ قطعه مکعب مستطیل توپر و همگن، توسط غلتک‌های کوچکی که به گوشه‌های آن متصل است روی سطح افقی تکیه کرده است. اگر تکیه‌گاه B ناگهان برداشته شود، رابطه‌ای برای شتاب اولیه گوشه A تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۰۲-۶

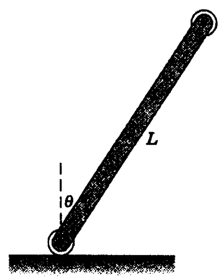
۶-۱۰۳ چرخ نامتوازن ۲۰ کیلوگرمی به مرکز جرم G دارای شعاع ژیراسیون ۲۰۲ mm حول G می‌باشد. چرخ مزبور بدون لغزش روی سطح شیبدار ۲۰° به سوی پایین فرو می‌غلتد. در موقعیت نشان داده شده، سرعت زاویه‌ای چرخ ۳ rad/s است. نیروی اصطکاک F وارده بر چرخ را در این موقعیت حساب کنید.

جواب $F = ۲/۶۲$ N



شکل مسئله ۶-۱۰۳

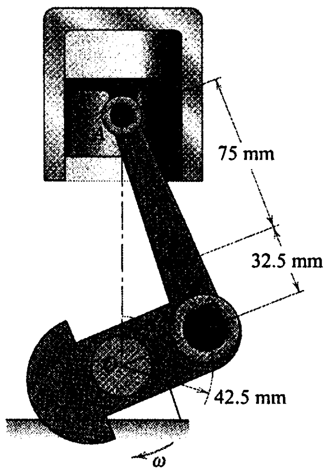
۶-۱۰۴ میله باریک یکنواختی به جرم m و طول l همراه غلتک‌های کوچکی که به دو انتهایش متصل است، مطابق شکل موقعی که غلتک پایینی با سطح افقی در تماس است، از حالت سکون رها می‌گردد. نیروی N زیر غلتک پایینی و شتاب زاویه‌ای α میله را بلافاصله پس از رها شدن تعیین کنید.



شکل مسئله ۶-۱۰۴

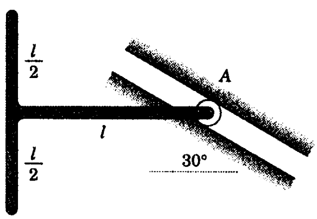
۶-۱۰۵ شاتون AB یک موتور احتراق داخلی به جرم ۰/۶ kg دارای مرکز جرم در G بوده و شعاع ژیراسیون آن حول G برابر ۲۸ mm می‌باشد. پیستون و پین A آن مجموعاً ۰/۸۲ kg جرم دارند. موتور با سرعت زاویه‌ای ثابت ۳۰۰۰ rev/min دوران می‌کند و در نتیجه سرعت زاویه‌ای لنگ برابر $۳۰۰۰(۲\pi)/۶۰ = ۱۰۰\pi$ rad/s است. با صرفنظر کردن از وزن اجزاء موتور و همچنین نیروهای حاصل از احتراق در داخل سیلندر در مقایسه با نیروهای دینامیکی ایجاد شده، مقدار نیروی وارد بر پین A را برای زاویه لنگ $\theta = ۹۰°$ حساب کنید. (*پیشنهاد:* از رابطه دیگر گشتاور یعنی رابطه ۳-۶ با اختیار B به عنوان مرکز گشتاورگیری استفاده کنید.)

جواب $A = ۱۵۲۲$ N



شکل مسئله ۶-۱۰۵

۶-۱۰۶ جسم T شکلی به جرم m از دو میله باریک یکسان تشکیل شده که به یکدیگر جوش شده‌اند. اگر جسم در صفحه قائم در موقعیت نشان داده شده، از حالت سکون رها شود، شتاب اولیه نقطه A را تعیین کنید. از جرم ناچیز و اصطکاک غلتک صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۶-۱۰۶

۶-۱۰۷ آونگ مرکب به جرم m که دارای شعاع ژیراسیونی برابر k_O حول نقطه O می‌باشد به ارابه نشان داده شده، آزادانه لولا شده است و موقعی که آونگ در حالت سکون و در $\theta = ۰$ قرار گرفته به ارابه شتاب افقی ثابت a داده می‌شود. رابطه‌ای برای شتاب زاویه‌ای $\ddot{\theta}$ و مولفه‌های n و t نیروی وارد در O به صورت توابعی از θ تعیین کنید. اگر $a = ۰/۵\,g$ باشد. حداکثر مقداری که θ به آن می‌رسد، محاسبه کنید.

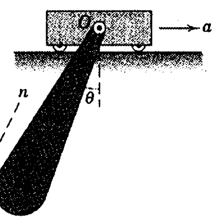
جواب

$$\ddot{\theta} = \frac{\bar{r}}{k_O^۲}(a\cos\theta - g\sin\theta)$$

$$O_t = m(g\sin\theta - a\cos\theta)\left(۱ - \frac{\bar{r}^۲}{k_O^۲}\right)$$

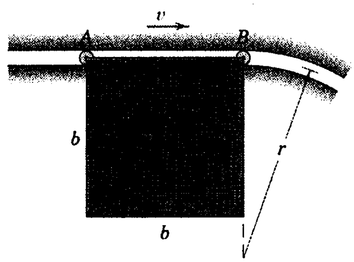
$$O_n = m\left[(g\cos\theta + a\sin\theta)\left(۱ + \frac{۲\bar{r}^۲}{k_O^۲}\right) - ۲g\frac{\bar{r}^۲}{k_O^۲}\right]$$

$\theta_{max} = ۵۳/۱^\circ$



شکل مسئله ۶-۱۰۷

۶-۱۰۸ ورق مربع شکل یکنواختی به جرم m در صفحه قائم توسط غلتک‌های A و B گوشه‌هایش، آویزان شده و با سرعت v به سمت راست در امتداد افق حرکت می‌کند. نیروی وارد از هر غلتک بر ورق را لحظه‌ای پس از وارد شدن گوشه B به قسمت مدور راهنمایش تعیین کنید.



شکل مسئله ۶-۱۰۸

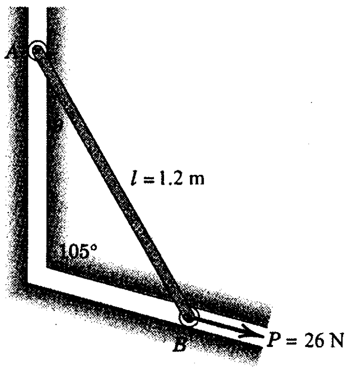
۶-۱۰۹ ◀ غلتک‌های کوچک دو انتهای میله باریک یکنواخت ۳/۶ کیلوگرمی مقیدند در داخل شیارهایی که در صفحه قائم قرار گرفته‌اند، حرکت نمایند. در لحظه‌ای که $\theta = ۳۰^\circ$ می‌باشد، سرعت زاویه‌ای میله در جهت پادساعتگرد برابر ۲ rad/s است. شتاب زاویه‌ای میله، عکس العمل‌ها در A و B و شتاب نقاط A و B را تحت تاثیر نیروی P برابر ۲۶ N را تعیین کنید. از اصطکاک و جرم غلتک‌های کوچک صرفنظر نمایید.

جواب

$\alpha = ۱۸/۲۷\ \text{rad/s}^2$ CCW

$R_A = ۵/۰۵\ \text{N}$ و $R_B = ۱/۲۰۸\ \text{N}$

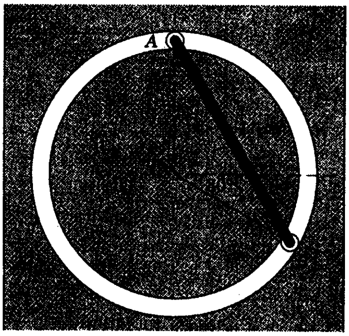
$a_A = ۱۹/۵۶\ \text{m/s}^2$ و $a_B = ۱۷/۱۷\ \text{m/s}^2$



شکل مسئله ۶-۱۰۹

۶-۱۱۰ غلتک‌های کوچک دو انتهای میله باریک یکنواختی مجبور به حرکت در شیار دایره‌ای شکل واقع در صفحه قائم می‌باشند. اگر میله در موقعیت نشان داده شده رها گردد، شتاب زاویه‌ای اولیه α آنرا تعیین کنید. از جرم و اصطکاک غلتک‌ها صرفنظر کنید.

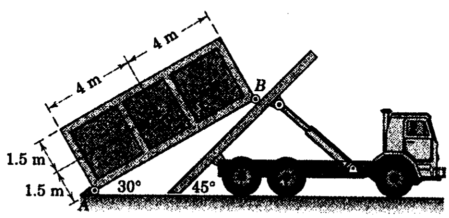
جواب $\alpha = \frac{۳g}{۲l}$ CW



شکل مسئله ۶-۱۱۰

۶-۱۱۱ شکل زیر تخلیه کانتینر باردار را از روی یک کامیون نشان می‌دهد. بار ۱۲۰ Mg کانتینر را می‌توان همانند یک قطعه مکعب مستطیل توپر به مرکز G در نظر گرفت. در موقعیت نشان داده شده، جفت چرخهای A درگیر شده و جهت جلوگیری از حرکت کامیون، ترمز گرفته شده است. اگر چرخهای A ناگهان رها شده و کانتینر شروع به غلتش نماید، کل نیروی اصطکاک F اعمال شده به چرخهای کامیون را بلافاصله پس از خارج شدن چرخهای A از درگیری حساب کنید.

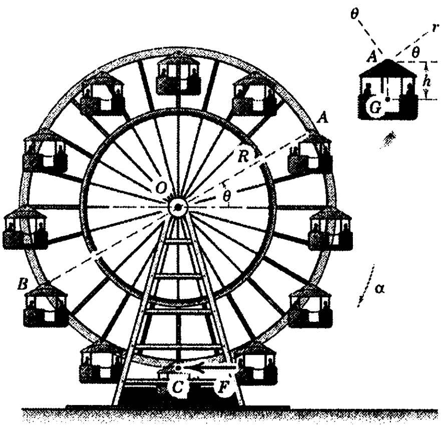
جواب $F = ۳۴۰$ kN



شکل مسئله ۶-۱۱۱

۶-۱۱۲ چرخ‌فلک شهر بازی دارای تعداد زوج n اتاقک می‌باشد که هر کدام از آنها آزادانه در نقطه آویز خود به محیط چرخ مفصل شده است. هر اتاقک دارای جرم m، شعاع ژیراسیون k حول نقطه اتکای A و مرکز جرمی به فاصله h از A می‌باشد. ممان اینرسی سازه چرخ حول محور یاتاقانهایش در O برابر I_O است. رابطه‌ای برای نیروی مماسی F وارده بر محیط چرخ در نقطه C بدست آورید به طوریکه شتاب زاویه‌ای اولیه α چرخ را از حالت سکون ایجاد نماید. *پیشنهاد:* اتاقک‌ها را به صورت زوج A و B بررسی کنید و دقت نمایید که شتاب زاویه‌ای اولیه اتاقک‌ها را با شتاب زاویه‌ای اولیه چرخ‌فلک یکسان نگیرید (توجه: یک مهندس آمریکایی به نام جورج واشنگتن گال فریس، یک چرخ‌فلک قول آسا برای نمایشگاه بین المللی در شیکاگو در سال ۱۸۹۳ ساخت. قطر چرخ‌فلک ۲۵۰ ft با ۳۶ اتاقک که هر کدام ۶۰ نفر سرنشین را حمل می‌کرد. مجموع چرخ‌فلک و اتاقک‌ها با ظرفیت کامل ۱۲۰۰ تن وزن داشت. حرکت چرخ‌فلک توسط یک موتور بخار به قدرت ۱۰۰۰ hp تامین می‌گشت).

جواب $F = \left\{ mRn\left(1 - \frac{h^2}{2k^2}\right) + \frac{I_O}{R} \right\}\alpha$



شکل مسئله ۶-۱۱۲

بخش B ـ کار و انرژی

۶-۶ روابط کار و انرژی

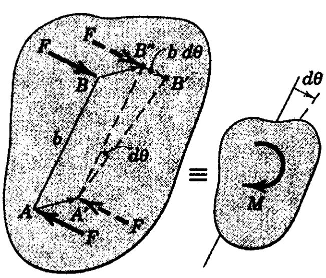
هنگام مطالعه سینتیک ذرات در بخش‌های ٦-٣ و ٧-٣، اصول کار و انرژی برای حرکت یک ذره و مواردی منتخب از ذرات متصل به هم را بکار بردیم. در آنجا دریافتیم که این اصول در توصیف حرکت ناشی از اثر تجمعی نیروهایی که در اثنای پیمودن مسافتهای معینی مطرح باشد، ارزش شایانی می‌یابند. به علاوه وقتی نیروها کنسرواتیو بودند، توانستیم تغییرات سرعت را با تحلیل شرایط انرژی در ابتدا و انتهای برهه حرکت تعیین نماییم. در حرکت‌های محدود، بـرای بدسـت آوردن تغییرات سرعت با استفاده از روش کار و انرژی دیگر نیازی به تعیین شتاب و انتگرال گیـری از آن در طـی زمـان حرکـت نمی‌باشد. این امتیازات وقتی شکل واقعی به خود می‌گیرد که اصول کار و انرژی برای توصیف حرکت جسم صلب تعمیـم داده می‌شوند.

قبل از انجام این تعمیم قویاً توصیه می‌شود که تعاریف و مفـاهیم کـار، انـرژی جنبشـی، انـرژی پتانسـیل جاذبـه و الاستیک، نیروهای کنسرواتیو و توان را که در بخشهای ٦-٣ و ٧-٣ مطرح شدند به دقت مرور شوند. فرض خواهیم کرد با این کمیتها در هنگام کاربرد آنها در حل مسائل جسم صلب آشنا هستید. در بخش‌های ٣-٤ و ٤-٤ در مورد سینتیک سیستم ذرات، اصول بخش‌های ٦-٣ و ٧-٣ را تعمیم دادیم تا هر سیستم کلی ذرات جرم که شامل اجسام صلب نیز می‌شود را فرا گیرد.

کار نیروها و کوپل‌ها

کار انجام شده توسط نیروی **F** به طور مفصل در بخش ٦-٣ مطرح و توسط روابط زیر بیان گردید.

$$U = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \qquad \text{یا} \qquad U = \int (F\cos\alpha)\, ds$$



شکل ١١-٦

که در آن $d\mathbf{r}$ جابجایی برداری بسیار جزئی نقطه اثر **F** در مدت زمـان dt می‌باشد. در شکل ٢a-٣ معادل اسکالر این انتـگرال، α زاویـه بیـن **F** و امتـداد جابجایی بوده و ds مقدار بردار جابجایی $d\mathbf{r}$ است. اغلب کار انجام شده توسط کوپل M قابل محاسبه می‌باشد که روی جسم صلب در مدت حرکـت آن وارد می‌شود. شکل ١١-٦ کوپل $M=Fb$ وارد بر جسم صلبی که در صفحه زوج نیرو حرکت می‌کند، را نشان می‌دهد. در طـی مـدت زمـان dt جسـم بـه انـدازه $d\theta$ چرخیده و خط AB به $A'B'$ منتقل می‌شود.

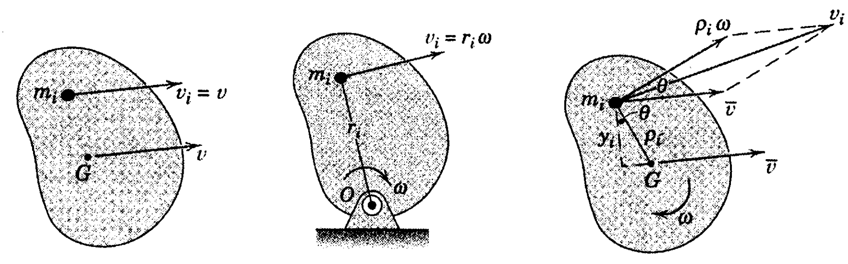
می‌توان این حرکت را دو بخش در نظر گرفت، اول انتقال به $A'B''$ و سپس دوران به اندازه $d\theta$ حول A'. ملاحظـه می‌شود در خلال انتقال، کار انجام شده توسط یکی از نیروها کار نیروی دیگر را خنثی می‌کند. در نتیجه کار خالص انجـام شده که ناشی از بخش دورانی حرکت می‌باشد، برابر $dU=F\,(b\,d\theta) = M\,d\theta$ است. اگر کوپـل در خـلاف چرخـش اعمـال

شود کار انجام شده منفی می‌گردد. در اثنای یک دوران محدود، کار انجام شده توسط کوپل M که صفحه‌اش به موازات صفحه حرکت است، برابر است با:

$$U = \int M\, d\theta$$

انرژی جنبشی

اکنون از رابطه آشنای انرژی جنبشی یک ذره در بیان روابط انرژی جنبشی جسم صلب برای هر سه نوع حرکت آن در صفحه که در شکل ۱۲-٦ نشان داده شده است، استفاده می‌کنیم.



(a) انتقال (b) دوران حول محور ثابت (c) حرکت کلی در صفحه

شکل ۱۲-۶

(a) انتقال. شکل ۱۲a-٦ جسم صلب در حال انتقال را نشان می‌دهد که جرم آن m بوده و کلیه ذرات آن با سرعت مشترک v حرکت می‌کنند. انرژی جنبشی هر ذره به جرم m_i از جسم $T_i = \frac{1}{2}m_i v^2$ بوده و بنابراین کل جسم دارای انرژی $T = \Sigma\frac{1}{2}m_i v^2 = \frac{1}{2}v^2\Sigma m_i$ می‌باشد. یا:

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2} \qquad (٦\text{-}٧)$$

این رابطه برای هر دو انتقال مستقیم الخط و منحنی الخط صادق است.

(b) دوران حول محور ثابت. جسم صلب شکل ۱۲b-٦ با سرعت زاویه‌ای ω حول محور ثابت گذرنده از O می‌چرخد. انرژی جنبشی ذره نمونه‌ای به جرم m_i عبارت است از $T_i = \frac{1}{2}m_i(r_i\omega)^2$، بنابراین برای کل جسم $T = \frac{1}{2}\omega^2\Sigma m_i r_i^2$ می‌باشد. اما ممان اینرسی حول O برابر است با $I_O = \Sigma m_i r_i^2$ ، بنابراین :

$$\boxed{T = \frac{1}{2}I_O\omega^2} \qquad (٦\text{-}٨)$$

به شباهتی که در روابط انرژی جنبشی برای انتقال و دوران وجود دارد، توجه شود. شما خود تحقیق خواهید کرد که دیمانسیون دو رابطه یکی است.

(c) حرکت کلی در صفحه. جسم صلب شکل ۱۲c-٦ دارای حرکت کلی در صفحه است در حالی که در لحظه مورد نظر سرعت مرکز جرم آن در G برابر $\bar{\upsilon}$ و سرعت زاویه‌ای آن ω می‌باشد. سرعت υ_i ذره نمونه‌ای به جرم m_i را می‌توان بر حسب سرعت مرکز جرم یعنی $\bar{\upsilon}$ و سرعت نسبت به مرکز جرم یعنی $\rho_i\,\omega$، مطابق شکل نشان داده شده، بیان کرد. به کمک قانون کسینوسها، انرژی جنبشی جسم صلب را به صورت ΣT_i ، یعنی مجموع انرژی کلیه ذرات جسم می‌نویسیم. بنابراین:

$$T = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_i^2 = \Sigma \tfrac{1}{2} m_i \left(\bar{\upsilon}^2 + \rho_i^2 \omega^2 + 2\bar{\upsilon}\rho_i \omega \cos\theta \right)$$

چون ω و $\bar{\upsilon}$ به طور مشترک در کلیه جملات سومین مجموع وجود دارند، می‌توان از آنها فاکتور گرفت. بنابراین آخرین عبارت مجموع فوق به صورت زیر در می‌آید.

$$\omega\bar{\upsilon}\Sigma m_i \rho_i \cos\theta = \omega\bar{\upsilon}\Sigma m_i y_i = 0$$

از آنجایی که $\Sigma m_i y_i = m\bar{y} = 0$ است. پس انرژی جنبشی جسم صلب عبارت است از:

$T = \frac{1}{2}\bar{\upsilon}^2 \Sigma m_i + \frac{1}{2}\omega^2 \Sigma m_i \rho_i^2$ یا:

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2} m\bar{\upsilon}^2 + \tfrac{1}{2}\bar{I}\omega^2} \qquad (٦-٩)$$

که در آن $\bar{I}$ ممان اینرسی جسم حول مرکز جرم آن است. این رابطه انرژی جنبشی به وضوح نشان می‌دهد که سرعت انتقالی $\bar{\upsilon}$ مرکز جرم و سرعت دورانی ω حول مرکز جرم، هر یک سهم جداگانه‌ای در انرژی جنبشی کل جسم دارا می‌باشند.

انرژی جنبشی حرکت در صفحه را می‌توان بر حسب سرعت دورانی حول مرکز آنی بدون سرعت C نیز بیان کرد. از آنجا که C در هر لحظه دارای سرعت صفر است، مطابق بحثی که به اثبات رابطه ۸-٦ منجر شد در مورد C نیز با همان قوت مصداق دارد، زیرا C در این لحظه مانند نقطه O عمل می‌کند. بنابراین نوع دیگر انرژی جنبشی برای حرکت در صفحه را می‌توان چنین نوشت:

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2} I_C \omega^2} \qquad (٦-١٠)$$

در بخش ۳-٤ رابطه ٤-٤ را برای انرژی جنبشی هر سیستم جرم بدست آوردیم. حال ملاحظه می‌شود که اگر سیستم جرم صلب باشد، رابطه فوق معادل رابطه ۹-٦ خواهد بود. برای یک جسم صلب کمیت $\dot{\rho}_i$ در رابطه ٤-٤ سرعت ذره نمونه نسبت به مرکز جرم بوده و برابر بردار حاصلضرب $\omega\times\rho_i$ است که مقدارش $\rho_i\omega$ می‌باشد. عبارت دوم مجموع در رابطه ٤-٤ چنین می‌شود: $\Sigma\frac{1}{2}m_i(\rho_i\omega)^2 = \frac{1}{2}\omega^2\Sigma m_i\rho_i^2 = \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$، که نشانگر تطابق کامل بین رابطه ٤-٤ و ٩-٤ است.

انرژی پتانسیل و معادله کار ـ انرژی

انرژی پتانسیل جاذبه V_g و انرژی پتانسیل الاستیک V_e در بخش ۷-۳ به تفصیل بیان شد. یادآوری می‌شود که نشـانه U' (به جای U) نماد کار انجام شده توسط همه نیروها به جز نیروهای وزن و فنر است که بر حسب انرژی پتانسیل محاسبه می‌شوند.

رابطه کار ـ انرژی یعنی معادله ۱۷-۳ در بخش ۷-۳ برای حرکت ذره تعریف شـد و در بخـش ۳-٤ بـرای حرکـت سیستم کلی ذرات تعمیم داده شد. این رابطه یعنی:

$$\boxed{U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e} \qquad [٤\text{-}٣]$$

در مورد هر سیستم مکانیکی بکار می‌رود. هنگامی که رابطه فوق برای یک جسم صلب منفرد بکار گرفتـه می‌شـود، عبارت ΔV_e حذف می‌شود و U'_{1-2} کل کار انجام شده بر روی جسم توسط نیروهای خارجی (به استثنای نـیروی جاذبـه) مساوی است با تغییر ΔT انرژی جنبشی جسم، به اضافه تغییر ΔV_g مربوط به انرژی پتانسیل ناشی از تغییر مکان جسـم در میدان ثقل. به طریقی دیگر می‌توان این معادله را چنین نوشت $U_{1-2} = \Delta T$، مشروط بر آنکه عبارت U شامل کـار نیروهـای جاذبه نیز باشد.

چنانچه رابطه ۳-٤ را برای مجموعه‌ای از اجسام صلب متصل به هم مورد اسـتفاده قـرار دهیـم، تغییـر ΔV_e انـرژی ذخیره شده الاستیکی در اتصالات نیز بایستی احتساب شود. جمله U'_{1-2} شامل کار تمام نیروهای خارجی (به استثنای نیروی جاذبه) و کار منفی نیروهای اصطکاک داخلی (در صورت وجود) خواهد بود. جمله ΔT مجموع تغیـیرات انـرژی جنبشـی کلیه قطعات متحرک در اثنای برهه مورد نظر حرکت می‌باشد و ΔV_g مجموع تغییرات انرژی پتانسیل جاذبه‌ای بـرای اجـزاء مختلف است.

به طریقی دیگر رابطه کار ـ انرژی را می‌توان به شکل معادله۱۷a-۳ نوشت که در آن جملات نشانگر نتـایج طبیعـی وقایع است.

وقتی اصول کار ـ انرژی را برای یک جسم صلب منفرد بکار می‌بریم باید از *ترسیمه آزاد* جسم یا *ترسیمه نیروهـای فعال* استفاده کنیم. در مورد مجموعه‌ای از اجسام صلب متصل به هم، ترسیمه نیروهای فعال بایستی رسم شـود تـا سیسـتم مجزا شده و کلیه نیروهایی که کار انجام می‌دهند، مشخص گردند. همچنین برای مشخص شدن موقعیتهای ابتدایی و انتهایی سیستم باید ترسیمه‌هایی در طی حرکت مورد نظر رسم شوند.

معادله کار ـ انرژی یک رابطه مستقیم بین نیروهایی که کار انجام می‌دهند و تغییرات مربوطه در حرکت یک سیسـتم مکانیکی برقرار می‌کند. به هر حال، اگر اصطکاک مکانیکی داخلی قابل توجهی وجود داشته باشد، سیستم باید طوری تجزیه شود که نیروهای اصطکاک استاتیکی آن مشخص و کار منفی آنها محاسبه گردد. موقعی که سیسـتم تجزیـه شـود، یکـی از امتیازات اصلی روش کار ـ انرژی به طور خود به خود از بین می‌رود. روش کار ـ انرژی بیشتر بـرای تحلیـل سیسـتم‌های کنسرواتیو اجسام متصل به هم که اتلاف انرژی ناشی از کار منفی نیروهای اصطکاک در آنها قابل اغماض است، مفید است.

توان

مفهوم توان در بخش ٦-٣ در بررسی کار ـ انرژی برای حرکت ذره بحث شد. یادآوری می‌شود که توان، تغییر کار نسبت به زمان است. توان حاصل از نیروی $\mathbf{F}$ که در حرکت صفحه‌ای بر جسم صلب وارد می‌شود در لحظه مورد نظر از رابطه ١٢-٣ بدست می‌آید که عبارت است از تغییرات کار انجام شده نسبت به زمان یا:

$$P=\frac{dU}{dt}=\frac{\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

که در آن $d\mathbf{r}$ و $\mathbf{v}$ به ترتیب دیفرانسیل تغییر مکان و سرعت نقطه اثر اعمال نیرو می‌باشند. به طور مشابه، برای کوپل M وارده بر جسم، توان ایجاد شده بوسیله کوپل در لحظه داده شده، میزان کاری است که کار انجام می‌دهد، یعنی:

$$P=\frac{dU}{dt}=\frac{Md\theta}{dt}=M\omega$$

که در آن $d\theta$ و ω به ترتیب تغییرات جزیی زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای جسم هستند. اگر جهت‌های M و ω یکی باشد، توان، مثبت بوده و انرژی به جسم افزوده می‌شود. به عکس، اگر M و ω در جهت‌های مخالف باشند، توان منفی است و جسم انرژی از دست می‌دهد. اگر نیروی F و کوپل M به طور همزمان عمل کنند، توان لحظه‌ای کل برابر است با:

$$P=\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}+M\omega$$

توان را همچنین با محاسبه مشتق انرژی مکانیکی کل جسم صلب یا سیستم اجسام صلب می‌توان بیان کرد. رابطه کار ـ انرژی یعنی رابطه ٣-٤، برای جابجایی محدود عبارت است از:

$$dU'=dT+dV_g+dV_e$$

که در آن dU' کار نیروهای فعال و کوپل‌هایی است که بر جسم یا سیستم اجسام اعمال می‌شود. کار نیروهای جاذبه و فنر که در جملات dV_g و dV_e منظور شده‌اند از dU' حذف می‌شوند. توان کل نیروهای فعال و کوپل‌ها از تقسیم رابطه فوق بر dt به صورت زیر بدست می‌آید.

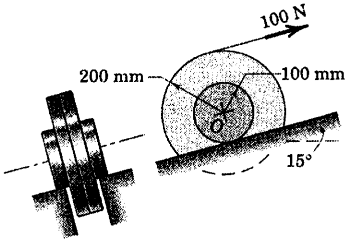
$$P=\frac{dU'}{dt}=\dot{T}+\dot{V}_g+\dot{V}_e=\frac{d}{dt}(T+V)$$

بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که توان حاصل از نیروهای فعال و کوپل‌ها برابر با میزان تغییر انرژی مکانیکی کل جسم یا سیستم اجسام است. از معادله ٦-٩ متوجه می‌شویم که برای یک جسم مفروض، اولین جمله را می‌توان چنین نوشت:

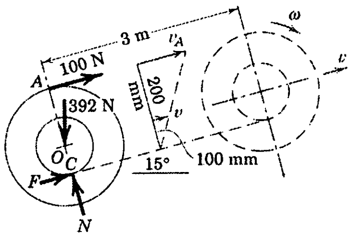
$$\begin{aligned}\dot{T}=\frac{dT}{dt}&=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{\mathbf{v}}+\frac{1}{2}\bar{I}\omega^2\right)\\&=\frac{1}{2}m(\bar{\mathbf{a}}\cdot\bar{\mathbf{v}}+\bar{\mathbf{v}}\cdot\bar{\mathbf{a}})+\bar{I}\omega\dot{\omega}\\&=m\bar{\mathbf{a}}\cdot\bar{\mathbf{v}}+\bar{I}\alpha(\omega)=\mathbf{R}\cdot\bar{\mathbf{v}}+\overline{M}\omega\end{aligned}$$

که در آن $\mathbf{R}$ برآیند *کلیه* نیروهای وارد بر جسم بوده و $\overline{M}$ گشتاور برآیند همه نیروها حول مرکز G است . ضرب داخلی برای حالتی از حرکت منحنی الخط است که در مرکز جرم، $\bar{\mathbf{a}}$ و $\bar{\mathbf{v}}$ در یک امتداد نیستند.

مسئله نمونه ۹-۶



چرخی روی توپی‌هایش بدون لغزش بر روی سطح شیبدار، تحت تاثیر نیروی N ۱۰۰ که به طناب پیچیده شده به دور طوقه خارجی آن وارد می‌شود به طرف بالای سطح شیبدار می‌غلتد. اگر چرخ از حالت سکون شروع به حرکت نماید، سرعت زاویه‌ای ω را پس از اینکه مرکز چرخ فاصله m ۳ را طی می‌کند، حساب کنید. جرم چرخ kg ۴۰ بوده و مرکز جرم آن O و شعاع ژیراسیون آن حول مرکز جرمش mm ۱۵۰ است. توان تولید شده توسط نیروی N ۱۰۰ را در انتهای m ۳ از حرکتش تعیین کنید.



حل: از میان چهار نیرویی که در ترسیمه آزاد چرخ نشان داده شده است، تنها نیروی کشش N ۱۰۰ و نیروی وزن N ۳۹۲ = (۹/۸۱) ۴۰ کار انجام می‌دهند. نیروی اصطکاک تا زمانی که چرخ نمی‌لغزد کار انجام نمی‌دهد. با استفاده از مفهوم مرکز آنی بدون سرعت C، ملاحظه می‌کنیم که نقطه A بر روی طناب که نیروی N ۱۰۰ بر آن وارد می‌شود، دارای سرعت $v_A = [(۲۰۰+۱۰۰)/۱۰۰]v$ است. بنابراین نقطه A بر روی طناب مسافتی معادل ۳ × ۱۰۰/(۱۰۰ + ۲۰۰) که برابر مسافت طی شده توسط مرکز جرم است را می‌پیماید. در نتیجه با احتساب اثر وزن در عبارت U، کار انجام شده بر روی چرخ برابر است با:

❶

❷
$$U_{1-2} = 100\frac{200+100}{100}(3) - (392\sin 15^\circ)(3) = 595 \text{ J}$$

چرخ دارای حرکت کلی در صفحه است. بنابراین تغییر انرژی جنبشی آن برابر است با:

❸
$$\left[T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2\right] \qquad \Delta T = \left[\frac{1}{2}40(0.10\omega)^2 + \frac{1}{2}40(0.15)^2\omega^2\right] - 0$$
$$= 0.650\,\omega^2$$

از معادله کار ـ انرژی نتیجه می‌شود:

$$[U_{1-2} = \Delta T] \qquad 595 = 0.650\,\omega^2 \qquad \omega = 30.3 \text{ rad/s}$$

به عبارت دیگر، انرژی جنبشی چرخ را می‌توان چنین نوشت:

❹
$$\left[T = \frac{1}{2}I_C\omega^2\right] \qquad T = \frac{1}{2}40\left[(0.15)^2 + (0.10)^2\right]\omega^2 = 0.650\omega^2$$

توان تولید شده توسط نیروی N ۱۰۰ هنگامی که ω = ۳۰/۳ rad/s باشد، برابر است با:

❺
$$[P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}] \qquad P_{100} = 100\,(0.3)(30.3) = 908 \text{ W}$$ جواب

نکات مفید

❶ چون سرعت مرکز آنی C واقع بر چرخ صفر است، میزان انجام کار توسط نیروی اصطکاک پیوسته صفر می‌باشد. بنابراین F تا زمانی که چرخ نمی‌لغزد کاری انجام نمی‌دهد. ولی اگر چرخ روی سکوی متحرکی می‌غلتید، نیروی اصطکاک با وجود اینکه چرخ نمی‌لغزید، کار انجام می‌داد.

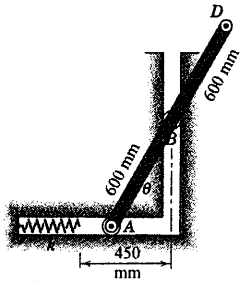
❷ توجه کنید که مولفه وزن به سمت پایین صفحه کار منفی انجام می‌دهد.

❸ دقت داشته باشید که از شعاع صحیح در $v = r\omega$ برای سرعت مرکز چرخ استفاده کنید.

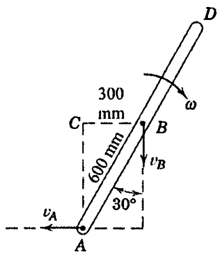
❹ یادآوری می‌شود که $I_C = \bar{I} + m\overline{OC}^2$ می‌باشد، که در آن $\bar{I} = I_O = mk_O^2$ است.

❺ در اینجا سرعت، مربوط به نقطه اعمال نیروی ۱۰۰ N است.

مسئله نمونه ۱۰-۶



میله باریکی به طول ۱۲۰۰ mm و جرم ۲۰ kg دارای مرکز جرم B بوده و در موقعیتی که θ اساساً صفر است از حالت سکون رها می‌شود. نقطه B مقید به حرکت در راهنمای قائم صیقلی است در حالی که انتهای A در راهنمای افقی صیقلی حرکت نموده و هنگام پایین آمدن میله، فنر را فشرده می‌سازد. مطلوبست (a) سرعت زاویه‌ای میله هنگامی که از موقعیت $\theta = ۳۰°$ می‌گذرد و (b) سرعت برخورد B با سطح افقی را چنانچه سختی فنر ۵ kN/m باشد.



حل: با صرفنظر کردن از اصطکاک و جرم‌های ناچیز غلتک‌های A و B سیستم را می‌توان کنسرواتیو در نظر گرفت.

بخش (a). در طی حرکت از موقعیت $\theta = ۰$ به $\theta = ۳۰°$، فنر درگیر نشده، در نتیجه عبارت V_e در معادله انرژی وجود ندارد. اگر کار ناشی از وزن را در عبارت V_g در نظر بگیریم، در آن صورت هیچ نیروی دیگری کار انجام نداده بنابراین $U'_{1-2} = ۰$ است. ❶

چون حرکت صفحه‌ای مقید شده داریم، بین سرعت v_B مرکز جرم و سرعت زاویه‌ای ω میله رابطه سینماتیکی وجود دارد. این رابطه به سادگی با استفاده از مرکز آنی بدون سرعت C و توجه به اینکه $v_B = \overline{CB}\omega$ است، بدست می‌آید. بنابراین انرژی جنبشی میله در موقعیت ۳۰° برابر است با:

$$\left[T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2\right]$$

$$T = \frac{1}{2}(20)(0.300\omega)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}(20)(1.2)^2\right)\omega^2 = 2.10\omega^2$$

تغییر انرژی پتانسیل ثقلی برابر حاصلضرب وزن در تغییر ارتفاع مرکز جرم می‌باشد و برابر است با:

$$[\Delta V_g = W\Delta h] \qquad \Delta V_g = 20(9.81)(0.600\cos 30^\circ - 0.600) = -15.77\ \text{J}$$

اکنون با قرار دادن مقادیر بدست آمده در رابطه انرژی نتیجه می‌شود:

$$[U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g] \qquad 0 = 2.10\omega^2 - 15.77 \qquad \omega = 2.74\ \text{rad/s}$$ جواب

بخش (b). برای کل زمان حرکت، فنر را جزیی از سیستم در نظر می‌گیریم که:

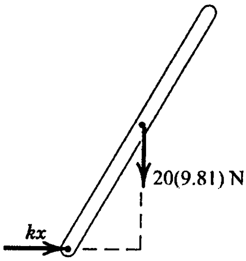
❷ $$\Delta V_e = \frac{1}{2}(5000)(0.600-0.450)^2 - 0 = 56.3 \text{ J} \qquad \left[V_e = \frac{1}{2}kx^2\right]$$

در موقعیت نهایی، نقطه A سرعت نداشته در نتیجه میله حول A دوران می‌کند. بنابراین انرژی جنبشی آن برابر است با:

$$T = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}(20)(1.2)^2\right]\left(\frac{v_B}{0.6}\right)^2 = 13.33v_B^2 \qquad \left[T = \frac{1}{2}I_A\omega^2\right]$$

تغییر انرژی پتانسیل ثقلی برابر است با:

$$\Delta V_g = 20(9.81)(-0.600) = -117.7 \text{ J} \qquad [\Delta V_g = W\Delta h]$$



(شکل دیگر ترسیمه سینتیکی)

با قرار دادن مقادیر در رابطه انرژی نتیجه می‌شود:

$$0 = (13.33\ v_B^2 - 0) - 117.7 + 56.3 \qquad [U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e]$$

جواب $v_B = 2.15$ m/s

از طرف دیگر، اگر سیستم فقط از میله تشکیل شود، ترسیمه نیروهای فعال، وزن، که کار مثبت انجام می‌دهند و نیروی فنر kx که کار منفی انجام می‌دهد را نمایان می‌کند. در نتیجه می‌توانیم، بنویسیم:

$$117.7 - 56.3 = 13.33v_B^2 \qquad [U_{1-2} = \Delta T]$$

که همان نتیجه بدست آمده قبلی است.

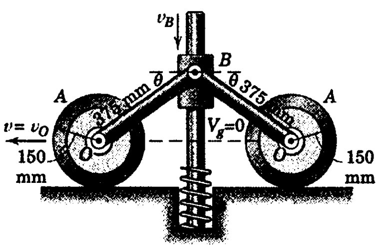
نکات مفید

❶ *ملاحظه می‌کنیم که نیروهای اعمال شده بر میله در A و B عمود بر امتداد حرکت‌هایشان می‌باشد و در نتیجه کاری انجام نمی‌دهند.*

❷ *توجه کنید که اینجا از نیوتن و متر استفاده نمودیم و نه از کیلونیوتن و میلیمتر. همیشه سازگاری آحاد را امتحان کنید.*

مسئله نمونه ۱۱-۶

در مکانیزم نشان داده شده، هر یک از دو چرخ دارای جرم ۳۰ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول مرکز جرمش ۱۰۰ mm است. هر یک از دو لینک OB دارای جرم ۱۰ kg بوده و می‌توان آنها را به مثابه میله باریک در نظر گرفت. طوقه B به جرم ۷ kg بر روی محور قائم ثابتی با اصطکاک ناچیز می‌لغزد. فنر دارای سختی $k =$ ۳۰ kN/m است و هنگامی که لینک‌ها به موقعیت افقی می‌رسند، با کف طوقه تماس پیدا می‌کنند. اگر در موقعیت $\theta =$ ۴۵° طوقه از حالت سکون رها گردد و چنانچه ضریب اصطکاک برای جلوگیری از لغزیدن چرخها کافی باشد، مطلوب است (a) سرعت v_B طوقه در ابتدای اصابت به فنر و (b) حداکثر تغییر طول x فنر.



حل: مکانیزم در صفحه حرکت می‌کند و با صرفنظر کردن از اتلاف اصطکاک جنبشی می‌توان آنرا کنسرواتیو در نظر گرفت. مرجع صفر انرژی پتانسیل جاذبه V_g ترجیحاً مطابق شکل، خطی افقی که از O می‌گذرد، گرفته می‌شود.

(a) در طی حرکت از $\theta = ۴۵°$ به $\theta = ۰$، توجه داریم که ΔT چرخ‌ها صفرند. زیرا هر یک از چرخها از حالت سکون شروع به حرکت نموده و در $\theta = ۰$ به سکون می‌رسند. همچنین در موقعیت پایین هر یک از لینک‌ها تنها حول نقطه O دوران می‌کنند. به نحوی که:

$$\Delta T = \left[2\left(\frac{1}{2}I_O\omega^2\right)-0\right]_{\text{لینکها}} + \left[\frac{1}{2}mv^2-0\right]_{\text{طوقه}}$$

$$=\frac{1}{3}10(0.375)^2\left(\frac{v_B}{0.375}\right)^2+\frac{1}{2}7v_B^2=6.83v_B^2$$

طوقه B به اندازه $\frac{۰/۳۷۵}{\sqrt{۲}} = ۰/۲۶۵$ m پایین آمده و در نتیجه:

$$\Delta V=\Delta V_g=0-2(10)(9.81)\frac{0.265}{2}-7(9.81)(0.265)=-44.2 \text{ J}$$

همچنین، $U'_{1-2} = ۰$ است. بنابراین:

$$[U'_{1-2}=\Delta T+\Delta V] \qquad 0=6.83v_B^2-44.2 \qquad v_B=2.54 \text{ m/s}$$ جواب

(b) در شرایط تغییر طول ماکزیمم x فنر، تمام اجزا به طور لحظه‌ای ساکن شده و در نتیجه $\Delta T = ۰$ می‌گردد. بنابراین:

$$[U'_{1-2}=\Delta T+\Delta V_g+\Delta V_e]$$

$$0=0-2(10)(9.81)\left(\frac{0.265}{2}+\frac{x}{2}\right)-7(9.81)(0.265+x)+\frac{1}{2}(30)(10^3)x^2$$

با حل معادله فوق برای مقدار x مثبت نتیجه می‌شود:

$$x=60.1 \text{ mm}$$ جواب

باید توجه کرد که نتایج بدست آمده در بخش‌های (a) و (b) به سادگی نتیجه یک تغییر خالص انرژی است. علیرغم اینکه مکانیزم، نتیجه یک سری حرکات نسبتاً پیچیده است. حل این مسئله و مسائل شبیه به این توسط روشی غیر از روش کار ـ انرژی چندان رضایت بخش نیست.

نکته مفید

① *با در نظر گرفتن کار وزن طوقه B که در عبارت ΔV_g آمده، نیروهای خارجی دیگری وجود ندارند که روی سیستم کار انجام بدهند. کار نیروی اصطکاک وارده بر چرخ‌ها تا موقعی که لغزش نداشته باشند، صفر است و نیروی قائم نیز در اینجا کاری انجام نمی‌دهد. بنابراین، $U'_{1-2} = ۰$ است.*

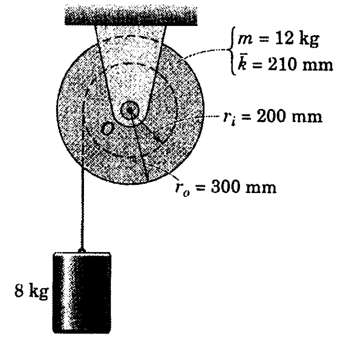
مسائل

(در مسائل زیر از هرگونه اتلاف انرژی ناشی از اصطکاک سینتیکی صرفنظر نمایید، مگر خلاف آن ذکر شود)

مسائل مقدماتی

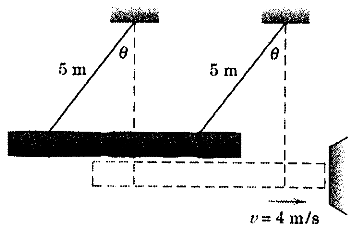
۶-۱۱۳ سرعت استوانه ۸ کیلوگرمی نشان داده شده در لحظه‌ای خاص برابر $0/3$ m/s است. سرعت v آن پس از اینکه به اندازه $1/5$ m پایین می‌آید، چقدر است؟ جرم طبلک‌ها توپی دار 12 kg، شعاع ژیراسیون آن حول مرکز جرمش $\bar{k} = 210$ mm و شعاع توپی آن $r_i = 200$ mm است. گشتاور اصطکاکی در O ثابت و برابر 3 N.m است.

جواب $v = 3/01$ m/s



شکل مسئله ۱۱۳-۶

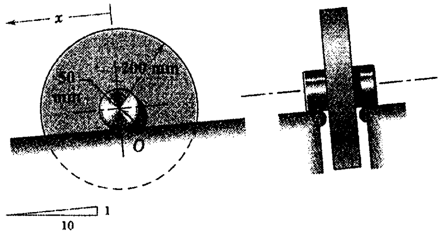
۶-۱۱۴ کُنده درخت توسط دو کابل موازی به طول 5 m آویزان شده است و به عنوان کوبه بکار می‌رود. کُنده درخت تحت چه زاویه θ از حالت سکون باید رها شود تا با سرعت 4 m/s به جسمی که باید کوبیده شود، اصابت کند؟



شکل مسئله ۱۱۴-۶

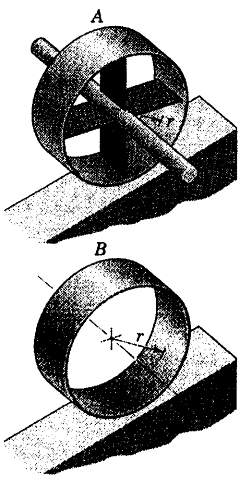
۶-۱۱۵ چرخ ۱۵ کیلوگرمی از حالت سکون رها شده و بدون لغزش روی توپی مرکزی خود به طرف پایین سطح شیبدار فرو می‌غلتد. سرعت v مرکز O چرخ را پس از اینکه مسافت $x = 3$ m را به طرف پایین شیب پیموده حساب کنید. شعاع ژیراسیون چرخ حول O برابر 125 mm است.

جواب $v = 0/899$ m/s



شکل مسئله ۱۱۵-۶

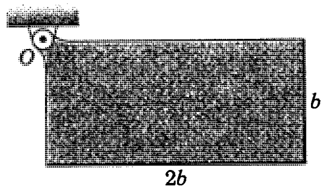
۶-۱۱۶ دو چرخ مسئله ۸۱-۶ که در اینجا مجددا نشان داده شده دو حالت توزیع جرم را نمایش می‌دهد. برای حالت A کل جرم m در مرکز حلقه و در میله محوری که قطر ناچیزی دارد، متمرکز فرض می‌شود. در حالت B کل جرم m روی لبه حلقه متمرکز فرض می‌شود. سرعت مرکز هر یک از حلقه‌ها را پس از اینکه به اندازه x از حالت سکون به طرف پایین شیب حرکت می‌کنند، تعیین کنید. حلقه‌ها بدون لغزش می‌غلتند.



شکل مسئله ۱۱۶-۶

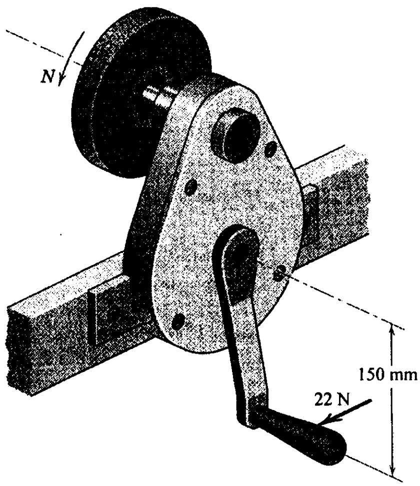
۶-۱۱۷ ورق مستطیلی یکنواخت در موقعیت نشان داده شده از حالت سکون رها می‌گردد. حداکثر سرعت زاویه ω را طی حرکت انجام شده تعیین کنید. اصطکاک در لولا قابل صرفنظر کردن است.

جواب $\omega = ۰/۸۶۱\sqrt{\frac{g}{b}}$



شکل مسئله ۶-۱۱۷

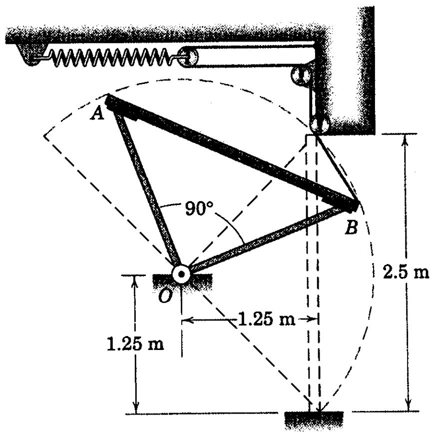
۶-۱۱۸ نیروی پایای N ۲۲ عمود بر دسته یک دستگاه تیزکن دستی وارد می‌شود. چرخ‌دنده داخل محفظه دستگاه همراه با محور و دسته متصل به آن دارای جرم کل kg ۱/۸ بوده و شعاع ژیراسیون آنها حول محورشان mm ۷۲ است. چرخ سمباده تیزکن با محور متصل به آن و پینیون (داخل محفظه) مجموعاً kg ۰/۵۵ جرم دارند و شعاع ژیراسیون آنها mm ۵٤ است. اگر نسبت تعداد دندانه‌های بین چرخ‌دنده و پینیون ٤:۱ باشد، سرعت دورانی N چرخ سمباده را پس از ٦ دور کامل چرخش دسته از حالت سکون، حساب کنید.



شکل مسئله ۶-۱۱۸

۶-۱۱۹ مقطع درب یک پارکینگ به شکل یک ورق مستطیلی به ابعاد m ۲/۵ و m ۵ با ضخامت یکنواخت و جرم kg ۲۰۰ در شکل نشان داده شده است. درب توسط میله‌های مهاربندی با جرم ناچیز ثابت نگهداشته می‌شود و در نقطه O لولا شده است. دو مجموعه فنر و کابل هر یک در یک طرف درب، حرکت آنرا کنترل می‌کنند. هنگامیکه درب در موقعیت باز به حالت افقی قرار گرفته، فنرها بدون کشیدگی هستند. اگر درب در حالت باز کمی منحرف شده و فرو افتد، مقدار ثابت k فنرها را چنان تعیین کنید که موقعی که لبه B درب با زمین برخورد می‌کند، سرعت زاویه‌ای درب به rad/s ۱/۵ محدود گردد.

جواب $k = ۱/۲۷۰$ kN/m

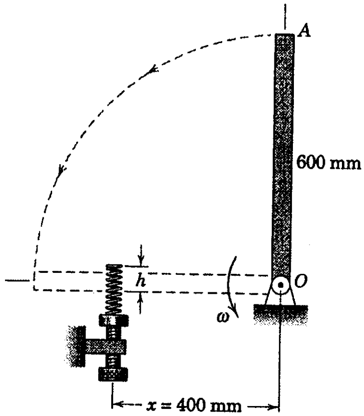


شکل مسئله ۶-۱۱۹

۱۲۰-٦ چرخ طیار ۱۲۰۰ کیلوگرمی با شعاع ژیراسیون ٤۰۰ mm دارای سرعت کاهش یافته‌ای از ۵۰۰۰ به ۳۰۰۰ rev/min در طی زمان ۲ دقیقه می‌باشد. توان متوسط تولید شده چرخ طیار را محاسبه کنید. جواب خود را هم بر حسب کیلووات و هم اسب بخار بیان کنید.

۱۲۱-٦ میله باریک OA به جرم ۱۵ kg از حالت سکون از موقعیت قائم رها گشته و هنگام رسیدن به موقعیت افقی، فنری به سختی $k = 20$ kN/m را فشرده می‌کند. با مشخص نمودن ارتفاع h، فنر را چنان تنظیم کنید که میله هنگام عبور از موقعیت افقی، دارای سرعت زاویه‌ای $\omega = 4$ rad/s باشد. اثر x روی دینامیک مسئله چیست؟

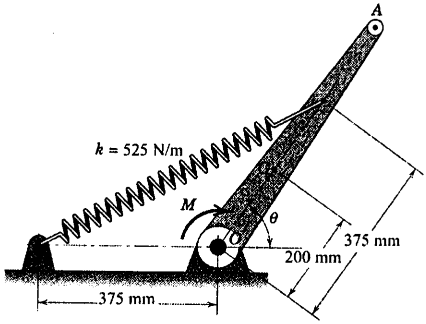
جواب $h = 54/5$ mm



شکل مسئله ۱۲۱-٦

مسائل ویژه

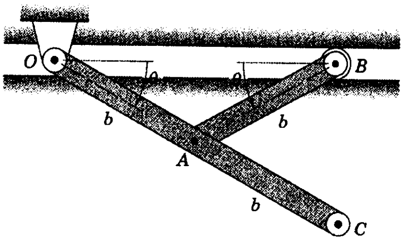
۱۲۲-٦ اهرم ۵/۵ کیلوگرمی OA با ۲۵۰ mm شعاع ژیراسیون حول O، در موقعیت قائم ($\theta = 0$)، جایی که فنر متصل به آن به سختی $k = 525$ N/m بدون کشیدگی است در حال سکون است. گشتاور ثابت M وارده بر اهرم از طریق محور O را چنان تعیین کنید که موجب شود اهرم سرعت زاویه‌ای $\omega = 4$ rad/s را به هنگام رسیدن به موقعیت افقی $\theta = 0$ کسب کند.



شکل مسئله ۱۲۲-٦

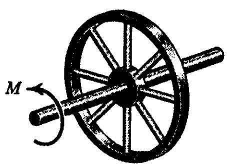
۱۲۳-٦ دو بازوی یکنواخت مفصل شده مطابق شکل دارای جرم بر واحد طول ρ هستند و در صفحه قائم حرکت می‌کنند. اگر آنها از موقعیت $\theta = 0$ از حالت سکون رها شوند، سرعت v انتهای B را موقعی که به تکیه‌گاه O در جایی که θ اساسا °۹۰ است، تعیین کنید.

جواب $v = 2\sqrt{gb}$



شکل مسئله ۱۲۳-٦

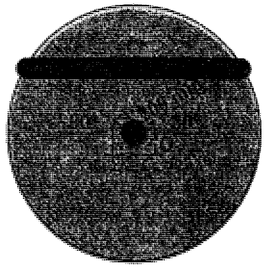
۱۲٤-٦ چرخ طیاری به جرم ۵۰ kg دارای شعاع ژیراسیون $\bar{k} = 0/4$ m حول محور شافت خود بوده و تحت گشتاور $M = 2(1-e^{-0/1\theta})$ N.m قرار می‌گیرد که در آن θ بر حسب رادیان است. اگر چرخ طیار در $\theta = 0$ در حالت سکون باشد، سرعت زاویه‌ای آن را پس از ۵ دور بدست آورید.



شکل مسئله ۱۲۴-٦

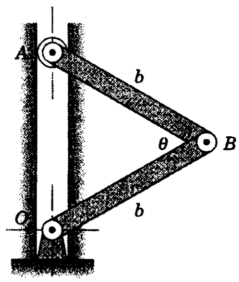
٦-١٢٥ دیسک یکنواخت ٦ کیلوگرمی آزادانه حول محور افقی گذرنده از O لولا شده است. میله باریکی به جرم ۲ kg مطابق شکل به دیسک متصل شده است. اگر سیستم از حالت سکون و از موقعیت نشان داده شده با زدن یک تلنگر شروع به دوران نماید، سرعت زاویه‌ای آن را پس از ۱۸۰° چرخش تعیین کنید.

جواب $\omega = ۷/۰۰$ rad/s



شکل مسئله ۱۲۵-۶

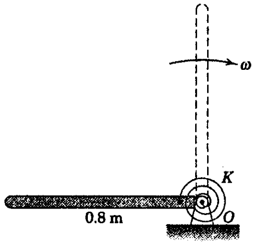
٦-١٢٦ دو لینک مشابه هر یک به طول b و جرم m را می‌توان به صورت میله‌های باریک یکنواخت در نظر گرفت. اگر آنها از موقعیت نشان داده شده از حالت سکون رها شوند و انتهای A مقید به حرکت در راهنمای صیقلی قائم باشد، سرعت v نقطه A را هنگام رسیدن آن به نقطه O که θ اساساً صفر است، تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۲۶-۶

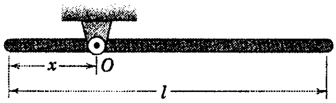
٦-١٢٧ فنر پیچشی به سختی ۳۰ N.m/rad هنگامی که میله باریک یکنواخت به جرم ٦ kg در موقعیت قائم قرار گیرد، بدون تغییر شکل است. اگر میله از حالت سکون در موقعیت افقی نشان داده شده رها گردد، سرعت زاویه‌ای آن ω را موقعی که از موقعیت قائم می‌گذرد، تعیین کنید. اصطکاک قابل اغماض است.

جواب $\omega = ٤/٥٩$ rad/s



شکل مسئله ۱۲۷-۶

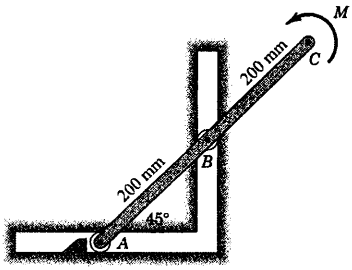
٦-١٢٨ میله باریک یکنواختی از موقعیت نشان داده شده از حالت سکون رها می‌گردد. اگر $x = l/٤$ باشد، سرعت زاویه‌ای میله را موقعی که از موقعیت قائم می‌گذرد، تعیین کنید. اصطکاک در لولای O قابل اغماض می‌باشد.



شکل مسئله ۱۲۸-۶

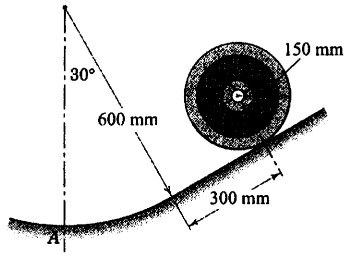
٦-١٢٩ میله یکنواخت ABC به جرم ۳ kg ابتدا در حالت سکون بوده و انتهای A آن به مانعی واقع در راهنمای افقی تکیه کرده است. هنگامیکه کوپل ثابت $M = ۸$ N.m به انتهای C آن وارد می‌گردد، میله دوران کرده و باعث می‌شود که انتهای A با سرعت ۳ m/s به دیواره راهنمای قائم اصابت کند. اتلاف انرژی ΔQ ناشی از اصطکاک در راهنماها و غلتک‌ها را محاسبه کنید. از جرم غلتک‌ها می‌توان صرفنظر کرد.

جواب $\Delta E = ۰/۰۵۹۲$ J



شکل مسئله ۱۲۹-۶

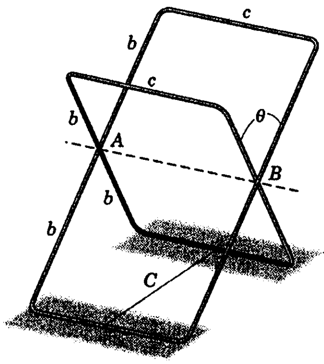
۶-۱۳۰ سرعت مرکز چرخ ۱۰۰ کیلوگرمی به شعاع ژیراسیون ۱۰۰ mm، در موقعیت نشان داده شده، ۰/۶ m/s به طرف پایین شیب است. عکس العمل قائم N وارد بر چرخ را در موقعی که از موقعیت A می‌گذرد، حساب کنید. فرض کنید که چرخ بدون لغزش می‌غلتد.



شکل مسئله ۱۳۰-۶

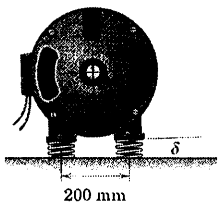
۶-۱۳۱ دو قاب فلزی مشابه با ابعاد نشان داده شده از میله‌های باریک یکسانی ساخته شده و در نقاط میانه A و B اضلاعشان بهم متصل شده‌اند. اگر قاب‌ها در موقعیت نشان داده شده روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار گرفته باشند، مطلوبست سرعت v لبه بالایی آنها را به هنگام برخورد با سطح افقی، در صورتیکه ریسمان C قطع شود.

جواب $v=\sqrt{۱۲gb\dfrac{c+۲b}{۳c+۴b}\cos\dfrac{\theta}{۲}}$



شکل مسئله ۱۳۱-۶

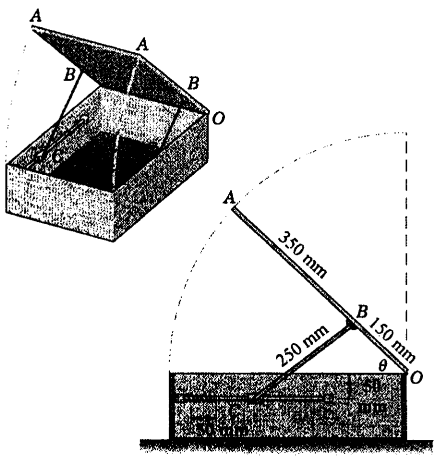
۶-۱۳۲ موتور الکتریکی نشان داده شده در سرعت ۱۷۲۵ rev/min توان ٤ kW را به یک پمپ انتقال می‌دهد. اگر هر یک از چهار فنر زیر موتور دارای سختی ۱۵ kN/m باشد، مقدار زاویه انحراف چرخشی موتور، δ را تعیین کنید. محور موتور در چه جهتی می‌چرخد.



شکل مسئله ۱۳۲-۶

۶-۱۳۳ مکانیزم باز و بسته نگهداشتن دریچه صندوقی طوری طراحی شده که سرعت زاویه‌ای دریچه یکنواخت ۱۰ پوندی را هنگامی که از حالت سکون در θ برابر °۹۰ رها می‌گردد، در $\theta=۰$ به ۱/۵ rad/s محدود سازد. مطابق شکل دو مکانیزم مشابه تعبیه شده‌اند. مقدار سختی مورد نیاز هر یک از فنرها k را تعیین کنید. فنرها در موقع بسته شدن به اندازه ۵۰ mm فشرده می‌شوند. از وزن لینک‌ها و هرگونه اصطکاک در طوقه‌های C صرفنظر کنید. همچنین ضخامت دریچه در مقایسه با سایر ابعادش ناچیز است.

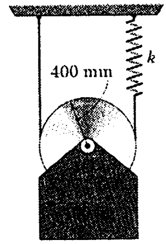
جواب $k=٤/۲۵$ kN/m



شکل مسئله ۱۳۳-۶

۶-۱۳٤ چرخ کوچکی به شعاع ٤۰۰ mm و جرم ۵۰ kg دارای شعاع ژیراسیون ۳۰۰ mm است. چرخ و بار ۱۰۰ کیلوگرمی آن توسط کابل و فنری که دارای سختی ۱/۵ kN/m است آویزان شده‌اند. اگر مجموعه از حالت سکون

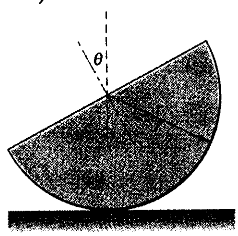
موقعی که فنر به اندازه mm ۱۰۰ کشیده شده است، رها گردد؛ سرعت O را پس از mm ۵۰ سقوط تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۳۴-۶

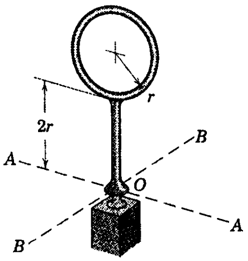
۱۳۵-۶ نیم استوانه توپر همگنی از حالت سکون از موقعیت نشان داده شده رها می‌گردد. اگر اصطکاک کافی برای ممانعت از لغزش وجود داشته باشد، حداکثر سرعت زاویه‌ای ω را که استوانه در حین غلتش روی سطح افقی به آن می‌رسد، تعیین کنید.

جواب $\omega = ۴\sqrt{\dfrac{g(۱-\cos\theta)}{(۹\pi-۱۶)r}}$



شکل مسئله ۱۳۵-۶

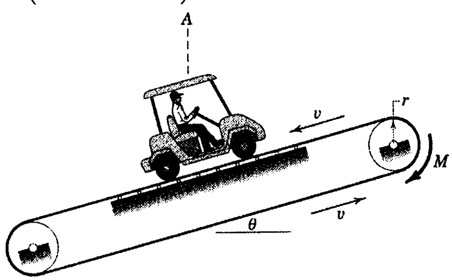
۱۳۶-۶ جسم نشان داده شده از میله باریک یکنواختی ساخته شده و شامل یک حلقه به شعاع r می‌باشد که به میله مستقیمی به طول $۲r$ متصل است. جسم آزادانه حول اتصال کاسه ساچمه‌ای واقع در O دوران می‌کند. اگر جسم در موقعیت قائم نشان داده شده در حال سکون باشد و به آن تلنگری زده شود، سرعت زاویه‌ای ω را پس از °۹۰ چرخش حول (الف) محور A-A و (ب) محور B-B حساب کنید.



شکل مسئله ۱۳۶-۶

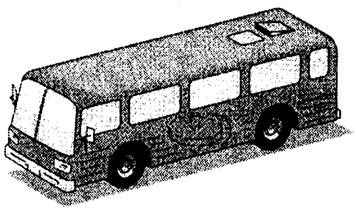
۱۳۷-۶ وسیله‌ای که از آن برای آزمایش عملکرد ارابه‌های موتوری گلف استفاده می‌شود، شامل تسمه نقاله بسته‌ای است که زاویه θ آن قابل تنظیم است. جرم ارابه برابر m بوده و سرعت آن را توسط گشتاور ترمزی M که بر قرقره بالایی اعمال می‌شود، طوری زیاد کرده و به سرعت اسمی آن روی زمین یعنی v می‌رسانیم که ارابه در موقعیت A بر روی سکوی آزمایش ثابت باقی بماند. وقتی ارابه روی تسمه نیست، برای غلبه بر اصطکاک و چرخاندن قرقره‌ها بدون توجه به سرعت آنها به گشتاور $M_{\circ}$ نیاز است. اصطکاک برای جلوگیری از لغزش چرخ‌ها روی تسمه کافی است. رابطه‌ای برای توان P جذب شده توسط گشتاور ترمزی M تعیین کنید. آیا نیروهای اصطکاک استاتیکی بین چرخ‌ها و تسمه، کار انجام می‌دهند؟

جواب $P = \left(mg\sin\theta - \dfrac{M_{\circ}}{r}\right)v$



شکل مسئله ۱۳۷-۶

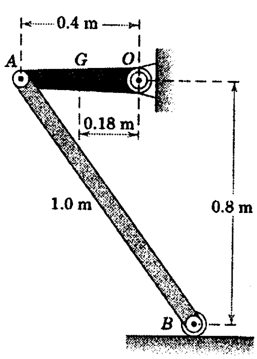
۶-۱۳۸ توان محرک اتوبوس آزمایشی به جرم ۱۰ Mg از طریق انرژی ذخیره شده در چرخ طیاری که حمل می‌کند، تامین می‌گردد. چرخ طیار دارای جرم ۱۵۰۰ kg و شعاع ژیراسیون ۵۰۰ mm بوده و آنرا به سرعت ماکزیمم ۴۰۰۰ rev/min می‌رساند. اگر اتوبوس از حالت سکون شروع به حرکت نماید و سرعتش در بالای تپه‌ای که ۲۰ m بالاتر از موقعیت شروع به حرکت می‌باشد به ۷۲ km/h برسد، سرعت کاهش یافته N چرخ طیار را حساب کنید. فرض کنید ۱۰ درصد انرژی گرفته شده از چرخ طیار تلف می‌شود. از انرژی جنبشی چرخ‌های اتوبوس صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۱۳۸-۶

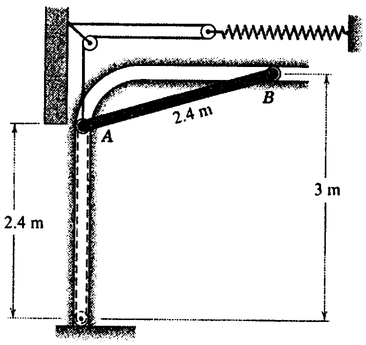
۶-۱۳۹ لنگ OA به جرم ۸ kg و مرکز جرم G و شعاع ژیراسیون ۰/۲۲ m حول O به میله باریک یکنواختی به جرم ۱۲ kg متصل است. اگر اهرم‌بندی از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها گردد، سرعت انتهای B را موقعی که OA از موقعیت قائم عبور می‌کند، حساب کنید.

جواب $\upsilon = ۲/۲۹$ m/s



شکل مسئله ۱۳۹-۶

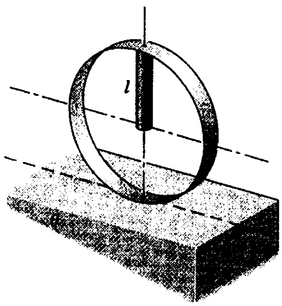
۶-۱۴۰ شکل سطح مقطع درب پارکینگی به جرم ۱۰۰ kg را نشان می‌دهد که از ورق مستطیلی یکنواختی به ابعاد ۲/۴ در ۲/۴ متر تشکیل شده است. درب توسط دو مجموعه فنر که در دو طرف آن تعبیه شده، مانند شکل که یکی از آنها را نشان می‌دهد، کنترل می‌گردد. هر یک از فنرها دارای سختی ۷۰۰ N/m بوده و موقعی که درب در موقعیت نشان داده شده قرار می‌گیرد، کشیده نشده‌اند. اگر درب از حالت سکون در این موقعیت رها گردد، سرعت لبه درب در A را هنگامیکه به کف پارکینگ برخورد می‌کند، حساب کنید.



شکل مسئله ۱۴۰-۶

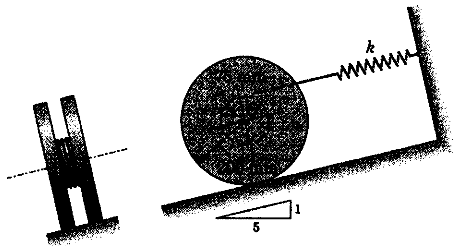
۶-۱۴۱ میله‌ای باریک به طول l و جرم m به لبه داخلی حلقه‌ای به شعاع l جوش شده است. اگر حلقه از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها گردد. سرعت مرکز حلقه را پس از یک و نیم دور چرخیدن آن تعیین کنید. فرض کنید لغزش نداشته و تماس دائم بین حلقه و سطح اتکایش وجود دارد. همچنین از جرم حلقه صرفنظر کنید.

جواب $\upsilon = \sqrt{۶gl(\cos\theta + ۳\pi \sin\theta)}$



شکل مسئله ۱۴۱-۶

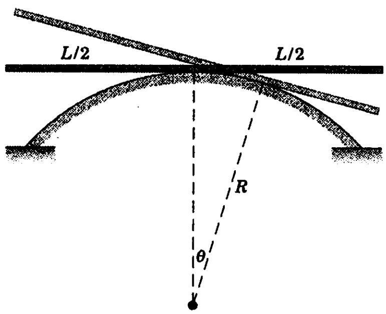
۶-۱۴۲ زوج چرخی به جرم ۱۰ kg و شعاع ژیراسیون ۱۲۵ mm حول نقطه O به فنری با سختی $k = ۶۰۰$ N/m کــه توسط طنابی به دور توپی داخلــی محکــم بســته شــده، متصــل است. اگر چرخ از حالت سکون در موقعی کــه کشــیدگی فـنر ۲۲۵ mm اسـت بـر روی سـطح شـیبدار رهـا گردد، سـرعت ماکزیمم v مرکز O را در طی حرکت تعیین کنید. چرخ بــدون لغزش می‌غلتد.



شکل مسئله ۱۴۲-۶

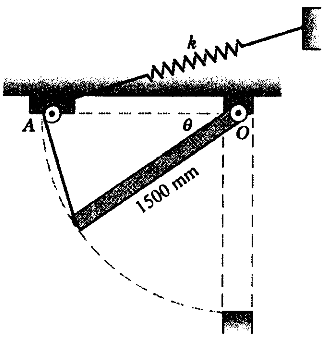
۶-۱۴۳ میله باریک یکنواختی به جرم m و طول l کــه ابتدا بر روی سطح مدوری به شــعاع R در حـالت افقـی قـرار گرفته به موقعیت خــط چیـن بـرده شـده و از آنجـا از حـالت سکون رهـا مـی‌گردد. رابطـه‌ای بـرای سـرعت زاویـه‌ای میلـه هنگامیکه از موقعیت افقی عبور می‌کند، بیـان کنیـد. اصطکـاک برای جلوگیری از هرگونه لغزش کافی است.

جواب $\omega = \dfrac{۲}{L}\sqrt{۶gR(\theta \sin\theta + \cos\theta - ۱)}$



شکل مسئله ۱۴۳-۶

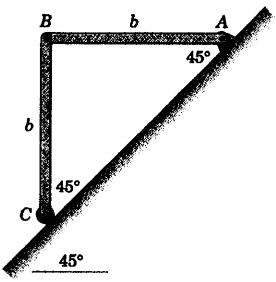
۶-۱۴۴ شکل ســطح مقطع درب هواکـش یکنواخـت ۱۰۰ کیلوگرمی را که حول لبه افقی بالایی خود در O لولا شده است، نشان می‌دهد. درب توسط کابل فنردار کــه در A از روی قرقره کوچکی عبور کرده، کنــترل می‌شـود. فـنر دارای سـختی ۲۰۰ N بر متر کشیدگی بــوده و در موقعیــت $\theta = ۰$ کشیدگی ندارد. اگر درب از حالت سکون در موقعیت افقــی رهـا گردد، ماکزیمم سرعت زاویه‌ای ω کــه درب بــه آن دسـت می‌یـابد و زاویه θ متناظر آنرا تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۴۴-۶

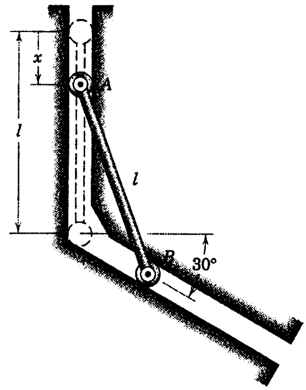
۶-۱۴۵ دو میله یکنواخت یکسان از حــالت ســکون از موقعیت نشان داده شده در صفحه قائم رها می‌گردند. ســرعت زاویه‌ای ω میله AB را موقعی که میلــه‌ها در یـک راسـتا قـرار می‌گیرند، تعیین کنید.

جواب $\omega = \sqrt{\dfrac{۳g}{۲b}\left(۲\sqrt{۲} - ۱\right)}$



شکل مسئله ۱۴۵-۶

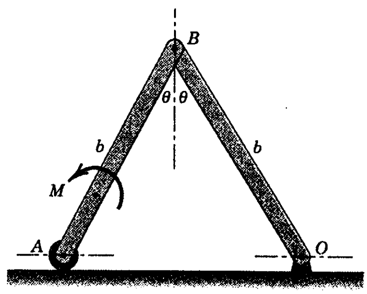
۱۴۶-۶ میله باریک یکنواختی به طول l از حالت سکون در موقعیت نقطه‌چین قائم رها می‌گردد. با چه سرعت v_A انتهای A میله به سطح شیبدار ۳۰° برخورد می‌کند؟ از جرم کوچک و اصطکاک غلتک‌های انتهای میله صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۱۴۶-۶

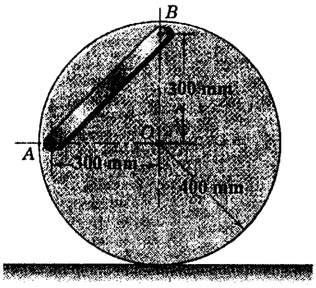
۱۴۷-۶ دو میله باریک هر یک به جرم m و طول b به یکدیگر پین شده و در صفحه قائم حرکت می‌کنند. اگر میله‌ها از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها گردند و تحت تاثیر گشتاور ثابت M که به AB اعمال می‌گردد، حرکت نماید. سرعت A را موقعی که به O برخورد می‌کند، تعیین کنید.

جواب $$v_A=\sqrt{3\left[\frac{M\theta}{m}-gb(1-\cos\theta)\right]}$$



شکل مسئله ۱۴۷-۶

۱۴۸-۶ دیسک مدور یکنواخت ۴۵ کیلوگرمی همراه میله باریک ۹ کیلوگرمی متصل به آن از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌شود و بدون لغزش روی سطح افقی می‌غلتد. سرعت v_O مرکز O را موقعی که مرکز جرم میله درست زیر مرکز O دیسک واقع می‌گردد، حساب کنید.

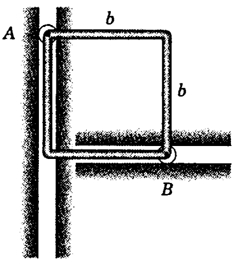


شکل مسئله ۱۴۸-۶

۱۴۹-۶ قاب مربع شکل از چهار میله باریک یکنواخت یکسانی، هر یک به طول b، ساخته شده است. اگر قاب از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها گردد، مطلوب است سرعت گوشه A، (الف) بعد از اینکه A به اندازه b پایین بیاید و (ب) بعد از اینکه A به اندازه $2b$ پایین بیاید. جرم‌های کوچک بدون اصطکاک در شیارهایی که در صفحه قائم گرفته‌اند، می‌غلتند.

جواب (الف) $v_A=\sqrt{\frac{12}{5}gb}$

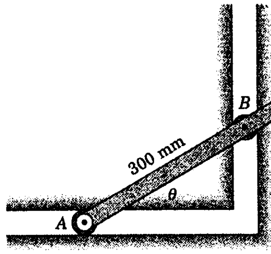
(ب) $v_A=\sqrt{\frac{12}{5}gb}$



شکل مسئله ۱۴۹-۶

۱۵۰-۶ حرکت میله باریک به جرم ۴ kg و طول ۶۰۰ mm توسط حرکت مقید غلتک‌های کوچک A و B با جرم و اصطکاک ناچیز، کنترل می‌شود. میله از حالت سکون در موقعیت افقی یعنی $\theta = ۰$ شروع به حرکت نموده و تحت تاثیر نیروی ثابت $P = ۵۰$ N که در امتداد عمود بر میله و انتهای C بر آن وارد می‌شود، در صفحه قائم حرکت می‌کند. سرعت v غلتک A که با دیواره راهنمای عمودی در $\theta = ۹۰°$ برخورد

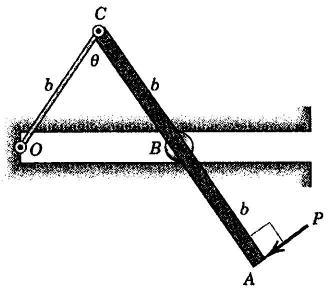
می‌کند را حساب کنید.



شکل مسئله ۱۵۰-۶

۱۵۱-۶ میله یکنواخت ABC بـه جـرم m از حـالت سکون در $\theta =$ ۱۸۰° جایی که A، B، C و O در یک امتـداد هستند، شروع به حرکت می‌نماید. اگر مقـدار نـیروی P ثـابت باشد، سرعت زاویه‌ای ω میله را هنگامیکه B به O یعنی $\theta =$ ۰ می‌رسد، تعیین کنید. جرم غلتک B و جـرم میلـه بـاریک OC قابل صرفنظر کردن است. (*راهنمایی:* نیروی P را توسـط یـک سیستم نیرو ـ کوپل در B جایگزین کنید.)

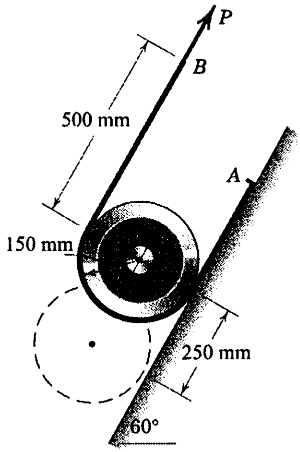
جواب $\omega = \sqrt{\dfrac{6p\pi}{13mb}}$



شکل مسئله ۱۵۱-۶

۱۵۲-۶ چـرخ ۷ کیلـوگرمـی و شـعاع ژیراسـیون ۱۰۰ mm حول مرکز O، توسط نواری که به نقطـه A متصـل شده و به دور چرخ چرخیده و در نقطه B بـه انتـهای رسـیده، مقید شده اسـت. نـوار دارای جـرم ۱/۲ kg در هـر مـتر طـول می‌باشد. اگر چرخ از حالت سکون در موقعیت نشان داده شـده و تحت نیروی پایای ۱۸ نیوتنی که در نقطه B به نـوار اعمـال می‌شود، رها گردد، سرعت مرکز O چرخ را هنگامیکه مسـافت ۲۵۰ mm را در امتداد پایین شیب غلتیده حساب کنید.

جواب $v =$ ۱/۲۳۱ m/s



شکل مسئله ۱۵۲-۶

۶-۷ شتاب ناشی از کار ـ انرژی؛ کار مجازی

علاوه بر تعیین سرعت‌های ناشی از عمل نیروها در جابجایی‌های محدود، معادله کار ـ انرژی را می‌توان در تعیین شتاب‌های لحظه‌ای اعضای یک سیستم اجسام متصل به هم ناشی از نیروهای فعال بکار برد. همچنین می‌توان معادله را برای تعیین شکل چنین سیستمی که شتاب ثابت دارد، تعدیل کرد.

معادله ـ کار انرژی برای حرکات محدود

برای برهه‌ای بسیار کوتاه حرکت، رابطه ۳-٤ را می‌توان چنین نوشت:

$$dU' = dT + dV$$

عبارت dU' نشانگر کل کار انجام شده توسط نیروهای فعال غیر کنسرواتیو بر روی سیستم مورد مطالعه در تغییر مکان بسیار جزیی (دیفرانسیل) مربوطه می‌باشد. کار نیروهای کنسرواتیو در عبارت dV لحاظ شده است. اگر از اندیس i برای مشخص کردن جسم نمونه‌ای از سیستم اجسام متصل بهم استفاده کنیم، تغییر دیفرانسیلی انرژی جنبشی T برای کل سیستم عبارت خواهد بود از:

$$dT = d\left(\Sigma \tfrac{1}{2} m_i \bar{v}_i^2 + \Sigma \tfrac{1}{2} \bar{I}_i \omega_i^2\right) = \Sigma m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i + \Sigma \bar{I}_i \omega_i d\omega_i$$

که در آن $d\bar{v}_i$ و $d\omega_i$ به ترتیب مربوط به تغییرات مقدار سرعت‌ها هستند و جمع بندی فوق روی تمام اجسام سیستم صورت گرفته است. اما برای هر یک از اجسام سیستم $m_i \bar{v}_i d\bar{v}_i = m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i$ و $\bar{I}_i \omega_i d\omega_i = \bar{I}_i \alpha_i d\theta_i$ است که در این روابط $d\bar{\mathbf{s}}_i$ نشانگر تغییر مکان خطی بسیار جزئی مرکز جرم و $d\theta_i$ نشان دهنده تغییر مکان زاویه‌ای بسیار جزئی جسم در صفحه حرکت است. توجه کنید که $\bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i$ در واقع همان $(\bar{a}_i)_t d\bar{s}_i$ است که در آن $(\bar{a}_i)_t$ مولفه $\bar{\mathbf{a}}_i$ در امتداد مماس بر مسیر منحنی پیموده شود توسط مرکز جرم جسم مورد نظر است. همینطور α_i یعنی $\ddot{\theta}_i$ شتاب زاویه‌ای جسم مورد نظر می‌باشد. در نتیجه برای کل سیستم:

$$dT = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i d\theta_i$$

است که می‌توان این تغییر را به صورت زیر نوشت.

$$dT = \Sigma \mathbf{R}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \mathbf{M}_{G_i} \cdot d\boldsymbol{\theta}_i$$

که در آن $\mathbf{R}_i$ و $\mathbf{M}_{G_i}$ به ترتیب برآیند نیرو و برآیند کوپل وارد بر جسم i بوده و $d\boldsymbol{\theta}_i = d\theta_i \mathbf{k}$ است. دو رابطه اخیر صرفاً نشانگر آن هستند که تغییر بسیار جرئی انرژی جنبشی برابر با کار بسیار جزئی انجام شده بر روی سیستم توسط نیروها و کوپل‌های برآیند اعمال شده بر روی کلیه اجسام سیستم است.

عبارت dV نشانگر تغییر دیفرانسیلی از انرژی پتانسیل جاذبه‌ای کل V_g و انرژی پتانسیل الاستیک کل V_e بوده و به شکل زیر نوشته می‌شود.

$$dV = d\left(\Sigma m_i g h_i + \Sigma \tfrac{1}{2} k_j x_j^2\right) = \Sigma m_i g dh_i + \Sigma k_j x_j dx_j$$

که در آن h_i نشان دهنده فاصله عمودی مرکز جرم جسم نمونه به جرم m_i نسبت به هر صفحه مرجع مناسبی بوده و x_j نشانگر تغییر طول به علت کشش یا فشار یک عضو الاستیک نمونه از سیستم (فنر) با سختی k_j است.

اکنون رابطه کامل را به صورت زیر برای dU' می‌توان نوشت.

$$dU' = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i d\theta_i + \Sigma m_i g dh_i + \Sigma k_j x_j dx_j \qquad (٦-١١)$$

هنگام استفاده از رابطه ١١-٦ برای سیستمی با یک درجه آزادی اگر شتاب و جابجایی هم جهت باشند، عبارات $m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i$ و $\bar{I}_i \alpha_i d\theta_i$ مثبت هستند و اگر شتاب و جابجایی در جهت خلاف باشند، عبارات فوق منفی خواهند بود. رابطه ١١-٦ دارای این مزیت است که شتاب را مستقیماً به نیروهای فعال ارتباط می‌دهد و بنابراین نیازی نیست که ابتدا سیستم به اجزایش تجزیه گردد و سپس نیروهای داخلی و نیروهای عکس العمل بوسیله حل همزمان معادلات نیرو ـ جرم ـ شتاب برای هر عضو حذف گردند.

کار مجازی

در معادله ١١-٦ حرکت‌های جزئی عبارتند از تغییرات جزئی در جابجایی‌های حقیقی یا واقعی که اتفاق می‌افتند. برای یک سیستم مکانیکی که ترکیب هندسی آنها به صورت فرضی در نظر گرفته شده است، بهتر است از مفهوم *کار مجازی* استفاده شود. مفهوم کار مجازی و جابجایی مجازی را برای تعیین شکل تعادلی سیستم استاتیکی اجسام متصل به هم تعریف و بکار بردیم (فصل ۷ *استاتیک* را ملاحظه نمایید).

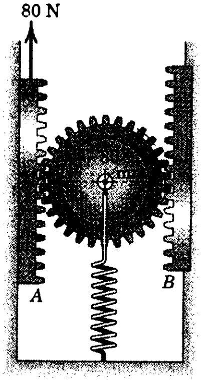
یک *جابجایی مجازی*، عبارت از هرگونه جابجایی فرضی یا دلخواه، چه خطی و چه زاویه‌ای، نسبت به موقعیت طبیعی یا واقعی می‌باشد. برای یک سیستم از اجسام متصل به هم جابجایی‌های مجازی باید مطابق با قیدهای سیستم بوده و آنها را نقض ننماید. به عنوان مثال، وقتی انتهای یک لینک حول محور ثابتی لولا شده باشد، جابجایی انتهای دیگر باید عمود بر خط واصل بین دو انتها در نظر گرفته شود. اینگونه شرایط الزامی جابجایی‌ها با قیود، صرفاً شرایط سینماتیکی هستند و موسوم به *معادلات قید* می‌باشند.

اگر دسته‌ای از جابجایی‌های مجازی را که در معادلات قید صدق کرده و با قیود مربوطه سازگارند بر یک سیستم مکانیکی اعمال گردند، با استفاده از رابطه کار ـ انرژی معادله ١١-٦، رابطه‌ای مناسب بین مختصاتی که شکل سیستم را مشخص می‌کنند، بدست خواهد آمد که بر حسب تغییرات مجازی بیان می‌شود. بنابراین:

$$dU' = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot \delta\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i \delta\theta_i + \Sigma m_i g \delta h_i + \Sigma k_j x_j \delta x_j \qquad (٦-١١\mathbf{a})$$

معمولاً از نماد دیفرانسیل d برای نمایش تغییرات بسیار جزئی در جابجایی *حقیقی* و از نماد δ برای نمایش تغییرات بسیار جزئی فرضی یا *مجازی* استفاده می‌شود.

مسئله نمونه ۱۲-۶



جرم دنده شانه‌ای متحرک A برابر ۳ kg بوده و دنده شانه B ثابت است. چرخ‌دنده دارای جرم ۲ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن ۶۰ mm است. در موقعیت نشان داده شده، فنر که دارای سختی ۱/۲ kN/m است به اندازه ٤۰ mm کشیده شده است. در لحظه نشان داده شده، شتاب a دنده شانه‌ای A را تحت تاثیر نیروی ۸۰ N تعیین کنید. صفحه شکل عمودی است.

❶ **حل:** شکل نشان داده شده ترسیمه نیروی فعال را برای کل سیستم که کنسرواتیو است، نشان می‌دهد.

طی تغییر مکان بسیار جزئی dx دنده شانه‌ای A به طرف بالا، کار dU' انجام شده بر روی سیستم برابر $80dx$ است که در آن x بر حسب متر بوده و این کار معادل مجموع تغییرات کل انرژی سیستم متناظر می‌باشد. این تغییرات که در رابطه ۱۱-٦ ظاهر می‌شوند، به صورت زیر می‌باشند.

$$\left[dT = \Sigma m_i \bar{\mathbf{a}}_i \cdot d\bar{\mathbf{s}}_i + \Sigma \bar{I}_i \alpha_i d\theta_i\right]$$

$$dT_{\text{دنده شانه}} = 3a\,dx$$

❷
$$dT_{\text{چرخ دنده}} = 2\frac{a}{2}\frac{dx}{2} + 2(0.06)^2\frac{a/2}{0.08}\frac{dx/2}{0.08} = 0.781a\,dx$$

تغییر انرژی‌های پتانسیل سیستم از رابطه ۱۱-٦ چنین است:

$$[dV = \Sigma m_i g dh_i + \Sigma k_j x_j dx_j]$$

$$dV_{\text{دنده شانه}} = 3g\,dx = 3(9.81)dx = 29.4dx$$

❸
$$dV_{\text{فنر}} = k_j x_j dx_j = 1200(0.04)\frac{dx}{2} = 24dx$$

با قرار دادن مقادیر فوق در رابطه ۱۱-٦ خواهیم داشت:

$$80\,dx = 3a\,dx + 0.781a\,dx + 29.4\,dx + 9.81\,dx + 24\,dx$$

با حذف dx از طرفین رابطه و حل آن برای a نتیجه می‌شود:

$$a = 16.76/3.78 = 4.43\ \text{m/s}^2$$ جواب

ملاحظه می‌کنیم که استفاده از روش کار ـ انرژی در یک جابجایی بسیار جزئی مستقیماً رابطه بین نیروی وارده و شتاب حاصل را بدست می‌دهد و دیگر نیازی به جداسازی سیستم، رسم دو ترسیمه آزاد جسم، بکارگیری دوباره از رابطه $\Sigma F = m\bar{a}$، بکارگیری $\Sigma M_G = \bar{I}\alpha$ و $F = kx$ ، حذف جملات ناخواسته و بالاخره حل برای بدست آوردن a وجود ندارد.

نکات مفید

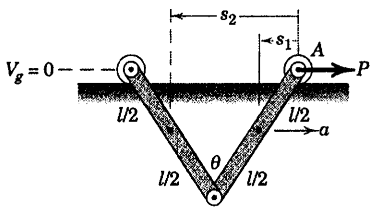
❶ توجه کنید که هیچ یک از نیروهای باقیمانده خارج از سیستم کاری انجام نمی‌دهند. کار انجام شده توسط وزن و نیروی فنر در جملات انرژی پتانسیل منظور شده‌اند.

❷ توجه کنید که $\bar{a}_i$ برای چرخ‌دنده شتاب مرکز جرم آن بوده، که برابر نصف شتاب دنده شانه‌ای A می‌باشد. همچنین جابجایی آن برابر $dx/۲$ است. شتاب زاویه‌ای چرخ دنده غلتان از رابطه $a = r\alpha$ برابر $\alpha_i = \dfrac{(a/۲)}{۰/۰۸}$ بوده و جابجایی زاویه‌ای از رابطه $ds = r\,d\theta$ برابر $d\theta_i = \dfrac{(dx/۲)}{۰/۰۸}$ است.

❸ در اینجا توجه کنید که جابجایی فنر برابر نصف جابجایی دنده شانه‌ای است. بنابراین، $x_i = x/۲$ است.

مسئله نمونه ۱۳-۶

نیروی ثابت P به انتهای A از دو لینک یکسان و یکنواخت وارد شده و باعث می‌شود که آنها در صفحه قائم خود با شتاب افقی a به سمت راست حرکت کنند. زاویه حالت پایای θ را که دو لینک با هم می‌سازند، تعیین کنید.



حل: شکل، ترسیمه نیروی فعال سیستم را نشان می‌دهد. برای یافتن پیکربندی حالت پایا، جابجایی مجازی هر یک از لینک‌ها را از موقعیت طبیعی آنها در حین شتاب گیری در نظر بگیرید. اندازه گیری جابجایی نسبت به انتهای A، باعث حذف هرگونه کار انجام شده توسط نیروی P در حین جابجایی مجازی می‌گردد. بنابراین:

❶
$$\delta U' = 0$$

❷ تغییر مجازی انرژی جنبشی از رابطه ۱۱a-۶ برابر است با:

$$\delta T = \Sigma m\bar{\mathbf{a}}\cdot\delta\bar{\mathbf{s}}_i = ma(-\delta s_1) + ma(-\delta s_2)$$

$$= -ma\left[\delta\left(\frac{l}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right) + \delta\left(\frac{3l}{2}\sin\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

❸
$$= -ma\left(l\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta\right)$$

خط افقی گذرنده از A را به عنوان مرجع انرژی پتانسیل صفر انتخاب می‌کنیم. بنابراین، انرژی پتانسیل لینک‌ها برابرند با:

$$V_g = 2mg\left(-\frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)$$

و تغییر مجازی انرژی پتانسیل برابر می‌شود با:

$$\delta V_g = \delta\left(-2mg\frac{l}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right) = \frac{mgl}{2}\sin\frac{\theta}{2}\delta\theta$$

با جایگذاری در رابطه کار ـ انرژی برای تغییرات مجازی یعنی رابطه ۱۱a-۶ چنین نتیجه می‌شود:

$$[\delta U' = \delta T + \delta V_g] \qquad 0 = -mal\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta + \frac{mgl}{2}\sin\frac{\theta}{2}\delta\theta$$

که از آن:

جواب $$\theta = 2\tan^{-1}\frac{2a}{g}$$

مجدداً در این مسئله ملاحظه می‌شود که با استفاده از روش کار ـ انرژی دیگر نیازی بــه جداسـازی سیسـتم، رسـم جداگانه ترسیمه آزاد جسم، بکارگیری معادلات حرکت، حذف جملات ناخواسته و حل برای بدست آوردن θ نیست.

نکات مفید

❶ *توجه کنید که از نماد δ برای نشان دادن تغییر بسیار جزئی فرضی یا مجازی به جای نماد d استفاده نمودیم که برای متغیر بسیار جزئی جابجایی حقیقی استفاده می‌گردد.*

❷ *در ارزیابی δT ، تغییر T ناشی از تغییر مجازی در جابجایی پیدا می‌شود. بنابراین باید از رابطه $\mathbf{ma}\cdot\delta\mathbf{s}$ استفاده کرد و نه از رابطه $\delta\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ که معرف تغییر T ناشی از تغییر در v است.*

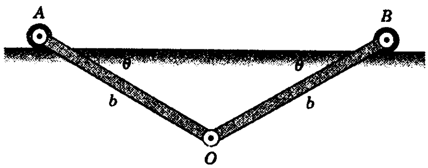
❸ *برای توصیف پیکربندی لینک‌ها از زاویه θ استفاده گردید، گرچه می‌توانستیم از فاصله بین دو انتهای لینک‌ها نیز به همان خوبی نیز استفاده کنیم.*

مسائل

مسائل مقدماتی

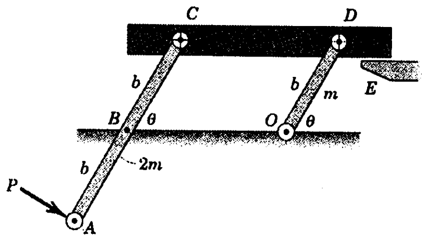
۱۵۳-۶ دو میله باریک یکنواخت در نقطه O به هم لولا شده‌اند و توسط غلتک‌های دو انتهای خود با جرم ناچیز روی سطح افقی قرار گرفته‌اند. اگر میله‌ها از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها شوند. شتاب زاویه‌ای اولیه α آنها را به هنگام رسیدن به هم در امتداد قائم تعیین کنید. (*پیشنهاد:* برای نوشتن رابطه dT از مرکز آنی بدون سرعت استفاده کنید.)

جواب $\alpha = \dfrac{3g\cos\theta}{2b}$



شکل مسئله ۱۵۳-۶

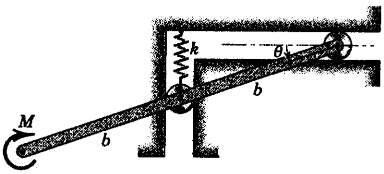
۱۵۴-۶ موقعیت سکوی افقی به جرم m_0 توسط دو لینک موازی باریک به جرم‌های m و $2m$ کنترل می‌شود. شتاب زاویه‌ای اولیه لینک‌ها را در شروع حرکت از موقعیت نشان داده شده، تحت تاثیر نیروی P که عمود بر AB در انتهای آن وارد می‌شود، تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۵۴-۶

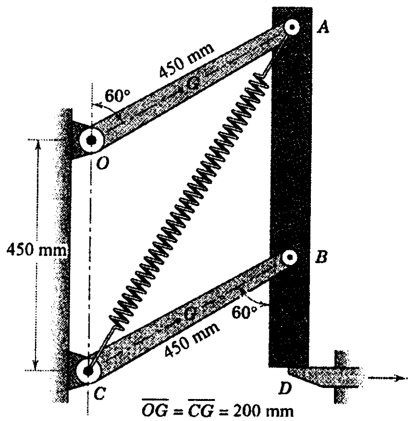
۱۵۵-۶ میله باریک یکنواختی به جرم m در صفحه قائم مطابق شکل قبل از وارد شدن کوپل M به انتهایش در حالت تعادل قرار دارد. شتاب زاویه‌ای اولیه α میله را بر اثر اعمال M تعیین کنید. جرم هر یک از غلتک‌های راهنما قابل صرفنظر کردن است.

جواب $\alpha = \dfrac{M}{mb^2\left(\cos^2\theta + \frac{1}{3}\right)}$



شکل مسئله ۱۵۵-۶

۱۵۶-۶ مکانیزم نشان داده شده در صفحه قائم حرکت می‌کند. تیرچه قائم AB به جرم ۴/۵ kg و هر یک از دو لینک ۲/۷ kg به مرکز جرم G و شعاع ژیراسیون ۲۵۰ mm حول غلتک‌هایشان (O یا C) می‌باشد. فنر دارای سختی ۲۲۰ N/m و طول بدون کشیدگی آن ۴۵۰ mm است. اگر تکیه‌گاه D ناگهان برداشته شود، شتاب زاویه‌ای اولیه α لینک ω را بدست آورید.

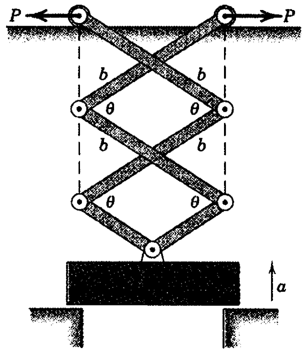


شکل مسئله ۱۵۶-۶

مسائل ویژه

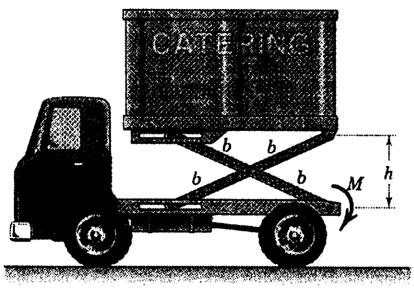
۶-۱۵۷ به باری بـه جـرم m از موقعیت سـکون روی تکیه‌گاه‌هایش با اعمال نیروهای P شتاب a به طـرف بـالا داده شده می‌شود. از جرم لینک‌ها صرفنظر کرده و شتاب اولیـه a را تعیین کنید.

جواب $$a=\frac{2P}{5m}\tan\frac{\theta}{2}-g$$



شکل مسئله ۱۵۷-۶

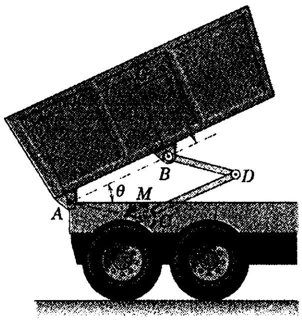
۶-۱۵۸ اتاقک بار یک کامیون حمـل مـواد غذایـی بـه هواپیما، دارای جرم m بوده و توسط کوپـل M کـه بـه انتـهای پایینی لینک لولا شده بـه شاسـی کـامیون وارد مـی‌گردد، بـالا می‌رود. موقعی که اتاقک بار بـالا مـی‌رود، شیارهای افقـی بـه سیستم اهرم بندی اجازه باز شدن را می‌دهند. شتاب به سـمت بالای اتاقک را بر حسب h به ازای مقدار معلوم M تعیین کنید. از جرم لینک‌ها صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۱۵۸-۶

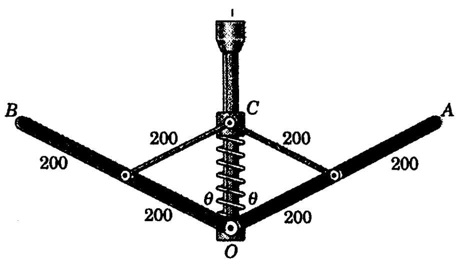
۶-۱۵۹ اتاقک و بار یک کامیون کمپرسـی دارای جـرم m با مرکز جرم G بوده و ممان اینرسی آن حول لولای A برابر I_A است. اگر موقعی که اتـاقک از حـالت سـکون در موقعیت نشان داده شده بر اثر کوپل M که به لینک CD اعمال می‌گردد، شروع به حرکت نماید؛ شتاب زاویه‌ای α آنرا تعییـن کنیـد. از جرم لینک‌ها صرفنظر کنید.

جواب $$\alpha=\frac{[M-mg(b\cos\theta-a\sin\theta)]}{I_A}$$



شکل مسئله ۱۵۹-۶

۶-۱۶۰ هـر یـک از میلـه‌های یکنواخـت OA و OB دارای جرم ۲ kg بوده و آزادانه در O به محور قائمی که به آن شتاب رو بـه بـالای $a=g/2$ داده شـده لـولا گردیـده اسـت. لینک‌هایی که طوقه سبک C را به میله‌ها متصل کرده‌اند، دارای جرم ناچیزی بوده و طوقه آزادانه بر روی شافت می‌لغـزد. فـنر دارای سـختی $k=130$ N/m اسـت و در موقعـی کـه $\theta=0$ است، فشردگی ندارد. زاویه θ بین میله‌ها را در شـرایط شـتاب پایا حساب کنید.

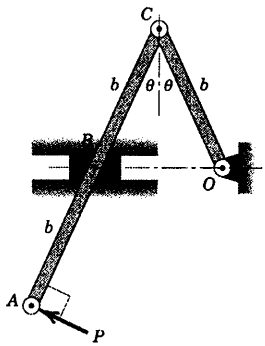


ابعاد بر حسب میلیمتر

شکل مسئله ۱۶۰-۶

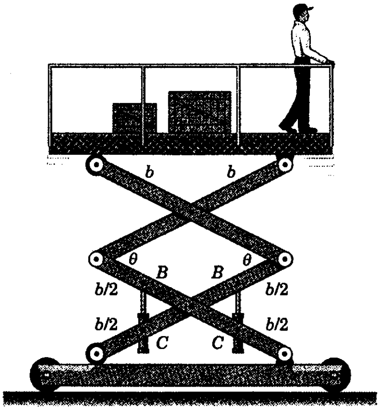
۶-۱۶۱ اهرم بندی از دو میله باریک تشکیل شده و تحت تاثیر نیروی P در صفحه افقی حرکت می‌کند. لینک OC دارای جرم m و لینک AC دارای جرم $2m$ است. جرم لغزنده B ناچیز است. بدون جداسازی سیستم، شتاب زاویه‌ای α لینک‌ها را هنگامیکه P بر A اعمال می‌شود، در حالی که لینک‌ها ابتدا در حال سکون هستند، تعیین کنید. (*پیشنهاد:* نیروی P را با سیستم نیرو ـ کوپل معادل آن جایگزین کنید).

جواب
$$\alpha = \frac{P\left(2\cos^2\theta + 1\right)}{mb\left(8\cos^2\theta + 1\right)}$$



شکل مسئله ۱۶۱-۶

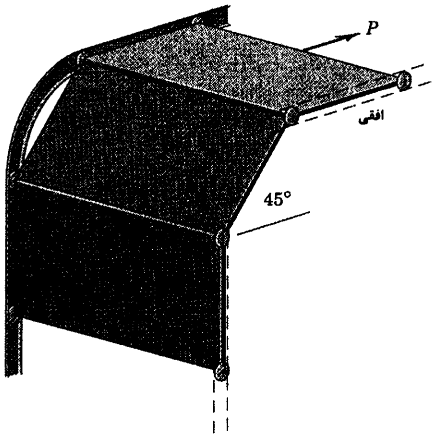
۶-۱۶۲ سکوی کار متحرکی توسط دو سیلندر هیدرولیکی مفصل شده در نقاط C بالا می‌رود. فشار در هر سیلندر نیروی F را ایجاد می‌کند. سکو، مرد و بار مجموعاً دارای جرم m بوده و جرم اهرم بندی ناچیز است و می‌توان از آن صرفنظر کرد. شتاب a سکو به طرف بالا را تعیین نموده و نشان دهید که مستقل از b و θ می‌باشد.



شکل مسئله ۱۶۲-۶

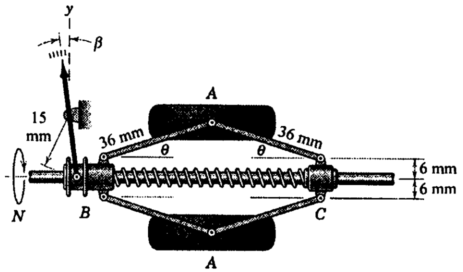
۶-۱۶۳ جرم هر یک از سه صفحه یکسان و یکنواخت درب یک کارگاه صنعتی m بوده و از مسیر نشان داده شده (خط چین) هدایت می‌گردند، شتاب افقی a صفحه بالایی را تحت تاثیر نیروی P تعیین کنید. از هرگونه اصطکاک در غلتک‌های راهنما صرفنظر کنید.

جواب
$$a = \frac{3}{8}\left(\frac{P}{m} - \frac{3g}{2}\right)$$



شکل مسئله ۱۶۳-۶

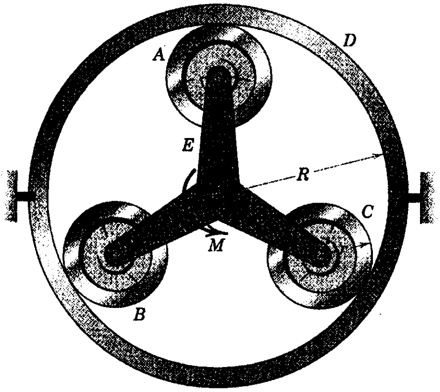
۶-۱۶۴ دورسنج مکانیکی با سرعت دورانی N یک شافت را توسط حرکت افقی طوقه B در امتداد شافت دورا اندازه می‌گیرد. این حرکت بر اثر عمل گریز از مرکز دو وزنه ۳۵۰ گرمی A که همراه با شافت می‌چرخند، ایجاد می‌شود. طوقه C به شافت ثابت شده است. سرعت دورانی N محور را در $\beta = ۱۵^\circ$ تعیین کنید. سختی فنر برابر ۹۰۰ N/m بوده و در $\theta = ۰$ و $\beta = ۰$ فشردگی ندارد. از وزن لینک‌ها صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۱۶۴-۶

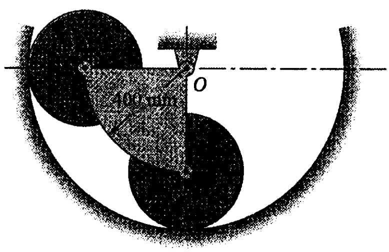
۶-۱۶۵ شکل، یک جعبه دنده خورشیدی را نمایش می‌دهد که دندانه‌های آن در شکل نشان داده نشده‌اند. هر یک از سه چرخ دنده یکسان A، B و C دارای جرم ۰/۸ kg، شعاع $r = ۵۰$ mm و شعاع ژیراسیون ۳۰ mm حول مرکز خود می‌باشد. جرم بازوی سه شاخه‌ای E برابر ۱/۲ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول O ۶۰ mm است. چرخ‌دنده حلقوی D دارای شعاع $R = ۱۵۰$ mm و ثابت است. اگر گشتاور $M = ۵$ N.m بر شافت بازوی سه شاخه در O وارد گردد، شتاب زاویه‌ای اولیه α سه شاخه را تعیین کنید.

جواب $\alpha = ۱۳۵/۳\ \text{rad/s}^2$



شکل مسئله ۱۶۵-۶

۶-۱۶۶ قطاع و چرخهای متصل به آن از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده در صفحه قائم رها می‌گردند. هر چرخ، دیسک مدور توپری به جرم ۵ kg است که بر روی مسیر دایره‌ای ثابت بدون لغزش می‌غلتد. جرم قطاع ۸ kg بوده و تقریبا یک چهارم دیسک توپر به شعاع ۴۰۰ mm است. شتاب زاویه‌ای اولیه α قطاع را تعیین کنید.

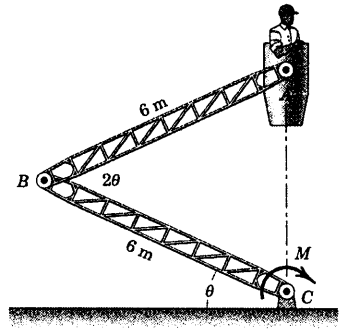


شکل مسئله ۱۶۶-۶

۶-۱۶۷ برج هوایی نشان داده شده برای بالا بردن یک کارگر در جهت قائم طراحی شده است. مکانیزم داخلی واقع در B زاویه AB و BC را دو برابر زاویه θ بین BC و زمین نگه می‌دارد. اگر مجموع جرم کارگر و اتاقک ۲۰۰ kg بوده و از کلیه جرمهای دیگر صرفنظر شود، گشتاور اعمال شده به BC در C و گشتاور M_B وارد بر مفصل B را چنان تعیین کنید که موقعی که اتاقک از حالت سکون در موقعیت $\theta = ۳۰^\circ$ شروع به حرکت می‌کند، به آن شتاب اولیه قائم ۱/۲ m/s^2 داده شود.

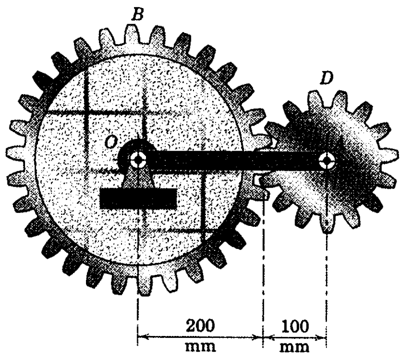
جواب M_B = ۱۱/٤٤ kN.m

M = ۰



شکل مسئله ۶-۱۶۷

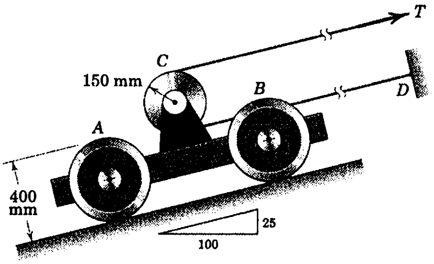
۶-۱۶۸ جرم بازوی یکنواخت OA برابر ٤ kg و چرخ دنده D دارای جرم ۵ kg و شعاع ژیراسیون ٦٤ mm حول مرکزش می‌باشد. چرخ دنده بزرگ ثابت است و نمی‌تواند دوران کند. اگر بازو و چرخ دنده کوچک از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده در صفحه قائم رها گردند، شتاب زاویه‌ای اولیه α بازوی OA را حساب کنید.



شکل مسئله ۶-۱۶۸

۶-۱۶۹ وسیله نقلیه برای انتقال کالا به بالا و پایین یک سطح شیبدار ۲۵ درصد به کار می‌رود . هر جفت از چرخ‌ها یکی در A و دیگری در B دارای جرم ۱٤۰ kg و شعاع ژیراسیون ۱۵۰ mm است. طبلک C دارای جرم ٤۰ kg و شعاع ژیراسیون ۱۰۰ mm می‌باشد. مجموع جرم وسیله نقلیه ۵۲۰ kg است. وسیله نقلیه از حالت سکون در شرایطی رها می‌شود که نیروی T به مقدار ۵۰۰ N بر کابل کنترلی که دور طبلک پیچیده و در D مفصل شده است، وارد می‌گردد. شتاب اولیه a وسیله نقلیه را تعیین کنید. چرخ‌ها بدون لغزش می‌غلتند.

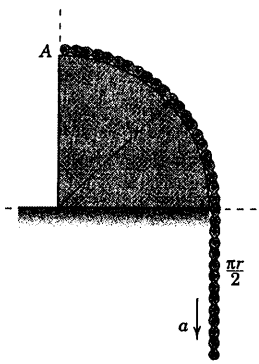
جواب a = ۰/۳٤۱ m/s^2



شکل مسئله ۶-۱۶۹

۶-۱۷۰ ◀ زنجیری به طول کل πr و جرم بر واحد طول ρ در صفحه قائم روی یک ربع دایره ثابت قرار گرفته در حالی که در ابتدا، انتهای بالایی آن به نقطه A متصل است. اگر ناگهان گیره اتصال رها شود، شتاب اولیه a زنجیر را تعیین کنید. فرض کنید سطح به اندازه کافی صیقلی است، بطوریکه از اصطکاک می‌توان صرفنظر کرد.

جواب $a = \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\right) g$



شکل مسئله ۶-۱۷۰

بخش C ـ ضربه و مومنتم

۶-۸ معادلات ضربه ـ مومنتم

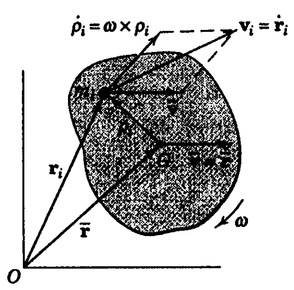
اصول ضربه و مومنتم در بخش ۳-۹ و ۳-۱۰ در توصیف حرکت ذره طرح و مورد استفاده قرار گرفت. در بخش مزبور ملاحظه کردیم وقتی که نیروهای اعمال شده بر حسب تابعی از زمان بیان شوند یا هنگامیکه بین ذرات در فاصله کوتاهی از زمان فعل و انفعالاتی نظیر برخورد رخ دهد، این اصول اهمیت ویژه‌ای می‌یابند. نتایج مشابهی نیز وقتی که اصول ضربه و مومنتم در مورد حرکت جسم صلب بکار می‌روند، بدست می‌آید.

در بخش ۴-۲ اصول ضربه ـ مومنتم برای هر سیستم مشخصی از ذرات جرم تعمیم داده شدند، بدون آنکه هیچگونه محدودیتی در مورد اتصالات بین ذرات سیستم در نظر گرفته شود. همه این روابط تعمیم یافته، برای حرکت جسم صلب بکار می‌رود که تنها حالت خاصی از سیستم کلی جرم است. اکنون این روابط را مستقیماً برای حرکت جسم صلب در دو بعد بکار خواهیم برد.

مومنتم خطی

در بخش ۴-٤ مومنتم خطی یک سیستم جرم را تعریف کردیم که عبارت بود از حاصل جمع برداری مومنتم خطی کلیه ذرات آن و چنین نوشته می‌شد $\mathbf{G}=\Sigma m_i\mathbf{v}_i$. اگر $\mathbf{r}_i$ نشانگر بردار موقعیت m_i باشد، داریم: $\mathbf{v}_i=\dot{\mathbf{r}}_i$ و $\mathbf{G}=\Sigma m_i\dot{\mathbf{r}}_i$ که برای سیستمی که جرم کل آن ثابت باشد می‌توان نوشت $\mathbf{G}=\dfrac{d\Sigma m_i\mathbf{r}_i}{dt}$. چنانچه از اصل گشتاورها استفاده کنیم، یعنی $m\bar{\mathbf{r}}=\Sigma m_i\mathbf{r}_i$، مومنتم به این صورت می‌گردد $\mathbf{G}=\dfrac{d(m\bar{\mathbf{r}})}{dt}=m\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ که در آن $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ سرعت $\bar{\mathbf{v}}$ مرکز جرم است. بنابراین مطابق قبل، ملاحظه می‌کنیم که مومنتم خطی هر سیستم جرم اعم از صلب یا غیر صلب برابر است با:

$$\boxed{\mathbf{G}=m\bar{\mathbf{v}}} \qquad [٤-٥]$$



شکل ۱۳-۶

در بدست آوردن معادله ٤-٥ متوجه شدیم که نیازی به استفاده از شرط سینماتیکی برای جسم صلب که در شکل ۱۳-۶ یا رابطه $\mathbf{v}_i=\bar{\mathbf{v}}+\omega\times\rho_i$ نشان داده شده است، نیست. در این حالت همان نتیجه را با نوشتن $\mathbf{G}=\Sigma m_i\left(\bar{\mathbf{v}}+\omega\times\rho_i\right)$ بدست می‌آوریم. مجموع اول برابر است با $\bar{\mathbf{v}}\Sigma m_i=m\bar{\mathbf{v}}$ و مجموع دوم برابر $\omega\times\Sigma m_i\rho_i=\omega\times m\bar{\rho}=\mathbf{0}$ می‌گردد. زیرا ρ_i از مرکز جرم اندازه گرفته می‌شود و در نتیجه $\bar{\rho}$ صفر می‌گردد.

در بخش ٤-٤ قانون دوم عمومی نیوتن را در قالب معادله ٦-٤ بیان کردیم. این معادله و شکل انتگرالی آن عبارتند از:

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}} \quad \text{و} \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \Sigma \mathbf{F}\, dt = \mathbf{G}_2 - \mathbf{G}_1} \qquad (٦-١٢)$$

رابطه ١٢-٦ را می‌توان به شکل مولفه‌های اسکالر آن نوشت که برای حرکت در صفحه x-y چنین می‌گردد.

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma F_x &= \dot{G}_x \\ \Sigma F_y &= \dot{G}_y \end{aligned}} \quad \text{و} \quad \boxed{\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\, dt &= G_{x_2} - G_{x_1} \\ \int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_y\, dt &= G_{y_2} - G_{y_1} \end{aligned}} \qquad (٦-١٢a)$$

به عبارت دیگر معادلات اول روابط ١٢-٦ و١٢a-٦ نشان می‌دهند که نیروی برآیند برابر با میزان تغییر مومنتم نسبت به زمان است. شکل انتگرالی معادلات ١٢-٦ و١٢a-٦ بیانگر آن است که ضربه خطی وارد به جسم در طی مدت زمان $t_2 - t_1$ معادل تغییر متناظر در مومنتم خطی است.

روابط ضربه ـ مومنتم را می‌توان به شکل دیگری نظیر معادلات ٢٣a-٣ نوشت که در آن ترتیب جملات متناظر با ترتیب طبیعی رویدادهاست. همان فرمولبندی که در مورد نیرو ـ جرم ـ شتاب صورت گرفت، جمع نیروها در معادلات ١٢-٦ و ١٢a-٦ باید *شامل* تمام نیروهای خارجی که بر جسم مورد نظر، اثر می‌کنند، باشد. بنابراین تاکید می‌کنیم که در استفاده از روابط ضربه ـ مومنتم، لازم است ترسیمه آزاد جسم به طور کامل رسم شود تا کلیه نیروهایی که در جمع بندی نیرو حضور دارند نشان داده شوند. برخلاف روش کار ـ انرژی، کلیه نیروها خواه کار انجام دهند یا خیر، ایجاد ضربه می‌کنند.

مومنتم زاویه‌ای

مومنتم زاویه‌ای به صورت گشتاور مومنتم خطی تعریف می‌شود. در بخش ٤-٤ مومنتم زاویه‌ای حول مرکز جرم برای هر سیستم جرمی به صورت $\mathbf{H}_G = \Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{v}_i$ بیان شد که صرفاً بیانگر مجموع برداری گشتاورهای مومنتم خطی کلیه ذرات حول مرکز جرم G مجموعه می‌باشد. در بخش ٤-٤ نشان دادیم که این مجموعه برداری را می‌توان به صورت $\mathbf{H}_G = \Sigma \boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ نیز نوشت که در آن $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ سرعت m_i نسبت به G است.

اگر چه این عبارت را در بخش ٢-٦ هنگام بدست آوردن رابطه گشتاور حرکت ساده کردیم، اما برای تاکید، یک بار دیگر آن را با استفاده از جسم صلب در حرکت صفحه‌ای که در شکل ١٣-٦ نشان داده شد، بیان می‌کنیم. سرعت نسبی به صورت $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_i$ در می‌آید که در آن سرعت زاویه‌ای جسم برابر $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{k}$ می‌باشد. بردار یکه $\mathbf{k}$ در جهت نشان داده شده برای $\boldsymbol{\omega}$ به سمت داخل کاغذ می‌باشد. چون $\boldsymbol{\rho}_i$، $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ و $\boldsymbol{\omega}$ عمود بر یکدیگر می‌باشند، مقدار $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ برابر $\rho_i \omega$ بوده، و مقدار $\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ برابر $\rho_i^2 \omega m_i$ است. بنابراین می‌توان نوشت $\mathbf{H}_G = \Sigma \rho_i^2 m_i \omega \mathbf{k} = \bar{I} \omega \mathbf{k}$، که در آن $\bar{I} = \Sigma m_i \rho_i^2$ ممان اینرسی جرم جسم حول مرکز جرمش می‌باشد.

چون بردار مومنتم زاویه‌ای همواره بر صفحه حرکت عمود است، استفاده از نماد برداری معمولاً ضرورتی نداشته و می‌توان مومنتم زاویه‌ای حول مرکز جرم را به صورت اسکالر زیر نوشت:

$$\boxed{H_G = \bar{I}\omega} \tag{۶-۱۳}$$

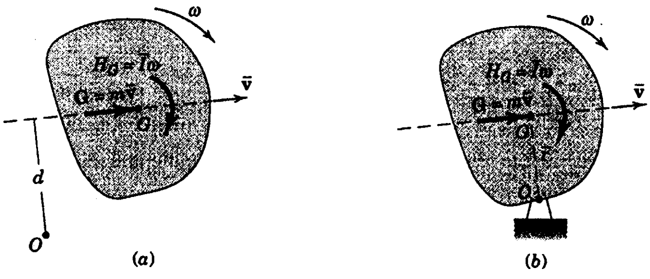
مومنتم زاویه‌ای فوق در رابطه گشتاور ـ مومنتم زاویه‌ای یعنی رابطه ۹-۴ ظاهر می‌گردد که شکل اسکالر آن برای حرکت صفحه‌ای به همراه رابطه انتگرالی آن چنین بیان می‌شود:

$$\boxed{\Sigma M_G = \dot{H}_G} \quad \text{و} \quad \boxed{\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_G \, dt = H_{G_2} - H_{G_1}} \tag{۶-۱۴}$$

اولین رابطه ۱۴-۶ بیانگر آن است که گشتاور *کلیه* نیروهای وارد بر جسم حول مرکز جرم مساوی با میزان تغییر مومنتم زاویه‌ای حول مرکز جرم نسبت به زمان می‌باشد. شکل انتگرالی رابطه ۱۴-۶ بیانگر آن است که ضربه زاویه‌ای کلیه نیروهای وارد بر جسم حول مرکز جرم در خلال مدت $t_2 - t_1$ برابر تغییر متناظر مومنتم زاویه‌ای حول G است.

دوباره، همانند حالت خطی، روابط ضربه زاویه‌ای و مومنتم زاویه‌ای را می‌توان به صورت دیگری هم ارز با معادلات ۲۹a-۳ نوشت. جهت مثبت دوران را باید به وضوح مشخص نمود و علائم جبری ΣM_G، H_{G_2} و H_{G_1} را باید با جهت انتخابی مزبور تطابق داد. ضمناً رسم ترسیمه آزاد نیز ضروری است.

با توجه به اینکه رابطه $H_G = \bar{I}\omega$ گشتاور مومنتم خطی کلیه ذرات را حول مرکز جرم G بدست می‌آورد، بنابراین می‌توان مومنتم خطی $\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$ را به صورت بردار گذرنده از مرکز جرم G همانطور که در شکل۱۴a-۶ نشان داده شده است، نمایش داد. بنابراین، خواص برداری $\mathbf{G}$ و $\mathbf{H}_G$ همانند خواص برداری نیروی برآیند و کوپل برآیند، می‌باشد.



شکل ۱۴-۶

با تثبیت برآیند مومنتم خطی و مومنتم زاویه‌ای مطابق شکل ۱۴a-۶ که ترسیمه مومنتم را نشان می‌دهد، مومنتم زاویه‌ای H_O حول هر نقطه‌ای مانند O به سادگی چنین نوشته می‌شود.

$$\boxed{H_O = \bar{I}\omega + m\bar{v}d} \tag{۶-۱۵}$$

رابطه فوق در هر لحظه خاص از زمان حول O صادق است که O می‌تواند نقطه‌ای ثابت یا متحرک، بر روی جسم و یا خارج از آن قرار داشته باشد.

مطابق شکل۱٤b-٦ اگر جسمی حول نقطه ثابتO روی جسم (یا امتداد جسم) دوران کند، روابط $\bar{v}=\bar{r}\omega$ و $d=\bar{r}$ را می‌توان در عبارت مربوط به H_O جایگزین نمود و چنین نتیجه گرفت $H_O=\bar{I}\omega+m\bar{r}^2\omega$. اما از آنجا که $\bar{I}+m\bar{r}^2=I_O$ است پس:

$$\boxed{H_O=I_O\,\omega} \tag{٦-١٦}$$

در بخش ۲-٤ رابطه گشتاور ۷-٤ را بدست آوردیم که رابطه گشتاور ـ مومنتم زاویه‌ای حول نقطه ثابتO بود. این رابطه در شکل اسکالر و انتگرال گیری شده‌اش برای حرکت صفحه‌ای چنین نوشته می‌شود.

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\Sigma M_O\,dt=I_O(\omega_2-\omega_1)} \quad \text{و} \quad \boxed{\Sigma M_O=I_O\dot{\omega}} \tag{٦-١٧}$$

هنگامیکه معادلات ضربه ـ مومنتم خطی و زاویه‌ای را برای حرکت جسم صلب بکار می‌بریم، برای اینکه جمع بندی نیروها و گشتاورها به درستی ارزیابی گردد، علاوه بر رسم کامل ترسیمه آزاد جسم، رسم ترسیمه مومنتم که نشان دهنده برآیند بردار مومنتم خطی و کوپل مومنتم زاویه‌ای است، خالی از فایده نخواهد بود. توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم، همانطور که نیرو و گشتاور را نمی‌توان مستقیماً با هم جمع کرد؛ در اینجا نیز مومنتم خطی و مومنتم زاویه‌ای را نمی‌توان مستقیم با هم جمع نمود.

اجسام صلب متصل به هم

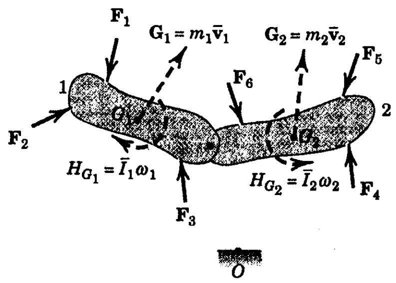
معادلات ضربه و مومنتم را می‌توان برای سیستم اجسام صلب متصل به هم نیز بکار برد. زیرا اصول مومنتم برای هر سیستم کلی با جرم ثابت قابل استفاده است. در شکل ١٥-٦ ترکیبی از ترسیمه آزاد جسم و ترسیمه مومنتم برای دو جسم متصل به هم نشان داده شده است. معادلات ٦-٤ و ۷-٤ یعنی $\Sigma\mathbf{F}=\dot{\mathbf{G}}$و $\Sigma\mathbf{M}_O=\dot{\mathbf{H}}_O$ که در آنهاO نقطه مرجع ثابتی است را می‌توان برای هر عضو از سیستم نوشته و جمع کرد. دو مجموع حاصله چنین خواهد شد:

$$\begin{aligned}\Sigma\mathbf{F}&=\dot{\mathbf{G}}_1+\dot{\mathbf{G}}_2+\cdots\\ \Sigma\mathbf{M}_O&=\dot{\mathbf{H}}_{O_1}+\dot{\mathbf{H}}_{O_2}+\cdots\end{aligned} \tag{٦-١٨}$$

در شکل انتگرالی، برای یک فاصله زمانی محدود روابط فوق عبارتند از:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Sigma\mathbf{M}_O\,dt=(\Delta\mathbf{H}_O)_{\text{سیستم}} \qquad \int_{t_1}^{t_2}\Sigma\mathbf{F}\,dt=(\Delta\mathbf{G})_{\text{سیستم}} \tag{٦-١٩}$$

توجه داشته باشید که در اتصالات نیروهای عمل و عکس العمل که مساوی و در خلاف جهت هم هستند برای سیستم، نیروی داخلی محسوب شده و هر یک دیگری را خنثی می‌کند. همچنین توجه کنید که نقطه O یک نقطه مرجع ثابت برای کل سیستم است.



شکل ۱۵-۶

بقای مومنتم

در بخش ٥-٤، اصول بقاء مومنتم برای سیستم کلی جرم توسط معادلات ١٥-٤ و ١٦-٤ بیان شد. این اصول برای هر جسم صلب منفرد یا سیستم اجسام صلب متصل به هم مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین، اگر $\Sigma \mathbf{F} = \mathbf{0}$ برای برهه‌ای از زمان باشد، آنگاه:

$$\boxed{\Delta \mathbf{G} = \mathbf{0}} \qquad [٤-١٥]$$

رابطه فوق بیانگر این نکته است که در غیاب هر گونه ضربه خطی برآیند، مومنتم خطی هیچگونه تغییری نمی‌کند. برای سیستم اجسام صلب متصل به هم، ممکن است مومنتم زاویه‌ای قسمت‌های جداگانه سیستم در برهه‌ای از زمان تغییر نماید، اما به شرط فقدان ضربه خطی برآیند، مومنتم برآیند برای سیستم تغییر نخواهد کرد.

به طور مشابه اگر برای یک جسم صلب و یا برای سیستم اجسام صلب متصل به هم، در خلال مدت زمانی خاص گشتاور برآیند حول نقطه ثابت معین O یا حول مرکز جرم صفر باشد، نتیجه می‌شود که:

$$\boxed{\Delta \mathbf{H}_G = \mathbf{0}} \quad \text{یا} \quad \boxed{\Delta \mathbf{H}_O = \mathbf{0}} \qquad [٤-١٦]$$

رابطه فوق بیانگر این نکته است که در غیاب هرگونه ضربه زاویه‌ای برآیند، مومنتم زاویه‌ای حول نقطه ثابت O و یا حول مرکز جرم هیچگونه تغییری نمی‌کند. مجدداً برای سیستم اجسام صلب متصل به هم، ممکن است مومنتم زاویه‌ای قسمت‌های جداگانه سیستم در برهه‌ای از زمان تغییر نماید، اما به شرط فقدان ضربه زاویه‌ای حول نقطه ثابت یا مرکز جرم، مومنتم زاویه‌ای برآیند تغییر نخواهد کرد. هر یک از روابط ١٦-٤ می‌توانند به تنهایی بدون نیاز به تصدیق دیگری، صادق باشند.

در مورد سیستم اجسام متصل به هم استفاده از مرکز جرم سیستم معمولاً انتخاب مناسبی نیست.

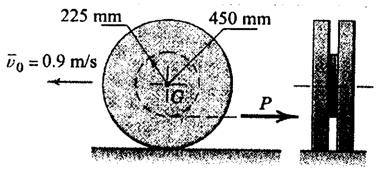
همانطور که قبلاً در بخشهای ۹-۳ و ۱۰-۳ در فصل حرکت ذره عنوان شد، استفاده از اصول مومنتم در تحلیل مسائلی که در آنها اعمال نیرو و گشتاور برای مدت کوتاهی از زمان برقرار است، تسهیلات زیادی را فراهم می‌سازد.

برخورد اجسام صلب

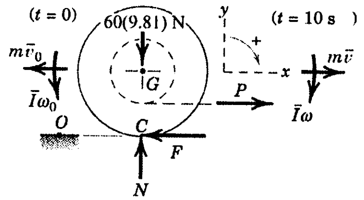
برخورد پدیده‌ای حاصل از یک ارتباط داخلی پیچیده بین انتقال انرژی و مومنتم، اتلاف انرژی، تغییر شکل الاستیک و پلاستیک، سرعت نسبی برخورد و شکل هندسی جسم است. در بخش ۱۲-۳ برخورد اجسام را به مثابه ذرات، مدل سازی کردیم و تنها حالت برخورد مرکزی را در نظر گرفتیم که در آن نیروهای تماسی برخورد از مراکز جرمهای اجسام عبور می‌کنند، مثلاً در برخورد گوی‌های صیقلی همواره حالت فوق رخ می‌دهد. برای ارتباط دادن شرایط بعد از برخورد به شرایط قبل از آن لازم است که ضریب بازگشت e یا ضریب برخورد را تعریف کنیم که سرعت نسبی وارهی را با سرعت نسبی همرسی در امتداد نیروهای تماسی مقایسه می‌کند. اگرچه در تئوری کلاسیک برخورد، ضریبe برای هر ماده ثابت فرض شده اما تحقیقات جدید نشان می‌دهد که e به همان اندازه که به جنس مواد بستگی دارد، بستگی زیادی به شکل هندسی جسم و سرعت برخورد نیز دارد. حتی در مورد گوی‌ها و میله‌هایی که برخوردشان از نوع مستقیم مرکزی یا طولی است، ضریب بازگشت پارامتری پیچیده و متغیر با کاربرد محدود می‌باشد.

هر تلاشی برای تعمیم نظریه ساده شده برخورد که از ضریب بازگشت برای برخورد غیر مرکزی اجسام صلب با شکل‌های متغیر استفاده کند، ساده اندیشی‌ای بیش از حد بوده و ارزش علمی ناچیزی دارد. به همین دلیل، علیرغم آن که این نظریه را می‌توان به آسانی طرح کرد و در بعضی مراجع نیز این کار صورت گرفته است، در این کتاب گنجانده نشده است. با این حال، می‌توانیم از اصول بقاء مومنتم خطی و زاویه‌ای در جاهایی که بحث برخورد و دیگر برهم کنشهای اجسام صلب مطرح باشد، از آنها استفاده کامل بنماییم.

مسئله نمونه ۱۴-۶



نیروی P که به کابل پیچیده شده به دور توپی مرکزی یک چرخ متقارن وارد می‌شود، طبق رابطه $P=$ ۶/۵t به تدریج افزایش می‌یابد که در آن P بر حسب پوند و t زمان اعمال نیرو بر حسب ثانیه است. اگر چرخ در حالی که سرعت مرکز آن در $t=$ ۰ برابر ۰/۹ m/s به سمت چپ بغلتد، سرعت زاویه‌ای ω آن را ۱۰ ثانیه پس از اعمال نیروی P تعیین کنید. چرخ دارای جرم ۶۰ kg و شعاع ژیراسیون ۲۵۰ mm حول مرکز خود، بدون لغزش می‌غلتد.



حل: ترسیمه آزاد چرخ برای یک موقعیت دلخواه طی حرکت مذکور نشان داده شده است. همچنین مومنتم‌های خطی و زاویه‌ای اولیه در لحظه $t=$ ۰ و مومنتم‌های خطی و زاویه‌ای نهایی در لحظه $t=$ ۱۰ s مشخص شده‌اند. جهت صحیح نیروی اصطکاک F به نحوی است که با لغزشی که بدون اصطکاک رخ می‌دهد، مخالفت می‌کند. ❶

با بکارگیری روابط ضربه ـ مومنتم خطی و رابطه ضربه ـ مومنتم زاویه‌ای برای کل زمان حرکت داریم:

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \Sigma F_x\, dt = G_{x_2} - G_{x_1}\right] \qquad \int_0^{10}(6.5t - F)dt = 60[0.450\omega - (-0.9)]$$ ❷

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_G\, dt = H_{G_2} - H_{G_1}\right]$$ ❸

$$\int_0^{10}[0.450F - 0.225(6.5t)]dt = 60(0.250)^2\left[\omega - \left(-\frac{0.9}{0.450}\right)\right]$$

چون نیروی F متغیر است، باید داخل انتگرال باقی بماند. با ضرب کردن معادله دوم در ۰/۴۵۰ و جمع آن با معادله اول، F بین دو رابطه حذف می‌گردد. با انتگرال گیری و حل معادله برای ω خواهیم داشت:

جواب $\omega = 2.60$ rad/s در جهت ساعتگرد

راه حل دیگر: با بکارگیری معادله دوم رابطه ۱۷-۶ حول نقطه ثابت O بر روی سطح افقی می‌توانستیم از لزوم حل همزمان معادلات اجتناب نماییم. گشتاورهای وزن (۹/۸۱)۶۰ نیوتنی و نیروی مساوی و مخالف آن N یکدیگر را خنثی کرده و F نیز حذف می‌گردد، زیرا گشتاورش حول O برابر صفر است. بنابراین مومنتم زاویه‌ای حول O برابر می‌گردد با: $H_O = \bar{I}\omega + m\bar{v}r = m\bar{k}^2\omega + mr^2\omega = m\left(\bar{k}^2 + r^2\right)\omega$، که در آن $\bar{k}$ شعاع ژیراسیون حول مرکز جرم بوده و r شعاع چرخش برابر ۱۸ in است. بنابراین، ملاحظه می‌شود که $H_O = H_C$ است. زیرا $\bar{k}^2 + r^2 = k_C^2$ و $H_C = I_C\omega = mk_C^2\omega$ است.

اکنون از رابطه ۱۷-۶ نتیجه می‌گیریم:

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O\, dt = H_{O_2} - H_{O_1}\right]$$

$$\int_0^{10} 6.5t(0.450 - 0.225)dt = 60\left[(0.250)^2 + (0.450)^2\right]\left[\omega - \left(-\frac{0.9}{0.450}\right)\right]$$

حل این معادله، معادل حل همزمان دو معادله قبلی است.

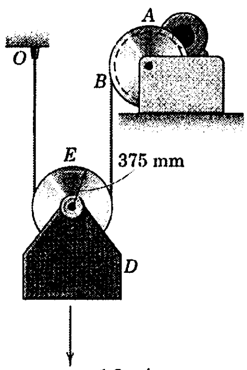
نکات مفید

❶ همچنین توجه داریم که عدم تعادل گشتاورها در جهت ساعتگرد حول C باعث می‌شود، هنگامی که چرخ بدون لغزش می‌غلتد، شتاب زاویه‌ای در جهت ساعتگرد داشته باشد. چون مجموع گشتاور حول G نیز باید در جهت ساعتگرد α باشد، نیروی اصطکاک باید به سمت چپ باشد.

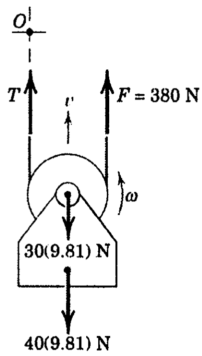
❷ دقیقا به علامت‌های جملات مومنتم توجه داشته باشید. سرعت خطی نهایی در جهت مثبت x فرض می‌شود. بنابراین G_{x_2} مثبت است. سرعت خطی اولیه منفی است، در نتیجه G_{x_1} منفی می‌گردد. وقتی جمله منفی را کم می‌کنیم، دو علامت منفی خواهیم داشت.

❸ چون چرخ بدون لغزش می‌غلتد، مثبت بودن سرعت در جهت x مستلزم سرعت زاویه‌ای در جهت ساعتگرد می‌باشد و بالعکس. مجددا یک کمیت منفی دیگر را کم می‌کنیم.

مسئله نمونه ۱۵-۶



قرقره بالابر E نشان داده شده، دارای جرمی برابر ۳۰ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول مرکزش برابر ۲۵۰ mm است. بار D به جرم ۴۰ kg که توسط این بالابر حمل می‌گردد در لحظه‌ای که سرعت اولیه‌اش به طرف پایین برابر $v_0 = ۱/۲$ m/s است، گشتاوری در جهت ساعتگرد بر طبلک بالابر A وارد می‌شود که باعث می‌شود نیروی ثابتی برابر $F = ۳۸۰$ N در کابل واقع در B بوجود آید. سرعت زاویه‌ای ω قرقره را ۵ ثانیه پس از اعمال گشتاور بر طبلک محاسبه نموده و کشش T کابل را در نقطه O در حین حرکت پیدا کنید. از کلیه اصطکاک‌ها صرفنظر کنید.



حل: بار و قرقره با هم تشکیل یک سیستم را داده و ترسیمه آزاد جسم آنها در شکل نشان داده شده است. کشش T کابل در نقطه O و سرعت زاویه‌ای نهایی ω قرقره دو مجهول مسئله‌اند. با استفاده از معادله گشتاور ـ مومنتم زاویه‌ای حول نقطه ثابت O، و با در نظر گرفتن جهت پادساعتگرد به عنوان جهت مثبت، T را حذف می‌کنیم.

$$\left[\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O \, dt = H_{O_2} - H_{O_1}\right]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \Sigma M_O dt = \int_0^5 [380(0.750) - (30+40)(9.81)(0.375)] dt$$

$$= 137.4 \text{ N.m.s}$$

$$\left(H_{O_2} - H_{O_1}\right)_D = m v_2 d - m v_1 d = md\,(v_2 - v_1)$$

$$= 40\,(0.375)\,[v - (-1.2)] = 15\,(0.375\,\omega + 1.2)$$

$$= 5.63\,\omega + 18 \text{ N.m.s}$$

❶

$$\left(H_{O_2} - H_{O_1}\right)_E = \bar{I}(\omega_2 - \omega_1) + md(\bar{v}_2 - \bar{v}_1)$$

$$= 30\,(0.250)^2\,[\omega - (-1.2/0.375)] + 30\,(0.375)\,[0.375\,\omega - (-1.2)]$$

$$= 6.09\,\omega + 19.50 \text{ N.m.s}$$

با جایگذاری در رابطه مومنتم نتیجه می‌شود:

$$137.4 = 5.63\,\omega + 18 + 6.09\,\omega + 19.50$$

جواب $\omega = 8.53$ rad/s پادساعتگرد

اکنون رابطه نیرو ـ مومنتم خطی را برای بدست آوردن T بکار می‌بریم. با در نظر گرفتن جهت مثبت در جهت رو به بالا، داریم:

$$\left[\int_{t_1}^{t_2}\Sigma F\,dt = G_2 - G_1\right] \qquad \int_0^5 [T + 380 - 70(9.81)]dt \qquad 70\,[0.375\,(8.53) - (-1.2)]$$

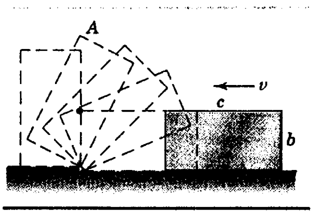
$$5T = 1841 \qquad T = 368\ \text{N}$$ جواب

اگر گشتاور را به جای نقطه O حول مرکز C قرقره می‌گرفتیم دو مجهول T و ω بوجود می‌آمد که برای بدست آوردن آنها مجبور بودیم آنرا هم زمان با معادله نیروی مذکور که آن هم دارای همان دو مجهول است، حل کنیم.

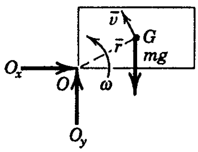
نکته مفید

❶ *به دو علامت منفی در تفریق یک کمیت منفی توجه کنید. همچنین، واحد مومنتم زاویه‌ای که با واحد ضربه زاویه‌ای یکی است را می‌توان به صورت* $kg.m^2/s$ *نوشت.*

مسئله نمونه ۱۶-۶



بلوک مکعب مستطیل یکنواخت نشان داده شده با سرعت v روی یک سطح افقی به سمت چپ در لغزش است که ناگهان با پله کوچکی واقع بر روی سطح برخورد می‌کند. از بازگشت بلوک در برخورد با پله صرف نظر نموده، حداقل سرعت v بلوک را چنان محاسبه کنید که بلوک حول لبه پله دوران کرده و با سرعت صفر به موقعیت ایستاده A برسد. درصد اتلاف انرژی $\Delta E/E$ را به ازای $b = c$ حساب کنید.



حل: فرض می‌شود که لبه پله O به عنوان یک لولا برای بلوک عمل می‌نماید در نتیجه، بلوک حول O دوران می‌کند. فرض می‌کنیم که ارتفاع پله در مقایسه با ابعاد بلوک قابل صرفنظر کردن باشد. در طی برخورد تنها نیرویی که حول O ایجاد گشتاور می‌کند، وزن mg است. اما ضربه زاویه‌ای ناشی از وزن فوق‌العاده کوچک می‌باشد، زیرا زمان برخورد ناچیز است.

❶ بنابراین می‌توانیم فرض کنیم که مومنتم زاویه‌ای حول O بقاء دارد.

❷ مومنتم زاویه‌ای اولیه بلوک حول O درست قبل از برخورد معادل گشتاور مومنتم خطی بوده و برابر $H_O = mv(b/2)$ است. سرعت مرکز جرم G بلافاصله پس از برخورد برابر $\bar{v}$ بوده، و سرعت زاویه‌ای بلوک برابر $\omega = \bar{v}/\bar{r}$ است. مومنتم زاویه‌ای O درست پس از برخورد در موقعی که بلوک حول O شروع به دوران می‌کند، برابر است با:

❸
$$[H_O = I_O\omega] \qquad H_O = \left\{\frac{1}{12}m(b^2 + c^2) + m\left[\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]\right\}\omega$$

$$= \frac{m}{3}(b^2 + c^2)\omega$$

از اصل بقای مومنتم زاویه‌ای نتیجه می‌شود که:

$$[\Delta H_O = 0] \qquad \frac{m}{3}\left(b^2 + c^2\right)\omega = m\upsilon\frac{b}{2} \qquad \omega = \frac{3\upsilon b}{2\left(b^2 + c^2\right)}$$

این سرعت زاویه‌ای برای بلند کردن بلوک و رساندن آن به موقعیت A کافی است به شرطی که انرژی جنبشی دورانی مساوی با افزایش انرژی پتانسیل گردد. بنابراین:

$$[\Delta T + \Delta V_g = 0] \qquad \frac{1}{2}I_O\omega^2 - mg\left[\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right] = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{m}{3}\left(b^2 + c^2\right)\left[\frac{3\upsilon b}{2\left(b^2 + c^2\right)}\right]^2 - \frac{mg}{2}\left(\sqrt{\left(b^2 + c^2\right)} - b\right) = 0$$

جواب $$\upsilon = 2\sqrt{\frac{g}{3}\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)\left(\sqrt{b^2 + c^2} - b\right)}$$

درصد اتلاف انرژی برابر است با:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\frac{1}{2}m\upsilon^2 - \frac{1}{2}I_O\omega^2}{\frac{1}{2}m\upsilon^2} = 1 - \frac{k_O^2\omega^2}{\upsilon^2} = 1 - \left(\frac{b^2 + c^2}{3}\right)\left[\frac{3b}{2\left(b^2 + c^2\right)}\right]^2$$

به ازای $b = c$ داریم:

جواب $$= 1 - \frac{3}{4\left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)} \qquad \Delta E/\Delta E = 62.5\%$$

نکات مفید

❶ اگر گوشه بلوک به جای برخورد با پله صلب، به فنری برخورد می‌کرد، زمان اندرکنش در طی فشرده شدن فنر قابل توجه می‌گشت و ضربه زاویه‌ای حول نقطه ثابت در انتهای فنر ناشی از گشتاور وزن به حساب می‌آمد.

❷ به تغییر ناگهانی امتداد و مقدار سرعت G در طی برخورد توجه کنید.

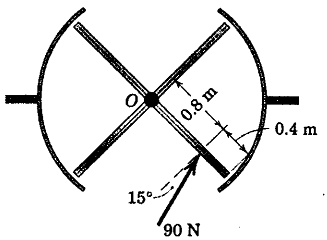
❸ مطمئن شوید که در اینجا از قضیه انتقال $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$ به درستی استفاده می‌کنید.

مسائل

مسائل مقدماتی

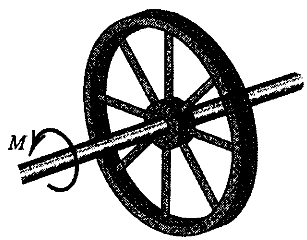
۶-۱۷۱ شخصی که می‌خواهد از یک درب گردان عبور کند، نیروی افقی ۹۰ N را بر یکی از صفحات درب وارد می‌کند. اگر هر یک از صفحات به صورت ورق مستطیل شکل یکنواختی شبیه سازی شود که ۶۰ kg جرم داشته و طول آن از نمای بالا ۱/۲ m باشد، شتاب زاویه‌ای درب را تعیین کنید. از اصطکاک صرفنظر کنید.

جواب $\alpha =$ ۰/۶۰۴ rad/s^2



شکل مسئله ۱۷۱-۶

۶-۱۷۲ چرخ طیار ۷۵ کیلوگرمی دارای شعاع ژیراسیونی برابر $\bar{k} =$ ۰/۵ m حول محور شافت خود بوده و به آن گشتاوری طبق رابطه $M =$ ۱۰(۱ − e^{-t}) N.m اعمال می‌گردد که در آن t بر حسب ثانیه است. اگر چرخ طیار در $t =$ ۰ در حال سکون باشد، سرعت زاویه‌ای ω آن را در $t =$ ۳ s تعیین کنید.



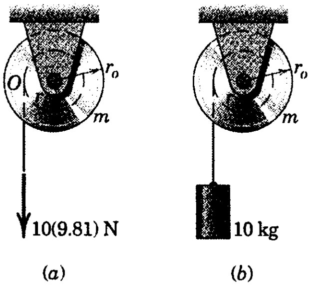
شکل مسئله ۱۷۲-۶

۶-۱۷۳ طبلک‌های شیاردار دو سیستم نشان داده شده یکسان هستند. در هر یک از حالات (a) و (b)، سیستم در لحظه $t =$ ۰ ساکن است. سرعت زاویه‌ای طبلک‌ها را در لحظه $t =$ ٤ s تعیین کنید. از اصطکاک مفصل O صرفنظر کنید.

جواب (a) $\omega =$ ۱۱۹/۰ rad/s و (b) $\omega =$ ۷۲/۰ rad/s

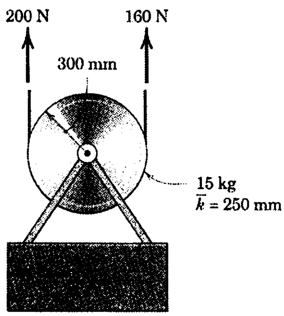
$m =$ ۱٤ kg و $\bar{k} =$ ۲۲۵ mm

$r_o =$ ۳۲۵ mm و $r_i =$ ۲۱۵ mm



شکل مسئله ۱۷۳-۶

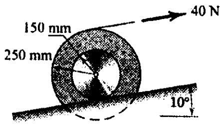
۶-۱۷٤ مطابق شکل کشش‌های ثابت ۲۰۰ N و ۱۶۰ N به کابل‌های بالابر وارد می‌شوند. اگر سرعت v بار برابر ۲ m/s به طرف پایین و سرعت زاویه ω قرقره ۸ rad/s در جهت پادساعتگرد در $t =$ ۰ باشد، v و ω را پس از ۵ ثانیه اعمال کشش در کابل‌ها بدست آورید. توجه کنید نتایج مستقل از یکدیگرند.



شکل مسئله ۱۷۴-۶

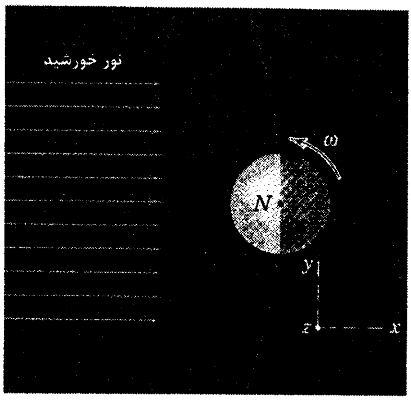
۶-۱۷۵ نیروی ثابت ۴۰ نیوتنی به استوانه لبه دار ۳۶ کیلوگرمی مطابق شکل وارد می‌گردد. شعاع ژیراسیون استوانه حول مرکز جرمش $\bar{k}$ = ۲۰۰ mm بوده و بر روی سطح شیبدار بدون لغزش می‌غلتد. اگر استوانه در ابتدای اعمال نیرو در حال سکون باشد، سرعت زاویه‌ای ω آن را ۸ ثانیه بعد تعیین کنید.

جواب ω = ۲۴/۲ rad/s CW



شکل مسئله ۱۷۵-۶

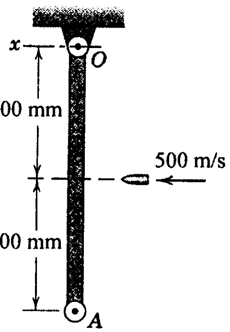
۶-۱۷۶ مومنتم زاویه‌ای زمین را حول مرکز خورشید تعیین کنید. فرض کنید زمین همگن بوده و شعاع مدار آن برابر km (10^6)۱۴۹/۶ است. از جدول پیوست D -۲ برای سایر اطلاعات مورد نیاز استفاده کنید. توضیحی در ارتباط با توزیع نسبی جملات $\bar{I}\omega$ و $m\bar{v}d$ بدهید.



شکل مسئله ۱۷۶-۶

۶-۱۷۷ گلوله ۳۰ گرمی با سرعت افقی ۵۰۰ m/s به میله باریک OA به جرم ۱۰ kg که از نقطه O آویزان شده و در ابتدا ساکن است، اصابت می‌کند. سرعت زاویه‌ای ω میله را بلافاصله پس از برخورد گلوله که در آن فرو نشسته، حساب کنید.

جواب ω = ۲/۸۱ rad/s

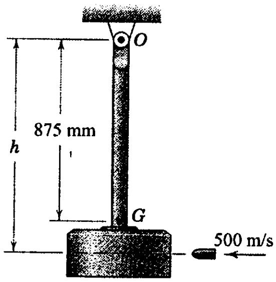


شکل مسئله ۱۷۷-۶

۶-۱۷۸ اگر گلوله مسئله ۱۷۷-۶ برای نفوذ در میله ۰/۰۰۱ s زمان لازم داشته باشد، متوسط زمانی نیروی افقی O_x را که توسط پین O در حین نفوذ گلوله در میله وارد می‌شود، حساب کنید. از نتایج مسئله ۱۷۷-۶ استفاده نمایید.

۶-۱۷۹ گلوله ۲۸ گرمی با سرعت افقی ۵۰۰ m/s به آونگ مرکب ۲۵ kg که دارای شعاع ژیراسیون k_O = ۹۲۵ mm است، اصابت می‌کند. اگر فاصله h = ۱۰۷۵ mm باشد، سرعت زاویه‌ای ω آونگ را بلافاصله پس از برخورد گلوله که در آن فرو نشسته، حساب کنید.

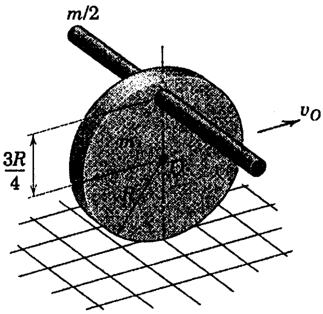
جواب ω = ۰/۷۰۳ rad/s



شکل مسئله ۱۷۹-۶

مسائل ویژه

۶-۱۸۰ استوانه مدور همگنی به جرم m و شعاع R میله باریکی به جرم $m/۲$ را که مطابق شکل به آن متصل شده، حمل می‌کند. اگر استوانه بدون لغزش با سرعت مرکزی v_O روی سطح بغلتد، مومنتم زاویه‌ای H_G و H_O سیستم را حول مرکز جرم G و حول O در لحظه نشان داده شده تعیین کنید.

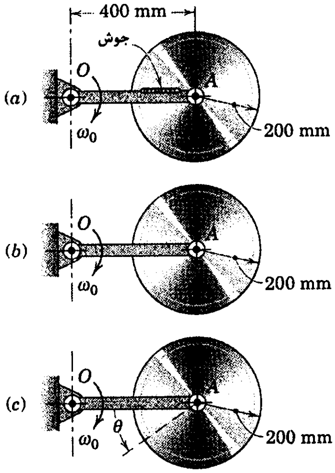


شکل مسئله ۱۸۰-۶

۶-۱۸۱ دیسک مدور یکنواختی به شعاع ۲۰۰ mm دارای جرم ۲۵ kg بوده و بر روی میله چرخان OA به سه طریق سوار شده است. در هر یک از حالات، میله با سرعت زاویه‌ای $\omega = ۴$ rad/s در جهت پادساعتگرد حول محور قائم خود در O دوران می‌کند. در حالت (a) دیسک به میله جوش شده است. در حالت (b) دیسک که به پین A آزادانه لولا شده است، حرکت انتقالی منحنی الخط داشته و بنابراین جسم صلب دوران ندارد. در حالت (c) زاویه نسبی بین دیسک و میله با میزان $\dot{\theta} = ۸$ rad/s افزایش می‌یابد. مومنتم زاویه‌ای دیسک حول نقطه O را در هر حالت حساب کنید.

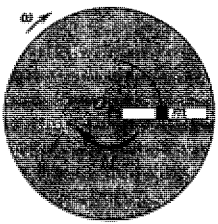
جواب (a) $H_O = ۱۸\ \text{kg.m}^2/\text{s}$

(b) $H_O = ۱۶\ \text{kg.m}^2/\text{s}$ و (c) $H_O = ۱۴\ \text{kg.m}^2/\text{s}$



شکل مسئله ۱۸۱-۶

۶-۱۸۲ قطعه کوچکی به جرم m در امتداد شیار شعاعی دیسکی که در صفحه افقی حول مرکز O خود دوران می‌کند، می‌لغزد. قطعه از حالت سکون نسبت به دیسک رها شده و با سرعت افزاینده $\dot{r}$ در امتداد شیار، هنگامیکه دیسک می‌چرخد، به طرف بیرون حرکت می‌کند. رابطه‌ای بر حسب r و $\dot{r}$ برای کوپل M که بایستی به دیسک اعمال گردد تا سرعت زاویه‌ای ω دیسک ثابت باقی بماند را تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۸۲-۶

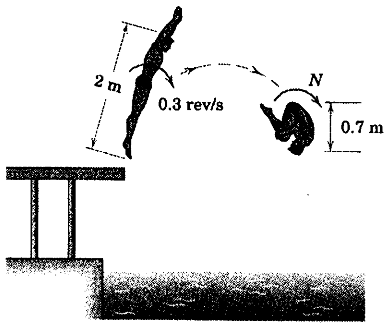
۶-۱۸۳ میله باریک یکنواختی به جرم M و طول L بر روی صفحه صیقلی افقی x-y با سرعت انتقالی v_M در حرکت است که ناگهان با ذره‌ای به جرم m که با سرعت v_m مطابق شکل در حال عبور است، اصابت می‌کند و ذره در میله فرو می‌نشیند. سرعت‌های زاویه‌ای و خطی میله را که ذره در آن فرو نشسته تعیین کنید.

جواب $v_x = \dfrac{Mv_M}{M+m}$ و $v_y = \dfrac{mv_m}{M+m}$

$$\omega = \frac{12 v_m}{L}\left(\frac{m}{4M+7m}\right) \quad \text{CCW}$$

شکل مسئله ۱۸۳-۶

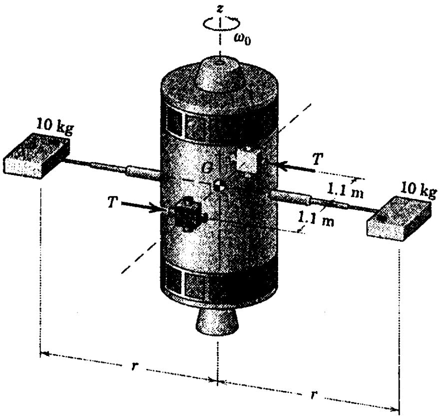
۶-۱۸۴ بلافاصله پس از جدا شدن از سکوی پرش، بدن کاملا کشیدهٔ شیرجه‌زنی به جرم ۸۰ kg دارای سرعت دورانی ۰/۳ rev/s حول محور عمود بر صفحه مسیرش می‌باشد. سرعت زاویه‌ای N شیرجه‌زن را، هنگام جمع کردن بدنش در حین شیرجه تعیین نمایید. فرض‌های متناسب برای ممان اینرسی جرم جسم در هر یک از حالات در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۱۸۴-۶

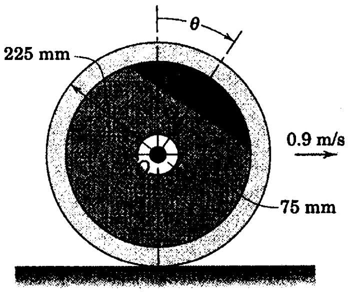
۶-۱۸۵ دو موتور جت کوچک با نیروی رانش متغیر با هم بکار می‌افتند تا سرعت زاویه‌ای فضاپیما را موقعی که دو بازوی تلسکوپی در مدت ۲ دقیقه با میزان ثابت از $r_1 = 1/2$ m به $r_2 = 4/5$ m افزایش طول می‌یابند، حول محور z برابر $\omega_0 = 1/25$ rad/s ثابت نگه دارد. در صورتی‌که حرکت بازوها در لحظه $t = 0$ شروع شود، نیروی رانش مورد نیاز T هر جت را به صورت تابعی از زمان تعیین کنید. مدولهای آزمایشی ۱۰ کیلوگرمی انتهای بازوها را می‌توان به مثابه ذره در نظر گرفت و از جرم بازوهای صلب صرفنظر نمود.

جواب $T = 0/750 + 0/01719t$ N



شکل مسئله ۱۸۵-۶

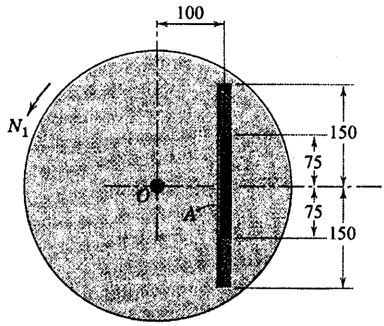
۶-۱۸۶ چرخ ناموزونی با سرعت ثابت ۰/۹ m/s بدون لغزش به طرف راست می‌غلتد. چرخ دارای جرم ۸ kg با مرکز جرم واقع در G بوده و شعاع ژیراسیون آن حول O برابر ۱۵۰ mm است. مومنتم زاویه‌ای H_O چرخ را حول O در لحظه (الف) موقعی که G مستقیما بالای O قرار دارد، یعنی در $\theta = 0$ و (ب) موقعی که G از خط افقی گذرنده از O عبور می‌کند، یعنی $\theta = 90°$ است، تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۸۶-۶

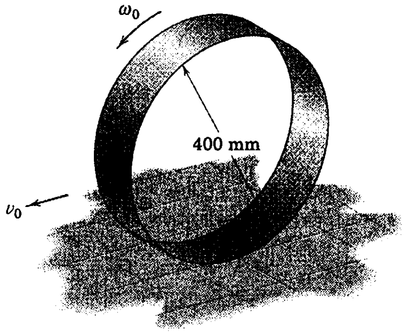
۱۸۷-۶ دیسک مدور شیاردار ۳/۶ کیلوگرمی دارای شعاع ژیراسیون ۱۵۰ mm حول مرکز O خود بوده و ابتدا آزادانه حول محور ثابت عمودی گذرنده از O با سرعت $N_1 = 600$ rev/min دوران می‌کند. میله باریک یکنواخت A به جرم ۰/۹ kg ابتدا در موقعیت نشان داده شده در وسط شیار نسبت به دیسک در حال سکون است. اغتشاش کوچکی باعث می‌شود که میله به انتهای شیار بلغزد و در آنجا به حالت سکون نسبت به دیسک قرار گیرد. سرعت زاویه‌ای جدید N_2 دیسک را با این فرض که در یاتاقان شافت O اصطکاکی وجود ندارد، حساب کنید. آیا وجود اصطکاک در شیار اثری در نتیجه نهایی دارد؟

جواب $N_2 = 569$ rev/min



شکل مسئله ۱۸۷-۶

۱۸۸-۶ پوسته استوانه‌ای به قطر ۴۰۰ mm و جرم m که حول محور مرکزی افقی خود با سرعت زاویه‌ای $\omega_0 = 30$ rad/s دوران می‌کند، بدون آنکه مرکزش دارای سرعتی باشد ($v_0 = 0$)، روی سطح افقی رها می‌شود. اگر لغزش بین پوسته و سطح به مدت ۱/۵ s به طول انجامد، ضریب اصطکاکی سینتیکی μ_k و ماکزیمم سرعت v مرکز پوسته که به آن دست می‌یابد را بدست آورید.



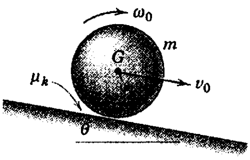
شکل مسئله ۱۸۸-۶

۱۸۹-۶ گوی همگنی به جرم m و شعاع r با سرعت اولیه v_0 بدون سرعت زاویه‌ای ($\omega_0 = 0$) در امتداد شیبی با زاویه θ پرتاب می‌شود. اگر ضریب اصطکاک سینتیکی برابر μ_k باشد، مدت زمان t تداوم لغزش را تعیین کنید. به علاوه سرعت v مرکز جرم G و سرعت زاویه‌ای ω گوی را در انتهای دوره لغزش بدست آورید.

جواب

$$t = \frac{2v_0}{g(7\mu_k \cos\theta - 2\sin\theta)}$$

$$v = \frac{5v_0\mu_k}{7\mu_k - 2\tan\theta} \quad \text{و} \quad \omega = \frac{5v_0\mu_k/r}{7\mu_k - 2\tan\theta}$$



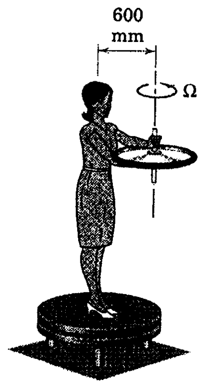
شکل مسئله ۱۸۹-۶

۱۹۰-۶ گوی همگن مسئله ۱۸۹-۶ با سرعت زاویه‌ای ω_0 در جهت ساعتگرد بدون سرعت خطی مرکزی ($v_0 = 0$) بر روی سطح شیبدار قرار داده می‌شود. مدت زمان t تداوم لغزش را تعیین کنید. به علاوه سرعت v و سرعت زاویه‌ای ω آن را در انتهای دوره لغزش به دست آورید.

۱۹۱-۶ یک استاد درس دینامیک به جرم ۵۵ kg، اصول مومنتم زاویه‌ای را برای کلاسش تشریح می‌کند. او روی صفحه دواری به نحوی که بدنش بر محور قائم صفحه منطبق

است، می‌ایستد. موقعی که صفحه دوران نمی‌کند، او چرخ دسته دار دوچرخه‌ای را به طوری که محورش عمودی است، در دست می‌گیرد. سپس با چرخاندن چرخ، محور آن را به حالت افقی در می‌آورد. بدون اینکه فاصله ۶۰۰ میلی‌متری خط مرکزی بدن او با مرکز چرخ تغییر کند. دانشجویان مشاهده می‌کنند که صفحه با میزان ۳۰ rev/min به دوران در می‌آید. اگر طوقه چرخ دارای جرم ۱۰ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول مرکزش $\bar{k}$ =۳۰۰ mm و سرعت دوران آن ثابت و برابر ۲۵۰ rev/min باشد، ممان اینرسی جرم I استاد (در وضعیت نشان داده شده) را حول محور عمودی صفحه تعیین کنید.

جواب I = ۳/۴۵ kg·m^2

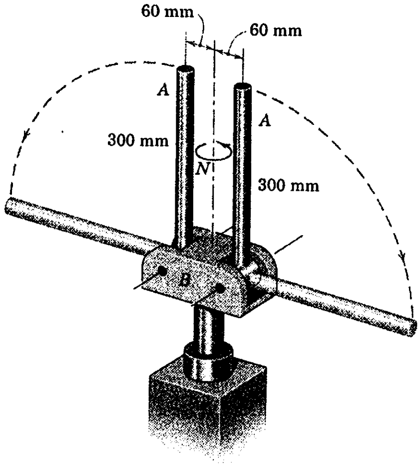


شکل مسئله ۱۹۱-۶

۱۹۲-۶ اگر استاد درس دینامیک مسئله ۱۹۱-۶ جهت محور چرخ را °۱۸۰ نسبت به موقعیت اولیه عمودی‌اش تغییر دهد، چه سرعت دورانی N را دانشجویان ملاحظه خواهند نمود؟ از کلیه اطلاعات داده شده و جواب بدست آمده از مسئله ۱۹۱-۶ می‌توان استفاده کرد.

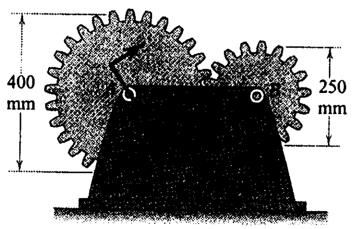
۱۹۳-۶ هر یک از دو میله یکنواخت A به طول ۳۰۰ mm دارای جرم ۱/۵ kg بوده و انتهای آنها به پایه چرخان B لولا شده است. پایه ۴ کیلوگرمی دارای شعاع ژیراسیون ۴۰ mm بوده و در ابتدا آزادانه حول محور قائم خود با سرعت ۳۰۰ rev/min در حالیکه میله‌ها در موقعیت‌های قائم نگهداشته شده‌اند، دوران می‌کند. اگر میله‌ها آزاد شده و به موقعیت‌های خطچین برسند، سرعت دورانی جدید N مجموعه را حساب کنید.

جواب N = ۳۲/۰ rev/min



شکل مسئله ۱۹۳-۶

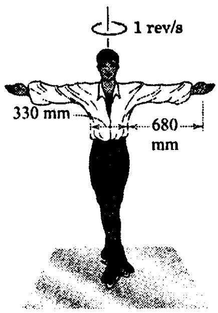
۱۹۴-۶ با توجه به اینکه چرخ‌دنده‌ها در ابتدا در سکون بوده و کوپل M صفر است، نیروهای اعمال شده توسط قاب بر محورهای چرخ‌دنده‌های A و B به ترتیب ۱۲۰ و ۶۴ نیوتن و به طرف بالا می‌باشد تا وزن دو چرخ‌دنده را تحمل نماید. حال کوپل M = ۶/۸ N.m به چرخ‌دنده بزرگتر از طریق محور A اعمال می‌گردد. پس از ۴ s، چرخ‌دنده بزرگتر مومنتم زاویه‌ای ۱۵ kg.m^2/s را در جهت ساعتگرد و چرخ‌دنده کوچکتر مومنتم زاویه‌ای ۵ kg.m^2/s در جهت پادساعتگرد پیدا می‌کنند. مقادیر جدید نیروهای R_A و R_B را که طی مدت ۴ s توسط قاب بر محورها وارد می‌شود، محاسبه کنید. دو چرخ‌دنده را با هم به صورت یک سیستم مجزا در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۱۹۴-۶

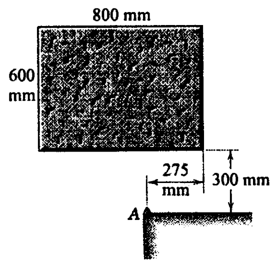
۶-۱۹۵ اسکیت باز روی یخ ۷۴ کیلوگرمی با دستهای باز حول محور قائم بـا سرعت دورانـی ۱ rev/s مـی‌چرخـد. سرعت دورانی N او را چنانچه دستهایش را کاملا جمع کند و در راستای محور مرکزی بدنش قرار دهد، تعیین کنید. به عنوان یک تقریب قابل قبول، دستهای باز شده را بـه مثابـه میلـه‌های باریک یکنواخت که هـر یـک دارای طـول ۶۸۰ mm و ۷ kg جرم می‌باشند، در نظر بگیرید. بدن او را به صورت یک استوانه تـوپـر بـه جـرم ۷۴ kg و قطـر ۳۳۰ mm در نظر بگیریـد. از اصطکاک بیـن اسـکیت و یـخ صرفنظـر کنیـد (شـخص را بـا بازوهای جمع شده‌اش مانند یک استوانه توپر به جرم ۶۰ kg و قطر ۳۳۰ mm در نظر بگیرید).

جواب $N = ٤/٨٩$ rev/s



شکل مسئله ۱۹۵-۶

۶-۱۹۶ بلوک بتنی یکنواختی که ۷۸ kg جـرم دارد، از حالت سکون در موقعیت افقی نشان داده شده رها مـی‌گردد و به لبه ثابت A اصابت می‌کند و بدون پس‌جهش حول لبه مزبور می‌چرخد. سرعت زاویه‌ای ω بلوک را بلافاصله پس از اصابت به لبه و درصد n اتلاف انـرژی ناشـی از برخـورد را محاسـبه کنید.



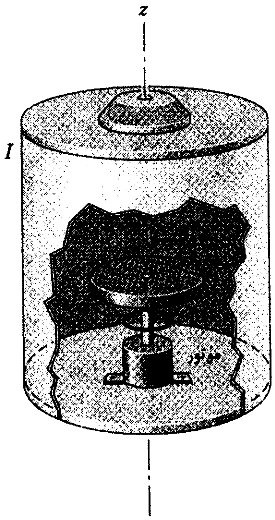
شکل مسئله ۱۹۶-۶

۶-۱۹۷ اجزای یک فضاپیما با تقارن محـوری جـرم و سیستم کنترل چرخ واکنشی آن، در شـکل نشـان داده شـده‌اند. موقعی که موتـور گشـتاوری بـر روی چـرخ واکنشـی اعمـال می‌کند، یک گشتاور مساوی و مخـالف آن بـر روی فضـاپیمـا اعمال می‌شود و به این ترتیب مومنتم زاویه‌ای آن را در جـهـت z تغییر می‌دهد. اگر کل اجزای سیستم از حالت سکون شـروع به حرکت نموده و موتور، گشـتاور ثـابت M را بـرای مـدت t اعمال نماید، سرعت زاویه‌ای نـهایی (الـف) فضـاپیمـا و (ب) چرخ نسبت به فضاپیما را تعیین کنید. ممان اینرسی جـرم کـل فضاپیما که شامل چرخ نیز می‌شود، حول محور z برابر I بـوده و برای چرخ به تنهایی برابر I_W می‌باشد. محور چرخش چـرخ بر محور تقارن z فضاپیما منطبق است.

جواب

(الف) $\omega_s = -\dfrac{Mt}{(I - I_w)}$

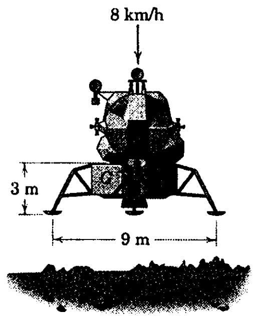
(ب) $\omega_{w/s} = \dfrac{I}{I_W}\dfrac{Mt}{(I - I_W)}$



شکل مسئله ۱۹۷-۶

۶-۱۹۸ مدول ماه نشینی ۱۷/۵ مگاگرمی با مرکـز جـرم G دارای شـعاع ژیراسـیون ۱/۸ m حـول G می‌باشـد. مـدول طوری طراحی شـده اسـت کـه بـا سـرعت سـقوط آزاد قـائم ۸ km/h در سطح ماه فرود آید. اگر یکی از چـهار پایـهٔ آن بـه ناهمواری کوچکی بر سطح ماه برخورد نماید، بدون آنکه پـس

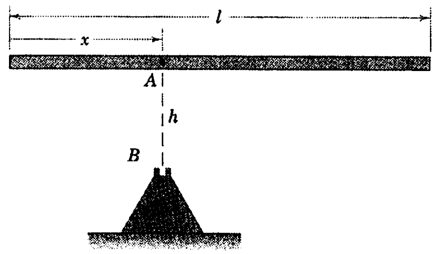
جهش داشته باشد، سرعت زاویه‌ای ω مدول را بلافاصله پس از برخورد، هنگامیکه حول نقطه برخورد می‌چرخد، حساب کنید. طول قطر مربعی که توسط لبه‌های چهار پایه تشکیل می‌شود، ۹ m است.



شکل مسئله ۱۹۸-۶

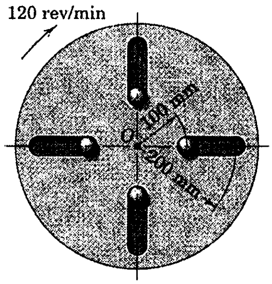
۱۹۹-۶ میله باریکی به جرم m و طول l از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده رها می‌گردد. اگر نقطه A میله پس از برخورد به لولای B متصل شود، سرعت زاویه‌ای ω میله را بلافاصله پس از برخورد بر حسب x تعیین کنید. رابطه بدست آمده را به ازای $x = ۰$، $l/۲$ و l ارزیابی کنید.

جواب
$$\omega = \frac{(l/2 - x)\sqrt{2gh}}{\left(\frac{1}{3}l^2 - lx + x^2\right)}$$



شکل مسئله ۱۹۹-۶

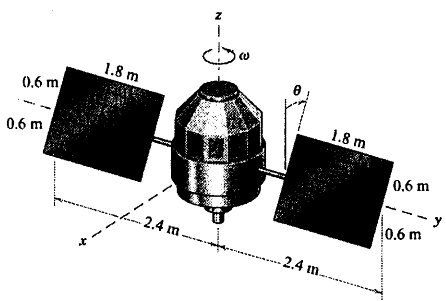
۲۰۰-۶ دیسک شیاردار مدوری به جرم ۶ kg دارای شعاع ژیراسیون ۱۷۵ mm حول O می‌باشد. دیسک، چهار گوی فولادی را که جرم هر کدام ۰/۱۵ kg می‌باشد و مطابق شکل در شیارهای دیسک تعبیه شده‌اند، با خود حمل کرده و آزادانه حول محور قائم گذرنده از O با سرعت زاویه‌ای ۱۲۰ rev/min دوران می‌کند. هر یک از گوی‌های کوچک توسط چفتی که نشان داده نشده، در جای خود نگه داشته شده‌اند. اگر گوی‌ها در حالی که دیسک با سرعت زاویه‌ای مذکور دوران می‌کند از حالت سکون نسبت به دیسک رها شده و در انتهای شیارها مجددا نسبت به دیسک به سکون برسند، سرعت زاویه‌ای ω جدید دیسک را محاسبه کنید. همچنین مقدار $|\Delta E|$ انرژی تلف شده ناشی از برخورد گوی‌ها با انتهای شیارها را پیدا کنید. از قطر گوی‌ها صرف‌نظر کرده و در مورد این تقریب بحث کنید.



شکل مسئله ۲۰۰-۶

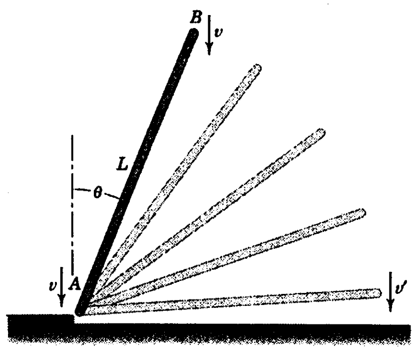
۲۰۱-۶ بدنه یک فضاپیما دارای جرمی برابر ۱۶۰ kg بوده و شعاع ژیراسیون آن حول محور z برابر ۰/۴۵ m است. هر یک از دو صفحه خورشیدی را می‌توان صفحه مسطح یکنواختی به وزن ۸ kg تلقی نمود. اگر فضاپیما حول محور z خود با سرعت زاویه‌ای ۱/۰ rad/s دوران نماید، سرعت زاویه‌ای ω آنرا پس از اینکه صفحه‌ها توسط یک مکانیزم داخلی به اندازه $\theta = \pi/۲$ چرخیدند، تعیین کنید. از تغییر کوچک مومنتم بدنه فضاپیما حول محور y صرفنظر کنید.

جواب $\omega = ۰/۹۷۴$ rad/s



شکل مسئله ۲۰۱-۶

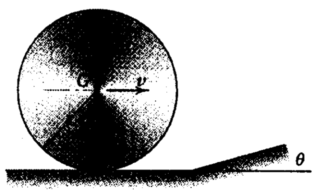
۶-۲۰۲ میله یکنواختی به طول L تحت زاویه θ نسبت به قائم رها گشته و هنگامیکه انتهای A آن به زمین اصابت می‌کند، سرعت هر دو انتهای آن برابر v می‌گردد. اگر انتهای A در خلال تغییر حرکت حول نقطه تماسش لولا شود، سرعت برخورد v' انتهای B با زمین را تعیین کنید.



شکل مسئله ۶-۲۰۲

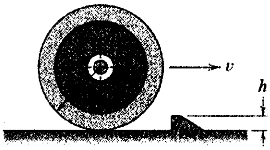
۶-۲۰۳ دیسک مدور یکنواختی که با سرعت v بدون لغزش در حال غلتش است، ناگهان به سطح شیبدار θ رسیده و امتداد حرکتش تغییر می‌کند. سرعت جدید مرکز دیسک v' را در آغاز بالا رفتن از سطح شیبدار تعیین کرده و کسر n از انرژی اولیه را که به علت برخورد با سطح شیبدار تلف می‌شود، به ازای $\theta = ۱۰^\circ$ پیدا کنید.

جواب $v' = v/۳(۱+۲\cos\theta)$ و $n = ۰/۰۲۰۲$



شکل مسئله ۶-۲۰۳

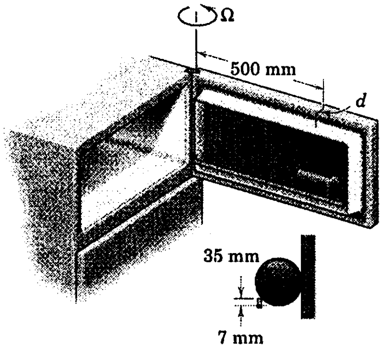
۶-۲۰۴ حداقل سرعت v که چرخ بایستی داشته باشد که بتواند فقط از مانع با غلتش بگذرد را تعیین کنید. شعاع ژیراسیون چرخ حول مرکزش k بوده و فرض می‌شود که چرخ نمی‌لغزد.



شکل مسئله ۶-۲۰۴

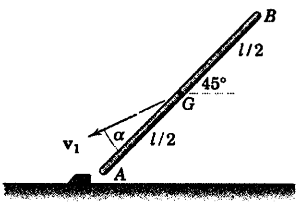
۶-۲۰۵ قوطی آب میوه یخ زده‌ای مطابق شکل به طور افقی بر روی قفسه افقی درب فریزری گذاشته شده است. حداکثر سرعت زاویه‌ای بسته شدن Ω درب را که در آن قوطی از جای خود به بیرون نیفتد، چقدر است؟ فرض کنید که قوطی بدون لغزش بر روی لبه قفسه می‌غلتد و از مقدار d در مقایسه با فاصله ۵۰۰ mm صرفنظر کنید.

جواب $\Omega = ۱/۱۳۵$ rad/s



شکل مسئله ۶-۲۰۵

۶-۲۰۶ میله باریک یکنواختی به جرم m و طول l بدون سرعت زاویه‌ای حرکت می‌کند تا موقعی که انتهای A آن به مانع کوچکی بر سطح زمین بدون واپس زدن اصابت می‌کند. اگر $\alpha = ۱۵^\circ$ باشد، حداقل مقدار سرعت اولیه $v_۱$ را که به ازای آن میله حول A دوران نموده و به موقعیت قائم می‌رسد، چقدر است؟



شکل مسئله ۶-۲۰۶

دوره فصل

در فصل ٦ از کلیه اصول و مباحث اساسی دینامیک که تا کنون مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند، استفاده کردیم. دریافتیم که شناخت سینماتیک چه در تحلیل حرکت مطلق و چه نسبی، یکی از بخش‌های اساسی در حل مسائل سینتیک جسم صلب است. روشی که در فصل ٦ استفاده کردیم، همانند فصل ۳ است که در مورد سینتیک ذرات با استفاده از روش‌های نیرو ـ جرم ـ شتاب، کار ـ انرژی و ضربه ـ مومنتم مطرح کردیم.

خلاصه زیر ملاحظات مهمی هستند که در حل مسائل جسم صلب در حرکت صفحه‌ای ما را کمک خواهند کرد.

۱- **مشخص نمودن جسم یا سیستم.** این نکته اساسی است که از جسم یا سیستمی که قرار است تحلیل شود، شناخت دقیقی داشته باشیم. سپس با جدا کردن جسم یا سیستم از محیط خود ترسیمه آزاد جسم، ترسیمه سینتیکی یا ترسیمه نیروهای فعال آن را به تناسب رسم نماییم.

۲- **نوع حرکت.** مرحله بعدی مشخص نمودن نوع حرکت است که مثلاً انتقال مستقیم الخط، انتقال منحنی الخط، دورانی حول محور ثابت یا حرکت کلی در صفحه می‌باشد. همواره در نظر داشته باشید که قبل از حل معادلات سینتیکی، سینماتیک مسئله را خوب تشریح کرده باشید.

۳- **دستگاه مختصات.** یک دستگاه مختصات مناسب را انتخاب نمایید. معمولاً هندسه حرکت خاص مورد نظر، عاملی تعیین کننده در این انتخاب است. برای مجموع‌های گشتاور و نیرو، جهت مثبت را مشخص نموده و آنها را با مختصات انتخابی مطابقت دهید.

٤- **اصل و روش.** اگر رابطه لحظه‌ای بین نیروهای بکار رفته و شتاب مد نظر است، هم ارزی بین نیروها و برآیند آنها یعنی $m\bar{a}$ و $\bar{I}\alpha$ که با ترسیمه آزاد و ترسیمه سینتیکی بیان می‌شوند، کوتاه‌ترین راه دستیابی به حل مسئله را نشان می‌دهد.

هنگامی که حرکت در برهه‌ای از جابجایی اتفاق می‌افتد، روش کار ـ انرژی مناسب بوده و سرعت‌های ابتدایی و نهایی را بدون محاسبه شتاب به هم مربوط می‌سازند. مزیت این روش برای سیستم‌های مکانیکی متصل به هم با صرفنظر کردن از اصطکاک داخلی را قبلاً ملاحظه کرده‌ایم.

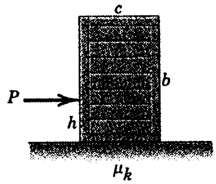
اگر برهه حرکت به جای جابجایی بر حسب زمان مشخص شده باشد، روش ضربه ـ مومنتم مناسب است. هنگامی که حرکت زاویه‌ای جسم صلب به طور ناگهانی تغییر کند، از اصل بقای مومنتم زاویه‌ای استفاده می‌کنیم.

۵- **فرضیات و تقریب‌ها.** تا کنون باید اهمیت عملی بعضی فرضیات و تقریب‌ها، مثل فرض کردن یک تیر به صورت یک میله باریک و صرفنظر کردن از اصطکاک در جایی که ناچیز باشد را درک کرده باشیم. این فرضیات و بسیاری ایده‌آل سازی‌های دیگر در فرآیند حل مسائل واقعی دارای اهمیت هستند.

مسائل دوره‌ای

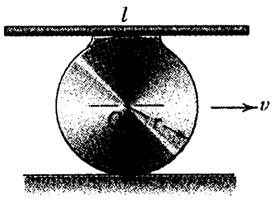
۶-۲۰۷ نیروی P به صندوقی یکنواخت به جرم m وارد می‌شود. اگر ضرایب اصطکاکی سینتیکی بین صندوق و سکوی افقی برابر μ_k باشد، حدود مقادیر h صندوق را طوری تعیین کنید که صندوق بدون چرخش حول لبه جلویی یا عقبی خود، روی سطح خواهد لغزید.

جواب
$$h_{min} = \frac{۱}{۲}\left[b - \frac{mg}{P}(c + \mu b)\right]$$
$$h_{max} = \frac{۱}{۲}\left[b + \frac{mg}{P}(c - \mu b)\right]$$



شکل مسئله ۶-۲۰۷

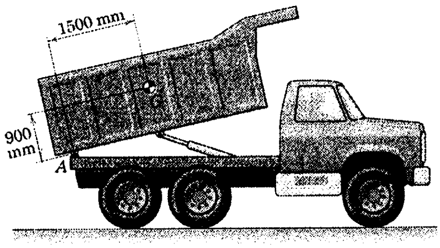
۶-۲۰۸ میله باریکی به جرم $m_۰$ و طول l در نقطه میانی خود به لبه دیسک مدور توپری به جرم m و شعاع r جوش شده است. در لحظه‌ای که A در بالای دیسک واقع شده و میله موازی سطح زمین است، مرکز دیسک که بدون لغزش می‌غلتد، دارای سرعت v می‌باشد. برای این لحظه مقدار مومنتم زاویه‌ای کل جسم را حول O تعیین کنید.



شکل مسئله ۶-۲۰۸

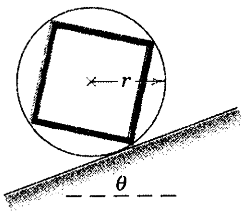
۶-۲۰۹ کامیون کمپرسی، ۵ m^3 زباله به چگالی ۱۶۰۰ kg/m^3 را حمل کرده و مکانیزم بالابرنده آن، اتاقک بار را حول لولای A با میزان زاویه‌ای ثابت ٤ deg/s می‌چرخاند. مرکز جرم بار اتاقک بار در نقطه G واقع است. حداکثر توان لازم P را در مدت تخلیه بار تعیین کنید.

جواب $P = ۸/۲۲$ kW



شکل مسئله ۶-۲۰۹

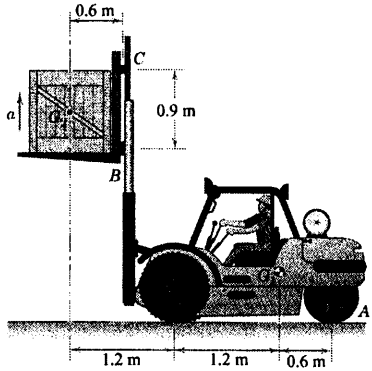
۶-۲۱۰ چهار میله باریک یکنواخت هر کدام به جرم m با جوش شدن به انتهای یکدیگر به شکل مربع درآمده و سپس گوشه‌های آن به داخل حلقه فلزی سبکی به شعاع r جوش داده شده‌اند. اگر مجموعه صلب میله‌ها و حلقه بر روی یک سطح شیبدار به طرف پایین بغلتد، حداقل مقدار ضریب اصطکاک استاتیکی را که از لغزش جلوگیری خواهد کرد، تعیین کنید.



شکل مسئله ۶-۲۱۰

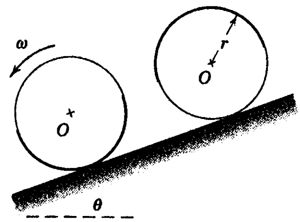
۶-۲۱۱ لیفتراکی به مرکز جرم $G_۱$ و تیرک عمودی آن مجموعاً ۱۶۰۰ kg جرم دارند. جرم سکوی بالابر و بار آن ۹۰۰ kg بوده و مرکز جرم آن در $G_۲$ واقع است. غلتک راهنمای B فقط قادر به تحمل نیروی افقی است، در حالی که اتصال C علاوه بر تحمل نیروی افقی، نیروی بالابرنده قائم لیفتراک را نیز منتقل می‌کند. اگر به سکوی بالابر شتاب به طرف بالا داده شود، بطوریکه باعث شود نیروی وارد از زمین بر چرخ‌های عقب A کاهش یافته و به صفر برسد، نیروی عکس العمل متناظر در B را حساب کنید.

جواب $B = ۱۰/٤٦$ kN



شکل مسئله ۲۱۱-۶

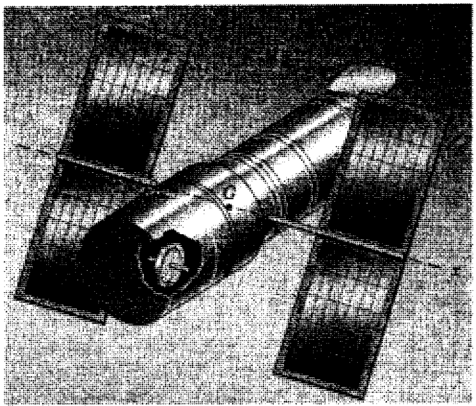
۲۱۲-۶ حلقه مدور سبکی به شعاع r نیم حلقه یکنواخت سنگینی به جرم m را که به محیط آن متصل شده، حمل کرده و از حالت سکون در موقعیت بالایی روی سطح شیبدار رها می‌گردد. پس از آنکه حلقه نیم دور غلتید، (الف) سرعت زاویه‌ای ω را تعیین کرده و (ب) نیروی قائم زیر حلقه N را چنانچه $\theta = ۱۰°$ باشد، پیدا کنید.



شکل مسئله ۲۱۲-۶

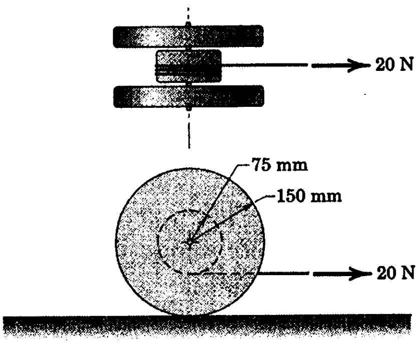
۲۱۳-۶ یک تلسکوپ فضایی در شکل نشان داده شده است. یکی از چرخ‌های عکس العملی سیستم کنترل وضعیت، مطابق شکل با سرعت ۱۰ rad/s می‌چرخد و در این سرعت، اصطکاک در یاتاقان چرخ باعث گشتاور داخلی $۱۰^{-۶}$ N·m می‌گردد. سرعت و گشتاور اصطکاکی را می‌توان برای چند ساعتی ثابت در نظر گرفت. اگر ممان اینرسی جرم کل فضاپیما حول محور x برابر $۱۵۰(۱۰^{۳})$ kg·m^2 باشد؛ چه مدت طول می‌کشد تا خط دید فضاپیما که در ابتدا ساکن بوده و به اندازه یک ثانیه قوس که معادل $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ درجه است، انحراف یابد. کلیه اجزاء نسبت به فضاپیما ثابت بوده و چرخ عکس العملی، هیچ گشتاوری برای تصحیح این انحراف از خود نشان نمی‌دهد. از گشتاورهای خارجی صرفنظر کنید.

جواب $t = ۱۲۰۶$ s



شکل مسئله ۲۱۳-۶

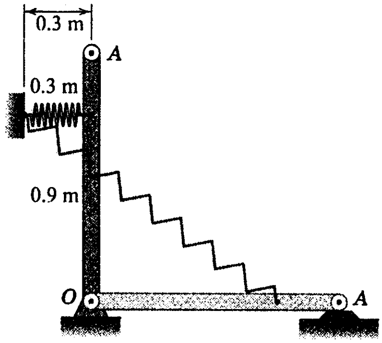
۲۱٤-٦ هر کدام از دو چرخ توپر دیسک مانند، دارای جرم ۲ kg و استوانه توپر میانی دارای جرم ۳ kg می‌باشد. دیسک‌ها و استوانه بر روی یک شافت کوچک طوری سوار شده‌اند که هر کدام می‌توانند مستقلاً با اصطکاک ناچیز در یاتاقانهای خود بچرخند. شتاب مرکز چرخ‌ها را موقعی که نیروی ۲۰ N مطابق شکل بر آنها وارد شود، حساب کنید. ضرایب اصطکاک بین چرخها و سطح افقی به ترتیب $\mu_s = ۰/٤۰$ و $\mu_k = ۰/۳۰$ می‌باشند.



شکل مسئله ۲۱۴-۶

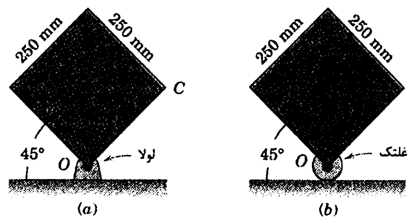
۶-۲۱۵ میله باریک یکنواختی به جرم ۳۰ kg از حالت سکون در موقعیت تقریباً قائم نشان داده شده که در آن فنر با سختی ۱۵۰ N/m بدون کشیدگی است، رها می‌گردد. سرعتی را که انتهای A به سطح افقی اصابت می‌کند، حساب کنید.

جواب $\quad v_A = ۳/۷۰$ m/s



شکل مسئله ۲۱۵-۶

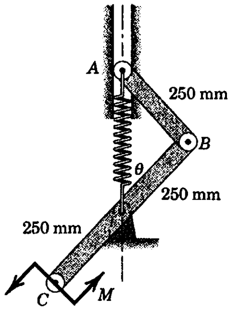
۶-۲۱۶ هر یک از دو بلوک مربعی شکل توپر از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده، با دوران در جهت ساعتگرد فرو می‌افتند. تکیه‌گاه O در حالت (a) یک لولا و در حالت (b) یک غلتک است. سرعت زاویه‌ای ω هر کدام از بلوک‌ها را موقعی که لبه OC آنها به حالت افقی، درست قبل از آنکه به سطح تکیه‌گاه اصابت کنند، تعیین کنید.



شکل مسئله ۲۱۶-۶

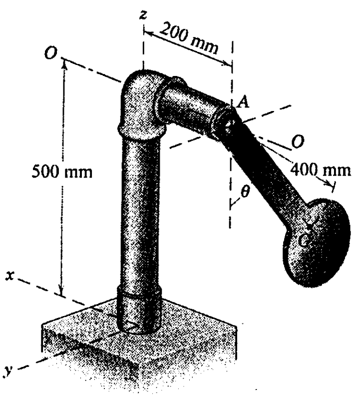
۶-۲۱۷ کوپل $M = ۱۲$ N.m بر نقطه C از مکانیزم فنر ـ لولایی که در موقعیت $\theta = ۴۵°$ در حالت سکون است، اعمال شده و شروع به حرکت می‌نماید. در این موقعیت، فنر که دارای سختی ۱۴۰ N/m است، ۱۵۰ mm کشیدگی دارد. جرم میله‌های AB برابر ۳ kg و BC برابر ۶ kg است. سرعت زاویه‌ای ω میله BC را در هنگام عبور از موقعیت $\theta = ۰$ تعیین کنید. حرکت در صفحه قائم بوده و اصطکاک قابل صرفنظر کردن است.

جواب $\quad \omega = ۴/۱۵$ rad/s



شکل مسئله ۲۱۷-۶

۶-۲۱۸ آونگ ۳ کیلوگرمی با مرکز جرم G در نقطه A به تکیه‌گاه ثابت CA لولا شده است. شعاع ژیراسیون آن حول محور O-O برابر ۴۲۵ mm بوده و با دامنه $\theta = ۶۰°$ نوسان می‌کند. در لحظه‌ای که آونگ در بالاترین موقعیت خود قرار می‌گیرد، گشتاورهای M_x، M_y و M_z وارده توسط پایه تکیه‌گاه را به ستون در نقطه C بدست آورید.

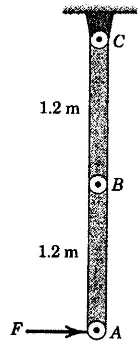


شکل مسئله ۲۱۸-۶

۶-۲۱۹ دو میله باریک هر یک به جرم ۴ kg در نقاط B مفصل و در نقطه C لولا شده‌اند. اگر ضربه افقی $\int F\,dt = ۱۴$ N.s به انتهای A میلهٔ پایینی در مدت زمان ۰/۱ s وارد شود که در این مدت اساساً میله‌ها در موقعیت‌های

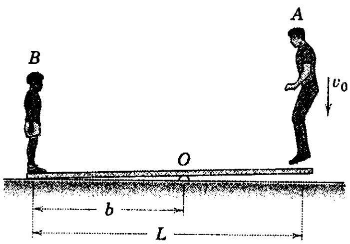
قائم خود ساکن باقی مانده‌اند، سرعت زاویه‌ای $\omega_۲$ میله بالایی را بلافاصله پس از ضربه محاسبه کنید.

جواب $\omega_۲ = ۲/۵۰ \text{ rad/s}$



شکل مسئله ۶-۲۱۹

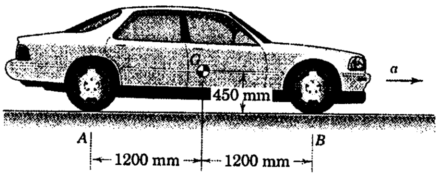
۶-۲۲۰ در یک شیرین‌کاری آکروباتی، مرد A به جرم m_A از روی سکوی بلندی با سرعت $v_۰$ بر انتهای یک تیر سبک ولی محکم می‌پرد. پسربچه به جرم m_B با سرعت v_B به طرف بالا پرتاب می‌شود. به ازای نسبت داده شده، $n = m_B/m_A$، فاصله b را بر حسب L طوری تعیین کنید که سرعت رو به بالای پسربچه حداکثر مقدار خود شود. فرض کنید مرد و پسربچه هر دو به صورت اجسام صلب عمل می‌کنند.



شکل مسئله ۶-۲۲۰

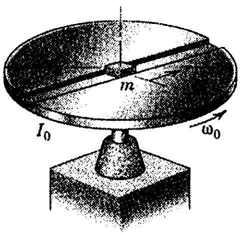
۶-۲۲۱ اتومبیلی به جرم ۱۶۰۰ kg و مرکز جرم واقع در G دارای چرخ‌های استاندارد محرک عقب است. ضریب اصطکاک موثر بین تایرها و جاده برابر ۰/۸۰ است. (الف) اتومبیل و چرخ‌های آن را به عنوان یک جسم صلب واحد در نظر گرفته و با صرفنظر کردن از اینرسی دورانی چرخ‌ها، حداکثر شتاب a اتومبیل را که به آن دست می‌یابد، حساب کنید. (ب) گشتاور M وارد بر هر چرخ، توسط محورش را محاسبه کنید. هر یک از چرخهای عقب دارای جرم ۳۲ kg و قطر ۶۲۰ mm و شعاع ژیراسیون ۲۱۰ mm است.

جواب $a = ۴/۶۲ \text{ m/s}^2$ و $M = ۱۱۶۶ \text{ N.m}$



شکل مسئله ۶-۲۲۱

۶-۲۲۲ قطعه کوچکی به جرم m داخل شیار صیقلی دیسکی که آزادانه روی تکیه‌گاهش می‌چرخد، می‌لغزد. اگر قطعه موقعی که سرعت زاویه‌ای دیسک برابر $\omega_۰$ است اندکی از موقعیت مرکزی خود جابجا شود، سرعت شعاعی v_r آن را به صورت تابعی از فاصله شعاعی r تعیین کنید. ممان اینرسی جرم دیسک حول محور دورانش برابر I_O است.



شکل مسئله ۶-۲۲۲

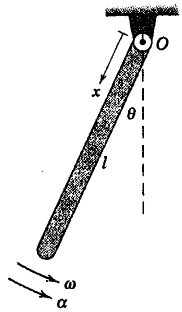
۶-۲۲۳ ◀ میله باریک یکنواختی به جرم m و طول l حول محور افقی گذرنده از O لولا شده و مانند یک آونگ مرکب در صفحه قائم نوسان می‌کند. اگر میله از حالت سکون در وضعیت افقی یعنی $\theta = ۹۰°$ رها گردد، رابطه‌ای برای کشش T ، نیروی برشی V و گشتاور خمشی M در میله بر حسب x ، برای موقعیت داده شده θ بنویسید. از کلیه اصطکاک‌ها صرفنظر کنید.

جواب

$$T = \frac{۵l^۲ - ۲lx - ۳x^۲}{۲l^۲} mg\cos\theta$$

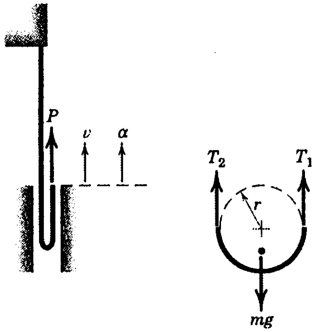
$$V = \frac{(l-x)(l-۳x)}{۴l^۲} mg\sin\theta$$

$$M = \frac{(l-x)^۲ x}{۴l^۲} mg\sin\theta$$



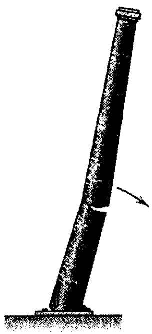
شکل مسئله ۲۲۳-۶

۶-۲۲۴ ◀ انتهای آزاد یک طناب انعطاف پذیر به جرم بر واحد طول ρ مطابق شکل بر اثر نیروی P به طرف بالا کشیده می‌شود. در لحظه مورد نظر شتاب انتهای آزاد طناب برابر a به طرف بالا و سرعت آن برابر v به طرف بالا می‌باشد. ثابت کنید در محدوده‌ای که اندازه حلقه بسیار کوچک می‌گردد، کشش‌های $T_۱$ و $T_۲$ طناب در دو طرف حلقه مساوی شده و برابر $\frac{۱}{۴}\rho v^۲$ می‌گردد. (تذکر: حلقه را به صورت یک حلقه نیم دایره توپر در نظر بگیرید که مطابق شکل به چرخ بدون جرم به شعاع r متصل است. سپس r را به صفر نزدیک کنید.)



شکل مسئله ۲۲۴-۶

۶-۲۲۵ ◀ یک دودکش، قبل از فرو ریختن (مطابق شکل) معمولاً در نقطه‌ای که گشتاور خمشی ماکزیمم است، تِرَک می‌خورد. نشان دهید که موقعیت گشتاور ماکزیمم یک دودکش باریک با سطح مقطع ثابت در مرکز ضربه نسبت به انتهای بالای آن است. از هرگونه گشتاور نگهدارنده پایه دودکش صرفنظر کنید.

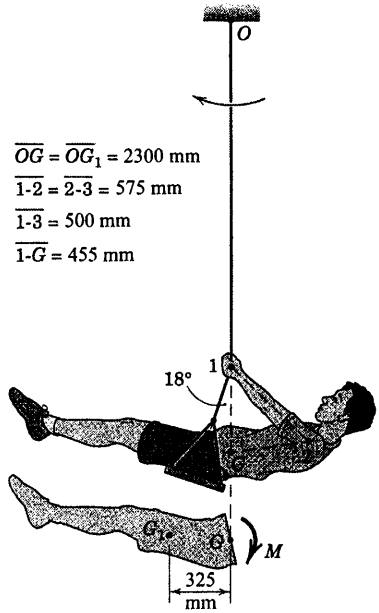


شکل مسئله ۲۲۵-۶

۶-۲۲۶ ◀ مرکز G شخص ۷۰ کیلوگرمی نشان داده شده، دارای سرعت ماکزیمم ٤ m/s در پایین‌ترین نقطه مسیر تاب می‌باشد. با استفاده از ابعاد داده شده، گشتاور خمشی M که توسط مهره کمر ستون فقرات شخص در این موقعیت تحمل می‌شود را حساب کنید. مهره میانی کمر و مرکز جرم بدن اساساً بر هم منطبق‌اند. مرکز جرم قسمت پایین بدن در موقعیت نشان داده شده $G_۱$ واقع است. فرض کنید که جرم قسمت‌های بالایی و پایینی بدن با هم برابر هستند. از هرگونه نیرویی که توسط اعضای نرم بدن در قسمت نیم تنه در G

وارد می‌شود، صرفنظر کنید. همچنین از جرم نشیمن‌گاه تاب و جرم دستهای شخص صرفنظر کنید.

جواب $M = ٥٨/٤$ N.m

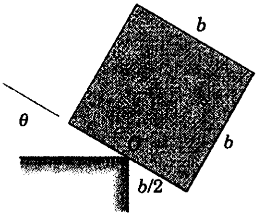


شکل مسئله ۲۲۶-۶

مسائل کامپیوتری

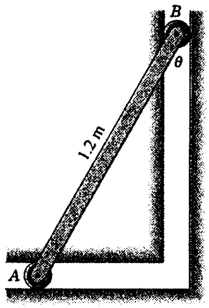
* ٦-۲۲۷ قطعه مکعبی همگنی بــه جــرم m از حــالت سکون در شرایطی که θ برابر صفر است، رها گشته و در نقطه میانی قاعده خود حول لبــه ثــابت O دوران می‌کنـد. نیروهــای عمودی ومماسی وارده از لبه به قطعه را بــه شــکل بــدون بعــد N/mg و F/mg به صــورت تــابعی از θ تعییــن و رســم کنیــد: (الف) اگر شکاف کوچکی در O از لغــزش قطعــه جلــوگیــری نماید، زاویــه θ را کــه بــه ازای آن تمــاس قطعــه بــا لبــه قطــع می‌گردد، تعیین کنید. (ب) با نبودن شکاف و با در نظر گرفتــن ضریب اصطکــاک استــاتیکی ۰/۸، زاویــه θ را کــه بــه ازای آن لغزش صورت می‌گیرد، تعیین کنید.

جواب (الف) $\theta = ٥٦/٩^\circ$ و (ب) $\theta = ٤٥/١^\circ$



شکل مسئله ۲۲۷-۶

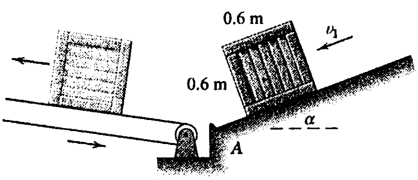
* ٦-۲۲۸ میله یکنواخت باریکی بــه طــول ۱/۲ m بــا غلتک‌های سبک انتهایی، از حالت ســکون در صفحــه قــائم در حالیکه θ اساساً صفر است، رها می‌گردد. سرعت انتــهای A را به صورت تابعی از θ تعیین و رسم کنید و سرعت مــاکزیمم A و زاویه θ متناظر آنرا پیدا کنید.



شکل مسئله ۲۲۸-۶

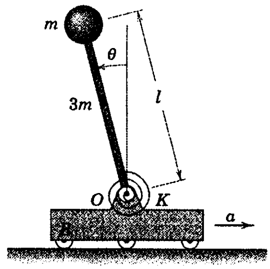
* ٦-۲۲۹ جعبه نشان داده شده با سرعت v_1 به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد و گوشه آن به مانع کوچکــی در A اصابت می‌کند. حداقل سرعت لازم v_1 را که بــاعث چرخــش جعبه حول A شده و آن را مطابق شکل بــر روی تــسمه نقالــه قــرار می‌دهــد، تعییــن کنیــد. تغییــرات v_1 بــا α را بــه ازای $۰ \leqslant \alpha \leqslant ٤٥^\circ$ رسم کنید.

جواب $v_1 = ۴/۷۱\sqrt{۱-\cos(۴۵^\circ-\alpha)}$ m/s



شکل مسئله ۲۲۹-۶

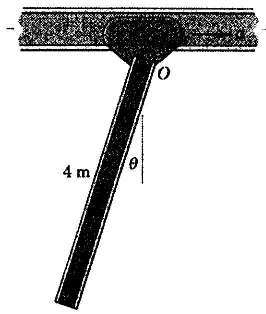
* ۶-۲۳۰ سیستم مسئله ۶-۱۸ در اینجا تکرار می‌شود. ارابه B با شتاب a=۲g به سمت راست در حرکت است. اگر m = ۰/۵ kg، l = ۰/۶ m و K = ۷۵ N.m/rad باشد، θ زاویه انحراف پایای میله باریک یکنواخت به جرم ۳m را تعیین کنید. گوی کوچک انتهای میله به جرم m را به صورت یک ذره تلقی کنید. فنر که گشتاوری به اندازه $M = K\theta$ به میله وارد می‌کند؛ در وضعیتی که میله قائم است، بدون تغییر شکل است.



شکل مسئله ۶-۲۳۰

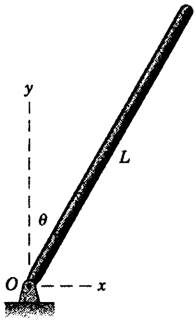
* ۶-۲۳۱ تیرآهن I شکل توسط جرثقیل سقفی حمل می‌گردد، در حالیکه در نقطه O به جرثقیل متصل شده است. اگر جرثقیل از حالت سکون وقتیکه $\theta = \dot{\theta} = 0$ با شتاب ثابت افقی a = ۲ m/s^2 شروع به حرکت می‌نماید، حداکثر مقدار $\dot{\theta}$ و θ را پیدا کنید. مقدار نوسان اولیه تیرآهن، یکی از موارد قابل ملاحظه ایمنی کارگاه می‌باشد.

جواب $\dot{\theta}_{max}$ = ۰/۳۸۹ rad/s و θ_{max} = ۲۳/۰°



شکل مسئله ۶-۲۳۱

* ۶-۲۳۲ دکل یکنواخت انتقال قدرت به جرم m و طول L که انتهای پایینی آن در نقطه ثابت O لولا شده، در حال بالا رفتن و رسیدن به موقعیت قائم است. سیم‌های مهار کننده دکل ناگهان رها می‌شوند و دکل به طرف زمین فرو می‌افتد. مولفه‌های نیروی وارده بر دکل در نقطه O را بر حسب θ از ۰ تا ۹۰ درجه رسم کنید. می‌توانید توضیح دهید که چرا O_y پس از رسیدن به صفر مجدداً افزایش می‌یابد؟

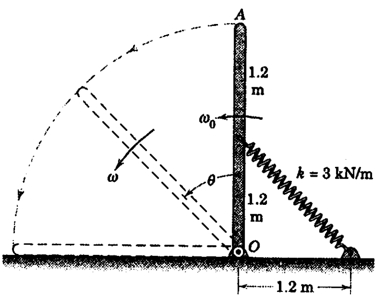


شکل مسئله ۶-۲۳۲

* ۶-۲۳۳ میله باریکی به جرم ۳ kg در موقعیت قائم که فنر بدون کشیدگی است، دارای سرعت زاویه‌ای اولیه ω_0 = ٤ rad/s است. حداقل سرعت زاویه‌ای ω_{min} و زاویه θ متناظر با آن را تعیین کنید. همچنین سرعت زاویه‌ای میله را هنگامیکه به سطح افقی اصابت می‌کند، پیدا کنید.

جواب ω_{min} = ۰/۹۱۰ rad/s در θ = ۷٤/۰°

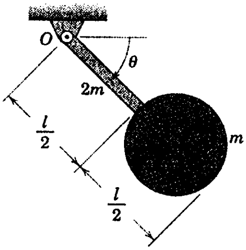
ω = ۱/۵۸٦ rad/s در θ = ۹۰°



شکل مسئله ۶-۲۳۳

* ۶-۲۳٤ آونگ مرکب تشکیل شده از یک میله باریک یکنواخت به طول l و جرم ۲m که به دیسک یکنواختی به قطر $\frac{l}{2}$ و جرم m متصل شده است. جسم آزادانه حول محور افقی گذرنده از O لولا شده است. اگر آونگ در لحظه $t = 0$ در موقعیتی که $\theta = 0$ است، دارای سرعت زاویه‌ای ۳ rad/s در

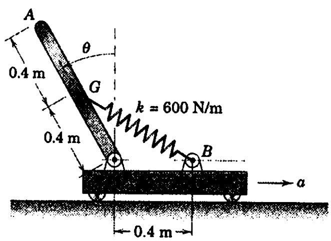
جهت ساعتگرد باشد، زمان t را که در آن آونگ از موقعیت $\theta = ۹۰^\circ$ می‌گذرد، تعیین کنید. طول آونگ برابر $l = ۰/۸$ m است.



شکل مسئله ۲۳۴-۶

* ۲۳۵-۶ میله OA به جرم ٤ kg و مرکز جرم G در صفحه قائم به نقطه O یک ارابه متحرک لولا شده است. فنر متصل به آن در $\theta = ۰$ کشیدگی ندارد. در صورتیکه ارابه با شتاب ثابت افقی $a = ٤\ \text{m/s}^2$ در حرکت باشد، زاویه پایای θ میله را تعیین کنید. (*تذکر:* دو مقدار برای θ وجود دارد که یکی پایا و دیگری ناپایا است.)

جواب $\theta = ۱۵/٦۲^\circ$

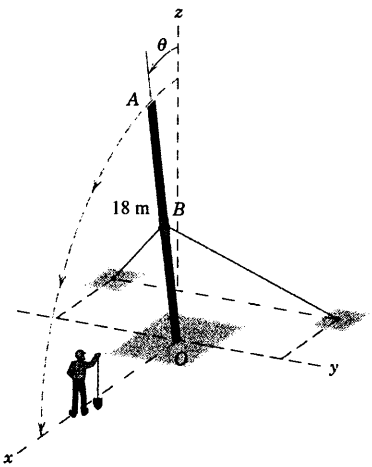


شکل مسئله ۲۳۵-۶

* ۲۳٦-٦ میله ٤ کیلوگرمی مسئله ۲۳۵-٦ ابتدا در موقعیت قائم و در حال سکون قرار دارد و فنر متصل به آن با سختی $k = ٦۰۰$ N/m بدون کشیدگی می‌باشد. اگر به ارابه از حالت سکون شتاب ثابت $a = ۰/٤g$ داده شود، سرعت زاویه‌ای ω میله را به صورت تابعی از θ به ازای $۰ \leqslant \theta \leqslant ۹۰^\circ$ تعیین و رسم کنید.

* ۲۳۷-٦ دکل تلفن ۱۸ متری که اساساً قطرش یکنواخت است، توسط دو کابل متصل به B مطابق شکل در حال بلند شدن و رسیدن به موقعیت قائم می‌باشد. انتهای O روی یک تکیه‌گاه، ساکن است و نمی‌تواند لغزش نماید. موقعی که دکل به موقعیت قائم نزدیک می‌شود، ناگهان اتصال در B پاره می‌گردد و دو کابل رها می‌گردند. موقعی که θ به ۱۰° می‌رسد، سرعت انتهای بالای A دکل ۱/۳۵ m/s است. از این لحظه به بعد، t زمانی که کارگران فرصت دارند تا از این نقطه دور شوند، پیش از آنکه دکل به زمین اصابت کند را حساب کنید. با چه سرعتی v_A انتهای A به زمین اصابت می‌کند.

جواب $t = ۲/۸۳$ s و $v_A = ۲۲/۹$ m/s

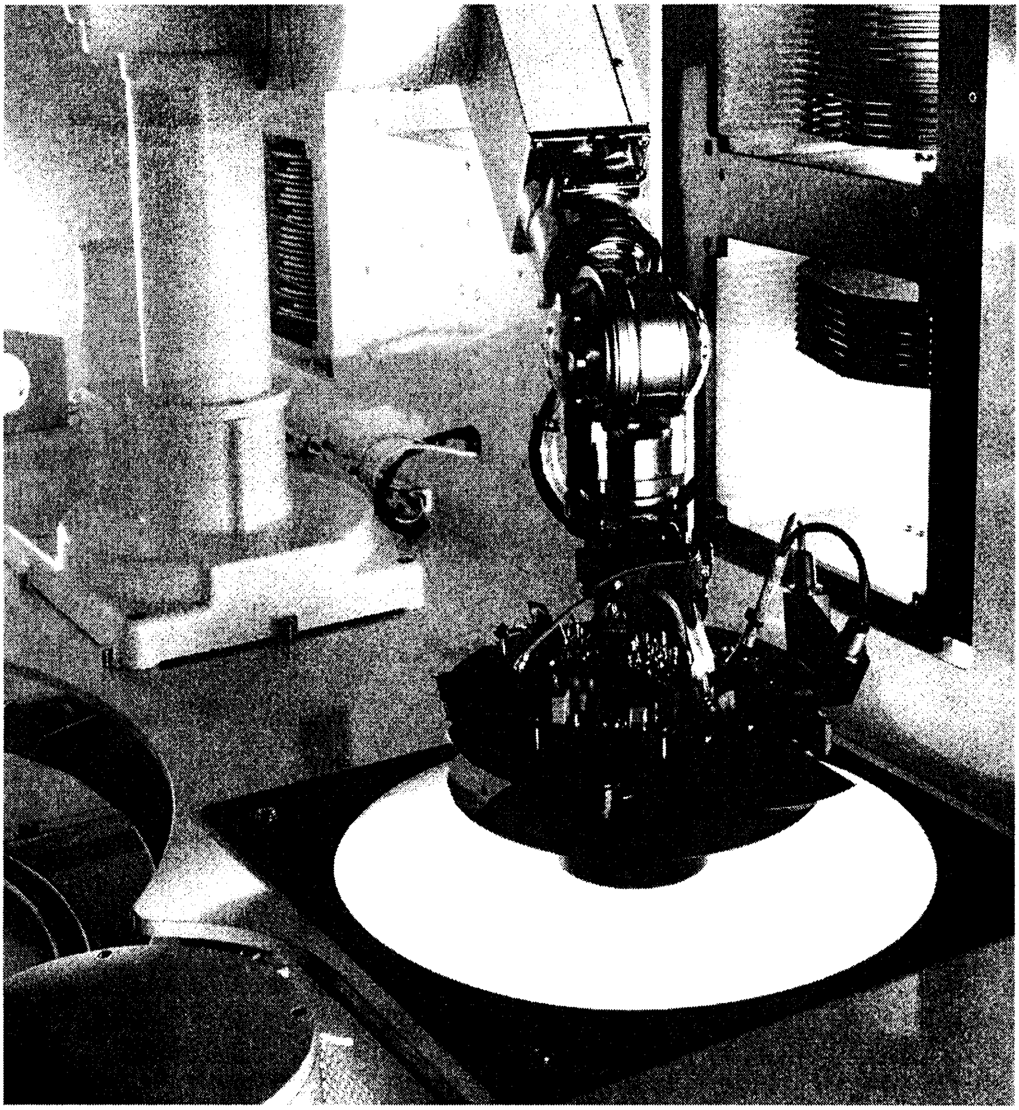


شکل مسئله ۲۳۷-۶

فصل هفتم

مقدمه‌ای بر دینامیک سه بعدی اجسام صلب

فهرست مطالب



تعداد فرآیندهای از اجسام صلب وجود دارند که حرکتشان در سه بعد است. اضافه شدن بُعد سوم، تشریح مسئله را به طور قابل ملاحظه‌ای پیچیده می‌سازد. این دستگاه روباتیک که در ساخت بُردهای الکترونیکی مورد استفاده قرار می‌گیرد و از اینرو حرکتش بایستی دقیقاً شناخته و کنترل شود.

۷-۱ مقدمه

اگرچه درصد عمده‌ای از مسائل دینامیکی که در مهندسی مطرح هستند، روش حل خود را از اصول حرکت در صفحه می‌گیرند، طرح‌ها و روش‌های جدید به طور فزاینده بر روی مسائلی متمرکز شده‌اند که تجزیه و تحلیل حرکت در سه بعد را طلب می‌کنند. وجود بعد سوم پیچیدگی قابل توجهی را به روابط سینماتیکی و سینتیکی می‌افزاید. علاوه بر آن که بُعد اضافه شده، مولفه سومی را به بردارهایی که معرف نیرو، سرعت خطی، شتاب خطی و مومنتم می‌باشد، اضافه می‌کند، دو مولفه دیگر را به بردارهای دربر گیرنده کمیت‌های زاویه‌ای نظیر گشتاور نیروها، سرعت زاویه‌ای، شتاب زاویه‌ای و مومنتم زاویه‌ای می‌افزاید. در حرکت سه بعدی توانایی کامل تحلیل به روش برداری بکار گرفته می‌شود.

زمینه خوبی که از دینامیک حرکت در صفحه بدست آمده در مطالعه دینامیک در سه بعد که روش پرداختن به مسائل و بسیاری از عبارات آن شبیه حالت دو بعدی است، بسیار مفید واقع می‌شود. اگر از مطالعه دینامیک حرکت در صفحه، بهره لازم جهت مطالعه دینامیک در سه بعد برده نشود؛ مدت و فرصت بیشتری لازم خواهد بود که بر اصول جدید تسلط یافته و با روش حل مسائل آشنا شد.

مباحث فصل ۷ قصد ارائه کاملی از حرکت سه بعدی اجسام صلب را ندارند و فقط به عنوان مقدمه بنیادی به موضوع خواهند پرداخت. منتهی، این مقدمه جهت حل بسیاری از متداول‌ترین مسائل حرکت سه بعدی کفایت می‌کند و خود پایه مطالعات پیشرفته‌تری خواهد شد. ما همان روشی را که در مورد حرکت ذره و حرکت اجسام صلب در دو بعد دنبال کردیم، در اینجا نیز ابتدا به بررسی سینماتیک لازم و سپس به بحث سینتیک خواهیم پرداخت.

بخش A . سینماتیک

۷-۲ انتقال

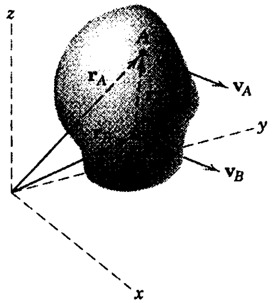
شکل ۷-۱ جسم صلبی را نشان می‌دهد که در فضای سه بعدی در حال انتقال است. هر دو نقطه‌ای از جسم نظیر A و B در صورتی که حرکت *انتقالی* داشته باشند، در طول خطوط مستقیم موازی حرکت می‌کنند و در صورتی که دارای

حرکت منحنی *الخط* باشند، در طول منحنی‌های یکسانی حرکت خواهند کرد. در هر دو حالت، هر خطی از جسم نظیر AB ، نسبت به موقعیت اولیه خود موازی باقی خواهد ماند.

بردارهای موقعیت و مشتقات اول و دوم آنها چنین هستند:

$$\mathbf{r}_A = \mathbf{r}_B + \mathbf{r}_{A/B} \qquad \mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B \qquad \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B$$

که $\mathbf{r}_{A/B}$ ثابت باقی مانده و بنابراین مشتق آن صفر است. در نتیجه، کلیه نقاط جسم دارای سرعت و شتاب یکسان می‌باشند. سینماتیک حرکت انتقالی، هیچگونه پیچیدگی خاصی را به همراه نداشته و شرح و تفصیل بیشتر غیر ضروری است.

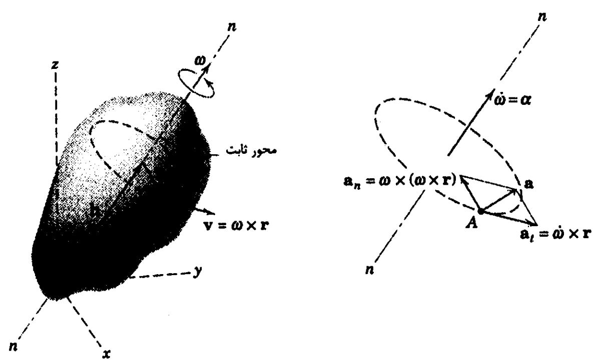


شکل ۱-۷

۳-۷ دوران حول محور ثابت

حال دوران جسم صلبی را که در شکل ۲-۷ نشان داده شده در نظر بگیرید که در فضا با سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ حول محور ثابت n-n دوران می‌کند. سرعت زاویه‌ای، برداری است که جهت دوران آن از روی قاعده دست راست بدست می‌آید. با ثابت بودن محور دوران، جهت بردار $\boldsymbol{\omega}$ تغییر نمی‌کند، چون در امتداد محور قرار دارد. به عنوان قرارداد، مبدا O را بر روی محور دوران به عنوان دستگاه مختصات ثابت انتخاب می‌کنیم. هر نقطه‌ای نظیر A که بر روی محور دوران قرار ندارد، در صفحه عمود بر محور، بر روی قوس دایره‌ای حرکت کرده و دارای سرعتی می‌باشد که برابر است با:

$$\boxed{\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}} \qquad (۱-۷)$$



شکل ۲-۷

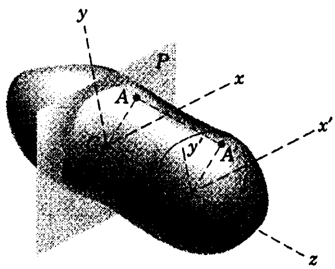
که می‌توان $\mathbf{h}+\mathbf{b}$ را جایگزین $\mathbf{r}$ کرده و توجه داشت که $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{h}=\mathbf{0}$ است. شتاب نقطه A را می‌توان با مشتق‌گیری از معادله ۱-۷ بدست آورد. در نتیجه:

$$\mathbf{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \tag{۷-۲}$$

که به جای $\dot{\mathbf{r}}$ معادل آن یعنی $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ جایگزین شده است. اندازه مولفه‌های عمودی و مماسی $\mathbf{a}$ در حرکت بر روی دایره به ترتیب برابر $a_n=|\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})|=b\omega^2$ و $a_t=|\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}|=b\alpha$ می‌باشند که $\alpha=\dot{\omega}$ است. هر دو بردار $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ بر $\boldsymbol{\omega}$ و $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ عمود می‌باشند که در نتیجهٔ آن، روابط $\mathbf{v}\cdot\boldsymbol{\omega}=0$ ، $\mathbf{v}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$ ، $\mathbf{a}\cdot\boldsymbol{\omega}=0$ و $\mathbf{a}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}=0$ را برای دوران حول محور ثابت بدست می‌آوریم.

۴-۷ حرکت در صفحه موازی

هنگامی که همانند شکل ۳-۷ کلیه نقاط موجود در یک جسم صلب به موازات یک صفحه ثابت مانند صفحه P حرکت کنند، شکل کلی‌تری از حرکت در صفحه را داریم. صفحه مرجع به طور معمول از مرکز جرم G عبور کرده و به عنوان *صفحه* حرکت نامیده می‌شود. از آنجایی که هر نقطه از جسم نظیر A' ، با نقطه A در صفحه P حرکت یکسانی دارد، نتیجه می‌گیریم که سینماتیک حرکت در صفحه که در فصل ۵ مورد بحث قرار گرفت، موقعیتی که در مورد صفحه مرجع اعمال گردد، تشریح کاملی از حرکت را عرضه می‌دارد.



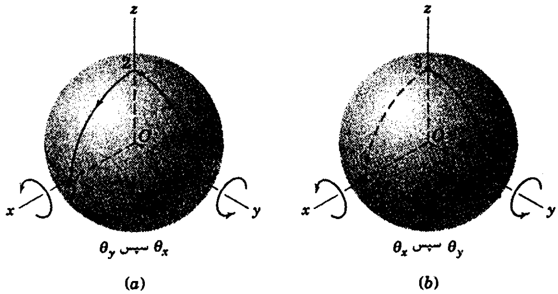
شکل ۳-۷

۵-۷ دوران حول نقطه ثابت

هنگامی که جسمی حول یک نقطه ثابت دوران می‌کند، جهت بردار سرعت زاویه‌ای ثابت باقی نمی‌ماند و این تغییر مفهوم کلی‌تری از دوران را می‌طلبد.

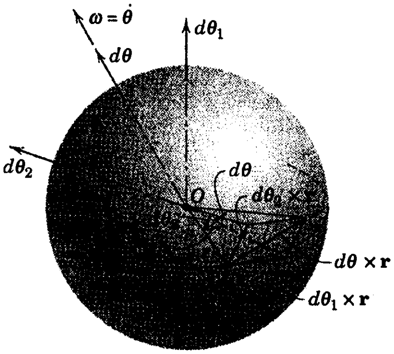
بردارهای دوران و مناسب

ابتدا باید حالت‌هایی را مورد بررسی قرار دهیم که بردارهای دوران از قانون جمع متوازی الاضلاع پیروی می‌کنند و بنابراین ممکن است به عنوان بردارهای مناسب برای این منظور مورد توجه قرار گیرند. مطابق شکل ٤-۷ کرهٔ توپری را در نظر بگیرید که در واقع قسمتی از یک جسم صلب است که منحصراً حول نقطه O دوران می‌کند.



شکل ۴-۷

در اینجا محورهای x-y-z در فضا ثابت در نظر گرفته شده‌اند و به همراه جسم دوران نمی‌کنند. در بخش a از شکل، در اثر دو دوران متوالی $90°$ کره حول محور x و سپس حول محور y ، نقطه‌ای که ابتدا بر روی محور y در وضعیت ۱ قرار دارد، به وضعیت‌های پی در پی ۲ و ۳ حرکت می‌کند. از طرفی، اگر ترتیب دوران معکوس شود، در اثر دوران حول محور y ، نقطه هیچگونه حرکتی نمی‌کند. ولی در اثر دوران $90°$ حول محور x به نقطه ۳ انتقال می‌یابد. در نتیجه، در دو حالت مزبور وضعیت نهایی، یکسان نیست و از این مثال خاص معلوم می‌شود که دوران‌های محدود و معین، عموماً از قانون متوازی الاضلاع در جمع بردارها تبعیت نکرده و خاصیت جابجایی پذیری ندارند. در نتیجه، دوران‌های محدود و معین را *نمی‌توان* بردار مناسب تلقی کرد.



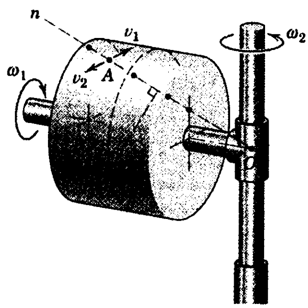
شکل ۵-۷

ولی، دوران‌های *بسیار جزئی* (دیفرانسیل) از قاعده جمع برداری به روش متوازی الاضلاع تبعیت می‌کنند. این مطلب در شکل ۵-۷ نشان داده شده است که در واقع بیانگر اثر ترکیبی از دو دوران بسیار جزئی $d\theta_1$ و $d\theta_2$ جسم صلب حول محورهای خاصی است که از نقطه O عبور می‌کنند.

در اثر دوران $d\theta_1$ ، نقطه A به اندازه $d\theta_1 \times \mathbf{r}$ جابجا می‌شود و به طور مشابه دوران $d\theta_2$ جابجایی $d\theta_2 \times \mathbf{r}$ را به نقطه A می‌دهد. هر دو روش ذکر شده در ترتیب جمع این جابجایی‌ها بسیار جزئی به جابجایی یکسانی منجر می‌شود که چنین است:

$d\theta_1 \times \mathbf{r} + d\theta_2 \times \mathbf{r} = (d\theta_1 + d\theta_2) \times \mathbf{r}$. از این رو دو دوران مذکور معادل دوران منفرد $d\theta = d\theta_1 + d\theta_2$ می‌باشند. نتیجه این بحث این است که سرعت‌های زاویه‌ای $\omega_1 = \dot{\theta}_1$ و $\omega_2 = \dot{\theta}_2$ را می‌توان به صورت برداری جمع کرد و نوشت: $\omega = \dot{\theta} = \omega_1 + \omega_2$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که جسمی که دارای یک نقطه ثابت است، حول محور گذرنده از این نقطه ثابت به طور آنی (لحظه‌ای) دوران می‌کند.

محور آنی دوران



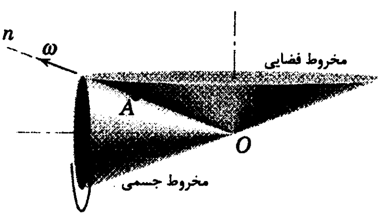
شکل ۶-۷

برای کمک به تجسم مفهوم محور آنی دوران، مثال ویژه‌ای در اینجا مطرح می‌شود. شکل ٦-٧ روتور استوانه‌ای شکل توپری را نشان می‌دهد که جنس آن از پلاستیک شفاف بوده و درون آن با انبوهی از ذرات سیاه رنگ پر شده است. روتور با میزانِ پایای ω_1 حول محور شافت خود دوران کرده و شافت نیز به نوبه خود با میزان پایای ω_2 حول محور قائم ثابت در حال دوران است. جهت هر دو دوران در شکل نشان داده شده است. اگر در حین حرکت روتور، در یک لحظه از آن عکس برداری شود، در عکس خطی از ذرات سیاه رنگ مشاهده می‌شود که بیانگر صفر بودن سرعت ذرات در آن لحظه می‌باشد. این خط که از ذرات بدون سرعت تشکیل شده، موقعیت آنی محور دوران O-n را مشخص می‌کند. هر نقطه واقع بر روی این خط، نظیر A دارای مولفه‌های سرعت v_1 و v_2 که مساوی ولی در خلاف جهت یکدیگر هستند، می‌باشد که v_1 ناشی از ω_1 و v_2 ناشی از ω_2 است.

سایر نقاط، نظیر P به صورت تصویری نامشخص و مه‌آلود ظاهر می‌شود و حرکت آنها به صورت خطوط کوتاه به شکل کمانهای کوچک مدور که در صفحات عمود بر محور O-n قرار دارند، مشخص می‌شود که این خطوط در واقع مسیر حرکت ذرات می‌باشند. در نتیجه کلیه ذرات جسم، به جز آنهایی که بر روی خط O-n قرار دارند، در یک لحظه بر روی کمان‌های مدور، حول مرکز آنی دوران در حال چرخش هستند.

در صورتیکه عکس‌های متوالی تهیه شود، ملاحظه خواهیم کرد که محور دوران به صورت یک سری نقاط جدید معین سیاه رنگ واضح تشکیل می‌گردد و موقعیت محور مزبور هم در فضا و هم نسبت به جسم تغییر می‌کند. در مورد جسم صلبی که حول یک نقطه ثابت دوران می‌کند، دیده می‌شود که محور دوران معمولاً به صورت یک خط ثابت در جسم نیست.

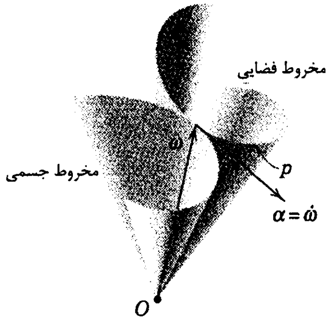
مخروط‌های جسمی و فضایی



شکل ۷-۷

در استوانه پلاستیکی شکل ٦-٧، محور آنی دوران O-A-n مخروطی را حول محور استوانه ایجاد می‌کند که *مخروط جسمی* نامیده می‌شود. در صورتیکه هر دو دوران ادامه یابد و استوانه حول محور قائم بچرخد، محور آنی دوران نیز مخروطی را حول محور قائم ایجاد می‌کند که *مخروط فضایی* نامیده می‌شود. در شکل ٧-٧ این مخروطها برای این مثال خاص نشان داده شده‌اند.

می‌بینیم که مخروط جسمی بر روی مخروط فضایی می‌غلتد و سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ جسم، برداری است که بر روی یال مشترک دو مخروط واقع شده است. برای حالت کلی‌تر که دوران پایدار نیست، مخروط‌های جسمی و فضایی همانند مخروط‌های شکل ۸-۷ قائم نیستند، ولی مخروط جسمی هنوز بر روی مخروط فضایی می‌غلتد.



شکل ۸-۷

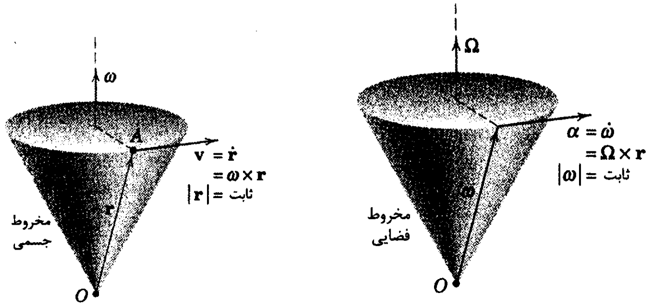
شتاب زاویه‌ای

شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ یک جسم صلب در حرکت سه بعدی، عبارت از مشتق سرعت زاویه‌ای نسبت به زمان می‌باشد. یعنی: $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$. به طور خلاصه برای حالتی که دوران در صفحه منفرد صورت می‌گیرد، اسکالر α فقط تغییر در میزان سرعت زاویه‌ای را اندازه گیری می‌کند و در حرکت سه بعدی، بردار $\boldsymbol{\alpha}$ بیانگر تغییر جهت $\boldsymbol{\omega}$ و نیز تغییر اندازه آن است. در نتیجه در شکل ۸-۷ که نوک پیکان بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ منحنی فضایی P را می‌پیماید و اندازه و جهت آن هر دو تغییر می‌کنند، شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ برداری می‌شود که در جهت تغییر $\boldsymbol{\omega}$ بر این منحنی مماس می‌گردد.

در صورتی که اندازه $\boldsymbol{\omega}$ ثابت باقی بماند، شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ بر $\boldsymbol{\omega}$ عمود می‌شود. در چنین حالتی اگر $\boldsymbol{\Omega}$ سرعت زاویه‌ای مخروط فضایی باشد و بردار $\boldsymbol{\omega}$ خود در هنگام شکل‌گیری مخروط فضایی دوران پیشروش کند، شتاب زاویه‌ای را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}} \qquad (۷-۳)$$

این رابطه را به سادگی می‌توان از روی شکل ۹-۷ تحقیق کرد که رابطه بین بردارهای $\boldsymbol{\alpha}$ ، $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{\Omega}$ در شکل پایینی دقیقا همانند رابطه بین بردارهای $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{r}$ و $\boldsymbol{\omega}$ در شکل بالایی است که سرعت نقطه A واقع بر روی جسم صلب را به بردار موقعیت گذرنده از O و نیز سرعت زاویه‌ای جسم ارتباط می‌دهد.



شکل ۹-۷

اگر شکل ۲-۷ را جهت نشان دادن دوران جسم صلب حول نقطه ثابت O با محور آنی دوران n-n مورد استفاده قرار دهیم، ملاحظه می‌کنیم که سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}=\dot{\mathbf{v}}$ هر نقطه A از جسم توسط همان روابطی بدست می‌آید که قبلاً به حالت مربوط به محور ثابت قابل اعمال بود. یعنی:

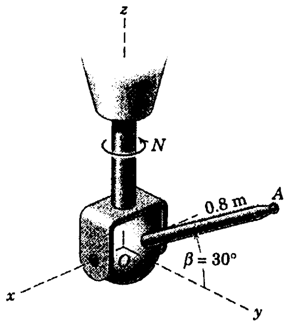
$$\boxed{\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}} \qquad [۷-۱]$$

$$\boxed{\mathbf{a}=\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})} \qquad [۷-۲]$$

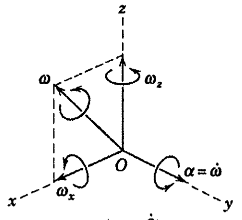
اولین تفاوت بین حالت دوران حول محور ثابت و دوران حول نقطه ثابت بر این واقعیت مبتنی است که برای دوران حول یک نقطه ثابت، شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{\omega}}$ دارای مولفه‌ای عمود بر $\boldsymbol{\omega}$ می‌باشد که ناشی از تغییر جهت $\boldsymbol{\omega}$ است و نیز علاوه بر آن، دارای مولفه‌ای در جهت $\boldsymbol{\omega}$ است که انعکاس دهنده هرگونه تغییری در اندازه $\boldsymbol{\omega}$ می‌باشد. اگرچه هر نقطه واقع بر محور دوران n-n در یک لحظه دارای سرعت صفر می‌شود، ولی در هنگام تغییر جهت $\boldsymbol{\omega}$، شتاب آن صفر نمی‌گردد. از طرفی برای دوران حول یک محور ثابت، شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}=\dot{\boldsymbol{\omega}}$ در امتداد محور ثابت، فقط دارای یک مولفه است که بیانگر تغییر اندازه $\boldsymbol{\omega}$ می‌باشد. به علاوه نقاطی که بر روی محور دوران ثابت قرار می‌گیرند، دارای هیچگونه سرعت یا شتابی نمی‌باشند.

اگرچه مبحث این بخش برای حالت دوران حول یک نقطه ثابت مطرح گردید، لیکن ملاحظه می‌کنیم که دوران، منحصراً تابعی از تغییر زاویه است؛ به طوری که عبارات مربوط به $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{\alpha}$ به ثابت بودن نقطه‌ای که دوران حول آن صورت می‌گیرد، بستگی ندارد. در نتیجه، دوران می‌تواند مستقل از حرکت خطی نقطه دوران به وقوع بپیوندد. این نتیجه گیری نظیر سه بعدی مفهوم دوران یک جسم صلب در حرکت صفحه‌ای توصیف شده در بخش ۲-۵ می‌باشد و در سراسر فصل‌های ۵ و ٦ بکار برده شده است.

مسئله نمونه ۱-۷



بازوی OA به طول m ۰/۸ در یک مکانیزم کنترل از راه دور حول محور x بـه قلابی U شکل مفصل شده است و کل مجموعه حول محور z بـا سـرعت زاویـه‌ای ثـابت N=۶۰ rev/min دوران می‌کنـد. همزمـان بـازو بـا سـرعت زاویـــه‌ای ثـــابت $\dot{\beta}$ = ٤ rad/s بالا برده می‌شود. در موقعیتی که β = ۳۰° می‌باشد؛ مطلوب اسـت: (a) سرعت زاویه‌ای OA، (b) شتاب زاویـه‌ای OA، (c) سـرعت نقطـه A و (d) شـتاب نقطه A. اگر علاوه بر حرکت توصیف شده، شافت عمودی و نقطه O دارای حرکت خطی، مثلاً در امتداد z باشند، بگوییـد آیـا ایـن حرکـت سـرعت زاویـه‌ای و شـتاب زاویه‌ای OA را تغییر می‌داد؟



$(\omega_x = \dot{\beta})$

حل (a): چون بازوی OA هـم حـول محـور x و هـم حـول محـور z دوران می‌کند، دارای مولفه‌های $\omega_x = \dot{\beta}$ = ٤ ad/s و ω_z=۲πN/۶۰=۲π(۶۰)/۶۰ = ۶/۲۸ rad/s خواهد بود. سرعت زاویه‌ای برابر است با:

جواب
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_x + \boldsymbol{\omega}_z = 4\mathbf{i} + 6.28\mathbf{k} \ \text{rad/s}$$

(b) شتاب زاویه‌ای OA برابر است با:

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_x + \dot{\boldsymbol{\omega}}_z$$

از آن جایی که مقدار و امتداد $\boldsymbol{\omega}_z$ تغییر نمی‌کند، در نتیجه $\dot{\boldsymbol{\omega}}_z = \mathbf{0}$ می‌گردد. اما امتداد $\boldsymbol{\omega}_x$ تغییر نموده، بنابراین دارای مشتق بوده که از رابطه ۳-۷ برابر است با:

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = \boldsymbol{\omega}_z \times \boldsymbol{\omega}_x = 6.28\mathbf{k} \times 4\mathbf{i} = 25.1\mathbf{j} \ \text{rad/s}^2$$

❶ بنابراین:

جواب
$$\boldsymbol{\alpha} = 25.1\mathbf{j} + 0 = 25.1\mathbf{j} \ \text{rad/s}^2$$

(c) با توجه به موقعیت برداری A که توسط رابطه **r**= ۰/۶۹۳**j**+۰/٤**k** m داده می‌شود، سرعت A از رابطه ۱-۷ برابر است با:

جواب
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 6.28 \\ 0 & 0.693 & 0.4 \end{vmatrix} = -4.35\mathbf{i} - 1.60\mathbf{j} + 2.77\mathbf{k} \ \text{m/s}$$

(d) شتاب A از رابطه ۲-۷ برابر است با:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 25.1 & 0 \\ 0 & 0.693 & 0.4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 4 & 0 & 6.28 \\ -4.35 & -1.60 & 2.77 \end{vmatrix} \\ &= (10.05\mathbf{i}) - (10.05\mathbf{i} - 38.4\mathbf{j} - 6.40\mathbf{k}) \end{aligned}$$

❷ جواب $= 20.1\mathbf{i} - 38.4\mathbf{j} - 6.40\mathbf{k}\ \text{m/s}^2$

حرکت زاویه‌ای OA تنها به تغییرات زاویه‌ای N و $\dot{\beta}$ بستگی داشته، بنابراین هر حرکت خطی O اثری بر $\boldsymbol{\omega}$ و $\boldsymbol{\alpha}$ نخواهد داشت.

نکات مفید

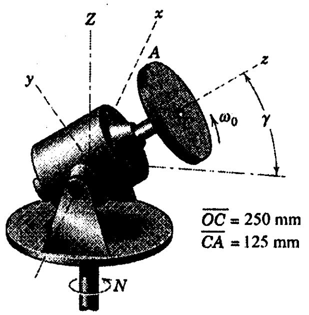
❶ *به روش دیگر، محورهای x-y-z را متصل به شافت عمودی و قلاب فرض نموده و در نتیجه همراه آنها دوران می‌کنند. مشتق $\boldsymbol{\omega}_x$ برابر می‌شود با: $\dot{\boldsymbol{\omega}}_x = ۴\dot{\mathbf{i}}$. اما از رابطه ۵-۱۱ داریم: $\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\omega}_z \times \mathbf{i} = ۶/۲۸\mathbf{k}\times\mathbf{i} = ۶/۲۸\mathbf{j}$. بنابراین:*

$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_x = ۴(۶/۲۸)\,\mathbf{j} = ۲۵۱/۱\mathbf{j}\ \text{rad/s}^2$ که قبلاً نیز بدست آمد.

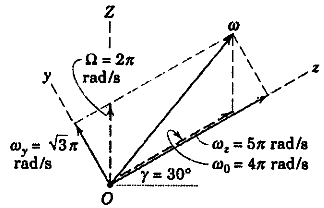
❷ *برای مقایسه روش‌ها، پیشنهاد می‌شود که نتایج بدست آمده $\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را به کمک روابط ۲-۱۸ و ۲-۱۹ برای حرکت ذره در مختصات کروی با تغییر مناسب نمادها حل نمایید.*

مسئله نمونه ۲-۷

موتور الکتریکی همراه با دیسک آن، با سرعت دورانی کوچک ۱۲۰ rev/min در امتداد نشان داده شده دوران می‌کند. پوسته و پایه آن ابتدا در حال سکون‌اند. سپس به تمام مجموعه سرعت ثابت $N=$ ۶۰ rev/min حول محور قائم Z با زاویه ثابت γ برابر °۳۰ داده می‌شود. مطلوب است: (a) سرعت زاویه‌ای دیسک، (b) مخروط‌های فضایی و جسمی و (c) سرعت و شتاب نقطه A واقع در بالای دیسک برای وضعیت نشان داده شده.



حل: محورهای x-y-z با بردارهای یکه $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ به قاب موتور متصل شده‌اند به طوری که محور z بر محور روتور منطبق شده و محور x بر محور افقی که از O می‌گذرد و موتور حول آن دوران می‌کند، منطبق است. محور Z قائم بوده و بردار یکه آن $\mathbf{K} = \mathbf{j}\cos\gamma + \mathbf{k}\sin\gamma$ می‌باشد.

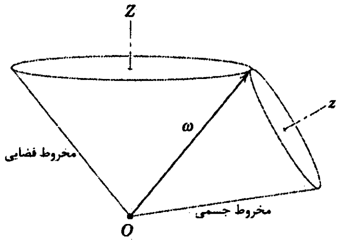


(a) روتور و دیسک دارای دو مولفه سرعت زاویه‌ای می‌باشند:

$\omega_0 =$ ۱۲۰ (۲π)/۶۰ = ۴π rad/s حول محور z و $\Omega =$ ۶۰ (۲π)/۶۰ = ۲π rad/s حول محور Z. بنابراین سرعت زاویه‌ای چنین می‌شود:

❶
$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\Omega} = \omega_0\mathbf{k} + \Omega\mathbf{K}$$
$$= \omega_0\mathbf{k} + \Omega(\mathbf{j}\cos\gamma + \mathbf{k}\sin\gamma) = (\Omega\cos\gamma)\mathbf{j} + (\omega_0 + \Omega\sin\theta)\mathbf{k}$$

جواب
$$= (2\pi\cos30°)\mathbf{j} + (4\pi + 2\pi\sin30°)\mathbf{k} = \pi(\sqrt{3}\,\mathbf{j} + 5.0\mathbf{k})\ \text{rad/s}$$



شتاب زاویه‌ای دیسک از رابطه ۳-۷ برابر است با:

❷
$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega}$$
$$= \Omega\,(\mathbf{j}\cos\gamma + \mathbf{k}\sin\gamma)\times[(\Omega\cos\gamma)\mathbf{j} + (\omega_0 + \Omega\sin\gamma)\mathbf{k}]$$
$$= \Omega\,(\omega_0\cos\gamma + \Omega\sin\gamma\cos\gamma)\mathbf{i} - (\Omega^2\sin\gamma\cos\gamma)\mathbf{i}$$

❸ جواب
$$= (\Omega\,\omega_0\cos\gamma)\mathbf{i} = \mathbf{i}(2\pi)(4\pi)\cos30° = 68.4\mathbf{i}\ \ \text{rad/s}^2$$

(b) بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ یال مشترک مخروط‌های فضایی و جسمی بوده که می‌توان مطابق شکل رسم نمود.

(c) بردار موقعیت نقطه A در لحظه مورد نظر برابر است با:

$$\mathbf{r} = 0.125\mathbf{j} + 0.250\mathbf{k}\ \ \text{m}$$

از رابطه ۱-۷، سرعت A چنین می‌شود:

جواب
$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \sqrt{3}\pi & 5\pi \\ 0 & 0.125 & 0.150 \end{vmatrix} = -0.1920\pi\,\mathbf{i}\ \ \text{m/s}$$

از رابطه ۲-۷، شتاب نقطه A مساوی است با:

$$\mathbf{a} = \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$$
$$= 68.4\mathbf{i}\times(0.125\mathbf{j} + 0.250\mathbf{k}) + \pi(\sqrt{3}\,\mathbf{j} + 5\mathbf{k})\times(-0.1920\pi\,\mathbf{i})$$

جواب
$$= -26.6\mathbf{j} + 11.83\mathbf{k}\ \ \text{m/s}^2$$

نکات مفید

❶ توجه کنید که مطابق ترسیم برداری نشان داده شده، $\boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_y + \boldsymbol{\omega}_z$ است.

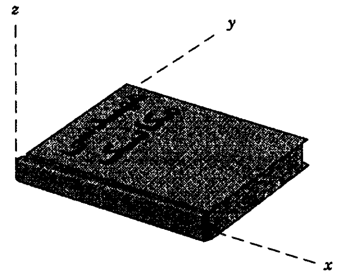
❷ به یاد داشته باشید که رابطه ۳-۷ تنها برای پیشروش پایا که $|\boldsymbol{\omega}|$ ثابت است و در این مسئله آمده، رابطه کاملی برای $\boldsymbol{\alpha}$ بدست می‌دهد.

❸ چون مقدار $\boldsymbol{\omega}$ ثابت است، $\boldsymbol{\alpha}$ باید مماس بر دایره قاعده مخروط فضایی باشد که در جهت مثبت x قرار می‌گیرد و با نتایج بدست آمده مطابقت می‌کند.

مسائل

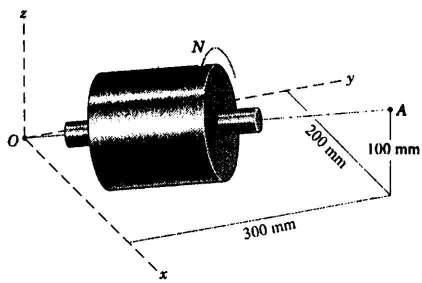
مسائل مقدماتی

۱-۷ کتاب خود را با توجه به محورهای ثابت مشخص شده در شکل، روی میزتان قرار دهید. کتاب را حول محور x به اندازه °۹۰ چرخانده و سپس موقعیت جدید را به اندازه °۹۰ حول محور y دوران دهید. موقعیت نهایی کتاب را رسم کنید. این عمل را با برعکس کردن ترتیب دوران‌ها تکرار کنید. از نتایج بدست آمده، در ارتباط با جمع برداری دوران‌های محدود چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ ملاحظات خود را با شکل ٤-۷ انطباق دهید.



شکل مسئله ۱-۷

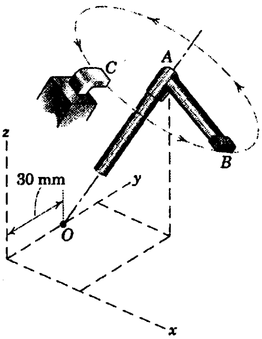
۲-۷ استوانه توپر حول محور ثابت OA با سرعت ثابت N = ٦۰۰ rev/min در جهت نشان داده شده، دوران می‌کند. اگر مولفه‌های x و y سرعت نقطه P به ترتیب ٤ m/s و ۲- m/s باشند، مولفه سرعت z آن را و همچنین فاصله شعاعی R تا محور دوران را تعیین کنید. مقدار شتاب P را نیز بدست آورید.



شکل مسئله ۲-۷

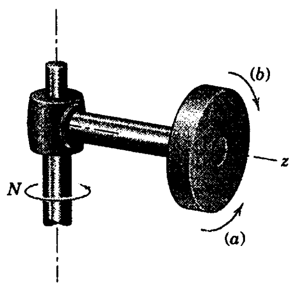
۳-۷ یک مکانیزم زمان سنج از بازوی توزیع کننده دوار AB و اتصال دهنده ثابت C تشکیل شده است. اگر بازو با سرعت زاویه‌ای ثابت $\boldsymbol{\omega}$ = ۳۰(۳**i**+۲**j**+٦**k**) rad/s حول محور ثابت OA دوران نماید، چنانچه مختصات C بر حسب میلیمتر برابر ۲۰ ، ۳۰ و ۸۰ باشند، مقدار شتاب انتهای B بازوی توزیع کننده را در لحظه عبور از نقطه C تعیین کنید.

جواب a = ۱۲۸۵ m/s^2



شکل مسئله ۳-۷

٤-۷ دیسکی با سرعت چرخشی ۱۵ rad/s حول محور z افقی خود ابتدا در جهت (a) و سپس در جهت (b) دوران می‌کند. مجموعه با سرعت N = ۱۰ rad/s حول محور قائم دوران می‌نماید. برای هر حالت مخروط‌های فضایی و جسمی را ترسیم کنید.

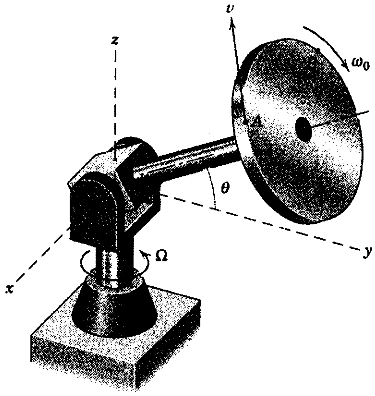


شکل مسئله ۴-۷

۷-۵ روتور و شافت در یک قلاب U شکل سوار شده‌اند که می‌تواند حول محور z با سرعت زاویه‌ای Ω دوران کند. اگر $\Omega = 0$ و θ ثابت باشد؛ روتور دارای سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}_0 = -4\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ rad/s خواهد شد. سرعت $\mathbf{v}_A$ نقطه A روی لبه دیسک را در لحظه‌ای بیابید که بردار موقعیتش $\mathbf{r} = 0/5\mathbf{i}+1/2\mathbf{j}+1/1\mathbf{k}$ m می‌باشد. سرعت v_B هر نقطه مانند B روی لبه دیسک چقدر است؟

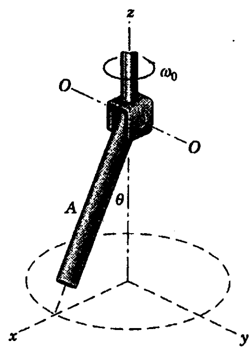
جواب $\mathbf{v}_A = -0/8\mathbf{i}-1/5\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ m/s

$v_B = 2/62$ m/s



شکل مسئله ۵-۷

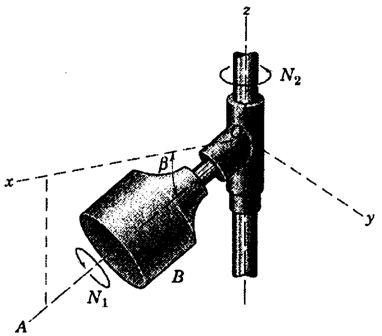
۷-۶ میله حول محور O-O قلاب U شکل که به انتهای یک شافت عمودی متصل شده، لولا شده است. مطابق شکل، شافت با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_0 دوران می‌کند. اگر θ با میزان ثابت $p = -\dot{\theta}$ کاهش یابد، عبارت‌هایی برای سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ میله بنویسید.



شکل مسئله ۶-۷

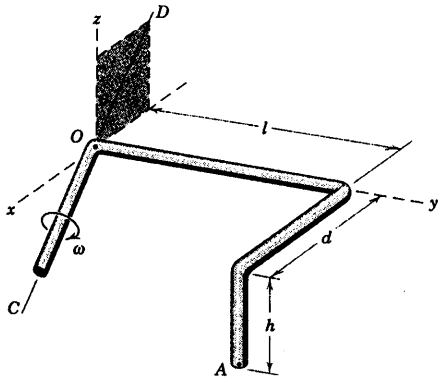
۷-۷ روتور B حول محور مورب OA با سرعت $N_1 = 200$ rev/min تحت زاویه $\beta = 30°$ می‌چرخد. همزمان، مجموعه حول محور قائم با سرعت N_2 دوران می‌کند. اگر سرعت زاویه‌ای کل روتور دارای مقدار 40 rad/s باشد، N_2 را تعیین کنید.

جواب $N_2 = 440$ rev/min



شکل مسئله ۷-۷

۷-۸ میله باریک خمیده‌ای مطابق شکل، حول خط ثابت CD با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. سرعت و شتاب نقطه A را تعیین کنید.



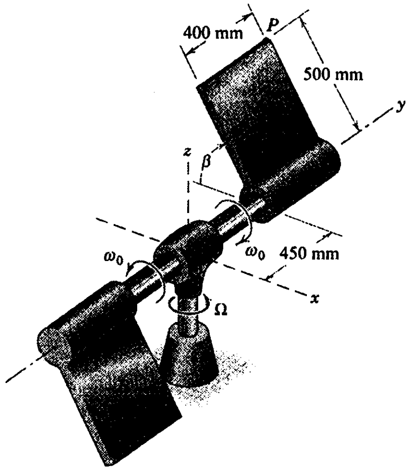
شکل مسئله ۸-۷

۷-۹ مجموعه صفحات و محورهای x-y-z الصاق شده به آن حول محور قائم z با سرعت زاویه‌ای ثابت $\Omega = 0/6$ rad/s دوران می‌کند. همزمان، صفحات مطابق شکل حول محور y با میزان ثابت $\omega_0 = 2$ rad/s می‌چرخند. شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ صفحه A را تعیین کرده و شتاب نقطه P را در

لحظه‌ای که $\beta = ۹۰^\circ$ است، پیدا کنید.

جواب $\boldsymbol{\alpha} = -۱/۲\mathbf{i}$ rad/s^2

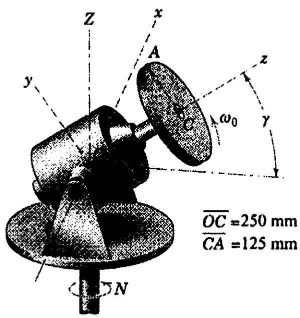
$\mathbf{a}_P = ۰/۸۹٤\,\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$ m/s^2



شکل مسئله ۹-۷

مسائل ویژه

۱۰-۷ موتور مسئله نمونه ۲-۷ مجدداً در اینجا نشان داده شده است. اگر موتور لولا شده حول محور x با میزان ثابت $\dot{\gamma} = ۳\pi$ rad/s بدون چرخش حول محور Z ($N = ۰$) دوران نماید، شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ روتور و دیسک را هنگام عبور از موقعیت $\gamma = ۳۰^\circ$ تعیین کنید. سرعت ثابت موتور برابر ۱۲۰ rev/min می‌باشد. همچنین سرعت و شتاب نقطه A را که در این موقعیت بر روی لبه بالایی دیسک قرار گرفته، بدست آورید.

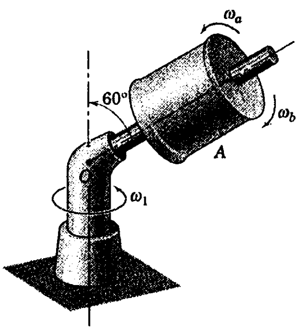


شکل مسئله ۱۰-۷

۱۱-۷ اگر موتور مسئله نمونه ۲-۷ که در مسئله ۱۰-۷ تکرار شد، در ۲ ثانیه از حالت سکون و با شتاب ثابت به سرعت ۳۰۰۰ rev/min برسد؛ مطلوب است شتاب زاویه‌ای کل روتور و دیسک را $\frac{۱}{۳}$ ثانیه پس از روشن شدن موتور به شرطی که میز چرخان با سرعت ثابت $N = ۳۰$ rev/min در حال دوران باشد.

جواب $\boldsymbol{\alpha} = ۵۰\pi\left(\frac{\pi}{۲\sqrt{۳}}\mathbf{i} + \mathbf{k}\right)$ rad/s^2

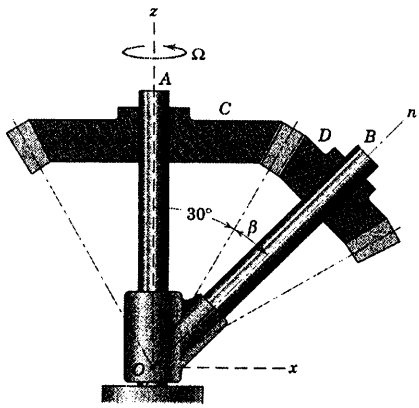
۱۲-۷ قرقره A حول محورش با سرعت زاویه‌ای ۲۰ rad/s ابتدا در جهت ω_a و سپس در جهت ω_b دوران می‌کند. همزمان، مجموعه حول محور قائم با سرعت زاویه‌ای $\omega_1 = ۱۰$ rad/s دوران می‌کند. مقدار سرعت زاویه‌ای ω کل قرقره را تعیین کرده و مخروط‌های جسمی و فضایی آن را در هر دو حالت رسم کنید.



شکل مسئله ۱۲-۷

۷-۱۳ مجموع چرخ‌دنده‌های مخروطی که مقطع آنها نشان داده شده، چنان طراحی شده که چرخ‌دنده C ثابت باشد و نچرخد. پایه نگهدارنده در O همراه با شافت OB هر ثانیه، ٤ دور کامل حول محور قائم z در جهت مشخص شده، می‌چرخد و باعث دوران چرخ‌دنده مخروطی D می‌گردد. مخروط‌های فضایی و جسمی را برای حرکت رسم کرده و مقدار سرعت زاویه‌ای ω چرخ‌دنده را به ازای $\beta = ۱٤/۸٦°$ و نسبت دندانه‌ای $\frac{۳۹}{۲۰}$ حساب کنید. همچنین مولفه سرعت زاویه‌ای چرخ‌دنده D را حول محورش O-n پیدا کنید.

جواب $\omega = ٦۹/۱$ rad/s و $\omega_n = ٦٦/۸$ rad/s



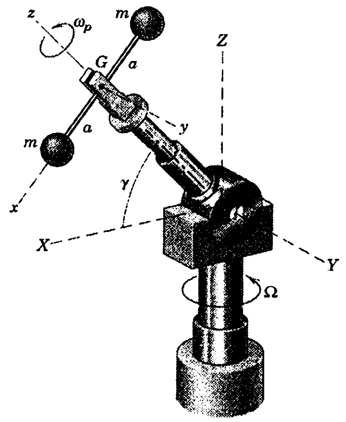
شکل مسئله ۷-۱۳

۷-۱٤ با استفاده از نتایج بدست آمده از مسئله ۷-۱۳ بردار شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ چرخ‌دنده مخروطی D را تعیین کنید.

۷-۱۵ در یک آزمایش، دمبلی مطابق شکل توسط فک‌های یک روبات با سرعت زاویه‌ای $\omega_p = ۲$ rad/s حول محور OG تحت زاویه γ برابر $٦۰°$ دوران می‌کند. کل مجموعه حول محور قائم Z با میزان ثابت $\Omega = ۰/۸$ rad/s دوران می‌کند. سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ دمبل را تعیین کنید. نتایج را بر حسب جهت محورهای x-y-z نشان داده شده بیان کنید. محور y موازی محور Y می‌باشد.

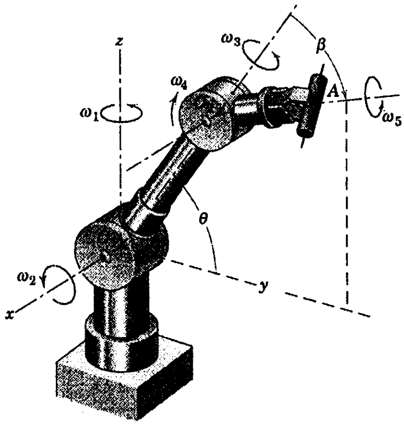
جواب $\boldsymbol{\omega} = -۰/٤\mathbf{i}+۲/٦۹\mathbf{k}$ rad/s

$\boldsymbol{\alpha} = ۰/۸\mathbf{j}$ rad/s^2



شکل مسئله ۷-۱۵

۷-۱٦ روبات نشان داده شده در شکل، دارای پنج درجه آزادی چرخشی می‌باشد. محورهای x-y-z به حلقه پایه که با سرعت زاویه‌ای $\omega_۱$ حول محور z دوران می‌کنند، متصل شده‌اند. بازوی $O_۱O_۲$ حول محور x با سرعت زاویه‌ای $\omega_۲ = \dot{\theta}$ دوران می‌کند. بازوی کنترل $O_۲A$ حول محور $O_۱$-$O_۲$ با سرعت $\omega_۳$ دوران کرده و حول محور عمود که از $O_۲$ گذشته و در این لحظه موازی محور x است، با سرعت $\omega_٤ = \dot{\beta}$ دوران می‌کند. بالاخره فک‌ها حول محور $O_۲$-A با سرعت $\omega_۵$ دوران می‌کند. مقادیر کلیه سرعت‌های زاویه‌ای ثابت می‌باشند. برای موقعیت هندسی نشان داده شده، مقدار سرعت زاویه‌ای ω کل فک‌ها را در $\theta = ٦۰°$ و $\beta = ٤۵°$ چنانچه $\omega_۱ = ۲$ rad/s ، $\dot{\theta} = ۱/۵$ rad/s و $\omega_۳ = \omega_٤ = \omega_۵ = ۰$ باشند، تعیین کنید. همچنین شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ بازوی $O_۱O_۲$ را به صورت یک بردار بیان کنید.



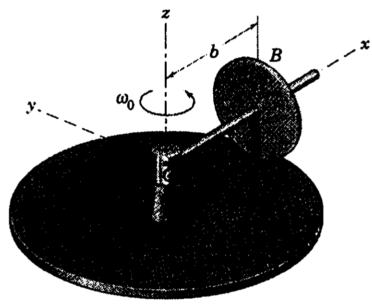
شکل مسئله ۱۶-۷

۱۷-۷ برای روبات مسئله ۱۶-۷، سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ کل فک A را در $\theta = ۶۰^\circ$ و $\beta = ۳۰^\circ$ چنانچه $\omega_۱ = ۲$ rad/s، $\omega_۲ = \omega_۳ = \omega_۴ = ۰$ و $\omega_۵ = ۰/۸$ rad/s باشند، تعیین کنید. همچنین شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ فک A را پیدا کنید.

جواب $\boldsymbol{\omega}$ = ۰/۶۹۳**j** + ۲/۴۰**k** rad/s

$\boldsymbol{\alpha}$ = −۱/۳۸۶**i** rad/s^2

۱۸-۷ دیسک مدور B به شعاع r بدون لغزش، دایره‌ای به شعاع b را روی دیسک ثابت C طی می‌کند. رابطه‌ای برای سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ دیسک B بنویسید در صورتیکه اکسل آن حول محور z با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_۰$ دوران کند.



شکل مسئله ۱۸-۷

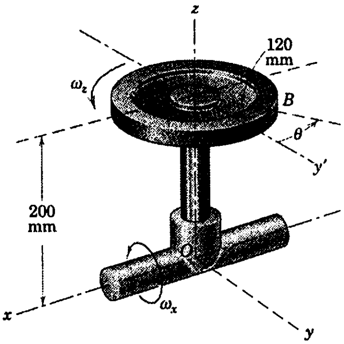
۱۹-۷ اگر دیسک C مسئله ۱۸-۷ در جهت ساعتگرد با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محور z، موقعی که از بالا نگریسته شود، دوران کند و سرعت زاویه‌ای $\omega_۰$ حول OA بدون تغییر ثابت نگهداشته شود، رابطه‌ای برای سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ دیسک B تعیین کنید.

جواب

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{b}{r}(\omega_\circ + \Omega)\mathbf{i} + \omega_\circ\mathbf{k}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{b}{r}\omega_\circ(\omega_\circ + \Omega)\mathbf{j}$$

۲۰-۷ دیسک مدوری به شعاع ۱۲۰ mm حول محور z با سرعت زاویه‌ای $\omega_z = ۲۰$ rad/s دوران کرده و کل مجموعه با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_x = ۱۰$ rad/s حول محور ثابت x دوران می‌کند. مقادیر سرعت **v** و شتاب **a** نقطه B را در موقعیت $\theta = ۳۰^\circ$ حساب کنید.

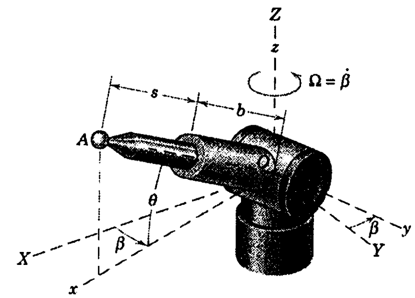


شکل مسئله ۲۰-۷

۷-۲۱ طراحی بازوی چرخشی OA یک مکانیزم کنترل ایجاب می‌کند که بازو حول محور قائم Z با سرعت زاویه‌ای ثابت $\Omega = \dot{\beta} = \pi$ rad/s دوران کند. همزمان، O طبق رابطه $\theta = \theta_\circ \sin 4\Omega t$ نوسان می‌کند. در حالی که $\theta_\circ = \pi/6$ رادیان و t بر حسب ثانیه، زمانی است که از $\beta = 0$ اندازه گیری می‌شود. سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$، OA را در لحظه (الف) $t = \frac{1}{2}$ s و (ب) $t = \frac{1}{8}$ s، تعیین کنید. محورهای مرجع x-y در صفحه X-Y با سرعت زاویه‌ای Ω دوران می‌کنند.

جواب (الف) $\boldsymbol{\omega} = \pi\left(-\frac{2\pi}{3}\mathbf{j} + \mathbf{k}\right)$ و $\boldsymbol{\alpha} = \frac{2\pi^3}{3}\mathbf{i}$

(ب) $\boldsymbol{\omega} = \pi\mathbf{k}$ و $\boldsymbol{\alpha} = \frac{8\pi^3}{3}\mathbf{j}$

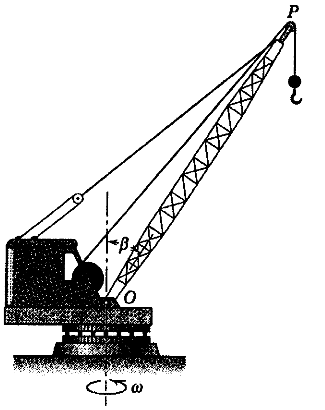


شکل مسئله ۷-۲۱

۷-۲۲ برای بازوی کنترل دوران و نوسان کننده OA مسئله ۷-۲۱ سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ گوی انتهایی A را در شرایط $t = \frac{1}{2}$ s تعیین کنید. فاصله $b = 120$ mm، $s = 100$ mm و $\theta = \theta_\circ \sin 4\Omega t$ مطابق تعریف مسئله ۷-۲۱ بوده که در آن $\Omega = \pi$ rad/s و $\theta_\circ = \pi/6$ می‌باشد.

۷-۲۳ جرثقیل دارای دکلی به طول $OP = 24$ m بوده و حول محور قائمش با میزان ثابت ۲ rev/min در جهت نشان داده شده دوران می‌کند.همزمان، دکل جرثقیل با میزان ثابت $\dot{\beta} = 0.10$ rad/s پایین می‌آید. مقادیر سرعت و شتاب انتهای P دکل را در لحظه‌ای که از موقعیت $\beta = 30^\circ$ می‌گذرد، محاسبه کنید.

جواب $v = 3.48$ m/s و $a = 1.104$ m/s^2



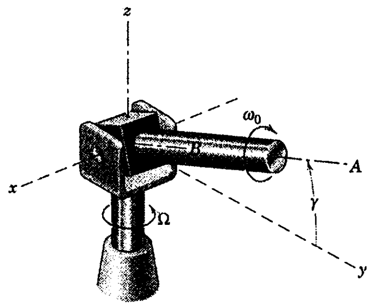
شکل مسئله ۷-۲۳

۷-۲۴ اگر سرعت زاویه‌ای روتور مسئله ۷-۵ دارای مقدار ثابت $\boldsymbol{\omega}_\circ = -4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ باشد، شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ روتور را برای (الف) $\Omega = 0$ و $\dot{\theta} = 2$ rad/s و (ب) $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ و $\Omega = 2$ rad/s (هر دو ثابت)، تعیین کنید. مقدار شتاب نقطه A را در هر دو حالت، وقتی که A دارای بردار موقعیت $\mathbf{r} = 0.5\mathbf{i} + 1.2\mathbf{j} + 1.1\mathbf{k}$ m در لحظه نشان داده شده است، پیدا کنید.

۷-۲۵ شافت عمودی و قلاب U شکل متصل به آن حول محور z با میزان ثابت $\Omega = 4$ rad/s دوران می‌کنند. همزمان، شافت B حول محور OA خود با میزان ثابت $\omega_\circ = 3$ rad/s چرخیده و زاویه γ با میزان ثابت $\pi/4$ rad/s کاهش می‌یابد. سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و مقدار شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ شافت B را در موقعیت $\gamma = 30^\circ$ تعیین کنید. محورهای x-y-z به قلاب U شکل متصل بوده و با آن دوران می‌کنند.

جواب $\boldsymbol{\omega} = -0.785\mathbf{i} - 2.60\mathbf{j} + 2.5\mathbf{k}$ rad/s

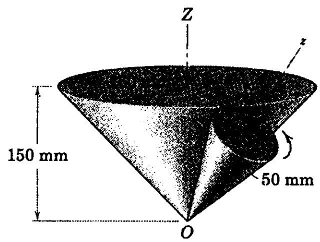
$\alpha = 11.44$ rad/s^2



شکل مسئله ۲۵-۷

۲۶-۷ ◄ مخروط مدور قائم A با سرعت ثابت بر روی مخروط قائم ثابت B می‌غلتد، بطوریکه در هر ٤ s یک دور کامل می‌زند. مقدار شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ مخروط A را طی حرکتش حساب کنید.

جواب α = ٦/٣٢ rad/s^2



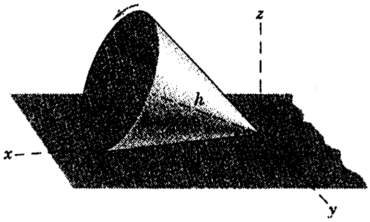
شکل مسئله ۲۶-۷

۲۷-۷ ◄ مخروط قائم توپر به شعاع قاعده r و ارتفاع h بر روی یک سطح تخت بدون لغزش می‌غلتد. مرکز قاعده دایره‌ای شکل B مخروط، مسیر مدوری را حول محور z با سرعت ثابت v طی می‌کند. سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ مخروط توپر را تعیین کنید.

جواب

$$\boldsymbol{\omega} = v\sqrt{\frac{۱}{r^۲}+\frac{۱}{h^۲}}\ \mathbf{i}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = -\frac{v^۲}{h^۲}\left(\frac{r}{h}+\frac{h}{r}\right)\mathbf{j}$$



شکل مسئله ۲۷-۷

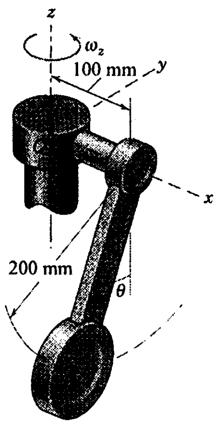
۲۸-۷ ◄ آونگ حول محور x طبق رابطه $\theta = (\pi/٦)\sin ٣\pi t$ رادیان نوسان می‌کند که در آن t زمان بر حسب ثانیه است. همزمان، شافت OA حول محور قائم z با میزان ثابت ω_z = ۲π rad/s دوران می‌کند. سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ مرکز B آونگ و همچنین شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ آن را در لحظه‌ای که t = ۰ تعیین کنید.

جواب

$\mathbf{v}$ = −۰/۳۵۹$\mathbf{j}$ m/s

$\mathbf{a}$ = ۸/٤۵$\mathbf{i}$ + ٤/۸۷$\mathbf{k}$ m/s^2

$\boldsymbol{\alpha}$ = −۳۱/۰$\mathbf{j}$ rad/s^2

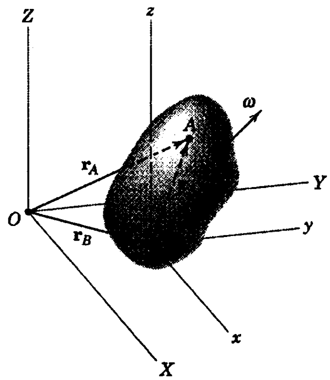


شکل مسئله ۲۸-۷

۶-۷ حرکت کلی

تحلیل سینماتیکی یک جسم صلب که دارای حرکت کلی سه بعدی است، به کمک حرکت نسبی بهتر انجام می‌شود. این اصول در مورد مسائل حرکت صفحه‌ای بکار برده شده‌اند و هم اکنون به حرکت فضایی تعمیم می‌یابد. در بحث‌های آتی، محورهای مرجع در حال انتقال و در حال دوران را بکار خواهیم برد.

محورهای مرجع در حال انتقال



شکل ۱۰-۷

شکل ۱۰-۷ جسم صلبی را نشان می‌دهد که دارای سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ است. نقطه B را به عنوان مبدا دستگاه مرجع در حال انتقال x-y-z انتخاب می‌کنیم. سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ نقطه A از جسم توسط روابط سرعت و شتاب نسبی بدست می‌آیند.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B} \qquad [۵-۴]$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \mathbf{a}_{A/B} \qquad [۵-۷]$$

که در بخش‌های ۴-۵ و ۶-۵ در مورد حرکت صفحه‌ای اجسام صلب مطرح شد. این عبارات همچنین برای حرکت سه بعدی که به هر یک از روابط سه بردار مربوط می‌شوند، به خوبی صادق است.

به هنگام اعمال این روابط به حرکت جسم صلب در فضا، از شکل ۱۰-۷ به این نکته توجه داریم که فاصله $\overline{AB}$ ثابت باقی می‌ماند. در نتیجه، از دید ناظری که در دستگاه x-y-z قرار گرفته، به نظر می‌رسد که جسم حول نقطه B دوران کرده و نقطه A بر روی یک سطح کروی به مرکز B حرکت می‌کند. در نتیجه، حرکت کلی را می‌توان به صورت انتقال جسم که همان حرکت مبدا B است به علاوه دوران جسم حول نقطه B در نظر گرفت.

جملات حرکت نسبی بیانگر اثر دوران حول نقطه B بوده و با عبارات مربوط به سرعت و شتاب که در بخش قبل در مورد دوران یک جسم صلب حول یک نقطه ثابت مورد بحث قرار گرفت، یکسان می‌باشند. بنابراین معادلات سرعت و شتاب نسبی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{A/B} \\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}_{A/B}) \end{aligned}} \qquad (۴-۷)$$

که $\boldsymbol{\omega}$ و $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ به ترتیب سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای لحظه‌ای جسم می‌باشند.

از لحاظ تئوری، انتخاب نقطه B به عنوان مرجع کاملاً اختیاری است. در عمل برای راحتی، نقطه B نقطه‌ای از جسم انتخاب می‌شود که حرکتش در تمام و یا بخشی از حرکت مشخص باشد. اگر نقطه A به عنوان نقطه مرجع انتخاب گردد، معادلات حرکت نسبی به صورت زیر می‌شوند.

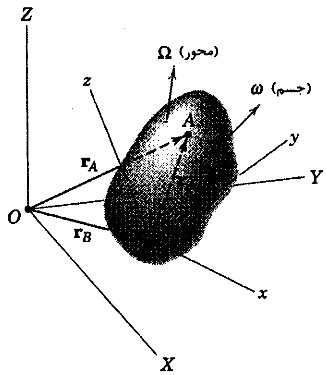
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

که در آن $\mathbf{r}_{B/A} = -\mathbf{r}_{A/B}$ است. واضح است که در دو رابطه فوق، $\boldsymbol{\omega}$ و در نتیجه $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ دارای بردارهای یکسانی هستند. زیرا حرکت زاویه‌ای مطلق جسم مستقل از انتخاب نقطه مرجع می‌باشد. هنگامی‌که معادلات سینتیکی را در مورد حرکت کلی بررسی می‌کنیم، خواهیم دید که مرکز جرم جسم غالباً به عنوان مناسب‌ترین نقطه مرجع مورد انتخاب قرار می‌گیرد.

اگر نقاط A و B در شکل ۱۰-۷ بین دو انتهای میله رابط صلب کنترل، در یک مکانیزم فضایی باشند و اتصالات انتهایی به صورت مفصل‌های کاسه ـ ساچمه‌ای عمل کنند (نظیر مسئله نمونه ۳-۷)، ضروری است که روابط سینماتیکی مشخصی بکار گرفته شوند. واضح است که دوران میله رابط حول محور AB هیچگونه تاثیری بر عملکرد میله رابط ندارد. در نتیجه، سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}_n$ که بردارش بر میله رابط عمود است، عملکرد میله را بیان می‌کند. بنابراین ضروری است که $\boldsymbol{\omega}_n$ و $\mathbf{r}_{A/B}$ بر یکدیگر عمود بوده و چنین شرایطی ایجاب می‌کند که $\boldsymbol{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0$ باشد.

به طور مشابه، فقط مولفه شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}_n$ * میله رابط که بر AB عمود است در عملکرد آن موثر است. بطوریکه رابطه $\boldsymbol{\alpha}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0$ باید برقرار باشد.

محورهای مرجع در حال دوران



شکل ۱۱-۷

فرمول‌بندی کلی‌تر حرکت یک جسم صلب در فضا ایجاب می‌کند که از محورهای مرجعی که علاوه بر انتقال، دوران هم دارند، استفاده شود. توصیف شکل ۱۰-۷ که در شکل ۱۱-۷ مورد تصحیح قرار گرفته، محورهای مرجعی را نشان می‌دهد که مبدا آن همانند قبل به نقطه مرجع B متصل شده ولی با سرعت زاویه‌ای مطلق $\boldsymbol{\Omega}$ دوران می‌کند. که ممکن است با سرعت زاویه‌ای مطلق $\boldsymbol{\omega}$ متفاوت باشد.

حال معادلات ۱۱-۵، ۱۲-۵، ۱۳-۵ و ۱۴-۵ که در بخش ۷-۵ در مورد تشریح حرکت صفحه‌ای یک جسم صلب با محورهای دوار مطرح شد، در اینجا مورد استفاده قرار می‌دهیم. توسعه این روابط از حالت دو بعدی به حالت سه بعدی با وارد کردن مولفه z بردارها به سادگی انجام می‌شود که استخراج آنها به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌گردد. با قرار دادن سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\Omega}$ برای محورهای دوار x-y-z بجای $\boldsymbol{\omega}$ در این معادلات، داریم:

$$\boxed{\dot{\mathbf{i}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \dot{\mathbf{j}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{j} \qquad \dot{\mathbf{k}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k}} \tag{۵-۷}$$

که مشتقات بردارهای یکه دوار متصل به محورهای x-y-z نسبت به زمان می‌باشند. عبارات مربوط به سرعت و شتاب نقطه A چنین می‌شوند:

* می‌توان نشان داد که $\boldsymbol{\alpha}_n = \dot{\boldsymbol{\omega}}_n$ است به شرطی که سرعت زاویه‌ای میله رابط حول محور خودش تغییر نکند. نوشته اولین مولف کتاب *دینامیک ویرایش دوم با سیستم SI*، سال ۱۹۷۵ از انتشارات John Wiley & Sons بخش ۳۷ را ببینید.

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_A &= \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{v}_{rel}\\ \mathbf{a}_A &= \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}}\times\mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_{A/B}) + 2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{v}_{rel} + \mathbf{a}_{rel}\end{aligned} \qquad (۷-٦)$$

که در آن $\mathbf{v}_{rel} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k}$ و $\mathbf{a}_{rel} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k}$ به ترتیب سرعت و شتاب نقطه A هستند که نسبت به دستگاه x-y-z از دید ناظری که روی x-y-z قرار گرفته، اندازه گیری می‌شوند.

مجدداً توجه داریم که $\mathbf{\Omega}$ سرعت زاویه‌ای محورهای دستگاه مختصات بوده و ممکن است با سرعت زاویه‌ای ω جسم متفاوت باشد. همچنین توجه داریم که اندازه بردار $\mathbf{r}_{A/B}$ در مورد یک جسم صلب، ثابت باقی می‌ماند. اما در صورتی که سرعت زاویه‌ای $\mathbf{\Omega}$ محورها با سرعت زاویه‌ای ω جسم متفاوت باشد، جهت این بردار نسبت به دستگاه x-y-z تغییر خواهد کرد. بعداً ملاحظه خواهیم کرد که اگر محورهای x-y-z به صورت صلب به جسم متصل شوند، خواهیم داشت: $\mathbf{\Omega} = \omega$ و $\mathbf{v}_{rel}$ و $\mathbf{a}_{rel}$ هر دو صفر می‌شوند که در این صورت همانند معادله ٤-۷ خواهند شد.

همچنین در بخش ۷-۵ رابطه (معادله ۱۳-۵) بین مشتق بردار $\mathbf{V}$ در دستگاه ثابت X-Y و مشتق $\mathbf{V}$ نسبت به دستگاه دوار x-y مطرح گردید. در حالت سه بعدی این رابطه چنین است:

$$\left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\mathbf{V}}{dt}\right)_{xyz} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{V} \qquad (۷-۷)$$

هنگامیکه این تبدیل به بردار موقعیت نسبی $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ جسم صلب شکل ۱۱-۷ اعمال شود، داریم:

$$\left(\frac{d\mathbf{r}_A}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d\mathbf{r}_B}{dt}\right)_{XYZ} + \left(\frac{d\mathbf{r}_{A/B}}{dt}\right)_{xyz} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_{A/B}$$

یا

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{rel} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r}_{A/B}$$

که اولین معادله ٦-۷ را بدست می‌دهد.

معادلات ٦-۷ به خصوص هنگامی مفید هستند که محورهای مرجع به جسم متحرکی الصاق شوند که درون آن حرکت نسبی اتفاق می‌افتد.

معادله ۷-۷ را می‌توان در قالب عملگر (اپراتور) برداری زیر نوشت:

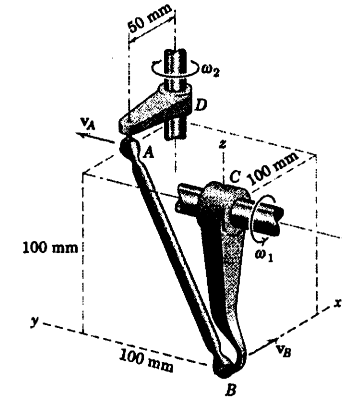
$$\left(\frac{d[\quad]}{dt}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d[\quad]}{dt}\right)_{xyz} + \mathbf{\Omega}\times[\quad] \qquad (۷-۷a)$$

که علامت کروشه [ ] بیانگر هر برداری مانند $\mathbf{V}$ است که در هر دو دستگاه X-Y-Z و x-y-z قابل بیان باشد. اگر اپراتور را به خودش اعمال کنیم، مشتق دوم را نسبت به زمان بدست می‌آوریم که چنین است:

$$\left(\frac{d^2[\quad]}{dt^2}\right)_{XYZ} = \left(\frac{d^2[\quad]}{dt^2}\right)_{xyz} + \dot{\mathbf{\Omega}}\times[\quad] + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{\Omega}\times[\quad]) + 2\mathbf{\Omega}\times\left(\frac{d[\quad]}{dt}\right)_{xyz} \qquad (۷-۷b)$$

روش بدست آوردن این رابطه به عنوان تمرین به دانشجو واگذار می‌شود. توجه کنید که از معادله ۷-۷b ملاحظه می‌گردد که همان معادله ٦-۷ است که برای $\mathbf{a}_{A/B} = \mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B$ بیان شد.

مسئله نمونه ۳-۷



در موقعیت نشان داده شده، لنگ CB حول محور افقی با سرعت زاویه‌ای $\omega_1 = 6$ rad/s که در برهه‌ای از زمان ثابت است، دوران می‌کند. لینک AB دارای دو مفصل کاسه ساچمه در دو انتهایش می‌باشد که لنگ DA را به CB متصل می‌سازد. در لحظه نشان داده شده، سرعت زاویه‌ای ω_2 لنگ DA و سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}_n$ لینک AB را تعیین کنید.

❶ **حل:** رابطه سرعت نسبی، یعنی معادله ۴-۷ را ابتدا با استفاده از محورهای مرجع متصل به B حل می‌کنیم. رابطه برابر است با:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B}$$

❷ که در آن $\boldsymbol{\omega}_n$ سرعت زاویه‌ای لینک AB عمود بر AB گرفته شده است. سرعت‌های A و B عبارتند از:

$$[v = r\omega] \qquad \mathbf{v}_A = 50\,\omega_2\,\mathbf{j} \qquad \mathbf{v}_B = 100(6)\,\mathbf{i} = 600\,\mathbf{i}\ \text{mm/s}$$

همچنین $\mathbf{r}_{A/B} = 50\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}$ mm است. با قرار دادن در رابطه سرعت داریم:

$$50\omega_2\mathbf{j} = 600\mathbf{i} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_{n_x} & \omega_{n_y} & \omega_{n_z} \\ 50 & 100 & 100 \end{vmatrix}$$

با بسط دترمینان و مساوی قرار دادن ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ طرفین رابطه خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -6 &= \qquad\quad +\omega_{n_y} - \omega_{n_z} \\ \omega_2 &= -2\omega_{n_x} \qquad + \omega_{n_z} \\ 0 &= 2\omega_{n_x} - \omega_{n_y} \end{aligned}$$

با حل این روابط ω_2 چنین بدست می‌آید:

جواب $\qquad \omega_2 = 6$ rad/s

❸ با وجود آنکه سه معادله نشان می‌دهند که $\boldsymbol{\omega}_n$ عمود بر $\mathbf{v}_{A/B}$ است، اما تا زمانی که شرط عمود بودن $\boldsymbol{\omega}_n$ بر $\mathbf{r}_{A/B}$ منظور نشود، قابل حل نخواهد بود. بنابراین:

$$[\boldsymbol{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0] \qquad 50\omega_{n_x} + 100\omega_{n_y} + 100\omega_{n_z} = 0$$

با ترکیب با دو رابطه از سه رابطه قبل، نتیجه می‌شود:

$$\omega_{n_x} = -\frac{4}{3}\ \text{rad/s} \qquad \omega_{n_y} = -\frac{8}{3}\ \text{rad/s} \qquad \omega_{n_z} = \frac{10}{3}\ \text{rad/s}$$

بنابراین:

$$\boldsymbol{\omega}_n = \frac{2}{3}(-2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})\ \text{rad/s}$$

و در نتیجه:

جواب $$\omega_n = \frac{2}{3}\sqrt{2^2 + 4^2 + 5^2} = 2\sqrt{5} \text{ rad/s}$$

نکات مفید

❶ نقطه B را به عنوان مرجع انتخاب می‌نماییم. زیرا حرکتش براحتی به کمک سرعت زاویه‌ای ω_1 لینک CB تعیین می‌گردد.

❷ سرعت زاویه‌ای ω لینک AB به صورت بردار ω_n عمود بر AB گرفته می‌شود. زیرا چرخش لینک AB حول خودش هیچ تاثیری بر روی رفتار اهرم بندی ندارد.

❸ رابطه سرعت نسبی می‌تواند به صورت $\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_{A/B} = \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B}$ نوشته شود که $\mathbf{v}_{A/B}$ عمود بر $\boldsymbol{\omega}_n$ و $\mathbf{r}_{A/B}$ می‌باشد. این رابطه به تنهایی شرط لازم برای عمود بودن $\boldsymbol{\omega}_n$ بر $\mathbf{r}_{A/B}$ نیست. بنابراین، باید با شرط $\boldsymbol{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0$ نیز سازگار باشد.

مسئله نمونه ۴-۷

شتاب زاویه‌ای $\dot{\omega}_2$ لنگ AD را در مسئله نمونه ۳-۷ برای شرایط ذکر شده تعیین کنید. همچنین شتاب زاویـه‌ای $\dot{\omega}_n$ لینک AB را نیز بدست آورید.

حل: شتاب لینک‌ها را می‌توان توسط رابطه دوم معادله ٤-۷ که به صورت زیر نوشته می‌شود، بدست آورد.

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\omega}_n \times (\boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B})$$

که در آن $\boldsymbol{\omega}_n$ مانند مسئله نمونه ۳-۷ سرعت زاویه‌ای لینک AB می‌باشد که عمود بر AB است.

❶ شتاب زاویه‌ای AB به صورت $\dot{\omega}_n$ نوشته می‌شود.

در عبارات مولفه‌های عمودی و مماسی، شتاب‌های A و B عبارتند از:

$$\mathbf{a}_A = 50\omega_2^2\mathbf{i} + 50\dot{\omega}_2\mathbf{j} = 1800\mathbf{i} + 50\dot{\omega}_2\mathbf{j} \text{ mm/s}^2$$
$$\mathbf{a}_B = 100\omega_1^2\mathbf{k} + (0)\mathbf{i} = 3600\mathbf{k} \text{ mm/s}^2$$

همچنین:

$$\omega_n \times (\omega_n \times \mathbf{r}_{A/B}) = -\omega_n^2\mathbf{r}_{A/B} = -20(50\mathbf{i} + 100\mathbf{j} + 100\mathbf{k}) \text{ mm/s}^2$$
$$\dot{\omega}_n \times \mathbf{r}_{A/B} = (100\dot{\omega}_{n_y} - 100\dot{\omega}_{n_z})\mathbf{i} + (50\dot{\omega}_{n_z} - 100\dot{\omega}_{n_x})\mathbf{j} + (100\dot{\omega}_{n_x} - 50\dot{\omega}_{n_y})\mathbf{k}$$

با قرار دادن در رابطه شتاب نسبی و مساوی قرار دادن ضرایب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ نتیجه می‌شود:

$$28 = \dot{\omega}_{n_y} - \dot{\omega}_{n_z}$$
$$\dot{\omega}_2 + 40 = -2\dot{\omega}_{n_x} + \dot{\omega}_{n_z}$$
$$-32 = 2\dot{\omega}_{n_x} - \dot{\omega}_{n_y}$$

که از حل معادلات فوق $\dot{\omega}_2$ چنین نتیجه می‌شود:

جواب $$\dot{\omega}_2 = -36 \text{ rad/s}^2$$

❷ بردار $\dot{\omega}_n$ عمود بر $\mathbf{r}_{A/B}$ بوده، اما مانند $\boldsymbol{\omega}_n$ عمود بر $\mathbf{v}_{A/B}$ نیست.

$$[\dot{\omega}_n \cdot \mathbf{r}_{A/B} = 0] \qquad 2\dot{\omega}_{n_x} + 4\dot{\omega}_{n_y} + 4\dot{\omega}_{n_z} = 0$$

که با ترکیب با رابطه‌های قبلی مربوط به این کمیت‌ها نتیجه می‌شود:

$$\dot{\omega}_{n_x} = -8 \text{ rad/s}^2 \qquad \dot{\omega}_{n_y} = 16 \text{ rad/s}^2 \qquad \dot{\omega}_{n_z} = -12 \text{ rad/s}^2$$

بنابراین:

جواب $$\dot{\omega}_n = 4\,(-2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) \text{ rad/s}^2$$

و:

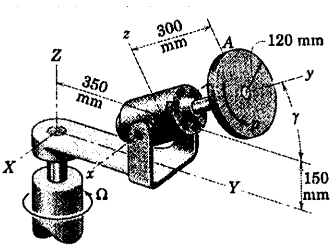
جواب $$|\dot{\omega}_n| = 4\sqrt{2^2 + 4^2 + 3^2} = 4\sqrt{29} \text{ rad/s}^2$$

نکات مفید

❶ *اگر لینک AB دارای مولفه سرعت زاویه‌ای در امتداد AB نیز می‌بود، آنگاه مقدار و امتداد این مولفه تغییر می‌کرد و در نتیجه در شتاب زاویه‌ای واقعی لینک به عنوان یک جسم صلب تاثیر می‌گذاشت. به هر حال چون چرخش AB حول خودش هیچ تاثیری در حرکت لنگ‌ها در C و D نمی‌گذارد، تنها توجه خود را معطوف به $\dot{\omega}_n$ می‌نماییم.*

❷ *مولفه $\dot{\omega}_n$ که عمود بر $\mathbf{v}_{A/B}$ نیست باعث تغییر جهت $\mathbf{v}_{A/B}$ می‌گردد.*

مسئله نمونه ۵-۷



پوسته موتور و پایه نگهدار آن حول محور Z با سرعت زاویه‌ای ثابت $\Omega = ۳$ rad/s دوران می‌کند. شافت موتور و دیسک آن با سرعت چرخشی ثابت $p = ۸$ rad/s نسبت به پوسته موتور در امتداد نشان داده شده دوران می‌کنند. اگر γ ثابت و برابر °۳۰ باشد، سرعت و شتاب نقطه A واقع در لبه بالایی دیسک و شتاب زاویه‌ای دیسک را تعیین کنید.

حل: محورهای مرجع دوار x-y-z به پوسته موتور متصل شده‌اند و پایه چرخان موتور دارای جهت آنی نشان داده شده نسبت به محورهای ثابت X-Y-Z می‌باشد. در اینجا هم از مولفه‌های X-Y-Z با بردارهای یکه **I**، **J** و **K** و هم از مولفه‌های x-y-z با بردارهای یکه **i**، **j** و **k** استفاده می‌کنیم. سرعت زاویه‌ای محورهای x-y-z چنین می‌شود:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{K} = 3\mathbf{K} \text{ rad/s}$$

سرعت. سرعت A توسط اولین رابطه معادله ٦-٧ داده می‌شود.

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{v}_{\text{rel}}$$

که در آن:

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B = 3\mathbf{K} \times 0.350\mathbf{J} = -1.05\mathbf{I} = -1.05\mathbf{i} \text{ m/s}$$

❷
$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} &= 3\mathbf{K} \times (0.300\mathbf{j} + 0.120\mathbf{k}) \\ &= (-0.9\cos 30°)\mathbf{i} + (0.36\sin 30°)\mathbf{i} = -0.599\mathbf{i} \text{ m/s} \end{aligned}$$
$$\mathbf{v}_{\text{rel}} = \mathbf{p} \times \mathbf{r}_{A/B} = 8\mathbf{j} \times (0.300\mathbf{j} + 0.120\mathbf{k}) = 0.960\mathbf{i} \text{ m/s}$$

بنابراین:

جواب $$\mathbf{v}_A = -1.05\mathbf{i} - 0.599\mathbf{i} + 0.960\mathbf{i} = -0.689\mathbf{i} \text{ m/s}$$

شتاب. شتاب A توسط رابطه دوم معادله ٦-٧ بدست می‌آید.

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\,\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} + \mathbf{a}_{\text{rel}}$$

که در آن:

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_B &= \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_B) = 3\mathbf{K} \times (3\mathbf{K} \times 0.350\mathbf{J}) = -3.15\mathbf{J}\\ &= 3.15\,(-\mathbf{j}\cos 30^\circ + \mathbf{k}\sin 30^\circ) = -2.73\mathbf{j} + 1.575\mathbf{k} \ \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = 0$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) &= 3\mathbf{K} \times [3\mathbf{K} \times (0.300\mathbf{j} + 0.120\mathbf{k})]\\ &= 3\mathbf{K} \times (-0.599\mathbf{i}) = -1.557\mathbf{j} + 0.899\mathbf{k} \ \text{ m/s}^2\\ 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\text{rel}} &= 2(3\mathbf{K}) \times 0.960\mathbf{i} = 5.76\mathbf{J}\\ &= 5.76\,(\mathbf{j}\cos 30^\circ - \mathbf{k}\sin 30^\circ) = 4.99\mathbf{j} - 2.88\mathbf{k} \ \text{ m/s}^2\\ \mathbf{a}_{\text{rel}} &= \mathbf{p} \times (\mathbf{p} \times \mathbf{r}_{A/B}) = 8\mathbf{j} \times [8\mathbf{j} \times (0.300\mathbf{j} + 0.120\mathbf{k})]\\ &= -7.68\mathbf{k} \ \text{ m/s}^2\end{aligned}$$

با قرار دادن در رابطه مربوط به $\mathbf{a}_A$ و جمع جمله‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{a}_A = 0.703\mathbf{j} - 8.09\mathbf{k} \ \text{ m/s}^2$$

و

جواب $$a_A = \sqrt{(0.703)^2 + (8.09)^2} = 8.12 \ \text{ m/s}^2$$

شتاب زاویه‌ای. چون که پیشروش پایا می‌باشد، می‌توانیم از رابطه ۳-۷ استفاده نموده و چنین داشته باشیم:

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\omega} = 3\mathbf{K} \times (3\mathbf{K} + 8\mathbf{j})$$

جواب $$= 0 + (-24\cos 30^\circ)\mathbf{i} = -20.8\mathbf{i} \ \text{ rad/s}^2$$

نکات مفید

❶ *این انتخاب برای محورهای مرجع، باعث توصیف ساده حرکت دیسک نسبت به این محورها می‌گردد.*

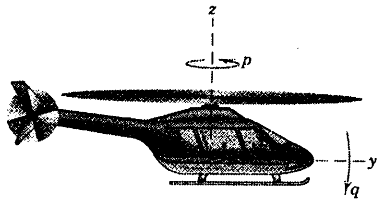
❷ *توجه داشته باشید که* $\mathbf{K} \times \mathbf{i} = \mathbf{J} = \mathbf{j}\cos\gamma - \mathbf{k}\sin\gamma$ و $\mathbf{K} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}\cos\gamma$ و $\mathbf{K} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}\sin\gamma$

مسائل

مسائل مقدماتی

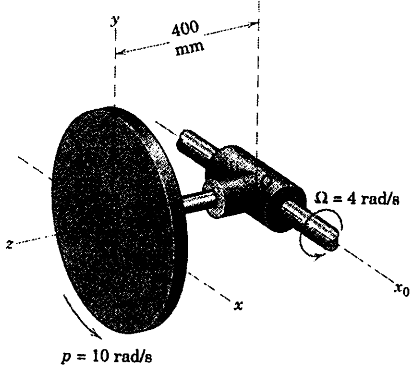
۲۹-۷ بالگرد نشان داده شده با میزان q rad/s به طرف پایین شیرجه می‌رود. اگر پره‌های روتور آن با سرعت ثابت p rad/s دوران نمایند، رابطه‌ای برای شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ روتور بنویسید. محور y را متصل به کابین بالگرد و عمود بر محور روتور در نظر بگیرید.

جواب $\boldsymbol{\alpha} = pq\mathbf{j}$



شکل مسئله ۲۹-۷

۳۰-۷ طوقه O و شافت OC متصل به آن حول محور ثابت x_0 با میزان ثابت $\Omega = 4$ rad/s دوران می‌کنند. همزمان دیسک مدوری با میزان ثابت $p = 10$ rad/s حول OC می‌چرخد. مقدار سرعت زاویه‌ای کل $\boldsymbol{\omega}$ دیسک را تعیین نموده و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ آنرا پیدا کنید.



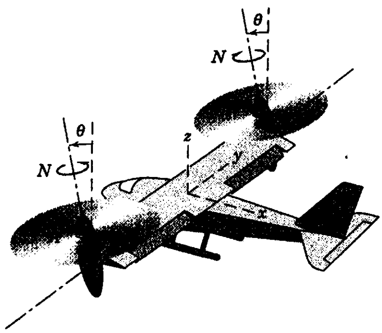
شکل مسئله ۳۰-۷

۳۱-۷ برای شرایط مسئله ۳۰-۷ سرعت $\mathbf{v}_A$ و شتاب $\mathbf{a}_A$ نقطه A واقع بر لبه دیسک را هنگامیکه از موقعیت نشان داده شده می‌گذرد، تعیین کنید. محورهای مرجع x-y-z به طوقه O و شافت OC آن، الصاق شده است.

جواب
$\mathbf{v}_A = -4\mathbf{i} - 1.6\mathbf{j} + 1.2\mathbf{k}$ m/s

$\mathbf{a}_A = -34.8\mathbf{j} - 6.4\mathbf{k}$ m/s^2

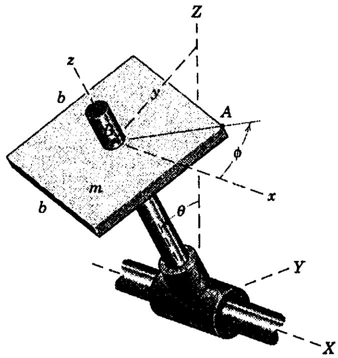
۳۲-۷ هواپیمای کنترل از راه دور بدون سرنشینی که با نیروی رانش روتورهای منحرف شونده پرواز می‌کند؛ جهت اکتشاف و شناسایی طراحی شده است. صعود با $\theta = 0$ شروع می‌شود و متعاقباً پرواز افقی هنگامی صورت می‌گیرد که $\theta = 90°$ شود. اگر روتورها با سرعت ثابت N برابر ۳۶۰ rev/min دوران نمایند، چنانچه $\dot{\theta}$ ثابت و برابر ۰/۲ rad/s باشد، شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ روتور A را در $\theta = 30°$ تعیین کنید.



شکل مسئله ۳۲-۷

۷-۳۳ ورق مربع شکلی حول محور مرکز z خود با میزان $\dot{\phi}$ دوران می‌کند. محورهای x-y در صفحه ورق قرار دارند، در حالیکه محور x به موازات محور X از دستگاه مرجع ثابت X-Y-Z باقی می‌ماند. محور مرکزی OB شافت و همچنین محورهای x-y-z حول محور ثابت X با میزان ثابت $\dot{\theta}$ می‌چرخد. روابطی برای شتاب زاویه‌ای ورق نسبت به محورهای دوار x-y-z و همچنین نسبت به محورهای ثابت X-Y-Z بدست آورید. مسئله را به دو روش مختلف حل کنید. نتایج خود را با استفاده از بردارهای یکه $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$ بیان نمایید.

جواب $\boldsymbol{\alpha}_{xyz} = \ddot{\phi}\mathbf{k}$ و $\boldsymbol{\alpha}_{XYZ} = \ddot{\phi}\mathbf{k} - \dot{\theta}\dot{\phi}\mathbf{j}$



شکل مسئله ۷-۳۳

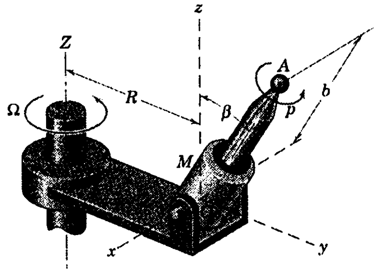
۷-۳۴ برای ورق مربعی شکل مسئله ۷-۳۳، سرعت و شتاب لبه A را برای وضعیتی که $\phi = 0$ و $\theta = 30°$ بوده و اگر $\dot{\phi} \neq 0$ و $\ddot{\theta} = 0$ باشند، تعیین کنید. فاصله $\overline{OB}$ برابر R است.

مسائل ویژه

۷-۳۵ موتور کوچک M حول محور x گذرنده از O لولا شده و شافت OA آن با سرعت ثابت p rad/s در جهت نشان داده شده، نسبت به پوسته موتور دوران می‌کند. کل مجموعه نیز حول محور قائم Z با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω rad/s می‌چرخد. همزمان، موتور حول محور x با میزان ثابت $\dot{\beta}$ در برهه‌ای از حرکت می‌گردد. شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ شافت OA را بر حسب β تعیین کنید. نتیجه خود را بر حسب بردارهای یکه محورهای دوار x-y-z بیان کنید.

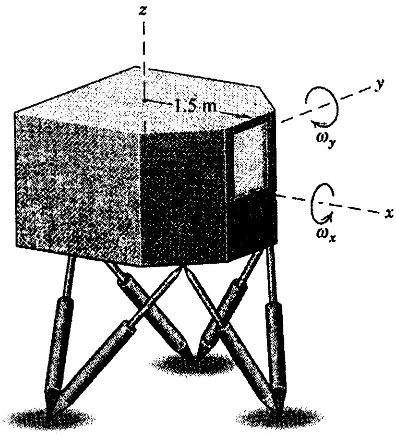
جواب $\boldsymbol{\alpha} = -\Omega p \sin\beta\,\mathbf{i}$

$+ \dot{\beta}\,(p\cos\beta - \Omega)\mathbf{j} - p\,\dot{\beta}\sin\beta\,\mathbf{k}$



شکل مسئله ۷-۳۵

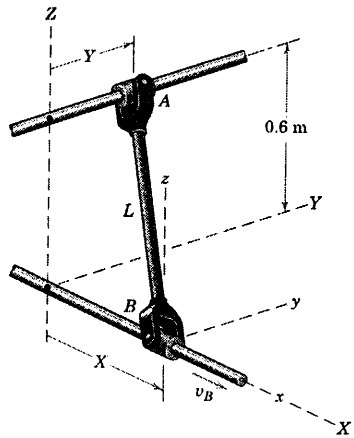
۷-۳۶ شبیه‌ساز پروازی روی شش پایه هیدرولیکی که به صورت زوج به زیر شبیه‌ساز متصل شده، سوار شده است. با برنامه ریزی، چگونگی عملکرد پایه‌ها را در شرایط گوناگون پرواز با جابجایی‌های انتقالی و دورانی در محدوده‌ای از حرکت می‌توان شبیه سازی کرد. محورهای x-y-z به شبیه ساز الصاق شده‌اند و مبدا B محورها بر مرکز حجم منطبق شده است. برای لحظه نشان داده شده، سرعت و شتاب B در امتداد افقی y به ترتیب برابر $0/96$ m/s و $1/2$ m/s^2 می‌باشند. همزمان، سرعت‌های زاویه‌ای و میزان تغییراتشان نسبت به زمان برابر $\omega_x = 1/4$ rad/s، $\dot{\omega}_x = 2$ rad/s^2، $\omega_y = 1/2$ rad/s، $\dot{\omega}_y = 3$ rad/s^2 و $\omega_z = \dot{\omega}_z = 0$ هستند. برای این لحظه مقادیر سرعت و شتاب نقطه A را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷-۳۶

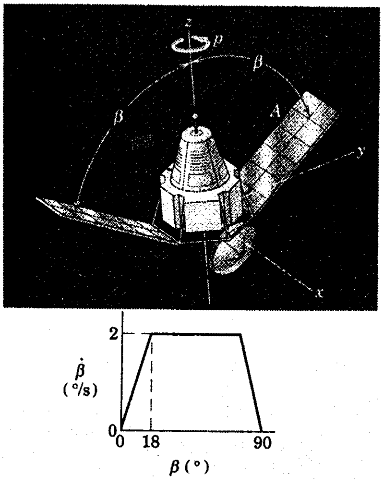
۷-۳۷ در لحظه نشان داده شده، طوقه B در امتداد شافت ثابت در جهت X با سرعت ثابت $v_B = ٤$ m/s در حرکت است. همچنین در این لحظه $X = ۰/۳$ m و $Y = ۰/۲$ m است. سرعت طوقه A را که در امتداد شافت موازی Y حرکت می‌کند، حساب کنید. ابتدا مسئله را با مشتق گیری از رابطه $X^۲+Y^۲+Z^۲ = L^۲$ نسبت به زمان حل کنید و سپس با استفاده از روابط ٤-۷ و الصاق محورهای انتقالی به B حل نمایید. هر یک از قلابهای U شکل آزادانه حول محور میله دوران می‌نماید.

جواب $\mathbf{v}_A = -٦\mathbf{j}$ m/s



شکل مسئله ۷-۳۷

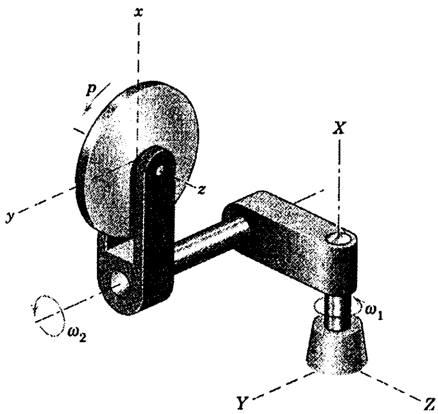
۷-۳۸ فضاپیمای نشان داده شده حول محور z خود که دارای جهت ثابتی در فضا می‌باشد، با میزان $p = \frac{۱}{۱۰}$ rad/s دوران می‌کند. همزمان صفحات خورشیدی آن با میزان ثابت $\dot{\beta}$ که برای تغییر β مطابق نمودار نشان داده شده برنامه ریزی شده است، از هم باز می‌شوند. شتاب زاویه‌ای α صفحه A را در لحظه‌ای (الف) قبل و (ب) بعد از رسیدن به موقعیت $\beta = ۱۸°$ تعیین کنید.



شکل مسئله ۷-۳۸

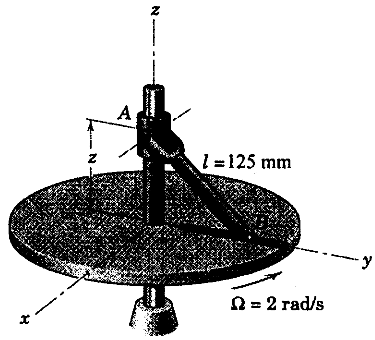
۷-۳۹ دیسک دارای سرعت زاویه‌ای ثابت p حول محور z خود و یوغ A دارای سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_۲$ حول شافت نشان داده شده خود می‌باشند. همزمان، کل مجموعه حول محور ثابت X با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_۱$ می‌چرخد. رابطه‌ای برای شتاب زاویه‌ای دیسک و یوغ که آنها را مطابق شکل به حالت قائم می‌رساند، بدست آورید. مسئله را با تصویر کردن تغییرات برداری در مولفه‌های سرعت زاویه‌ای حل کنید.

جواب $\boldsymbol{\alpha} = p\omega_۲\mathbf{i} - p\omega_۱\mathbf{j} + \omega_۲\omega_۱\mathbf{k}$



شکل مسئله ۷-۳۹

۷-۴۰ طوقه و قلاب U شکل A طی برهه‌ای از حرکت با سرعت ثابت ۰/۲ m/s به طرف بالا حرکت نموده و باعث می‌شود که گوی واقع در انتهای میله درون شیار شعاعی دیسک دوار بلغزد. شتاب زاویه‌ای میله را هنگام عبور از موقعیت z = ۷۵ mm تعیین کنید. دیسک با میزان ثابت ۲ rad/s دوران می‌کند.

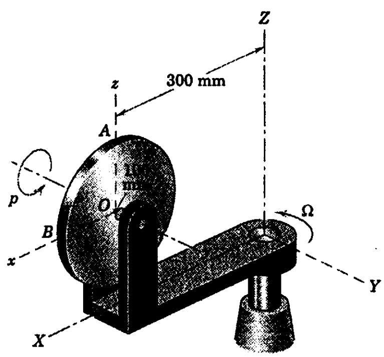


شکل مسئله ۷-۴۰

۷-۴۱ دیسک مدور، حول محور خود (محور y) با میزان ثابت $p = ۱۰\pi$ rad/s می‌چرخد. همزمان، قاب حول محور Z با میزان ثابت $\Omega = ۴\pi$ rad/s دوران می‌کند. شتاب زاویه‌ای α دیسک و شتاب نقطه A بر روی لبه بالایی دیسک را حساب کنید. محورهای x-y-z به قاب الصاق شده‌اند و دارای موقعیت آنی نشان داده شده نسبت به محورهای ثابت X-Y-Z هستند.

جواب $\boldsymbol{\alpha} = -40\pi^2\mathbf{i}$ rad/s^2

$\mathbf{a}_A = 2\pi^2(-2.4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-5\mathbf{k})$ m/s^2



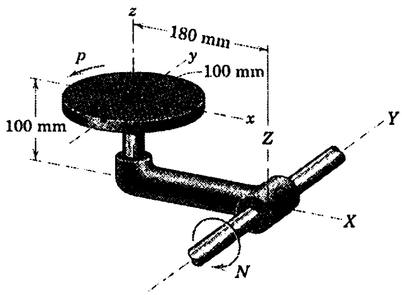
شکل مسئله ۷-۴۱

۷-۴۲ برای شرایط شرح داده شده در مسئله ۷-۳۵، سرعت **v** و شتاب **a** مرکز A گوی را بر حسب β تعیین کنید.

۷-۴۳ دیسک مدور به شعاع ۱۰۰ mm حول محور z خود با سرعت ثابت p = ۲۴۰ rev/min چرخیده و بازوی OCB حول محور y با سرعت ثابت N = ۳۰ rev/min دوران می‌کند. سرعت **v** و شتاب **a** نقطه A از دیسک را موقعی که از موقعیت نشان داده شده می‌گذرد، تعیین کنید. از محورهای مرجع x-y-z که به بازوی OCB الصاق شده، استفاده نمایید.

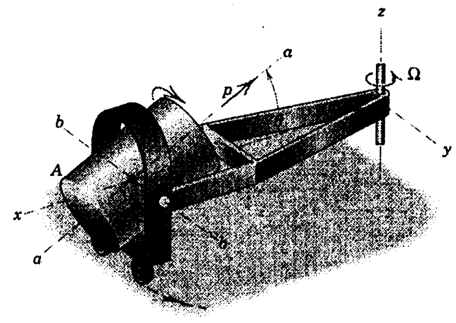
جواب $\mathbf{v} = \pi(0.1\mathbf{i} + 0.8\mathbf{j} + 0.08\mathbf{k})$ m/s

$\mathbf{a} = -\pi^2(6.32\mathbf{i} + 0.1\mathbf{k})$ m/s^2



شکل مسئله ۷-۴۳

۷-۴۴ اتاقک آزمایش شبیه‌سازی پرواز تشکیل شده است از یک طبلک، که با میزان زاویه‌ای ثابت p نسبت به پوسته استوانه‌ای حول محور a-a می‌چرخد. پوسته استوانه‌ای به نوبه خود، بر روی یاتاقانهای افقی سوار شده و حول محور b-b با میزان ثابت $\dot{\theta}$ دوران می‌کند. کل مجموعه با سرعت زاویه‌ای ثابت Ω حول محور ثابت عمودی z در گردش است. رابطه‌ای برای شتاب زاویه‌ای α طبلک چرخان به ازای زاویه مشخص θ در حین این حرکت ترکیبی بنویسید.

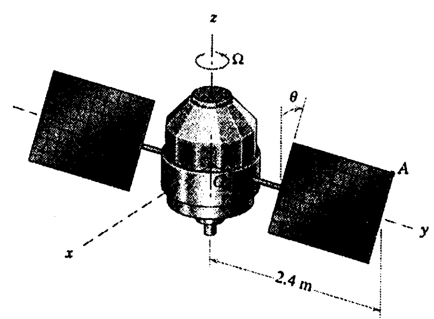


شکل مسئله ۴۴-۷

۴۵-۷ مرکز O فضاپیمای نشان داده شده با سرعت ثابتی در فضا حرکت می‌نماید. طی دوره‌ای از حرکت قبل از پایدار شدن، فضاپیما دارای سرعت چرخشی ثابت $\Omega = \frac{۱}{۲}$ rad/s حول محور z خود می‌باشد. محورهای x-y-z به فضاپیما الصاق شده و صفحات خورشیدی آن حول محور y با میزان ثابت $\dot{\theta} = \frac{۱}{۴}$ rad/s نسبت به فضاپیما دوران می‌نماید. اگر سرعت زاویه‌ای مطلق صفحات خورشیدی $\boldsymbol{\omega}$ باشد، $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ را تعیین کنید. همچنین شتاب نقطه A را در $\theta = ۳۰^\circ$ بدست آورید.

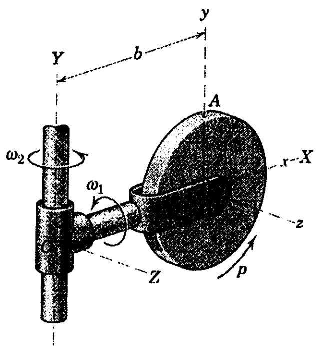
جواب $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \frac{۱}{۸}\,\mathbf{i}$ rad/s^2

$\mathbf{a}_A = ۰/۰۹۳۸\mathbf{i} - ۰/۷۳۰\mathbf{j} - ۰/۰۳۲۵\mathbf{k}$ m/s^2



شکل مسئله ۴۵-۷

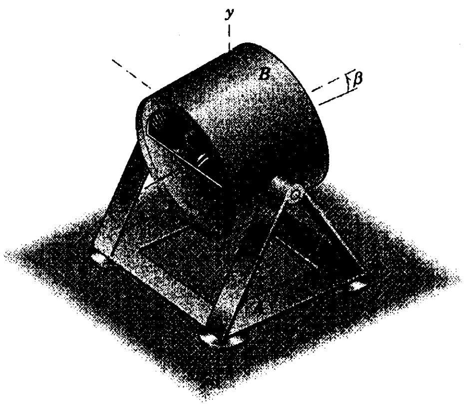
۴۶-۷ دیسک مدور باریکی به جرم m و شعاع r حول محور z خود با سرعت زاویه‌ای ثابت p دوران نموده و یوغ سوار شده بر آن با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_۱$ حول محور X گذرنده از OB دوران می‌کند. همزمان، کل مجموعه حول محور ثابت Y گذرنده از O با سرعت زاویه‌ای $\omega_۲$ می‌چرخد. سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ نقطه A واقع بر لبه دیسک را موقعی که از موقعیت نشان داده شده یعنی موقعی که صفحه x-y دیسک منطبق بر صفحه X-Y می‌باشد، تعیین کنید. محورهای x-y-z به یوغ الصاق شده‌اند.



شکل مسئله ۴۶-۷

۷-۴۷ یک دستگاه شبیه‌سازی برای به تکامل رساندن روش فرود فضاپیما، شامل شاسی A است که روی چهار بالشتک هوایی قرار گرفته، به طوری که می‌تواند بر روی سطح افقی چرخیده یا انتقال پیدا نماید. بر روی شاسی، طبلک B قرار گرفته که می‌تواند حول محور افقی شاسی A دوران نماید. محورهای مختصات x-y-z به طبلک الصاق شده و محور z طبلک، با افق زاویه β می‌سازد. داخل طبلک مدول فرماندهی شبیه‌سازی شدهٔ C قرار دارد که می‌تواند در داخل طبلک حول محور z خود با میزان p بچرخد. در یک آزمایش خاص، شاسی A بر روی صفحه افقی با سرعت زاویه‌ای ثابت ۰/۲ rad/s در جهت نشان داده شده دوران می‌کند. همزمان، طبلک B حول محور x با میزان ثابت $\dot{\beta} = ۰/۱۵$ rad/s دوران کرده و مدول C در داخل طبلک با میزان ثابت $p = ۰/۹$ rad/s در جهت مشخص شده، می‌چرخد. در این شرایط سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ مدول C را هنگامیکه از موقعیت $\beta = ۰$ می‌گذرد، تعیین کنید.

جواب
$$\boldsymbol{\omega}_{\beta=۰} = ۰/۱۵\mathbf{i} + ۰/۲\mathbf{j} + ۰/۹\mathbf{k} \text{ rad/s}$$
$$\boldsymbol{\alpha}_{\beta=۰} = ۰/۱۸\mathbf{i} - ۰/۱۳۵\mathbf{j} - ۰/۰۳۰\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$



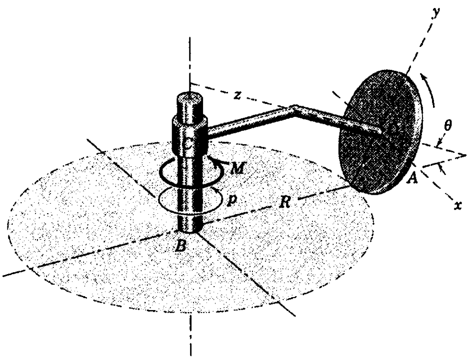
شکل مسئله ۷-۴۷

۷-۴۸ برای شرایط ذکر شده در مسئله نمونه ۷-۲ به جز اینکه γ با میزان ثابت ۳π rad/s افزایش یابد، سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ روتور را هنگام عبور از $\gamma = ۳۰°$ تعیین کنید. (*پیشنهاد:* از رابطه ۷-۷ مربوط به بردار $\boldsymbol{\omega}$ برای پیدا کردن $\boldsymbol{\alpha}$ استفاده نمایید. توجه کنید که $\boldsymbol{\Omega}$ در مسئله نمونه ۷-۲ سرعت زاویه‌ای کامل محورها نیست.)

جواب
$$\boldsymbol{\omega} = \pi(-۳\,\mathbf{i} + \sqrt{۳}\,\mathbf{j} + ۵\,\mathbf{k}) \text{ rad/s}$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \pi^۲(۴\sqrt{۳}\,\mathbf{i} + ۹\,\mathbf{j} + ۳\sqrt{۳}\,\mathbf{k}) \text{ rad/s}^2$$

۷-۴۹ چرخ نشان داده شده به شعاع r آزادانه حول محور خم شده CO دوران می‌کند که خود با میزان ثابت p rad/s حول محور قائم می‌چرخد. اگر چرخ بدون لغزش روی مسیر مدور افقی به شعاع R غلتش نماید، رابطه‌ای برای سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ و شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ چرخ بیان نمایید. محور x همواره افقی باقی می‌ماند.

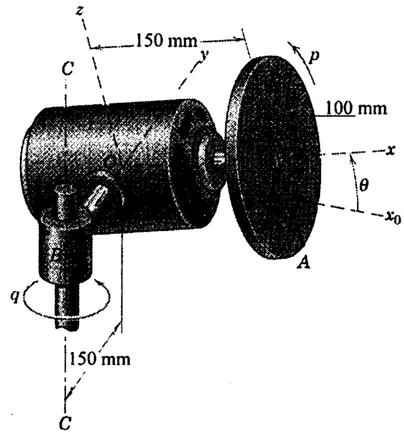
جواب
$$\boldsymbol{\omega} = p\left[\cos\theta\,\mathbf{j} + \left(\sin\theta + \frac{R}{r}\right)\mathbf{k}\right]$$
$$\boldsymbol{\alpha} = \left(\frac{Rp^2}{r}\cos\theta\right)\mathbf{i}$$



شکل مسئله ۷-۴۹

۷-۵۰ موتور نشان داده شده، دیسک را با سرعت ثابت $p = ۳۰$ rad/s می‌چرخاند. موتور، خود با سرعت زاویه‌ای ثابت $\dot{\theta} = ۲$ rad/s حول محور افقی BO (محور y) دوران می‌کند. همزمان، کل مجموعه حول محور قائم C-C با میزان $q = ۸$ rad/s^2 گردش می‌نماید. در لحظه‌ای که $\theta = ۳۰°$ می‌باشد، شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ دیسک و شتاب $\mathbf{a}$ نقطه واقع در لبه پایین دیسک را تعیین کنید. محورهای x-y-z بر پوسته موتور الصاق شده و صفحه O-$x_۰$-y افقی است.

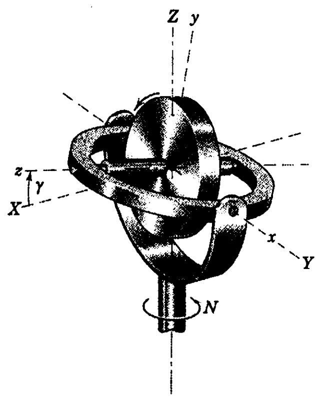
جواب
$$\mathbf{a} = -۵۲/۱\mathbf{i} - ۹/۲۳\mathbf{j} + ۱۲۰/۲\mathbf{k} \text{ m/s}^2$$
$$\boldsymbol{\alpha} = ۱۳/۸۶\mathbf{i} + ۲۰۸\mathbf{j} + ۵۲\mathbf{k} \text{ rad/s}^2$$



شکل مسئله ۷-۵۰

◀ ۷-۵۱ روتور تلسکوپ نشان داده شده با میزان ثابت ۱۰۰ rev/min نسبت به محورهای x-y-z در جهت مشخص شده، می‌چرخد. اگر زاویه γ بین حلقه گهواره داخلی و صفحه X-Y با میزان ثابت ٤ rad/s افزایش یافته و چنانچه مجموعه مجبور به پیشروش حول محور قائم با میزان ثابت $N =$ ۲۰ rev/min باشد؛ مقدار شتاب زاویه‌ای α روتور را در $\gamma =$ ۳۰° حساب کنید. با استفاده از رابطه ۷-۷ که به سرعت زاویه‌ای روتور اعمال می‌گردد، مسئله را حل کنید.

جواب $\alpha =$ ٤۲/۸ rad/s^2

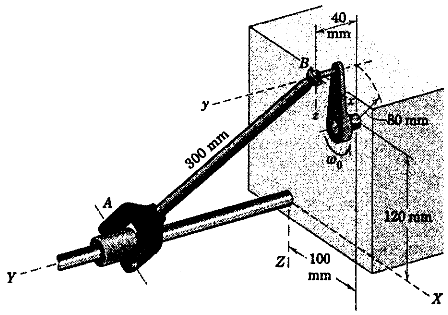


شکل مسئله ۷-۵۱

◀ ۷-۵۲ لنگی به شعاع ۸۰ mm با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_0 =$ ٤ rad/s می‌چرخد و باعث می‌شود، طوقه A در طول شافت ثابت نوسان نماید. سرعت طوقه A و سرعت زاویه‌ای لینک صلب AB را موقعی که لنگ مطابق شکل از وضعیت قائم می‌گذرد، تعیین کنید. (*تذکر:* لینک AB می‌تواند بدون سرعت زاویه‌ای حول یک محور باشد (بردار یکه $\mathbf{n}$) که عمود بر محورهای Y و محور پین قلاب U شکل است. بنابراین $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} =$ ۰ که در آن $\mathbf{n}$ دارای جهت ضرب سه بردار $\mathbf{J} \times (\mathbf{r}_{AB} \times \mathbf{J})$ می‌باشد.)

جواب $\mathbf{v}_A =$ ۰/۱۶۰$\mathbf{j}$ m/s

$\boldsymbol{\omega} =$ ۰/۳۲$(-$۲$\mathbf{i} +$ ٤$\mathbf{j} - \mathbf{k})$ rad/s



شکل مسئله ۷-۵۲

بخش B . سینتیک

۷-۷ مومنتم زاویه‌ای

معادله نیرو در مورد یک سیستم جرم، اعم از صلب یاغیر صلب، معادله ۱-٤ یا ٦-٤، تعمیمی از قانون دوم نیوتن در مورد حرکت یک ذره بوده و نیازی به توضیح بیشتری ندارد. معادله گشتاور در حرکت سه بعدی، به سادگی سومین معادله ۱-٦ در حرکت صفحه‌ای نیست، چون تغییر مومنتم زاویه‌ای در حالت سه بعدی دارای تعداد مولفه‌های بیشتری نسبت بـه حالت دو بعدی می‌باشد.

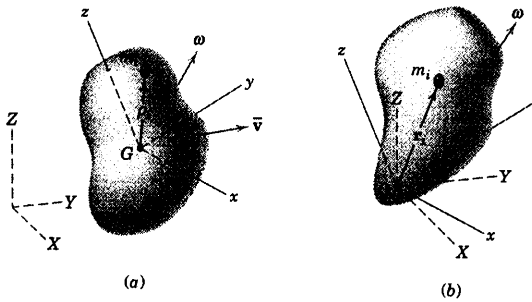
حال مطابق شکل ۷-۱۲a، جسم صلبی را در نظر می‌گیریم که در فضا دارای یک حرکت کلی است. مبدا محورهـای x-y-z به مرکز جرم G جسم *الصاق* شده است. در نتیجه، از دید ناظری که در دستگاه مرجع ثابت X-Y-Z قرار دارد، سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ جسم با سرعت زاویه‌ای محورهای x-y-z یکسان می‌شود. مومنتم زاویه‌ای مطلق $\mathbf{H}_G$ جسم حول مرکز جـرم G آن، با برآیند گشتاور مومنتم خطی کلیه المانهای جسم حول G برابر بوده و در بخش ٤-٤ به صورت $\mathbf{H}_G = \Sigma(\boldsymbol{\rho}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$ بیان شد که در آن $\mathbf{v}_i$ سرعت مطلق المان جرم m_i می‌باشد.

اما در مورد یک جسم صلب داریم: $\mathbf{v}_i = \bar{\mathbf{v}} + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i$ که در آن $\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i$ سـرعت نسـبی m_i نسبت بـه G از دیـدگاه محورهای غیر دوار است. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\mathbf{H}_G = -\bar{\mathbf{v}}\times\Sigma m_i\,\boldsymbol{\rho}_i + \Sigma[\boldsymbol{\rho}_i \times m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i)]$$

که در آن با جابجا کردن $\bar{\mathbf{v}}$ در اولین جمله مجموع، علامت جبری ضرب برداری تغییر می‌کند. با توجه به اینکه مبدا در مرکز جرم G قرار دارد، اولین جمله $\mathbf{H}_G$ صفر می‌شود، زیرا $\Sigma m_i\boldsymbol{\rho}_i = m\bar{\boldsymbol{\rho}} = \mathbf{0}$ در جمله دوم پس از جـایگزینی dm بـه جای m_i و $\boldsymbol{\rho}$ به جای $\boldsymbol{\rho}_i$ داریم:

$$\mathbf{H}_G = \int [\boldsymbol{\rho}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho})]\,dm \qquad (۷-۸)$$



شکل ۷-۱۲

قبل از بسط عبارت داخل انتگرال در رابطه ۷-۸، حالتی که یک جسم صلب مطابق شکل ۷-۱۲b حـول یـک نقطـه ثابت O دوران می‌کند را نیز در نظر می‌گیریم. محورهای x-y-z به جسم الصاق شده‌اند و هم جسم و هم محورهـا، هـر دو دارای سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ می‌باشند. در بخش ٤-٤ مومنتم زاویه‌ای حول O به صورت $\mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m_i \mathbf{v}_i)$ بیـان شـد، در

حالیکه برای یک جسم $\mathbf{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i$ است. بنابراین با جایگزینی dm به جای m_i و $\mathbf{r}$ به جای $\mathbf{r}_i$، مومنتم زاویه‌ای چنین می‌شود:

$$\mathbf{H}_O = \int [\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})]\, dm \qquad (۷-۹)$$

ممان‌ها و حاصلضرب‌های اینرسی

حال ملاحظه می‌کنیم که در هر دو حالت ارائه شده در شکل‌های ۷-۱۲a و ۷-۱۲b بردارهای موقعیت $\boldsymbol{\rho}_i$ و $\mathbf{r}_i$ هر دو با رابطه $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ مشخص می‌شوند. در نتیجه، معادلات ۷-۸ و ۷-۹ یکسان بوده و نماد $\mathbf{H}$ در اینجا برای هر دو حالت مزبور، مورد استفاده قرار می‌گیرد. اکنون در رابطه مومنتم زاویه‌ای، عبارت زیر انتگرال را به دو عبارت تبدیل می‌کنیم و به این واقعیت توجه داریم که مولفه‌های $\boldsymbol{\omega}$ نسبت به انتگرال تغییری نداشته و از این رو به صورت ضرایب ثابت انتگرال‌ها در می‌آیند. بسط ضرب خارجی را به ضرب برداری سه‌گانه اعمال می‌کنیم و پس از دسته بندی جملات، داریم:

$$\begin{aligned} d\mathbf{H} = \mathbf{i}[&(y^2+z^2)\omega_x && - xy\,\omega_y && - xz\,\omega_z]\,dm \\ +\mathbf{j}[&- yx\,\omega_x && + (z^2+x^2)\omega_y && - yz\,\omega_z]\,dm \\ +\mathbf{k}[&- zx\omega_x && - zy\,\omega_y && + (x^2+y^2)\,\omega_z]\,dm \end{aligned}$$

حال عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\boxed{\begin{aligned} I_{xx} &= \int (y^2 + z^2)\,dm & I_{xy} &= \int xy\,dm \\ I_{yy} &= \int (z^2 + x^2)\,dm & I_{xz} &= \int xz\,dm \\ I_{zz} &= \int (x^2 + y^2)\,dm & I_{yz} &= \int yz\,dm \end{aligned}} \qquad (۷-۱۰)$$

کمیت‌های I_{xx}، I_{yy} و I_{zz} به *ممان‌های اینرسی* جسم حول محورهای مربوطه و I_{xy}، I_{xz} و I_{yz} به *حاصلضرب‌های اینرسی* نسبت به محورهای مختصات موسوم می‌باشند. این کمیت‌ها چگونگی توزیع جرم یک جسم صلب را نسبت به محورهای انتخاب شده، تشریح می‌کنند. محاسبه ممان‌ها و حاصلضرب‌های اینرسی به طور کامل در ضمیمه B توضیح داده شده است. اندیس‌های دوتایی برای ممان‌ها و حاصلضرب‌های اینرسی تقارن نمادی را حفظ کرده و در شکل تانسوری دارای معنای ویژه‌ای می‌باشد*. مشاهده می‌شود که $I_{xy} = I_{yx}$ ، $I_{xz} = I_{zx}$ و $I_{yz} = I_{zy}$ است. پس از قرار دادن روابط ۷-۱۰ در عبارت $\mathbf{H}$ داریم:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{H} = &(I_{xx}\,\omega_x - I_{xy}\,\omega_y - I_{xz}\,\omega_z)\,\mathbf{i} \\ &+(- I_{yx}\,\omega_x + I_{yy}\,\omega_y - I_{yz}\,\omega_z)\,\mathbf{j} \\ &+(- I_{zx}\,\omega_x - I_{zy}\,\omega_y + I_{zz}\,\omega_z)\,\mathbf{k} \end{aligned}} \qquad (۷-۱۱)$$

و مولفه‌های $\mathbf{H}$ به صورت زیر آشکار می‌گردد:

* برای مثال، کتاب *دینامیک، ویرایش دوم، سیستم SI* ، سال ۱۹۷۵، انتشارات John Wiley & Sons بخش ۴۱ از *اولین مولف* را ببینید.

$$\boxed{\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\,\omega_x - I_{xy}\,\omega_y - I_{xz}\,\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\,\omega_x + I_{yy}\,\omega_y - I_{yz}\,\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\,\omega_x - I_{zy}\,\omega_y + I_{zz}\,\omega_z \end{aligned}} \qquad (۷-۱۲)$$

معادله ۱۱-۷ یک رابطه کلی برای مومنتم زاویه‌ای حول مرکز جرم G و یا حول یک نقطه ثابت O در مورد جسم صلبی است که با سرعت زاویه‌ای لحظه‌ای ω در حال دوران است.

شایان توجه است که در هر دو حالت ارائه شده، محورهای مرجع x-y-z به جسم صلب *الصاق* شده‌اند. این الصاق سبب می‌شود که انتگرال‌های مربوط به ممان اینرسی و حاصلضرب اینرسی در معادلات ۱۰-۷ با زمان تغییر نکنند. اگر محورهای x-y-z نسبت به یک جسم بدون تقارن دارای دوران بودند، در آن صورت این انتگرال‌های اینرسی، تابعی از زمان می‌شدند که پیچیدگی نامطلوبی را در روابط مومنتم زاویه‌ای به همراه می‌آورد. یک استثناء مهم وجود دارد و آن هنگامی است که یک جسم صلب حول یک محور تقارن دوران کند. در این حالت، انتگرال‌های اینرسی از موقعیت زاویه‌ای جسم، حول محور چرخش خود تاثیر نمی‌پذیرند. در نتیجه، غالباً مناسب است جسمی که دارای محور تقارن است، نسبت به یکی از محورهای دستگاه مختصات مرجع، دوران داشته باشد. در اینصورت علاوه بر مولفه‌های مومنتم ناشی از سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\Omega}$ محورهای مرجع، در راستای محور چرخش، یک مولفه مومنتم زاویه‌ای دیگر که ناشی از چرخش نسبی حول محوری که نیز باید به حساب آید، می‌باشد.

محورهای اصلی

در معادله ۱۲-۷ آرایه‌ای از ممان‌ها و حاصلضرب‌های اینرسی آشکار می‌شود؛ یعنی:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

که به *ماتریس اینرسی* یا *تانسور اینرسی* موسوم است. در صورتی که موقعیت محورها را نسبت به جسم تغییر دهیم، مقدار ممان‌ها و حاصلضرب‌های اینرسی تغییر خواهد کرد. می‌توان نشان داد* که یک موقعیت منحصر بفرد برای محورهای x-y-z با مبدا مشخص وجود دارد که به ازای آن، حاصلضرب‌های اینرسی صفر شده و ممان‌های اینرسی I_{xx}، I_{yy} و I_{zz} مقادیر ثابت به خود بگیرند. در چنین وضعیتی، ماتریس اینرسی به صورت زیر است.

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

و به آن ماتریس قطری گفته می‌شود. محورهای x-y-z که به ازای آن حاصلضرب‌های اینرسی صفر می‌شوند به *محورهای اصلی اینرسی* و I_{xx}، I_{yy} و I_{zz} به *ممان‌های اصلی اینرسی* موسوم می‌باشند. ممان‌های اصلی اینرسی با مبدا مختصاتی معلوم، معرف مقادیر حداکثر، حداقل و میانی ممان‌های اینرسی می‌باشند.

* برای مثال، کتاب *دینامیک، ویرایش دوم، سیستم SI*، سال ۱۹۷۵، انتشارات John Wiley & Sons بخش ۴۲ از *اولین مولف* را ببینید.

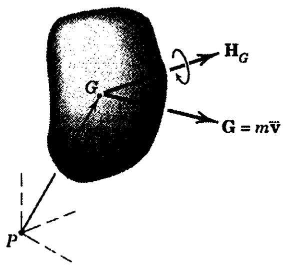
اگر محورهای دستگاه مختصات بر محورهای اصلی اینرسی منطبق شوند، معادله ۱۱-۷ در مورد مومنتم زاویه‌ای حول مرکز جرم یا حول یک نقطه ثابت، به صورت زیر می‌شود.

$$\boxed{\mathbf{H} = I_{xx}\,\omega_x\,\mathbf{i} + I_{yy}\,\omega_y\,\mathbf{j} + I_{zz}\,\omega_z\,\mathbf{k}} \qquad (۷-۱۳)$$

این امکان همیشه وجود دارد که محورهای اصلی اینرسی بر روی یک جسم صلب سه بعدی کلی قرار گیرد. در نتیجه، می‌توان مومنتم زاویه‌ای آن را توسط معادله ۱۳-۷ بیان کرد، گرچه ممکن است به دلیل هندسه جسم، نتوان این کار را انجام داد. به جز در مواردی که جسم حول یکی از محورهای اصلی اینرسی دوران کرده و یا $I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ ، بردارهای $\mathbf{H}$ و $\boldsymbol{\omega}$ دارای جهت‌های متفاوتی می‌باشند.

اصل انتقال مومنتم زاویه‌ای

خواص مومنتم یک جسم صلب را می‌توان مطابق شکل ۱۳-۷ توسط برآیند بردار مومنتم خطی $\mathbf{G} = m\bar{\mathbf{v}}$ گذرنده از مرکز جرم و برآیند برداری مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_G$ حول مرکز جرم نشان داد. گرچه $\mathbf{H}_G$ خواص یک بردار آزاد را دارد، ولی ما برای سهولت آنرا از نقطه G عبور می‌دهیم.



شکل ۱۳-۷

این بردارها دارای خواص شبیه بردارهای نیرو و گشتاور می‌باشند. در نتیجه، مومنتم زاویه‌ای حول هر نقطه‌ای مثل A که ممکن است بر روی جسم ثابت باشد و یا نباشد، با مجموع بردار آزاد $\mathbf{H}_G$ و بردار گشتاور مومنتم خطی حول نقطه A برابر است. بنابراین، می‌توان نوشت:

$$\boxed{\mathbf{H}_P = \mathbf{H}_G + \bar{\mathbf{r}} \times \mathbf{G}} \qquad (۷-۱٤)$$

این رابطه که پیش از این در فصل ٤ به صورت معادله ۱۰-٤ استخراج شد، همچنین در مورد نقطه ثابتی مثل O واقع بر جسم یا امتداد فرضی آن نیز صادق است که در آن O جایگزین P می‌شود. معادله ۱٤-۷ قضیه انتقال مومنتم زاویه‌ای را تشکیل می‌دهد.

۸-۷ انرژی جنبشی

در بخش ۳-٤ از فصل دینامیک سیستم ذرات، برای انرژی جنبشی T هر سیستم کلی جرم، اعم از صلب یا غیر صلب، رابطه زیر بدست آمد:

$$T = \tfrac{1}{2}m\bar{v}^2 + \Sigma\tfrac{1}{2}m_i|\dot{\rho}_i|^2 \qquad [٤-٤]$$

که در آن $\bar{\upsilon}$ سرعت مرکز جرم و $\boldsymbol{\rho}_i$ بردار موقعیت یک ذره نمونه به جرم m_i نسبت به مرکز جرم می‌باشد. اولین جمله را تحت عنوان انرژی جنبشی ناشی از انتقال سیستم و جمله دوم را انرژی جنبشی حاصل از حرکت نسبت به مرکز جرم معرفی کردیم. جمله انتقالی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tfrac{1}{2}m\bar{\upsilon}^2 = \tfrac{1}{2}m\dot{\bar{\mathbf{r}}}\cdot\dot{\bar{\mathbf{r}}} = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{G}$$

که در آن $\dot{\bar{\mathbf{r}}}$ سرعت $\bar{\mathbf{v}}$ مرکز جرم و $\mathbf{G}$ مومنتم خطی جسم است.

جمله نسبی در مورد یک جسم صلب همان انرژی جنبشی ناشی از دوران حول مرکز جرم است. از آنجایی که $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i$ سرعت ذره نماینده نسبت به مرکز جرم است. در این صورت در مورد یک جسم صلب، آن را می‌توان به صورت $\dot{\boldsymbol{\rho}}_i = \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i$ نوشت که $\boldsymbol{\omega}$ سرعت زاویه‌ای جسم است. با جایگذاری، جمله نسبی در عبارت انرژی جنبشی چنین می‌شود:

$$\Sigma\tfrac{1}{2}m_i\left|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right|^2 = \Sigma\tfrac{1}{2}m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i)$$

اگر از این واقعیت استفاده کنیم که می‌توان ضرب داخلی را با ضرب خارجی در حاصلضرب اسکالر سه‌گانه تعویض کرد؛ یعنی: $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\times\mathbf{R}$، بنابراین می‌توان نوشت:

$$(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i)\cdot(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i) = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\rho}_i\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i)$$

چون $\boldsymbol{\omega}$ عامل مشترک در تمام جملات مجموع است، می‌توان از آن فاکتورگیری کرد.

$$\Sigma\tfrac{1}{2}m_i\left|\dot{\boldsymbol{\rho}}_i\right|^2 = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\Sigma\boldsymbol{\rho}_i\times m_i(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{\rho}_i) = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}_G$$

که $\mathbf{H}_G$ همان عبارت انتگرالی معادله ۸-۷ است. در نتیجه، رابطه کلی برای انرژی جنبشی یک جسم صلب در حال حرکت با سرعت مرکز جرم $\bar{\mathbf{v}}$ و سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ چنین است:

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{G} + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}_G} \qquad (۷-۱۵)$$

با قرار دادن رابطه $\mathbf{H}_G$ از معادله ۱۱-۷ در رابطه فوق و بسط آن داریم:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\bar{\upsilon}^2 + \frac{1}{2}\left(\bar{I}_{xx}\omega_x^2 + \bar{I}_{yy}\omega_y^2 + \bar{I}_{zz}\omega_z^2\right) \\ &\quad - \left(\bar{I}_{xy}\omega_x\omega_y + \bar{I}_{xz}\omega_x\omega_z + \bar{I}_{yz}\omega_y\omega_z\right) \end{aligned} \qquad (۷-۱۶)$$

اگر محورها بر محورهای اصلی اینرسی منطبق شوند، انرژی جنبشی به صورت زیر خواهد شد:

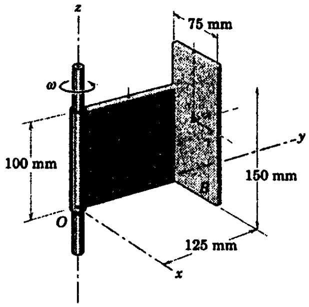
$$T = \frac{1}{2}m\bar{\upsilon}^2 + \frac{1}{2}\left(\bar{I}_{xx}\omega_x^2 + \bar{I}_{yy}\omega_y^2 + \bar{I}_{zz}\omega_z^2\right) \qquad (۷-۱۷)$$

در صورتیکه یک جسم صلب حول یک نقطه ثابت O مفصل شود و یا هنگامی که نقطه‌ای مثل O در جسم وجود داشته باشد که در لحظه‌ای سرعت آن صفر است، انرژی جنبشی برابر $T = \Sigma\frac{1}{2}m_i\dot{\mathbf{r}}_i\cdot\dot{\mathbf{r}}_i$ می‌شود. در اینصورت رابطه ۱۵-۷ چنین می‌شود:

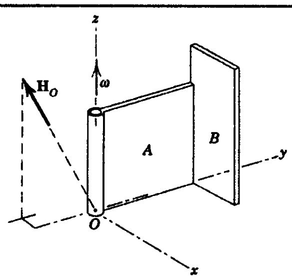
$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}_O} \qquad (۷-۱۸)$$

که $\mathbf{H}_O$ مومنتم زاویه‌ای حول نقطه O است و با قرار دادن $\boldsymbol{\rho}_i$ به جای $\mathbf{r}_i$ در رابطه‌ای که مومنتم زاویه‌ای را بیان می‌کند، بدست می‌آید. معادلات ۱۵-۷ و ۱۸-۷ شکل سه بعدی معادلات ۹-۶ و ۸-۶ در حرکت صفحه‌ای می‌باشند.

مسئله نمونه ۶-۷



ورق خم شده‌ای دارای جرم ۷۰ kg در هر متر مربع سطح بوده و حول محور z با میزان ω = ۳۰ rad/s دوران می‌کند. مطلوبست تعیین: (الف) مومنتم زاویه‌ای **H** ورق حول نقطه O و (ب) انرژی جنبشی T ورق. از جرم لـولا و ضخـامت ورق در مقایسه با ابعاد سطح آن صرفنظر کنید.



حل: ممان‌ها و حاصلضرب‌هـای اینرسی بـا کمـک رابطـه‌های B-۳ و B-۹ پیوست B بوسیله انتقال از محورهای موازی گذرنده از مرکز جرم برای هر قسـمت از ورق نوشته می‌شوند. ابتدا، جرم هر قسمت عبارت است از: ❶

m_A=(۰/۱۰۰)(۰/۱۲۵)(۷۰) = ۰/۸۷۵ kg و m_B=(۰/۰۷۵)(۰/۱۵)(۷۰) = ۰/۷۸۸ kg

قسمت A ورق

$$\left[I_{xx}=\bar{I}_{xx}+md^2\right] \qquad I_{xx}=\frac{0.875}{12}\left[(0.100)^2+(0.125)^2\right]$$
$$+0.875\left[(0.050)^2+(0.0625)^2\right]=0.00747\ \text{kg.m}^2$$

$$\left[I_{yy}=\frac{1}{3}ml^2\right] \qquad I_{yy}=\frac{0.875}{3}(0.100)^2=0.00292\ \text{kg.m}^2$$

$$\left[I_{zz}=\frac{1}{3}ml^2\right] \qquad I_{zz}=\frac{0.875}{3}(0.125)^2=0.00456\ \text{kg.m}^2$$

$$\left[I_{xy}=\int xy\,dm\ ,\ \ I_{xz}=\int xz\,dm\right] \qquad I_{xy}=0 \qquad I_{xz}=0$$

$$\left[I_{yz}=\bar{I}_{yz}+md_yd_z\right] \qquad I_{yz}=0+0.875(0.0625)(0.050)=0.00273\ \text{kg.m}^2$$

قسمت B ورق

$$\left[I_{xx}=\bar{I}_{xx}+md^2\right] \qquad I_{xx}=\frac{0.788}{12}(0.150)^2+0.788\left[(0.125)^2+(0.075)^2\right]=0.01821\ \text{kg.m}^2$$

$$\left[I_{yy}=\bar{I}_{yy}+md^2\right] \qquad I_{yy}=\frac{0.788}{12}\left[(0.075)^2+(0.150)^2\right]$$
$$+0.788\left[(0.0375)^2+(0.075)^2\right]=0.00738\ \text{kg.m}^2$$

$$\left[I_{zz}=\bar{I}_{zz}+md^2\right] \qquad I_{zz}=\frac{0.788}{12}(0.075)^2+0.788\left[(0.125)^2+(0.0375)^2\right]=0.01378\ \text{kg.m}^2$$

$$\left[I_{xy}=\bar{I}_{xy}+md_xd_y\right] \qquad I_{xy}=0+0.788(0.0375)(0.125)=0.00369\ \text{kg.m}^2$$

$$\left[I_{xz}=\bar{I}_{xz}+md_xd_z\right] \qquad I_{xz}=0+0.788(0.0375)(0.075)=0.00221\ \text{kg.m}^2$$

$$\left[I_{yz}=\bar{I}_{yz}+md_yd_z\right] \qquad I_{yz}=0+0.788(0.125)(0.075)=0.00738\ \text{kg.m}^2$$

از جمع عبارات مربوط به اینرسی مربوطه برای دو قسمت ورق نتیجه می‌گیریم:

$$I_{xx}=0.0257\ \text{kg.m}^2 \qquad I_{xy}=0.00369\ \text{kg.m}^2$$
$$I_{yy}=0.0103\ \text{kg.m}^2 \qquad I_{xz}=0.00221\ \text{kg.m}^2$$
$$I_{zz}=0.01834\ \text{kg.m}^2 \qquad I_{yz}=0.01012\ \text{kg.m}^2$$

(الف) مومنتم زاویه‌ای جسم بـا استفاده از رابطـه ۱۱-۷ داده می‌شـود کـه در آن $\omega_z =$ ۳۰ rad/s و ω_x و ω_y برابـر صفرند. در نتیجه:

❷ جواب $$\mathbf{H}_O = 30(-0.00221\ \mathbf{i} - 0.01012\ \mathbf{j} + 0.01834\ \mathbf{k})\ \ \text{N.m.s}$$

(ب) انرژی جنبشی از رابطه ۱۸-۷ چنین می‌شود:

جواب $$T = \frac{1}{2}\ \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O = \frac{1}{2}\ (30\,\mathbf{k}) \cdot 30(-0.00221\mathbf{i} - 0.01012\mathbf{j} + 0.01834\mathbf{k}) = 8.25\ \ \text{J}$$

نکات مفید

❶ *قضایای محورهای موازی برای انتقال ممان‌ها و حاصلضرب‌های اینرسی از محورهای گذرنده از مرکز جـرم بـه محورهـای مـوازی در پیوسـت B تشریح شده و روابط بسیار مفیدی می‌باشند.*

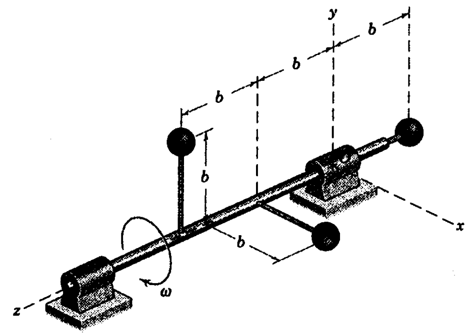
❷ *به یاد داشته باشید که آحاد مومنتم زاویه‌ای می‌تواند بر حسب آحاد پایه‌ای* kg.m^2/s *نیز نوشته شود.*

مسائل

مسائل مقدماتی

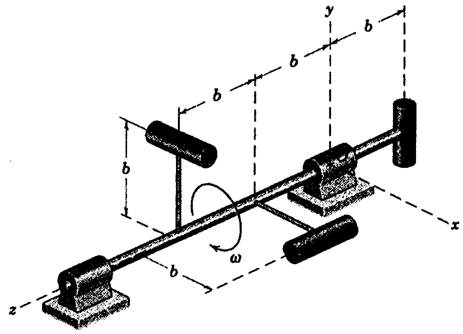
۷-۵۳ سه گوی کوچک، هر کدام به جرم m روی شافت افقی که با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کنند، مطابق شکل به صورت صلب نصب شده‌اند. از شعاع هر کدام از گوی‌ها در مقایسه با سایر ابعاد صرفنظر نموده، روابطی برای مقادیر مومنتم خطی $\mathbf{G}$ گوی‌ها و مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ آنها حول مبدا مختصات O بنویسید.

جواب $G = mb\omega\sqrt{۲}$ و $H_O = ۳mb\omega^{۲}$



شکل مسئله ۵۳-۷

۷-۵٤ گوی‌های مسئله ۵۳-۷ با سه میله، هر کدام به جرم m و طول l که مراکزشان مطابق شکل به شافت در حال دوران با سرعت زاویه‌ای ω سوار شده، جایگزین می‌گردند. محورهای میله‌ها به ترتیب در جهت‌های x، y و z بوده و قطر آنها در مقایسه با بقیه ابعاد، قابل چشم پوشی است. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ سه میله را نسبت به مبدا مختصات O تعیین نمایید.

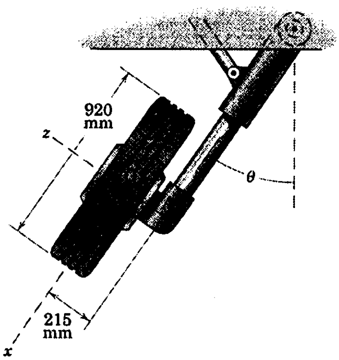


شکل مسئله ۵۴-۷

۷-۵۵ چرخ فرود هواپیما از نمای جلو، بلافاصله پس از برخاستن از زمین در حالیکه در حال جمع شدن است، نشان داده شده است. در حالیکه هواپیما با سرعت ۲۰۰ km/h در حال برخاستن است، چرخ در چرخش است. چرخ ٤۵ کیلوگرمی دارای شعاع ژیراسیون ۳۷۰ mm حول محور z می‌باشد. با صرفنظر کردن از ضخامت چرخ، مومنتم زاویه‌ای چرخ را حول G و حول A برای وضعیتی که θ با میزان °۳۰ در ثانیه در حال افزایش است، حساب کنید.

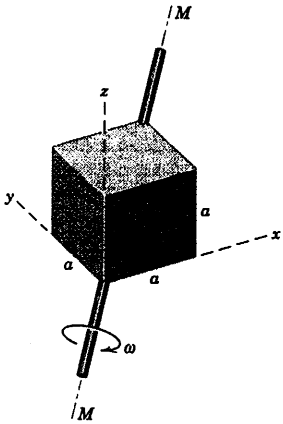
جواب $\mathbf{H}_G = -۱/۶۱۳\mathbf{j} - ۷٤٤\mathbf{k}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$

$\mathbf{H}_A = -۲/۷۰\mathbf{j} - ۷٤٤\mathbf{k}\ \text{kg.m}^2/\text{s}$



شکل مسئله ۵۵-۷

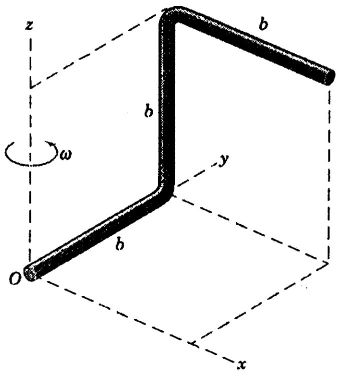
۵۶-۷ مکعب توپری به جرم m و ابعاد a حول محور قطری M-M با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. رابطه‌ای برای مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}$ مکعب، نسبت به محورهای نشان داده شده، بنویسید.



شکل مسئله ۵۶-۷

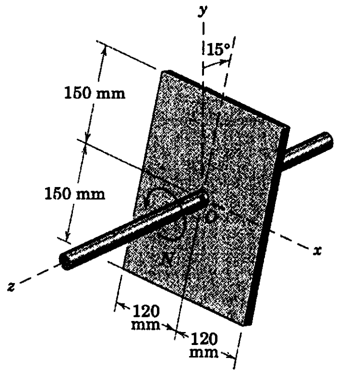
۵۷-۷ میله خمیده دارای جرم بر واحد طول ρ حول محور z با سرعت ω دوران می‌کند. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ میله را حول مبدا ثابت O محورهای مختصات که به میله الصاق شده‌اند، تعیین کنید. همچنین انرژی جنبشی T میله را پیدا کنید.

جواب
$$\mathbf{H}_O = \rho b^3\left(-\frac{1}{2}\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j} + \frac{8}{3}\mathbf{k}\right)\omega$$
$$T = \frac{4}{3}\rho b^3\omega^2$$



شکل مسئله ۵۷-۷

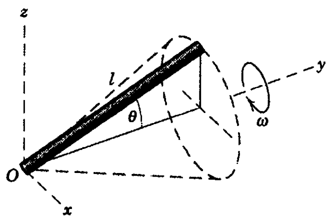
۵۸-۷ ورق فولادی مستطیل شکلی به جرم ۱۲ kg به شافتی که صفحه‌اش زاویه ۱۵ درجه با x-y عمود بر محور شافت می‌سازد، جوش شده است. شافت و ورق، حول محور ثابت z با میزان $N = ۳۰۰$ rev/min دوران می‌کنند. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ ورق را حول محورهای داده شده تعیین کرده و انرژی جنبشی T آن را پیدا کنید.



شکل مسئله ۵۸-۷

۵۹-۷ میله باریک به جرم m و طول l حول محور y به عنوان مولد یک مخروط قائم دوران می‌کند. اگر سرعت زاویه‌ای میله حول محور y برابر ω باشد، رابطه‌ای برای مومنتم زاویه‌ای آن نسبت به محورهای x-y-z در موقعیت خاص نشان داده شده، تعیین کنید.

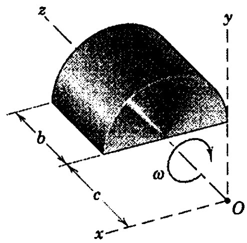
جواب
$$\mathbf{H} = \frac{1}{3}ml^2\omega\sin\theta(\sin\theta\,\mathbf{j} - \cos\theta\,\mathbf{k})$$



شکل مسئله ۵۹-۷

مسائل ویژه

۶۰-۷ نیم استوانهٔ توپری به جرم m مطابق شکل حول محور z با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌نماید. مومنتم زاویه‌ای **H** را نسبت به محورهای x-y-z تعیین نمایید.

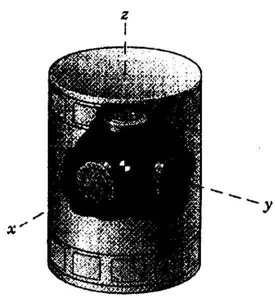


شکل مسئله ۶۰-۷

۶۱-۷ اجزای یک سیستم کنترل موقعیت، چرخ واکنشی، برای یک فضاپیما در شکل نشان داده شده است. نقطه G مرکز جرم سیستم فضاپیما و چرخ‌ها بوده و x، y و z محورهای اصلی سیستم می‌باشند. هر کدام از چرخ‌ها دارای جرم m و ممان اینرسی I حول محورهایشان بوده و با سرعت زاویه‌ای نسبی p در جهت نشان داده شده چرخش می‌نمایند. مرکز هر کدام از چرخ‌ها که می‌توانند مشابه یک دیسک نازک فرض شوند، دارای فاصله b از G می‌باشد. اگر فضاپیما دارای مولفه‌های سرعت زاویه‌ای Ω_x، Ω_y و Ω_z باشد، مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_G$ مجموعه سه چرخ را به عنوان یک واحد، بدست آورید.

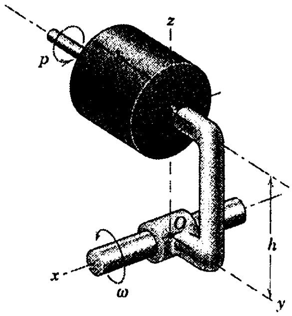
جواب $\mathbf{H}_G = Ip(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) + ۲(I+mb^۲)\ \mathbf{\Omega}$

که: $\mathbf{\Omega} = \Omega_x\,\mathbf{i} + \Omega_y\,\mathbf{j} + \Omega_z\,\mathbf{k}$



شکل مسئله ۶۱-۷

۶۲-۷ استوانه توپر به جرم m، شعاع r و طول b حول محور هندسی خود با سرعت زاویه‌ای p rad/s می‌چرخد. همزمان، پایه نگهدارنده استوانه و شافت متصل به آن حول محور x با میزان ω rad/s دوران می‌نمایند. عبارتی برای مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$، استوانه حول O با در نظر گرفتن محورهای مرجع، مطابق شکل بیان کنید.

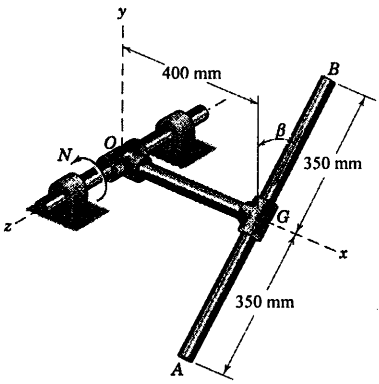


شکل مسئله ۶۲-۷

۶۳-۷ میله فولادی باریک AB به جرم ۲/۸ kg توسط میله OG و بست‌های O و G به شافت دوران کننده، متصل شده است. زاویه β به مقدار °۳۰ ثابت باقی مانده و کل مجموعه جسم حول محور z با میزان پایای $N =$۶۰۰ rev/min می‌چرخد. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ میله AB و انرژی جنبشی آن را محاسبه کنید.

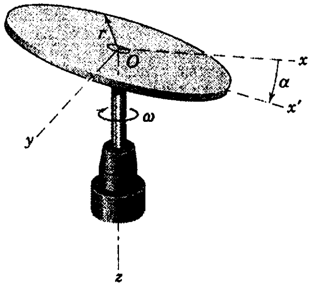
جواب $\mathbf{H}_O = ۳/۱۱\mathbf{j} + ۳۳/۵\mathbf{k}$ kg.m²/s

$T =$ ۱۰۵٤ J



شکل مسئله ۶۳-۷

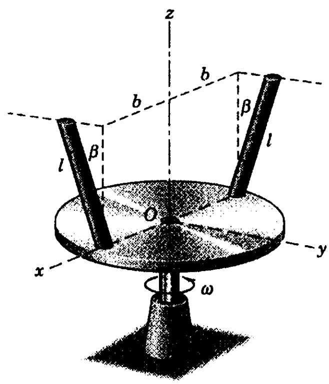
۷-۶۴ دیسک مدوری به جرم m و شعاع r به گونه‌ای بر روی شافت عمودی سوار شده که صفحه آن با صفحه دوران شافت زاویه α می‌سازد. رابطه‌ای برای مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}$ دیسک حول O تعیین کنید. زاویه β را که مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}$ با شافت در $\alpha = 10^\circ$ می‌سازد، پیدا کنید.



شکل مسئله ۶۴-۷

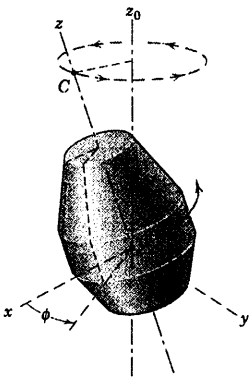
۷-۶۵ هر یک از میله‌های باریک به طول l و جرم m به دیسک مدوری که حول محور قائم z با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند، جوش شده است. هر یک از میله‌ها با امتداد قائم زاویه β را ساخته و در صفحه‌ای موازی صفحه y-z قرار گرفته است. عبارتی برای مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ دو میله حول مبدا O محورها تعیین نمایید.

جواب $\mathbf{H}_O = 2m\left[\frac{1}{3}l^2 \sin^2\beta + b^2\right]\omega\mathbf{k}$



شکل مسئله ۶۵-۷

۷-۶۶ کپسول فضایی نشان داده شده دارای جرم m با مرکز جرم G می‌باشد. شعاع ژیراسیون آن حول محور تقارن z برابر k بوده و حول هر یک از محورهای x یا y برابر k' می‌باشد. در فضا، کپسول در دستگاه مرجع x-y-z با سرعت چرخشی $p=\dot{\phi}$ دوران می‌کند. همزمان، نقطه C واقع بر محور z حول محور z_0 مسیری مدور را با فرکانس f(دور در واحد زمان) طی می‌کند. امتداد محور z_0 در فضا ثابت می‌باشد. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_G$ کپسول را نسبت به محورهای مشخص شده، تعیین کنید. توجه داشته باشید که محور x همواره در صفحه z_0-z قرار داشته و بنابراین محور y عمود بر z_0 می‌باشد.

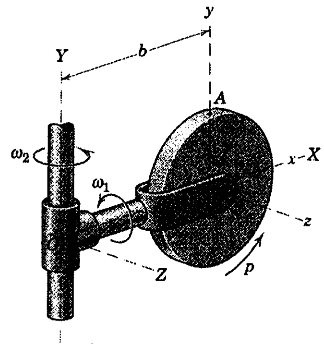


شکل مسئله ۶۶-۷

۷-۶۷ دیسک مدور یکنواخت مسئله ۴۶-۷ با سه مولفه سرعت زاویه‌ای مجدداً در اینجا نشان داده شده است. انرژی جنبشی T و مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ را نسبت به O دیسک برای لحظه نشان داده شده موقعی که صفحه x-y دیسک منطبق بر صفحه X-Y می‌باشد، تعیین کنید. جرم دیسک برابر m می‌باشد.

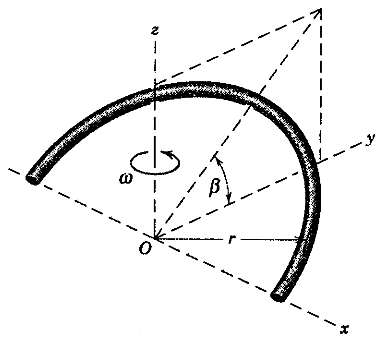
جواب $\mathbf{H}_O = \frac{1}{4}mr^2\left[-\omega_1\mathbf{i} + \left(1+\frac{4b^2}{r^2}\right)\omega_2\mathbf{j} + 2p\mathbf{k}\right]$

$$T = \frac{1}{8}mr^2\left[\omega_1^2 + \left(1+\frac{4b^2}{r^2}\right)\omega_2^2 + 2p^2\right]$$



شکل مسئله ۶۷-۷

۶۸-۷ حلقه نیم‌دایره به جرم m و شعاع r حول محور قائم z با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند. صفحه حلقه با صفحه افقی x-y زاویه β می‌سازد. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ حلقه را حول O تعیین کرده و انرژی جنبشی آن را پیدا کنید.

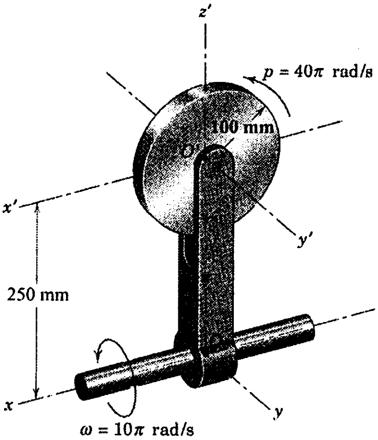


شکل مسئله ۶۸-۷

۶۹-۷ چرخی به شعاع ۱۰۰ mm و جرم ۳ kg حول محور y' خود با سرعت زاویه‌ای p = ۴۰π rad/s در جهت نشان داده شده می‌چرخد. همزمان، یوغ حول محور x شافت خود با سرعت زاویه‌ای ω = ۱۰π rad/s مطابق شکل دوران می‌کند. مومنتم زاویه‌ای چرخ را حول مرکزش O' حساب کنید. همچنین انرژی جنبشی چرخ را بدست آورید.

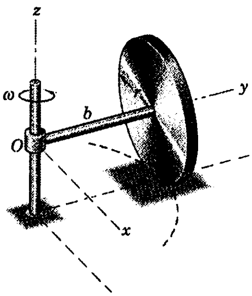
جواب $\mathbf{H}_{O'}$ = ۰/۲۳۶($\mathbf{i}$+۸$\mathbf{j}$) kg.m^2/s

T = ۲۱۵ J



شکل مسئله ۶۹-۷

۷۰-۷ دیسک مدور توپری به جرم m = ۲ kg و شعاع r = ۱۰۰ mm بدون لغزش بر روی مسیری مدور به شعاع b = ۲۰۰ mm در صفحه افق می‌غلتد. اگر خط مرکزی OC محور چرخ، حول محور z با سرعت زاویه‌ای ω = ۴π rad/s بچرخد، رابطه‌ای برای مومنتم زاویه‌ای دیسک نسبت به نقطه ثابت O بدست آورید. همچنین انرژی جنبشی چرخ را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۷۰-۷

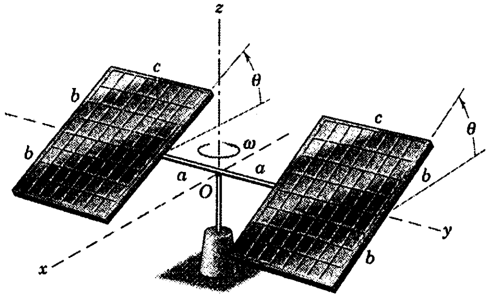
۷-۷۱ در آزمایش صفحات خورشیدی یک فضاپیما، مدل نشان داده شده حول محور قائم با میزان زاویه‌ای ω دوران می‌کند. اگر جرم بر واحد سطح صفحات ρ باشد، عباراتی برای مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ مجموع حول محورهای نشان داده شده، بر حسب θ بنویسید. همچنین مقادیر حداکثر، حداقل و متوسط ممان اینرسی حول محورهای گذرنده از O را تعیین کنید.

جواب
$$\mathbf{H}_O = \left(\frac{m}{۶}b^۲\omega \sin ۲\theta\right)\mathbf{i} + m\omega\left(\frac{c^۲}{۳}+\frac{b^۲}{۳}\cos^۲\theta + a^۲ + ac\right)\mathbf{k}$$

$$I_{\text{حداکثر}} = m\left(\frac{c^۲+b^۲}{۳} + a^۲ + ac\right)$$

$$I_{\text{متوسط}} = m\left(\frac{۱}{۳}c^۲ + a^۲ + ac\right)$$

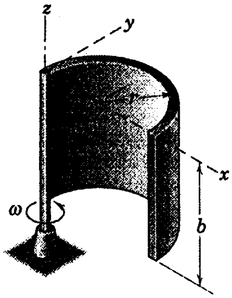
$$I_{\text{حداقل}} = \frac{۱}{۳}mb^۲$$



شکل مسئله ۷-۷۱

۷-۷۲ ◀ پوسته نیم استوانه به جرم m و شعاع r و طول b، حول یکی از لبه‌های خود در امتداد محور z با میزان ثابت ω مطابق شکل دوران می‌کند. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}$ پوسته را نسبت به محورهای x-y-z تعیین نمایید.

جواب
$$\mathbf{H} = mr\omega\left(\frac{b}{۲}\mathbf{i} + \frac{b}{\pi}\mathbf{j} + ۲r\mathbf{k}\right)$$



شکل مسئله ۷-۷۲

۷-۹ معادلات مومنتم و انرژی حرکت

در دو بخش قبل، مومنتم زاویه‌ای، خواص اینرسی و انرژی جنبشی یک جسم صلب مورد بررسی قرار گرفت و هم‌اکنون آماده‌ایم تا به معادلات کلی مومنتم و انرژی حرکت یک جسم صلب در فضا بپردازیم.

معادلات مومنتم

در بخش ٤-٤ از فصل ٤، معادلات کلی مربوط به مومنتم خطی و مومنتم زاویه‌ای یک سیستم با جرم ثابت را بررسی کردیم. این معادلات عبارتند از:

$$\boxed{\Sigma\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}} \qquad [٤-٦]$$

$$\boxed{\Sigma\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}} \qquad [٤-٧] \text{ یا } [٤-٩]$$

رابطه کلی گشتاور (معادله ٤-٧ یا ٤-٩) در اینجا توسط معادله $\Sigma\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ بیان شده که هر یک از جملات این رابطه می‌توانند هم حول نقطه ثابت O و هم حول مرکز جرم G نوشته شوند. در هنگام استخراج گشتاور، مشتق $\mathbf{H}$ نسبت به یک دستگاه مختصات مطلق گرفته شد. در صورتی که $\mathbf{H}$ بر حسب مولفه‌هایی بیان شود که نسبت به دستگاه مختصات متحرک x-y-z که با سرعت زاویه‌ای $\mathbf{\Omega}$ دوران می‌کند، سنجیده شوند؛ در این صورت با توجه به معادله ۷-۷ رابطه گشتاور به صورت زیر می‌شود.

$$\Sigma\mathbf{M} = \left(\frac{d\mathbf{H}}{dt}\right)_{xyz} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{H}$$
$$= \left(\dot{H}_x\mathbf{i} + \dot{H}_y\mathbf{j} + \dot{H}_z\mathbf{k}\right) + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{H}$$

جملات داخل پرانتز بیانگر بخشی از $\dot{\mathbf{H}}$ هستند که ناشی از تغییر اندازه مولفه‌های $\mathbf{H}$ بوده و جمله مربوط به ضرب برداری بیانگر آن بخشی است که ناشی از تغییر جهت‌های مولفه‌های $\mathbf{H}$ می‌باشد. با بسط دادن حاصلضرب برداری و مرتب کردن جملات داریم:

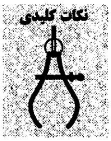
$$\boxed{\begin{aligned}\Sigma\mathbf{M} = &\left(\dot{H}_x - H_y\Omega_z + H_z\Omega_y\right)\mathbf{i}\\ &+\left(\dot{H}_y - H_z\Omega_x + H_x\Omega_z\right)\mathbf{j}\\ &+\left(\dot{H}_z - H_x\Omega_y + H_y\Omega_x\right)\mathbf{k}\end{aligned}} \qquad (۷-۱۹)$$

معادله ۱۹-۷ کلی‌ترین شکل معادله گشتاور حول یک نقطه ثابت O و یا حول مرکز جرم G می‌باشد. Ω_x، Ω_y و Ω_z مولفه‌های سرعت زاویه‌ای دوران محورهای مرجع می‌باشند و مولفه‌های H در مورد یک جسم صلب در معادله ۱۲-۷ تعریف شده‌اند که ω_x، ω_y و ω_z مولفه‌های سرعت زاویه‌ای جسم می‌باشند. اکنون معادله ۱۹-۷ را به جسم صلبی اعمال می‌کنیم که در آن محورهای مختصات به جسم *الصاق* شده‌اند. در چنین شرایطی، در مختصات x-y-z، *ممان‌ها و*

حاصلضرب‌های اینرسی نسبت به زمان تغییر ناپذیر بوده و بنابراین $\mathbf{\Omega}=\boldsymbol{\omega}$ می‌باشد. در نتیجه برای حالتی که محورها به جسم الصاق شده‌اند، سه مولفه اسکالر معادله ۱۹-۷ به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= \dot{H}_x - H_y\omega_z + H_z\omega_y\\ \Sigma M_y &= \dot{H}_y - H_z\omega_x + H_x\omega_z\\ \Sigma M_z &= \dot{H}_z - H_x\omega_y + H_y\omega_x\end{aligned} \qquad (۷-۲۰)$$

معادلات ۲۰-۷ معادلات کلی گشتاور در مورد حرکت جسم صلبی است که محورها به آن *الصاق* شده‌اند. این معادلات در مورد محورهای گذرنده از یک نقطه ثابت O و یا مرکز جرم G صادق می‌باشند.



در بخش ۷-۷ توجه کردیم که به طور کلی برای هر نقطه ثابت به عنوان مبدا بر روی یک جسم صلب، سه محور اصلی اینرسی وجود دارد که به ازای آن حاصلضرب‌های اینرسی صفر می‌شوند. اگر مبدا محورهای مرجع بر مبدا محورهای اصلی اینرسی در مرکز جرم G و یا در نقطه ثابت O از جسم منطبق شده و در فضا ثابت باشد، در این صورت I_{xy}، I_{yz} و I_{xz} صفر خواهند شد و معادلات ۲۰-۷ چنین می‌شوند:

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z\\ \Sigma M_y &= I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x\\ \Sigma M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y\end{aligned} \qquad (۷-۲۱)$$

این روابط به معادلات اویلر* معروف هستند که در مطالعه حرکت اجسام صلب فوق العاده مفید می‌باشند.

معادلات انرژی

برآیند کلیه نیروهای خارجی وارد بر یک جسم را می‌توان با نیروی برآیند $\Sigma\mathbf{F}$ وارد بر مرکز جرم و یک گشتاور برآیند $\Sigma\mathbf{M}_G$ که حول مرکز جرم وارد می‌شود، جایگزین کرد. کار انجام شده توسط نیرو و گشتاور برآیند به ترتیب به صورت $\Sigma\mathbf{F}\cdot\bar{\mathbf{v}}$ و $\Sigma\mathbf{M}_G\cdot\boldsymbol{\omega}$ می‌باشند که $\bar{\mathbf{v}}$ سرعت خطی مرکز جرم و $\boldsymbol{\omega}$ سرعت زاویه‌ای جسم است. با انتگرال گیری از روابط فوق از زمان مربوط به حالت ۱ تا زمان مربوط به حالت ۲، کل کار انجام شده در این برهه زمانی بدست می‌آید. با مساوی قرار دادن کار انجام شده با تغییرات انرژی جنبشی متناظر با آن که در معادله ۱۵-۷ بیان شده، داریم:

$$\int_{t_1}^{t_2}\Sigma\mathbf{F}\cdot\bar{\mathbf{v}}dt = \tfrac{1}{2}\bar{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{G}\Big|_1^2 \qquad \int_{t_1}^{t_2}\Sigma\mathbf{M}_G\cdot\boldsymbol{\omega}dt = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{H}_G\Big|_1^2 \qquad (۷-۲۲)$$

این معادلات به ترتیب تغییر در انرژی جنبشی ناشی از انتقال و تغییر در انرژی جنبشی ناشی از دوران را در طی آن برهه زمانی که $\Sigma\mathbf{F}$ یا $\Sigma\mathbf{M}_G$ اعمال می‌شوند، بیان می‌کنند و مجموع این دو عبارت با ΔT برابر است.

* به افتخار لئونارد اویلر (۱۷۸۳-۱۷۰۷)، ریاضی‌دان سوئیسی

رابطه کار ـ انرژی در فصل ٤ در مورد یک سیستم کلی ذرات مطرح شد که به صورت زیر است.

$$U'_{1-2} = \Delta T + \Delta V_g + \Delta V_e \qquad [٤-۳]$$

که در فصل ٦ در مورد حرکت صفحه‌ای اجسام صلب مورد استفاده قرار گرفت. این معادله به جسم صلبی که دارای حرکت سه بعدی است قابل اعمال است. همان طور که قبلاً دیده‌ایم، روش انرژی هنگامی دارای مزیت زیاد است که در موقع تحلیل، شرایط نقاط انتهایی حرکت را داشته باشیم (شرایط اولیه و نهایی). در اینجا کار انجام شده U'_{1-2} توسط کلیه نیروهای فعال خارجی بر روی جسم و یا سیستم در طی یک زمان معین با مجموع تغییرات ایجاد شده در انرژی جنبشی ΔT، انرژی پتانسیل الاستیکی ΔV_e و انرژی پتانسیل جاذبه‌ای ΔV_g مساوی می‌باشد. تغییرات انرژی پتانسیل از طریق روشی تعیین می‌گردد که قبلاً در بخش ۷-۳ ذکر گردید.

ما بکارگیری معادلاتی را که در این بخش مطرح می‌شوند به دو دسته خاص از مسائل محدود می‌کنیم. یکی مسائل مربوط به حرکت در صفحه موازی و دیگری حرکت ژیروسکوپی که در دو بخش بعدی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

۱۰-۷ حرکت در صفحه موازی

در صورتی که کلیه ذرات یک جسم صلب در صفحاتی به موازات یک صفحه ثابت حرکت کنند، جسم دارای یک شکل کلی از حرکت صفحه‌ای می‌شود که در بخش ٤-۷ مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت و در شکل ۳-۷ نشان داده شد. هر خطی از این جسم که بر صفحه ثابت عمود باشد، در هر لحظه به موازات امتداد اولیه خود باقی خواهد ماند. مبدا دستگاه مختصات x-y-z الصاقی به جسم را بر روی مرکز جرم G قرار می‌دهیم، به طوری که صفحه x-y بر صفحه حرکت P منطبق شود. مولفه‌های سرعت زاویه‌ای جسم و محورهای متصل به آن عبارتند از: $\omega_x = \omega_y = 0$ و $\omega_z \neq 0$. در چنین حالتی، مولفه‌های مومنتم زاویه‌ای از معادله ۱۲-۷ به صورت زیر خواهد شد.

$$H_x = -I_{xz}\,\omega_z \qquad H_y = -I_{yz}\,\omega_z \qquad H_z = I_{zz}\,\omega_z$$

و معادلات گشتاور از معادله ۲۰-۷ به معادلات زیر کاهش می‌یابند.

$$\boxed{\begin{aligned} \Sigma M_x &= -I_{xz}\dot{\omega}_z + I_{yz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_y &= -I_{yz}\dot{\omega}_z - I_{xz}\omega_z^2 \\ \Sigma M_z &= I_{zz}\dot{\omega}_z \end{aligned}} \qquad (۷-۲۳)$$

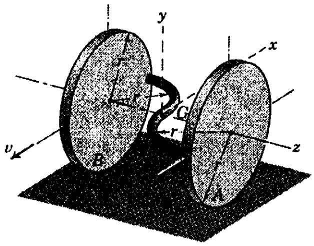
دیده می‌شود در حالتی که محورz از مرکز جرم بگذرد، سومین معادله گشتاور با دومین معادله ۱-٦ برابر است و اگر محور z از نقطه ثابت O بگذرد، با معادله ٤-٦ معادل است

معادلات ۲۳-۷ مطابق شکل ۳-۷ در مورد مبدا مختصات واقع بر مرکز جرم و یا هر مبدا واقع بر محور ثابت دوران صادق است. سه معادله مستقل از حرکت نیز در مورد حرکت در صفحه موازی بکار برده می‌شوند.

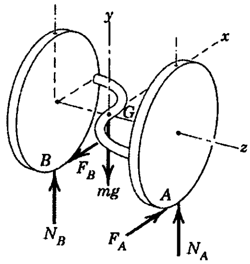
$$\Sigma F_x = m\bar{a}_x \qquad \Sigma F_y = m\bar{a}_y \qquad \Sigma F_z = 0$$

معادلات ۲۳-۷ دارای کاربرد ویژه‌ای در تشریح اثر ناموزونی دینامیکی در شافت‌های دوار و اجسام غلتان می‌باشند.

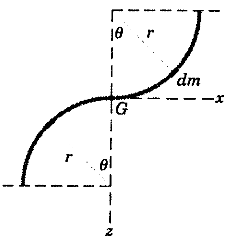
مسئله نمونه ۷-۷



دو دیسک مدور، هر یک به جرم m_1، توسط میله خمیده‌ای که به صورت دو خم ربع دایره می‌باشد، با جوشکاری به یکدیگر متصل شده‌اند. میله دارای جرم m_2 می‌باشد. جرم کل مجموعه برابر $m = 2\,m_1 + m_2$ است. اگر دیسک‌ها بدون لغزش بر روی سطح افقی با سرعت ثابت مرکزی v بغلتد، مقدار نیروی اصطکاک وارد بر هر دیسک را در لحظه نشان داده شده، موقعی که صفحه میله خمیده در وضعیت افقی است، تعیین کنید.



حل: حرکت به صورت حرکت صفحه‌ای تعریف می‌گردد. زیرا صفحات حرکت کلیه اجزاء سیستم با یکدیگر موازی هستند. ترسیمه آزاد جسم، نیروهای عمود و نیروهای اصطکاک در A و B و وزن کل mg که به مرکز جرم G وارد می‌شود را نشان می‌دهد که در آن G به عنوان مبدا مختصات در نظر گرفته شده و همراه جسم دوران می‌کند.



اکنون از رابطه ۲۳-۷ استفاده کرده که در آن $I_{yz} = 0$ و $\dot{\omega}_z = 0$ است. نوشتن رابطه گشتاور حول محور y مستلزم تعیین I_{xz} است. از ترسیمه نشان دهنده هندسه میله خمیده و با در نظر گرفتن ρ به عنوان جرم در واحد طول میله، داریم:

$$\left[I_{xz} = \int xz\,dm\right] \qquad I_{xz} = \int_0^{\pi/2} (r\sin\theta)(-r + r\cos\theta)\rho r\,d\theta + \int_0^{\pi/2} (-r\sin\theta)(r - r\cos\theta)\rho r\,d\theta$$ ❶

با انتگرال گیری از رابطه فوق نتیجه می‌شود:
$$I_{xz} = -\frac{\rho r^3}{2} - \frac{\rho r^3}{2} = -\rho r^3 = -\frac{m_2 r^2}{\pi}$$

دومین رابطه از معادله ۲۳-۷ با در نظر گرفتن $\omega_z = v/r$ و $\dot{\omega}_z = 0$ نتیجه می‌شود:

$$\left[\Sigma M_y = -I_{xz}\omega_z^2\right] \qquad F_A r + F_B r = -\left(-\frac{m_2 r^2}{\pi}\right)\frac{v^2}{r^2} \qquad F_A + F_B = \frac{m_2 v^2}{\pi r}$$

اما با توجه به $\bar{v} = v$ ثابت، $\bar{a}_x = 0$ نتیجه می‌گردد: $F_A = F_B$

$$[\Sigma F_x = 0] \qquad F_A - F_B = 0$$

بنابراین: جواب
$$F_A = F_B = \frac{m_2 v^2}{2\pi r}$$

توجه می‌کنیم که در موقعیتی که $I_{yz} = 0$ و $\dot{\omega}_z = 0$ است، رابطه گشتاور حول محور x چنین نتیجه می‌دهد:

$$[\Sigma M_x = 0] \qquad -N_A r + N_B r = 0 \qquad N_A = N_B = mg/2$$ ❷

نکات مفید

❶ باید خیلی دقت نمود که برای هر یک از مختصات المان جرم dm که حاصلضرب xz را می‌سازد، علامت صحیح در نظر گرفته شود.

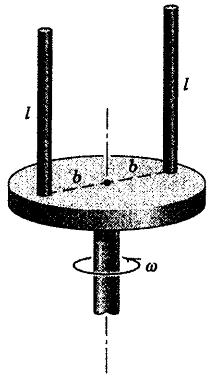
❷ هنگامی که صفحه میله خمیده، افقی نیست، نیروهای عمودی زیر دیسک دیگر مساوی با هم نیستند.

مسائل

مسائل مقدماتی

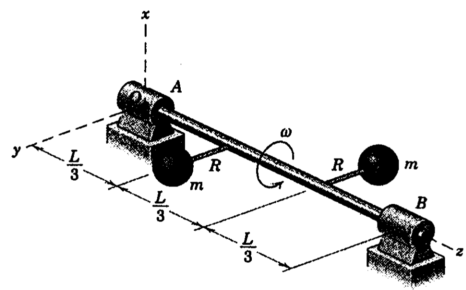
۷-۷۳ هر یک از دو میله به جرم m بر روی دیسکی که حول محور قائم با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند، جوش شده است. گشتاور خمشی M، اعمال شده بر هر میله در پایه‌اش را تعیین کنید.

جواب $M=\frac{۱}{۲}mbl\omega^{۲}$



شکل مسئله ۷-۷۳

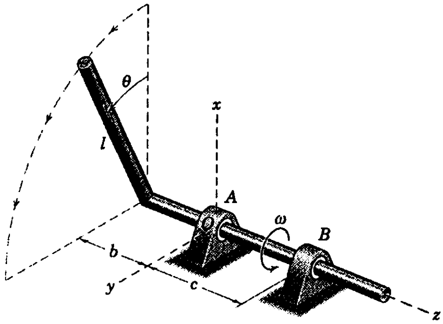
۷-۷۴ شافت باریک حامل دو ذره خارج از مرکز، هر یک به جرم m با سرعت زاویه‌ای ثابت ω مطابق شکل دوران می‌کند. مولفه‌های x و y عکس العمل‌های یاتاقانهای A و B را که ناشی از ناموزونی دینامیکی محور در موقعیت نشان داده شده است، بدست آورید.



شکل مسئله ۷-۷۴

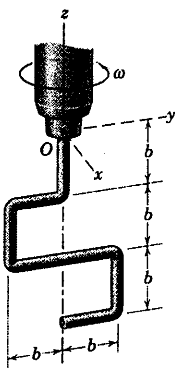
۷-۷۵ میله باریک یکنواختی به طول l و جرم m به شافتی که در یاتاقانهای A و B با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند، جوش شده است. رابطه‌ای برای نیروی تحمل شده توسط یاتاقان B به صورت تابعی از θ تعیین کنید. فقط نیروی ناشی از ناموزونی دینامیکی را در نظر بگیرید و فرض کنید که یاتاقانها فقط نیروهای شعاعی را تحمل می‌کنند.

جواب $B=\frac{mbl\omega^{۲}}{۲c}$



شکل مسئله ۷-۷۵

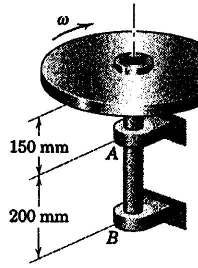
۷-۷۶ رنگ همزن نشان داده شده در شکل، از میله‌ای به طول $۷b$ و جرم بر واحد طول ρ ساخته شده است. قبل از فرو بردن در رنگ، همزن آزادانه با سرعت زاویه‌ای زیاد و ثابت ω حول محور z خود می‌چرخد. گشتاور خمشی M میله را در پایه گیره O بدست آورید.



شکل مسئله ۷-۷۶

۷-۷۷ دیسک دوار ٦ کیلوگرمی همراه شافت متصل به آن با سرعت ثابت $\omega = ۱۰۰۰۰$ rev/min دوران می‌کند. اگر مرکز جرم دیسک ۰/۰۵ mm خارج از مرکز باشد، مقادیر نیروهای افقی A و B را که توسط یاتاقانها به علت ناموزونی دورانی تحمل می‌شود، تعیین کنید.

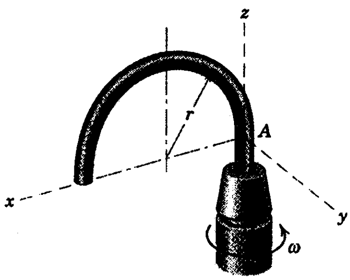
جواب $A = ۵۷٦$ N و $B = ۲٤۷$ N



شکل مسئله ۷-۷۷

مسائل ویژه

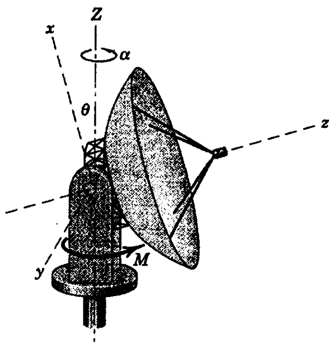
۷-۷۸ مطلوب است محاسبه گشتاور خمشی M در نقطه مماسی A در میله نیم حلقه‌ای به شعاع r و جرم m که مطابق شکل حول محور مماسی خود با سرعت زاویه‌ای ثابت و زیاد ω دوران می‌کند. از گشتاور mgr که ناشی از وزن میله می‌باشد، صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۷-۷۸

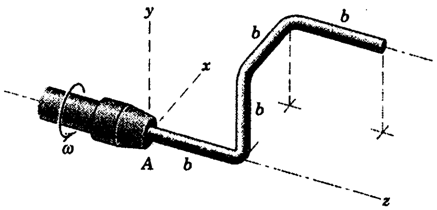
۷-۷۹ آنتن بزرگ گیرندهٔ ماهواره، دارای ممان اینرسی I حول محور تقارن z خود بوده و I_O ممان اینرسی آن حول محورهای x و y می‌باشد. شتاب زاویه‌ای α آنتن را حول محور قائم Z که بر اثر اعمال گشتاور M حول Z و توسط مکانیزم محرکی برای جهت θ داده شده بوجود می‌آید، تعیین کنید.

جواب $$\alpha = \frac{M}{I_O \cos^2\theta + I \sin^2\theta}$$



شکل مسئله ۷-۷۹

۷-۸۰ میله نامنظم دارای جرم بر واحد طول ρ بوده و حول محور z شافت با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند. گشتاور خمشی M میله را در A تعیین کنید. از گشتاور جزئی ناشی از وزن میله صرفنظر کنید.



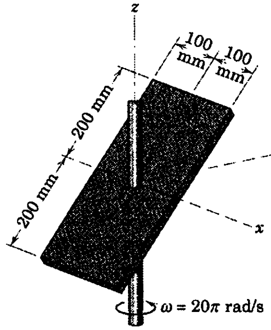
شکل مسئله ۷-۸۰

۷-۸۱ اگر میله مسئله ۷-۸۰ از حالت سکون تحت تاثیر گشتاور M_O که توسط طوقه A حول محور z به آن وارد می‌شود، شروع به حرکت نماید، گشتاور خمشی اولیه M میله را در A تعیین کنید. از گشتاور جزئی ناشی از وزن میله صرفنظر کنید.

جواب $$M = \frac{3\sqrt{13}}{11} M_O$$

۷-۸۲ ورق دارای جرم ۳ kg بوده و به شافت قائم ثابتی که با سرعت ثابت 20π rad/s دوران می‌کند، جوش داده شده است. گشتاور **M** را که در اثر ناموزونی دینامیکی توسط

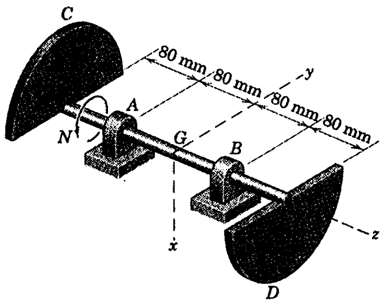
ورق به شافت اعمال می‌گردد، محاسبه کنید.



شکل مسئله ۸۲-۷

۸۳-۷ هر یک از دو دیسک نیم‌دایره دارای جرم ۱/۲۰ kg بوده و به شافتی که در یاتاقانهای A و B قرار دارد، جوش داده شده است. نیروهای وارد به شافت توسط یاتاقانها را برای سرعت زاویه‌ای ثابت $N = ۱۲۰۰$ rev/min حساب کنید. از نیروهای تعادل استاتیکی صرفنظر کنید.

جواب $\mathbf{F}_A = ۱۶۰۸\mathbf{i}$ N و $\mathbf{F}_B = -۱۶۰۸\mathbf{i}$ N

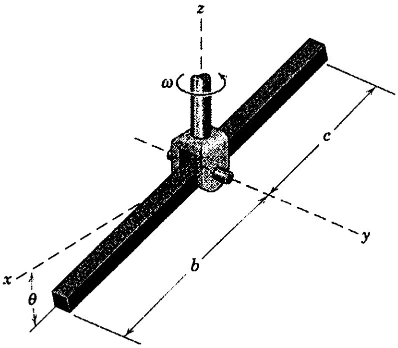


شکل مسئله ۸۳-۷

۸۴-۷ مسئله ۸۳-۷ را برای حالتی که مجموعه از حالت سکون با شتاب زاویه‌ای اولیه $\alpha = ۹۰۰$ rad/s^2 ناشی از اعمال گشتاور (کوپل) M وارد بر شافت در همان جهت N، شروع به حرکت کند، حل کنید. از ممان اینرسی شافت حول محور z صرفنظر کرده و M را حساب کنید.

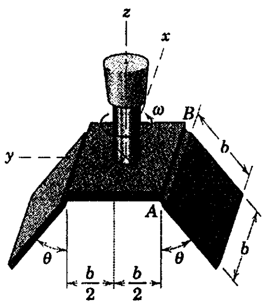
۸۵-۷ میله باریک یکنواختی به جرم بر واحد طول ρ آزادانه حول محور y در قلاب U شکلی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول قائم z دوران می‌کند، لولا شده است. زاویه حالت پایای θ تمایل میله را تعیین کنید. طول b بزرگتر از طول c است.

جواب $$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{3g}{2\omega^2}\frac{b^2 - c^2}{b^3 + c^3}\right)$$



شکل مسئله ۸۵-۷

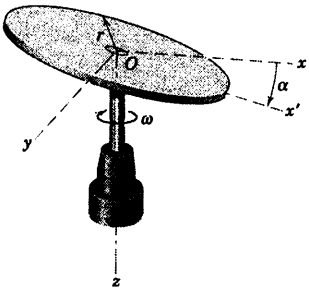
۸۶-۷ دریچه‌های مربعی شکل یکنواختی که جرم هر کدام m می‌باشد، در A و B به ورق مربعی شکل آزادانه لولا شده‌اند. ورق مذکور به شافت قائمی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z دوران می‌کند، متصل شده است. سرعت زاویه‌ای ω لازم را برای باقی ماندن دریچه‌ها در یک زاویه مشخص مثبت θ تعیین کنید.



شکل مسئله ۸۶-۷

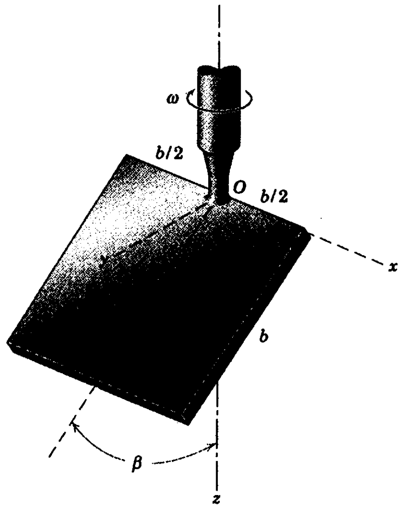
۷-۸۷ دیسک مدور به جرم m و شعاع r بر روی شافت عمودی تحت زاویه کوچک α، بین صفحه دیسک و صفحه دوران شافت، سوار شده است. اگر شافت با سرعت ω دوران نماید، رابطه‌ای برای گشتاور خمشی $\mathbf{M}$ اعمال شده بر روی شافت بر اثر لنگی دیسک تعیین کنید.

جواب $\mathbf{M} = (\frac{1}{8}\, m r^2\, \omega^2 \sin 2\alpha)\, \mathbf{j}$



شکل مسئله ۷-۸۷

۷-۸۸ ورق مربع شکل یکنواختی به جرم m در نقطه O به انتهای شافتی که حول محور قائم z با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند، جوش داده شده است. گشتاور اعمال شده بر ورق توسط جوش را که تنها ناشی از دوران است، تعیین کنید.

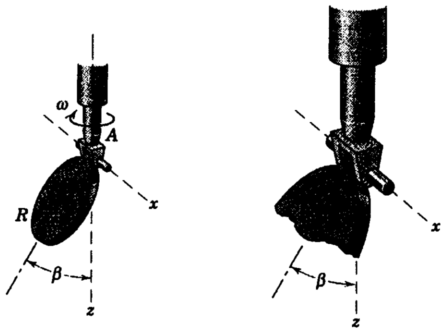


شکل مسئله ۷-۸۸

۷-۸۹ برای ورق به جرم m مسئله ۷-۸۸، مولفه‌های x و y گشتاور اعمال شده بر ورق توسط جوش در O را چنان تعیین کنید که باعث شود ورق از حالت سکون با شتاب زاویه‌ای $\alpha = \dot{\omega}$ شروع به حرکت نماید. از گشتاور ناشی از وزن صرفنظر کنید.

جواب
$$M_y = -\frac{1}{6}\, m b^2 \alpha \sin 2\beta$$
$$M_z = \frac{1}{12}\, m b^2 \alpha (1 + 4\sin^2\beta)$$

۷-۹۰ دیسک مدور و نازک به جرم m و شعاع R حول محور افقی مماس بر آن به انتهای شافت دواری که حول محور قائم خود با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند، متصل شده است. زاویه حالت پایای β را که صفحه دیسک با محور قائم می‌سازد، تعیین کنید. هرگونه محدودیت روی ω را برای حصول اطمینان از شرط $\beta > 0$ در نظر بگیرید.

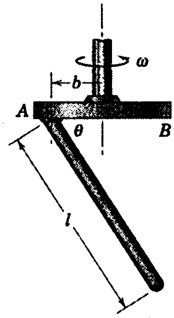


جزئیات مفصل در A

شکل مسئله ۷-۹۰

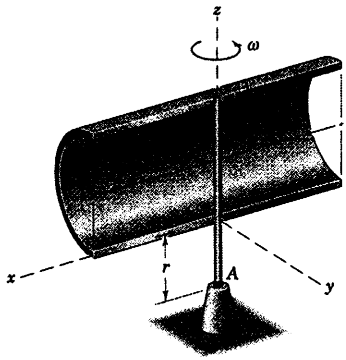
۷-۹۱ میله باریک یکنواختی به طول l به قسمت زیرین دیسک B در نقطه A جوش شده است. دیسک با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور قائم دوران می‌کند. مقدار ω را طوری تعیین کنید که گشتاوری که جوش در نقطه A تحمل می‌کند، در موقعیت $\theta = 60^\circ$ و به ازای $b = l/4$ برابر صفر گردد.

جواب $\omega = 2\sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{l}}$



شکل مسئله ۹۱-۷

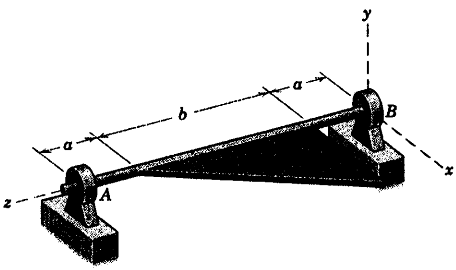
۹۲-۷ پوسته نیم استوانه به شعاع r، طول $2b$ و جرم m حول محور قائم z با سرعت زاویه‌ای ثابت ω مطابق شکل دوران می‌کند. مقدار گشتاور خمشی M وارد بر شافت در A را ناشی از دو عامل وزن و حرکت دورانی پوسته، تعیین کنید.



شکل مسئله ۹۲-۷

۹۳-۷ ◀ ورق مثلثی شکل نازک یکنواختی به جرم m به شافت افقی که در یاتاقان‌های A و B آزادانه دوران می‌کند، جوش داده شده است. اگر ورق از حالت سکون در موقعیت افقی نشان داده شده رها گردد، مقدار نیروی عکس العمل یاتاقان A را بلافاصله پس از رها شدن، تعیین کنید.

جواب $A = mg/6$



شکل مسئله ۹۳-۷

۹۴-۷ ◀ اگر ورق مثلثی شکل یکنواخت مسئله ۹۳-۷ از حالت سکون در موقعیت نشان داده شده، رها گردد؛ مقدار نیروی عکس العمل یاتاقان A را پس از چرخش ورق به اندازه °۹۰ تعیین کنید.

جواب $A = \frac{mg}{3}\left[\frac{7a+2b}{2a+b}\right]$

۷-۱۱ حرکت ژیروسکوپی: پیشروش پایا

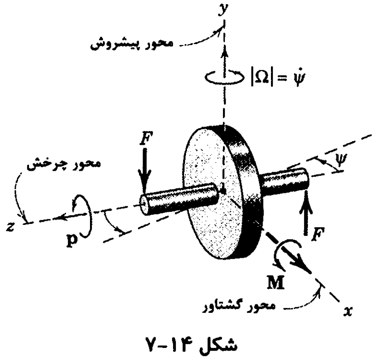
یکی از جالب‌ترین مسائل دینامیکی حرکت ژیروسکوپی است. این حرکت در صورتی رخ می‌دهد که محوری که جسم حول آن می‌چرخد، خود نیز حول محور دیگری دوران کند. گرچه تشریح کامل این حرکت پیچیدگی‌های قابل ملاحظه‌ای را در بر دارد، ولی معمولی‌ترین و مفیدترین مسائل حرکت ژیروسکوپی هنگامی اتفاق می‌افتد که محور روتور دوار با سرعت ثابت و با میزان پایا حول محور دیگری بچرخد (پیشروش کُند). در این بخش، بحث ما بر روی این حالت خاص متمرکز خواهد شد.

ژیروسکوپ دارای کاربردهای مهندسی مهمی است. ژیروسکوپ به دلیل داشتن گهواره (شکل ۷-۱۹b را ببینید) از تاثیر هرگونه گشتاورهای خارجی آزاد می‌گردد و جهت محورش در فضا بدون توجه به دوران سازه‌ای که به آن متصل است، ثابت باقی می‌ماند. به این ترتیب، ژیروسکوپ در مورد سیستم‌های هدایت با استفاده از خاصیت اینرسی و سایر وسائل کنترل راستای حرکت، مورد استفاده قرار می‌گیرد. با افزودن یک جرم آونگ گونه به گهوراه داخلی، دوران زمین سبب می‌شود که ژیروسکوپ به گونه‌ای پیشروش کند که محور دوران همیشه به جهت شمال باشد و این عمل اساس کار قطب‌نمای ژیروسکوپی را تشکیل می‌دهد. ژیروسکوپ همچنین به عنوان یک وسیله پایدار کننده مهم مورد استفاده قرار می‌گیرد. پیشروش کنترل شده یک ژیروسکوپ بزرگ که در یک کشتی جهت ایجاد گشتاور ژیروسکوپی نصب می‌شود، باعث می‌شود تا در جهت مخالف با حرکت غلتشی (پهلو به پهلو شدن) کشتی در دریا بکار رود. در طراحی یاتاقان‌های شافت روتورها که نیروی ناشی از پیشروش را تحمل می‌کنند، اثر ژیروسکوپی نیز از اهمیت فوق العاده زیادی برخوردار است.

ابتدا اثر ژیروسکوپی با روش ساده فیزیکی که مبتنی بر تجربیات قبلی ما در تغییرات بردارها در مبحث دینامیک صفحه‌ای می‌باشد، مورد تشریح قرار می‌گیرد. این روش به ما کمک خواهد کرد تا اطلاعات فیزیکی مستقیمی را در مورد اثر ژیروسکوپی بدست آوریم. سپس با استفاده از رابطه کلی مومنتم (معادله ۷-۱۹)، تشریح کامل‌تری را ارائه خواهیم داد.

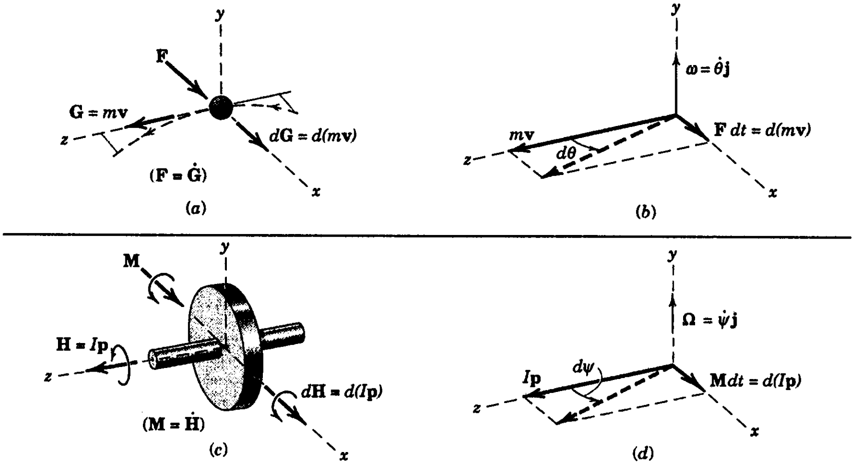
روش ساده شده

شکل ۷-۱٤ روتور متقارنی را نشان می‌دهد که با سرعت زاویه‌ای زیاد $\mathbf{p}$ حول محور z دوران می‌کند که به سرعت چرخش حول محور خود موسوم است. اگر دو نیروی F را که تشکیل یک کوپل $\mathbf{M}$ داده و جهت بردار آن در راستای محور x است، به محور روتور اعمال کنیم، درخواهیم یافت که محور روتور در صفحه x-y با سرعت زاویه‌ای نسبتاً آرام $\Omega=\dot{\psi}$ که به سرعت پیشروش معروف است حول محور y دوران می‌کند.



شکل ۷-۱۴

در نتیجه، دارای سه محور هستیم که عبارتند از: محور چرخش (**p**)، محور گشتاور (**M**) و محور پیشروش (**Ω**) که این محورها از قاعده دست راست پیروی کرده و بردارهای دوران را مشخص می‌کنند. اگر روتور حول محور خود دوران نمی‌کرد، محور روتور در جهت بردار **M** حول محور x نمی‌گردید. به منظور درک این پدیده، به طور مستقیم بین بردارهای دوران و بردارهای نظیر آنچه حرکت منحنی الخط یک ذره را تشریح می‌کنند، مقایسه‌ای انجام می‌دهیم.



شکل ۱۵-۷

شکل ۱۵a-۷ ذره‌ای به جرم m را نشان می‌دهد که با سرعت ثابت $|\mathbf{v}|=v$ در صفحه x-z در حال حرکت است. وارد شدن نیروی **F** عمود بر مومنتم خطی $\mathbf{G} = m\mathbf{v}$ سبب ایجاد تغییر $d\mathbf{G} = d(m\mathbf{v})$ در مومنتم آن می‌شود. خواهیم دید که $d\mathbf{G}$ و در نتیجه $d\mathbf{v}$، برداری است در جهت عمود بر نیروی **F** که بر طبق قانون دوم نیوتن $\mathbf{F} = \dot{\mathbf{G}}$ است و می‌توان آن را به صورت $\mathbf{F}dt = d\mathbf{G}$ نوشت. از شکل ۱۵b-۷ می‌بینیم که در حالت حدی، $\tan d\theta = d\theta = Fdt/mv$ یا $F = mv\dot{\theta}$ است. در شکل برداری با توجه به اینکه $\boldsymbol{\omega}=\dot{\theta}\,\mathbf{j}$ است، نیرو چنین می‌شود:

$$\mathbf{F} = m\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

که شکل برداری رابطه اسکالری آشنای $F_n = m\,a_n$ است که در فصل ۳ به طور گسترده در مورد نیروی عمود بر ذره مورد بحث قرار گرفت.

حال با در نظر گرفتن این روابط، به مسئله طرح شده خود باز می‌گردیم. سپس معادله قابل مقایسه $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ را در نظر بگیرید که در مورد هر نوع سیستم جرم، اعم از صلب یا غیر صلب، آن را بر اساس مرکز جرمش (معادله ۹-٤) و یا بر اساس یک نقطه ثابت O (معادله ۷-٤) بیان کردیم. اینک این رابطه را به روتور متقارن اعمال می‌کنیم که در شکل ۱۵c-۷ نشان داده شده است. به ازای یک میزان بالا از سرعت چرخشی **p** و یک میزان پایین از پیشروش **Ω** حول محور y، مومنتم زاویه‌ای را می‌توان توسط بردار $\mathbf{H}=I\mathbf{p}$ نشان داد که $I = I_{zz}$ ممان اینرسی روتور حول محور دوران است.

در ابتدا از مولفه کوچک مومنتم زاویه‌ای حول محور y که پیشروش کمی را به دنبال دارد، صرفنظر می‌کنیم. اعمال کوپل **M** عمود بر **H** سبب می‌شود که یک تغییر $d\mathbf{H}= d(I\,\mathbf{p})$ در مومنتم زاویه‌ای بوجود آید. ملاحظه می‌کنیم که $d\mathbf{H}$ و در نتیجه $d\mathbf{p}$ برداری است در جهت کوپل **M** ، چون داریم $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ که آن را می‌توان به صورت $\mathbf{M}\,dt =d\mathbf{H}$ نیز نوشت. به

محض تغییر بردار مومنتم خطی در جهت نیروی اعمال شده، بردار مومنتم زاویه‌ای ژیروسکوپ نیز در جهت کوپل ایجاد شده تغییر خواهد کرد. در نتیجه، می‌بینیم که بردارهای **M**، **H** و $d\mathbf{H}$ که شبیه بردارهای **F**، **G** و $d\mathbf{G}$ می‌باشند. با این نگرش، خیلی عجیب نخواهد بود که بردار دوران در جهت **M** تغییر کند که به موجب آن محور روتور حول محور y پیشروش خواهد کرد.

در شکل ۷-۱۵d ملاحظه می‌کنیم که در فاصله زمانی dt بردار مومنتم زاویه‌ای $I\mathbf{p}$ به اندازه زاویه $d\psi$ چرخش می‌کند، به طوریکه در حالت حدی $\tan d\psi = d\psi$ است و داریم:

$$d\psi = \frac{Mdt}{Ip} \quad \text{یا} \quad M = I\frac{d\psi}{dt}p$$

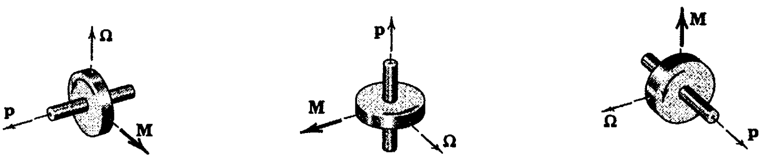
در صورتیکه $\Omega = d\psi/dt$ بیانگر اندازه سرعت پیشروش باشد، داریم:

$$\boxed{M = I\Omega p} \qquad (۷-۲۴)$$

توجه داریم که **M**، **Ω** و **p** بردارهای دو به دو عمود بر هم هستند و رابطه برداری آنها را می‌توان به صورت ضرب برداری نوشت:

$$\boxed{\mathbf{M} = I\,\mathbf{\Omega}\times\mathbf{p}} \qquad (۷-۲۴a)$$

که کاملاً شبیه رابطه اخیر $\mathbf{F} = m\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}$ می‌باشد که در شکل‌های b و ۷/۱۵a در مورد حرکت منحنی الخط یک ذره مطرح گردیده است. معادلات ۷-۲۴ و ۷-۲۴a جهت گشتاورگیری حول مرکز جرم و یا حول یک نقطه ثابت واقع بر محور دوران مورد استفاده قرار می‌گیرند.

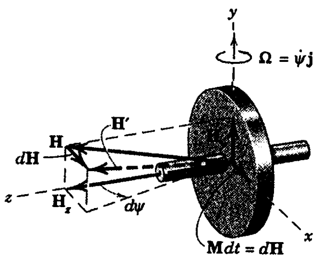


شکل ۷-۱۶

رابطه فضایی صحیح بین سه بردار را می‌توان با توجه به این واقعیت در ذهن سپرد که $d\mathbf{H}$ و در نتیجه $d\mathbf{p}$، در جهت **M** می‌باشند که بر اساس آن جهت صحیح پیشروش **Ω** مشخص می‌گردد. در نتیجه، بردار سرعت چرخشی **p** همیشه تمایل به دوران به سمت بردار گشتاور **M** را دارد. شکل ۷-۱۶ در سه وضعیت متفاوت، سه بردار مزبور را که در جهت صحیح قرار گرفته‌اند، نشان می‌دهد. در صورتیکه ترتیب قرارگیری این سه بردار در مسئله‌ای رعایت نشود، به نتیجه کاملاً متفاوت و متضاد با آنچه که گفته شد، می‌رسیم. مجدداً تاکید می‌گردد که معادله ۷-۲۴ همانند $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ و $M = I\alpha$ یک معادله حرکت است. به طوری که کوپل **M** نشان دهنده گشتاور *کلیه* نیروهای *وارد* بر روتور است که در *ترسیمه آزاد روتور* نشان داده می‌شوند. همچنین اشاره شد که در صورتیکه روتور وادار به پیشروش گردد، نظیر آنچه که در مورد توربین

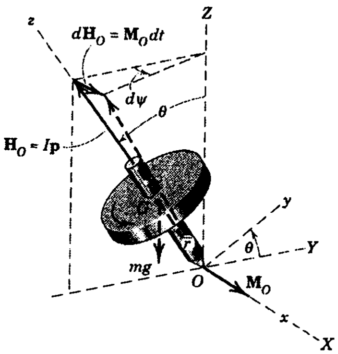
یک کشتی در هنگام چرخش آن اتفاق می‌افتد، حرکت حاصله یک *کوپل ژیروسکوپی* **M** را که به لحاظ اندازه و جهت از معادله ۲۴a-۷ تبعیت می‌کند، بوجود می‌آورد.

در بحث اخیر درباره حرکت ژیروسکوپی، فرض شده که دوران حول محور روتور، بزرگ و پیشروش کوچک است. گرچه از معادله ۲۴-۷ می‌توان دید که به ازای مقادیر معینی از I و M، پیشروش Ω می‌بایست در صورت بزرگ بودن p، کوچک باشد. حال اجازه دهید که تاثیر Ω را روی روابط مربوط به مومنتم مورد آزمایش قرار دهیم. مجدداً پیشروش پایا را مورد توجه قرار می‌دهیم که $\mathbf{\Omega}$ دارای اندازه‌ای ثابت می‌باشد



شکل ۱۷-۷

شکل ۱۷-۷ همان روتور را مجدداً نشان می‌دهد. چون روتور حول محور y دارای ممان اینرسی و نیز یک سرعت زاویه‌ای پیشروش است، بنابراین حول این محور یک مولفه مومنتم زاویه‌ای دیگر وجود خواهد داشت. در نتیجه، دو مولفه $H_z = Ip$ و $H_y = I_0\,\Omega$ را خواهیم داشت که I_0 بیانگر I_{yy} و I بیانگر I_{zz} می‌باشد. مومنتم زاویه‌ای کل **H** در شکل نشان داده شده است. تغییر در **H** همانند قبل به صورت $d\mathbf{H} = \mathbf{M}dt$ است و پیشروش انجام شده در طی زمان dt همانند قبل عبارت از زاویه $d\psi = M\,dt\,/H_z = M\,dt/(Ip)$ می‌باشد. در نتیجه، معادله ۲۴-۷ هنوز معتبر بوده و در مورد پیشروش پایا توصیف دقیقی از حرکت را ارائه می‌دهد که در حین حرکت، محور دوران روتور بر محوری عمود است که پیشروش حول آن اتفاق می‌افتد



شکل ۱۸-۷

اکنون مطابق شکل ۱۸-۷ پیشروش پایا یک فرفره متقارن را در نظر بگیرید که با سرعت زاویه‌ای زیاد p حول محور خود در حال چرخش بوده و بر نقطه O تکیه دارد. در اینجا محور دوران فرفره با محور قائم Z که پیشروش حول آن صورت می‌گیرد، زاویه θ می‌سازد. مجدداً از مولفه مومنتم زاویه‌ای کوچک که ناشی از پیشروش است صرفنظر کرده و **H** را مساوی **Ip** در نظر می‌گیریم و بدین معنی است که مومنتم زاویه‌ای حول محور فرفره فقط ناشی از دوران فرفره حول محور خودش می‌باشد. گشتاور حول نقطه O ناشی از نیروی وزن است که برابر با $mg\bar{r}\sin\theta$ می‌باشد که $\bar{r}$ فاصله نقطه O تا مرکز جرم است. از روی شکل می‌توان دید که بردار مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ در فاصله زمانی dt به اندازه $d\mathbf{H}_O = \mathbf{M}_O\,dt$ در جهت $\mathbf{M}_O$ در مدت زمان dt تغییر می‌کند و در این حین، θ بدون تغییر باقی می‌ماند. دیفرانسیل زاویه پیشرانش که حول محور Z انجام می‌شود، چنین است:

$$d\psi = \frac{M_O\,dt}{Ip\sin\theta}$$

با قرار دادن روابط $M_O = mg\bar{r}\sin\theta$ و $\Omega = d\psi/dt$ داریم:

$$mg\bar{r}\sin\theta = I\Omega p\sin\theta \quad \text{یا} \quad mg\bar{r} = I\Omega p$$

که مستقل از θ می‌باشد. در صورتیکه شعاع ژیراسیون $I = mk^2$ را جایگزین کنیم و رابطه فوق را برای سرعت پیشروش حل کنیم، داریم:

$$\boxed{\Omega = \frac{g\bar{r}}{k^2 p}} \qquad (۷-۲۵)$$

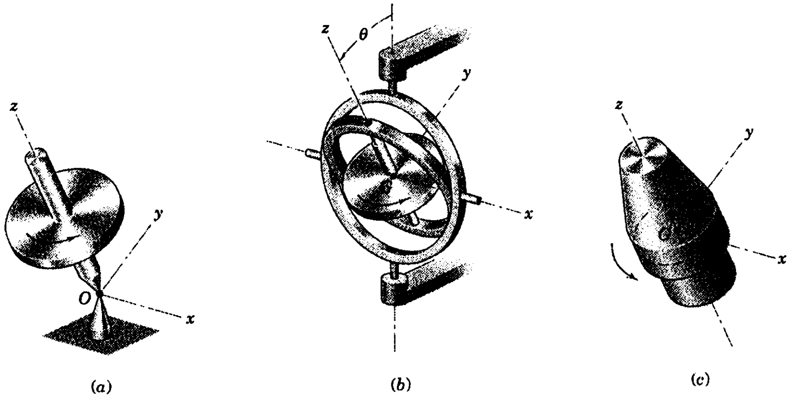
بر خلاف معادله ۲۴-۷ که توصیف دقیقی را در مورد روتور شکل ۱۷-۷ ارائه می‌کند و پیشروش آن منحصراً در صفحه x-z است، معادله ۲۵-۷ یک رابطه تقریبی است و مبتنی بر این فرض است که مومنتم زاویه‌ای حاصل از Ω در مقایسه با مومنتم زاویه‌ای حاصل از p ناچیز است. مقدار خطای ایجاد شده را در قسمت پیشروش حالت پایا که در این بخش می‌آید، ملاحظه خواهیم کرد. بر اساس تجزیه و تحلیل‌های ما، فرفره فقط در صورتی دارای یک پیشروش پایا تحت زاویه ثابت θ است که حرکت آن با سرعت پیشروش Ω که در معادله ۲۵-۷ آمد، صدق نماید. در صورتی که چنین شرایطی تحقق نیابد، پیشروش ناپایدار شده؛ به نحوی که وقتی سرعت حول محور فرفره کاهش می‌یابد، دامنه نوسان θ افزایش می‌یابد. به افت و خیز محور دوران در این حالت *ناوش* می‌گویند.

تجزیه و تحلیل کامل‌تر

اکنون معادله ۱۹-۷ را که معادله کلی مومنتم زاویه‌ای در مورد یک جسم صلب است به طور مستقیم مورد استفاده قرار می‌دهیم و آن را به جسمی که حول محور تقارنش دوران می‌کند، اعمال می‌کنیم. این معادله در مورد دوران حول یک نقطه ثابت یا حول مرکز جرم معتبر است. یک فرفره در حال دوران، موتور یک ژیروسکوپ و یک کپسول فضایی، نمونه‌هایی از اجسامی هستند که حرکت‌شان می‌تواند توسط معادلات مربوط به دوران حول یک نقطه مورد تشریح قرار گیرد. معادلات کلی گشتاور در مورد این دسته از مسائل، نسبتاً پیچیده بوده و حل کامل آنها مستلزم حل انتگرال‌های بیضوی و انجام برخی از محاسبات طولانی است. بخش وسیعی از مسائل مهندسی وجود دارند که در آنها حرکت به صورت دوران حول یک نقطه است که بر اثر دوران این اجسام حول محورهای تقارنشان پیشروش پایا خواهند داشت. این شرایط باعث ساده سازی‌هایی می‌شوند که حل معادلات را خیلی آسان می‌نمایند.

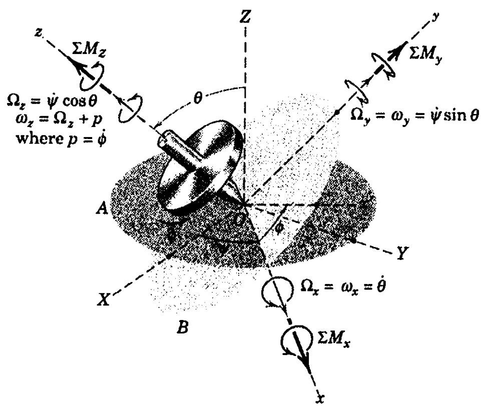
همانند شکل ۱۹a-۷ جسمی را با تقارن محوری در نظر بگیرید که حول یک نقطه ثابت O واقع بر روی محورش، که آن را جهت z می‌گیریم، در حال دوران است. با در نظر گرفتن نقطه O به عنوان مبدا، محورهای x و y خود به خود، محورهای اصلی اینرسی بوده و محور z نیز محور اصلی اینرسی خواهد شد. توصیف مشابهی را می‌توان در مورد دوران یک جسم مشابه، حول مرکز جرم بکار برد و همانگونه که در شکل ۱۹b-۷ در مورد روتور گهواره ژیروسکوپ نشان داده شده، مرکز جرم به عنوان مبدا دستگاه مختصات در نظر گرفته شده است. مجدداً محورهای x و y محورهای اصلی اینرسی گذرنده از نقطه G هستند. تشریح مشابهی را می‌توان در مورد دوران یک جسم حول مرکز جرم در فضا نظیر کپسول فضایی شکل ۱۹c-۷ که دارای تقارن محوری است، ارائه داد. در هر حالت، توجه داریم که بدون در نظر گرفتن دوران محورها یا دوران جسم نسبت به محورها (چرخش حول محور z)، ممان‌های اینرسی حول محورهای x و y نسبت به زمان ثابت باقی

می‌مانند. ممان‌های اصلی اینرسی دوباره به صورت $I_{zz} = I$ و $I_{yy} = I_{zz} = I_O$ نشان داده می‌شوند. حاصلضرب‌های اینرسی در این موارد صفر می‌باشند.



شکل ۱۹-۷

قبل از بکارگیری معادله ۱۹-۷، دستگاه مختصاتی را معرفی می‌کنیم که با طبیعت مسئله ما سازگاری دارد. این دستگاه مختصات در شکل ۲۰-۷ در مورد نمونه‌ای از دوران حول یک نقطه ثابت O نشان داده شده است. محورهای X-Y-Z در فضا ثابت بوده و صفحه A محورهای X-Y و نقطه ثابت O واقع بر محور روتور را در بر می‌گیرد. صفحه B نقطه O را در بر داشته و همیشه عمود بر محور روتور است. میزان انحراف محور روتور از محور قائم Z با زاویه θ اندازه گیری می‌شود که همچنین معیاری برای سنجش زاویه بین دو صفحه A و B است. محور x محل تقاطع این دو صفحه است که زاویه ψ را با محور X می‌سازد. محور y در صفحه B قرار داشته و محور z بر محور روتور منطبق است. جابجایی زاویه‌ای روتور نسبت به محورهای x-y-z با زاویه ϕ مشخص می‌شود که سنجش آن از محور x' متصل به روتور می‌باشد. سرعت چرخش جسم حول محور خود برابر $p = \dot{\phi}$ است.



شکل ۲۰-۷

مولفه‌های سرعت زاویه‌ای ω روتور و سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\Omega}$ محورهای x-y-z از شکل ۲۰-۷ به صورت زیر خواهند شد.

$$\Omega_x = \dot{\theta} \qquad \omega_x = \dot{\theta}$$
$$\Omega_y = \dot{\psi}\sin\theta \qquad \omega_y = \dot{\psi}\sin\theta$$
$$\Omega_z = \dot{\psi}\cos\theta \qquad \omega_z = \dot{\psi}\cos\theta + p$$

توجه به این نکته مهم است که محورها و خود جسم دارای مولفه‌های یکسان سرعت زاویه‌ای در جهت‌های x و y می‌باشند ولی مولفه‌های z آنها به دلیل وجود سرعت زاویه‌ای نسبی p با یکدیگر متفاوت می‌باشند.

مولفه‌های مومنتم زاویه‌ای از رابطه ۱۲-۷ به صورت زیر می‌شوند.

$$H_x = I_{xx}\,\omega_x = I_0\,\dot{\theta}$$
$$H_y = I_{yy}\,\omega_y = I_0\,\dot{\psi}\,\sin\theta$$
$$H_z = I_{zz}\,\omega_z = I\,(\dot{\psi}\,\cos\theta + p)$$

با قرار دادن مولفه‌های سرعت زاویه‌ای و مومنتم زاویه‌ای در معادله ۱۹-۷، داریم:

$$\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_0\left(\ddot{\theta} - \dot{\psi}^2\sin\theta\cos\theta\right) + I\dot{\psi}\left(\dot{\psi}\cos\theta + p\right)\sin\theta \\
\Sigma M_y &= I_0\left(\ddot{\psi}\sin\theta + 2\dot{\psi}\dot{\theta}\cos\theta\right) - I\dot{\theta}\left(\dot{\psi}\cos\theta + p\right) \\
\Sigma M_z &= I\frac{d}{dt}\left(\dot{\psi}\cos\theta + p\right)
\end{aligned} \qquad (۷-۲۶)$$

معادلات ۲۶-۷ معادلات کلی دوران یک جسم متقارن حول یک نقطه ثابت O و نیز حول مرکز جرم G می‌باشد. در یک مسئله مشخص، حل معادلات به مجموع گشتاورهای اعمال شده به جسم حول سه محور دستگاه مختصات بستگی دارد. در استفاده از این معادلات، خود را به دو حالت خاص دوران حول یک نقطه محدود می‌کنیم که در بخش بعدی تشریح خواهد شد.

پیشروش پایا

اکنون شرایطی را مورد بررسی قرار می‌دهیم که روتور با میزان پایای $\dot{\psi}$ و زاویه ثابت θ و نیز سرعت چرخشی ثابت p، پیشروش می‌کند. در نتیجه:

$$\dot{\psi} = \text{ثابت} \quad , \quad \ddot{\psi} = 0$$
$$\theta = \text{ثابت} \quad , \quad \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$$
$$p = \text{ثابت} \quad , \quad \dot{p} = 0$$

و معادله ۲۶-۷ چنین نتیجه می‌شود:

$$\begin{aligned}
\Sigma M_x &= \dot{\psi}\sin\theta\left[I\left(\dot{\psi}\cos\theta + p\right) - I_0\dot{\psi}\cos\theta\right] \\
\Sigma M_y &= 0 \\
\Sigma M_z &= 0
\end{aligned} \qquad ۷-۲۷$$

با توجه به این نتایج می‌بینیم گشتاوری که لازم است تا حول نقطه O (یا حول نقطه G) به روتور وارد شود، باید در جهت x باشد؛ چون مولفه‌های y و z برابر صفرند. علاوه بر این، ثابت بودن مقادیر θ ، $\dot{\psi}$ و p ، اندازه گشتاور نیز ثابت خواهد بود. توجه به این نکته نیز مهم است که محور گشتاورگیری به صفحه‌ای که محور پیشروش (محور Z) و محور چرخش (محور z) در آن قرار دارند، عمود است.

همچنین می‌توان از معادلات ۲۷-۷ ملاحظه کرد که مولفه‌های $\mathbf{H}$ از دید ناظری که در دستگاه x-y-z قرار دار، ثابت باقی می‌ماند. به طوری که $\left(\dot{\mathbf{H}}\right)_{xyz} = \mathbf{0}$ است. از آنجایی که در حالت کلی $\Sigma \mathbf{M} = \left(\dot{\mathbf{H}}\right)_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}$ است، در حالت پیشروش پایا داریم:

$$\boxed{\Sigma \mathbf{M} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}} \tag{7-28}$$

که با قرار دادن مقادیر $\mathbf{\Omega}$ و $\mathbf{H}$ به همان معادله ۲۷-۷ می‌رسیم.

معمولی‌ترین مثال‌های مهندسی مربوط به حرکت ژیروسکوپی هنگامی رخ می‌دهد که همانند شکل ۱٤-۷ پیشروش حول محوری انجام شود که به محور روتور عمود است. در نتیجه با قرار دادن $\theta = \pi/2$ ، $\omega_z = p$ ، $\dot{\psi} = \Omega$ و $\Sigma M_x = M$ از معادلات ۲۷-۷ داریم:

$$M = I \Omega p \tag{7-24}$$

که در ابتدای این بخش از تحلیل مستقیم، این حالت خاص استخراج شد.

حال بیایید، پیشروش پایای روتور شکل ۲۰-۷ (فرفره متقارن) را به ازای هر مقداری از θ غیر از $\pi/2$ مورد بررسی قرار دهیم. گشتاور ΣM_x حول محور x ناشی از وزن روتور بوده و برابر $mg\bar{r}\sin\theta$ است. با قرار دادن این مقدار در معادلات ۲۷-۷ و پس از مرتب کردن داریم:

$$mg\bar{r} = I\dot{\psi}p - (I_0 - I)\dot{\psi}^2\cos\theta$$

می‌بینیم که در صورتی که p بزرگ باشد، $\dot{\psi}$ کوچک است، به طوری که جمله دوم سمت راست معادله در مقایسه با $I\dot{\psi}p$ کوچک می‌شود. اگر از جمله کوچک صرفنظر کنیم، داریم: $\dot{\psi} = mg\bar{r}/(Ip)$ که با استفاده از جایگزینی‌های قبلی $\Omega = \dot{\psi}$ و $I = mk^2$ می‌شود:

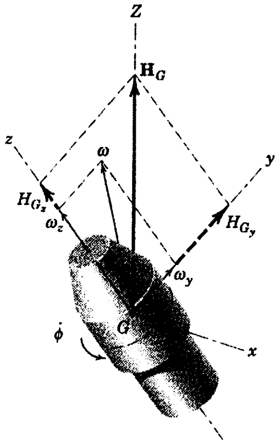
$$\Omega = \frac{g\bar{r}}{k^2 p} \tag{7-25}$$

ما این رابطه را قبلاً با این فرض که مومنتم زاویه‌ای کاملاً در راستای محور چرخش است، بدست آوردیم.

پیشروش پایا با گشتاور صفر

حالا حرکت یک روتور متقارن بدون هیچ گشتاور خارجی حول مرکز جرم آن در نظر بگیرید. چنین حرکتی را می‌توان در فضاپیماها و پرتابه‌هایی که هم دارای چرخش و هم پیشروش در حین پرواز هستند، ملاحظه کرد.

شکل ۲۱-۷ چنین جسمی را نشان می‌دهد. در اینجا محور Z که جهتش در فضا ثابت می‌باشد برای انطباق با جهت مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_G$ که ثابت است انتخاب می‌شود. چون $\Sigma \mathbf{M}_G = \mathbf{0}$ است، محورهای x-y-z به همان شیوه‌ای که در شکل ۲۰-۷ توصیف شد، به جسم متصل هستند. با توجه به شکل ۲۱-۷، مولفه‌های مومنتم عبارتند از: $H_{G_x} = 0$، $H_{G_y} = H_G \sin\theta$ و $H_{G_z} = H_G \cos\theta$. با توجه به روابط تعریف شده در این بخش، یعنی معادلات ۱۲-۷ و نمادهای مربوط به آنها، این مولفه‌ها را نیز می‌توان به صورت $H_{G_x} = I_0\omega_x$، $H_{G_y} = I_0\omega_y$ و $H_{G_z} = I_0\omega_z$ معرفی کرد. بنابراین $\omega_x = \Omega_x = 0$ است، به طوریکه θ ثابت است. این نتیجه‌گیری به این مفهوم است که حرکت جسم حول بردار ثابت $\mathbf{H}_G$ با پیشروش پایا انجام می‌شود.



شکل ۲۱-۷

به علت عدم وجود مولفه x، بردار ω در صفحه y-z و به همراه محور Z قرار می‌گیرد و با محور z زاویه β می‌سازد. رابطه β و θ را می‌توان از رابطه $\theta = H_{G_y}/H_{G_z} = I_0\omega_y/(I\omega_z)$ بدست آورد که به صورت زیر است.

$$\tan\theta = \frac{I_0}{I}\tan\beta \qquad (۷-۲۹)$$

بنابراین، سرعت زاویه‌ای ω با محور چرخش زاویه β می‌سازد.

با قرار دادن $M=0$ در معادله ۲۷-۷ به آسانی می‌توان میزان پیشروش را بدست آورد که به صورت زیر است.

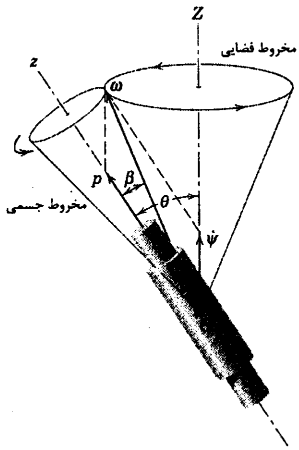
$$\dot\psi = \frac{Ip}{(I_0 - I)\cos\theta} \qquad (۷-۳۰)$$

از این رابطه مشخص است که جهت پیشروش به مقادیر دو ممان اینرسی بستگی دارد.

همانطور که در شکل ۲۲a-۷ نشان داده شده، اگر $I_0 > I$ باشد، در اینصورت $\theta > \beta$ می‌شود و به این پیشروش، پیشروش مستقیم گفته می‌شود. در اینجا مخروط جسمی بر روی سطح خارجی مخروط فضایی می‌غلتد.

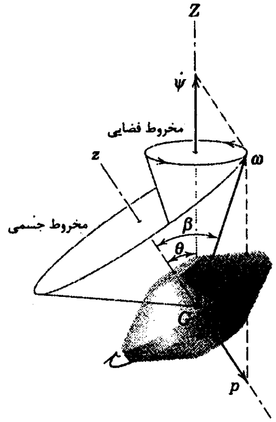
همانطور که در شکل ۲۲b-۷ نشان داده شده، در صورتیکه $I_0 < I$ باشد، خواهیم داشت: $\theta < \beta$ که به آن پیشروش معکوس می‌گویند. در چنین حالتی مخروط فضایی در داخل مخروط جسمی می‌غلتد و $\dot\psi$ و p در خلاف جهت یکدیگر می‌باشند.

در صورتیکه $I = I_0$ باشد، در این صورت با توجه به معادله ۲۹-۷ داریم: $\beta = \theta$ و شکل ۲۲-۷ نشان می‌دهد که هر دو زاویه برابر صفر هستند. در چنین حالتی، جسم هیچگونه پیشروشی نداشته و فقط با سرعت زاویه‌ای $\mathbf{p}$ دوران می‌کند. چنین شرایطی در مورد اجسامی نظیر یک کره همگن که نسبت به یک نقطه متقارن می‌باشد، رخ می‌دهد.



$I_0 > I$ پیشروش مستقیم

(a)

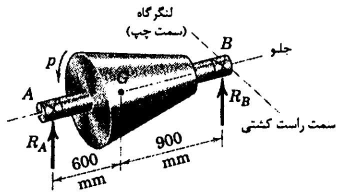


$I_0 < I$.پیشروش معکوس

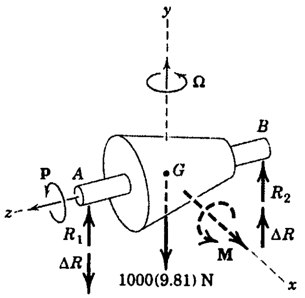
(b)

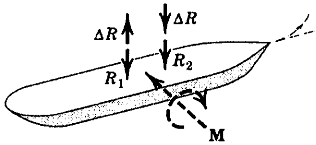
شکل ۲۲-۷

مسئله نمونه ۸-۷



روتور توربین موجود در موتورخانه یک کشتی، دارای جرم ۱۰۰۰ kg، مرکز جرم G و شعاع ژیراسیون ۲۰۰ mm می‌باشد. شافت روتور بر روی یاتاقان‌های A و B سوار شده و محورش در امتداد جلو به عقب کشتی قرار می‌گیرد و با سرعت ۵۰۰۰ rev/min در جهت پادساعتگرد چنانچه از عقب نظاره شود، دوران می‌کند. چنانچه کشتی با سرعت ۲۵ knots (۱ knot=۰/۵۱۴ m/s) در مسیری به شعاع ۴۰۰ m به طرف لنگرگاه (چپ) بپیچد، مولفه‌های عمودی عکس العمل‌های A و B را تعیین کنید. آیا به علت اثر ژیروسکوپی، دماغه کشتی بالا می‌رود یا پایین می‌آید؟





حل: مولفه عمودی عکس العمل یاتاقان برای عکس العمل‌های استاتیکی R_1 و R_2 ناشی از وزن روتور، به علاوه یا منهای تغییر ΔR ناشی از اثر ❶ ژیروسکوپی می‌باشد. اصل گشتاور از استاتیک به راحتی نتیجه می‌دهد: R_1= ۵۸۹۰ N و R_2= ۳۹۲۰ N. امتدادهای مفروض سرعت چرخش **p** و سرعت پیشروش **Ω** در ترسیمه آزاد نشان داده شده‌اند. چون محور چرخشی همیشه تمایل دارد که به طرف محور گشتاور دوران کند، می‌بینیم که محور گشتاور **M** مطابق شکل متمایل به حرکت به سمت راست می‌باشد. بنابراین، جهت ΔR در B به طرف بالا و در A به طرف پایین است تا اینکه بتواند کوپل **M** را بوجود آورد. در نتیجه عکس العمل‌های یاتاقان‌ها در A و B برابرند با:

$$R_A = R_1 - \Delta R \qquad \text{و} \qquad R_B = R_2 + \Delta R$$

سرعت پیشروش Ω برابر است با سرعت کشتی تقسیم بر شعاع چرخش آن:

$$[v = \rho\Omega] \qquad \Omega = \frac{25(0.514)}{400} = 0.0321 \text{ rad/s}$$

اکنون رابطه ۲۴-۷ را حول محور G مرکز جرم روتور بکار برده و در نتیجه:

$$[M = I\Omega p] \qquad 1.500\Delta R = 1000\,(0.200)^2\,(0.0321)\left[\frac{5000(2\pi)}{60}\right]$$

$$\Delta R = 449 \text{ N}$$

عکس العمل‌های لازم یاتاقان‌ها برابر می‌شوند با:

جواب $\qquad R_A = 5890 - 449 = 5440 \text{ N} \qquad$ و $\qquad R_B = 3920 + 449 = 4370 \text{ N}$

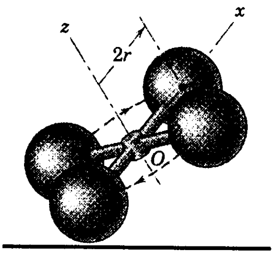
از اصل عمل و عکس العمل ملاحظه می‌کنیم که نیروهایی که هم اکنون محاسبه شدند، در واقع نیروهای *وارد* بر شافت روتور توسط سازه کشتی می‌باشند. در نتیجه، طبق شکل نشان داده شده در پایین، نیروهایی مساوی و مخالف ❷ نیروهای عکس العمل *توسط* شافت روتور به کشتی اعمال می‌گردند. بنابراین اثر کوپل ژیروسکوپی مطابق شکل سبب تغییر ΔR بوده و دماغه کشتی به طرف پایین و عقب آن به سمت بالا متمایل می‌گردد (البته فقط اندکی).

نکات مفید

❶ اگر کشتی به چپ بچرخد، موقعی که از بالا نظاره می‌شود، دوران در جهت پادساعتگرد بوده و بردار بردار پیشروش $\mathbf{\Omega}$ طبق قاعده دست راست به طرف بالا خواهد بود.

❷ پس از مشخص کردن جهت صحیح $\mathbf{M}$ بر روی روتور، اشتباهی که معمولاً صورت می‌گیرد، این است که آن را در همان جهت بر روی کشتی اعمال کرده و اصل عمل و عکس العمل فراموش می‌گردد. واضح است که نتایج معکوس می‌شوند (اطمینان حاصل کنید این اشتباه را موقعی که از متعادل کننده ژیروسکوپی قائم در کشتی خودتان استفاده می‌کنید، مرتکب نشوید تا کشتی دچار غلتش نگردد).

مسئله نمونه ۹-۷



یک ایستگاه فضایی به صورت تقریب توسط چهار پوسته کروی یکنواخت هر یک به جرم m و شعاع r پیشنهاد می‌گردد. به عنوان اولین تقریب می‌توان از جرم سازه اتصال دهنده و تجهیزات داخلی صرفنظر کرد. اگر ایستگاه طوری طراحی شده باشد که در هر ٤ ثانیه یک دور دوران کند، مطلوب است (a) تعداد دورهای کامل n پیشروش برای هر دور چرخش حول محور x، اگر صفحه دوران، انحرافی جزئی نسبت به یک امتداد ثابت پیدا کند و (b) پریود τ پیشروش را چنانچه محور چرخش z با محور ثابتی که حول آن پیشروش انجام می‌شود، زاویه ۲۰° بسازد. مخروط‌های فضایی و جسمی را برای حالت اخیر رسم کنید.

حل. (**a**): تعداد دورهای پیشروش یا لنگ زدن برای هر دور چرخش ایستگاه حول محور z برابر است با نسبت سرعت پیشروش $\dot\psi$ به سرعت چرخش p که از رابطه ۳۰-۷ برابر است با:

$$\frac{\dot\psi}{p}=\frac{1}{(I_0-I)\cos\theta}$$

ممان‌های اینرسی برابرند با:

$$I_{zz}=I=4\left[\frac{2}{3}mr^2+m(2r)^2\right]=\frac{56}{3}mr^2$$

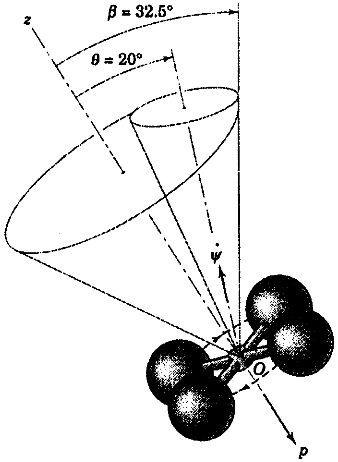
❶
$$I_{xx}=I_0=2\left(\frac{2}{3}\right)mr^2+2\left[\frac{2}{3}mr^2+m(2r)^2\right]=\frac{32}{3}mr^2$$

با فرض θ خیلی کوچک، $\cos\theta\cong 1$ و نسبت سرعت‌های زاویه‌ای چنین می‌گردد:

$$n=\frac{\dot\psi}{p}=\frac{56/3}{32/3-56/3}=-\frac{7}{3}$$ جواب

علامت منفی نشان دهنده پیشروش معکوس می‌باشد که در مسئله حاضر $\dot\psi$ و p اساساً در خلاف جهت یکدیگر هستند. بنابراین، ایستگاه به ازای هر ۳ دور چرخش ۷ دور پیشروش انجام می‌دهد.

(**b**) برای $\theta=20°$ و $p=2\pi/4$ rad/s پریود پیشروش یا لنگ زدن برابر است با: $\tau=2\pi/|\dot\psi|$. بنابراین از رابطه ۳۰-۷:



جواب $$\tau = \frac{2\pi}{2\pi/4}\left|\frac{I_0 - I}{I}\cos\theta\right| = 4\left(\frac{3}{7}\right)\cos 20° = 1.611 \text{ s}$$

پیشروش معکوس است و مطابق شکل مخروط جسمی داخل مخروط فضایی قرار گرفته و زاویه مخروط جسمی از رابطه ۲۹-۷ برابر است با:

$$\tan\beta = \frac{I}{I_0}\tan\theta = \frac{56/3}{32/3}(0.364) = 0.637 \qquad \beta = 32.5°$$

نکته مفید

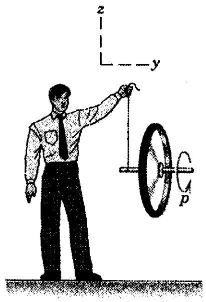
❶ *تئوری ما بر این فرض استوار است که $I_{xx} = I_{yy}$ برابر است با ممان اینرسی حول هر محوری که از G گذشته و بر محور z عمود باشد. در این مسئله این فرض بر قرار است و شما باید شخصاً این را برای خودتان به اثبات برسانید تا متقاعد گردید.*

مسائل

مسائل مقدماتی

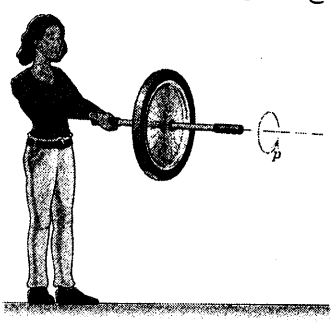
۹۵-۷ یک استاد درس دینامیک به دانشجویانش اصول حرکت ژیروسکوپی را نشان می‌دهد. او چرخی را که به سرعت دوران می‌کند، مطابق شکل با ریسمانی که به انتهای محور افقی‌اش بسته شده، معلق می‌سازد. حرکت پیشروش چرخ را تشریح کنید.

جواب پیشروش در جهت پادساعتگرد CCW از نمای بالا



شکل مسئله ۹۵-۷

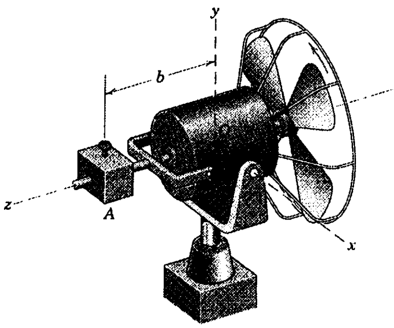
۹۶-۷ دانشجویی داوطلب شده تا در نمایش کمک آموزشی کلاس درس در مورد چرخ مومنتم در حالی که مطابق شکل، چرخ مزبور با سرعت زاویه‌ای زیاد p می‌چرخد، کمک کند. استاد مربوطه از او می‌خواهد تا محور چرخ را در موقعیت افقی نشان داده شده با دست نگه دارد و سپس آنرا در صفحه قائم به تدریج به طرف بالا ببرد. دانشجو چه حرکتی را از مجموعه چرخ احساس خواهد نمود.



شکل مسئله ۹۶-۷

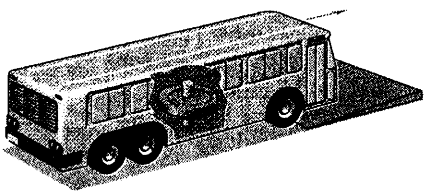
۹۷-۷ بادبزنی با کاربرد خاص، مطابق شکل نصب شده است. جرم کل آرمیچر موتور، شافت و پره‌ها مجموعاً ۲.۲ kg با شعاع ژیراسیون ۶۰ mm می‌باشد. موقعیت محوری b وزنه A به جرم ۰/۸ kg قابل تنظیم است. موقعی که بادبزن خاموش است، سیستم حول محور x به ازای $b = ۱۸۰$ mm در حال تعادل است. موتور و بادبزن با سرعت ۱۷۲۵ rev/min در جهت نشان داده شده، کار می‌کنند. مقدار b را چنان تعیین کنید که حرکت پیشروش پایای ۰/۲ rad/s حول محور y در جهت مثبت ایجاد شود.

جواب $b = ۲۱۶$ mm



شکل مسئله ۹۷-۷

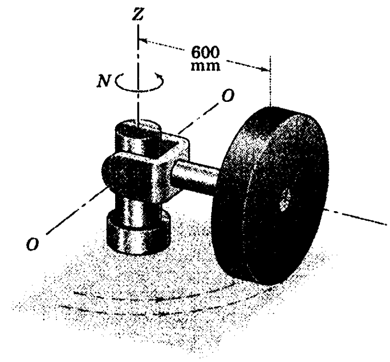
۹۸-۷ یک اتوبوس آزمایشی ضد آلودگی به کمک انرژی جنبشی ذخیره شده در چرخ طیار بزرگی که با سرعت زیاد p در جهت مشخص شده می‌چرخد، حرکت می‌کند. موقعی که اتوبوس به یک شیب سربالایی کوتاه می‌رسد، چرخ‌های جلو بالا رفته و در نتیجه باعث پیشروش چرخ طیار می‌شود. چه تغییراتی در نیروهای بین تایرها و جاده در حین این تغییر ناگهانی رخ می‌دهد؟



شکل مسئله ۹۸-۷

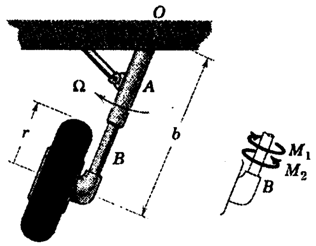
۷-۹۹ چرخی به شکل یک دیسک مدور توپر به جرم ۵۰ kg روی مسیر مدوری به شعاع ۶۰۰ mm روی سطح افقی می‌غلتد. شافت چرخ حول محور O-O لولا شده است و توسط شافت قائم با میزان ثابت $N = ۴۸$ rev/min حول محور Z به دوران در می‌آید. نیروی عمودی R بین چرخ و سطح افقی را تعیین کنید. از وزن شافت افقی صرفنظر کنید.

جواب $R = ۷۱۲$ N



شکل مسئله ۹۹-۷

۷-۱۰۰ هواپیمایی با سرعت v در حال ترک کردن باند یک فرودگاه می‌باشد. جرم هر یک از چرخ‌های در حال چرخش آزاد، m و شعاع ژیراسیون آن حول محور چرخ k می‌باشد. هنگامیکه از جلو به هواپیما نگاه می‌شود، در ضمن جمع شدن پایه چرخ حول محور O به داخل محفظه زیر بال هواپیما، چرخ حرکت پیشروشی با میزان زاویه‌ای Ω دارد. به علت اثر ژیروسکوپی بازوی نگهدارنده A، گشتاور پیچشی M را بر B اعمال می‌کند تا از دوران عضو لوله‌ای در غلاف B جلوگیری نماید. M را تعیین کرده و مشخص کنید که آیا در جهت $M_۱$ است یا در جهت $M_۲$.



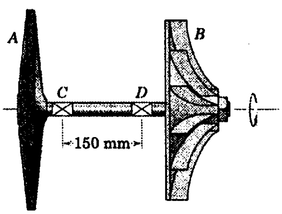
شکل مسئله ۱۰۰-۷

۷-۱۰۱ روتور ۲۱۰ kg موتور توربوجتی دارای شعاع ژیراسیون ۲۲۰ mm بوده و هنگامیکه از جلو نشان داده می‌شود با سرعت ۱۸۰۰۰ rev/min در جهت پادساعتگرد دوران می‌نماید. اگر هواپیما با سرعت ۱۲۰۰ km/h در حرکت و در صفحه قائم شروع به پیمودن مسیری حلقوی به شعاع ۳۸۰۰ km نماید، گشتاور ژیروسکوپی M را که به بدنه هواپیما وارد می‌شود، محاسبه کنید. برای اینکه هواپیما در صفحه قائم باقی بماند، خلبان چه اصلاحی را در کنترل بایستی انجام دهد؟

جواب سکان به چپ، $M = ۱۶۸۱$ N.m

مسائل ویژه

۷-۱۰۲ یک کمپرسور کوچک هوا در کابین هواپیما، تشکیل شده از توربین A به جرم ۳/۵۰ kg که دمنده B به جرم ۲/۴۰ kg را با سرعت ۲۰۰۰۰ rev/min می‌چرخاند. شافت مجموعه نسبت به امتداد پرواز به طور عرضی نصب شده است و از عقب هواپیما مطابق شکل مشاهده می‌شود. شعاع ژیراسیون A و B به ترتیب ۷۹/۰ و ۷۱/۰ mm می‌باشد. چنانچه هواپیما حول محور طولی خود با سرعت ۲ rad/s در جهت ساعتگرد (چنانچه از پشت مشاهده شود) دوران نماید، نیروی شعاعی وارده بر شافت بوسیله یاتاقان‌های C و D را محاسبه کنید. از گشتاورهای کوچک ناشی از وزن توربین و دمنده، صرفنظر کنید. ترسیمه آزاد شافت را از نمای بالا رسم کرده و شکل خمش یافته خط مرکزی آنرا مشخص نمایید.

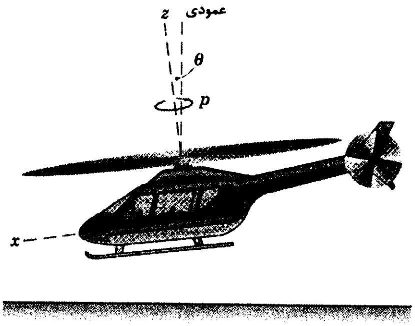


شکل مسئله ۱۰۲-۷

۷-۱۰۳ پره‌ها و توپی روتور یک چرخبال نشان داده شده، دارای جرم ۶۴ kg بوده و شعاع ژیراسیون آنها حول محور دوران z برابر ۳ m می‌باشد. در طی مدت کوتاهی از اوج گیری که روتور با سرعت ۵۰۰ rev/min دوران می‌کند،

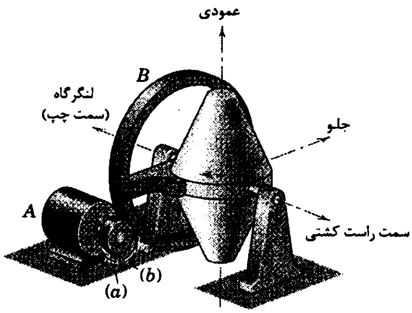
زاویه انحراف محور روتور چرخ‌بال با امتداد قائم با میزان $\dot{\theta}$ =۱۰ deg/s تغییر می‌نماید. گشتاور ژیروسکوپی M، منتقل شده به بدنه چرخ‌بال توسط روتور آنرا تعیین نموده و مشخص کنید آیا چرخ‌بال، هنگامیکه از جلو مشاهده می‌شود، تمایل دارد در جهت ساعتگرد منحرف شود یا در جهت پادساعتگرد.

جواب M = ۵/۲۶ kN.m



شکل مسئله ۱۰۳-۷

۱۰۴-۷ در شکل، یک ژیروسکوپ که بر روی محور قائم خود نصب شده، نشان داده شده است که برای متعادل ساختن یک کشتی بیمارستانی در برابر غلتیدن مورد استفاده قرار می‌گیرد. موتور A چرخ دنده کوچک (پینیون) را می‌چرخاند و این خود، چرخ‌دنده بزرگ B و مجموعه روتور متصل به آن را حول محور عرضی افقی کشتی به دوران در می‌آورد و باعث حرکت پیشروشی ژیروسکوپ می‌گردد. روتور در داخل پوسته هنگامیکه از بالا نظاره می‌شود، در جهت ساعتگرد با سرعت ۹۶۰ rev/min می‌چرخد و جرم آن ۸۰ Mg و شعاع ژیراسیون آن ۱/۴۵ m می‌باشد. در صورتیکه موتور چرخ B را با میزان ۰/۳۲۰ rad/s به دوران درآورد، گشتاور اعمال شده بر بدنه کشتی توسط ژیروسکوپ را محاسبه کنید. موتور باید در کدام یک از جهت‌های (a) یا (b) بچرخد تا از غلتیدن کشتی به سمت چپ جلوگیری شود؟

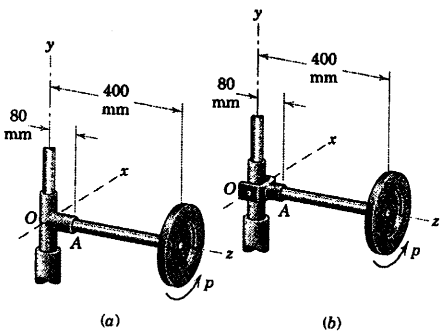


شکل مسئله ۱۰۴-۷

۱۰۵-۷ هر یک از چرخ‌های نشان داده شده دارای جرم ٤ kg و شعاع ژیراسیون k_z =۱۲۰ mm بوده و بر روی شافت افقی AB که به شافت عمودی در O متصل می‌باشد، سوار شده است. در حالت (a) شافت افقی به طوقه ثابتی در O که آزادانه حول محور قائم y دوران می‌کند، ثابت شده است. در حالت (b) شافت توسط یوغ لولا شده حول محور x نگاه داشته شده است. اگر چرخ دارای سرعت زاویه‌ای زیاد p = ۳٦۰۰ rev/min حول محور قائم z خود در موقعیت نشان داده شده باشد، در هر حالت گشتاور خمشی M_A شافت در A و هرگونه پیشروش که اتفاق می‌افتد را تعیین کنید. از جرم کوچک شافت و متعلقات آن در O صرفنظر نمایید.

جواب (a) بدون پیشروش و M_A =۱۲/۵٦ N.m

(b) Ω = ۰/۷۲۳ rad/s و M_A = ۳/۱٤ N.m

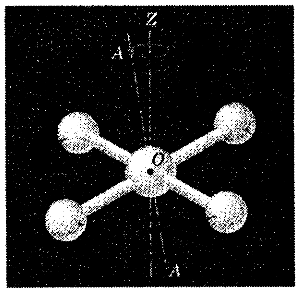


شکل مسئله ۱۰۵-۷

۷-۱۰۶ اگر چرخ در حالت (a) از مسئله ۷-۱۰۵ توسط یک محرک مکانیکی مجبور به پیشروش حول محور قائم با میزان $\mathbf{\Omega} = ۲\mathbf{j}$ rad/s باشد، گشتاور خمشی را در نقطه A از شافت افقی بدست آورید. در غیاب اصطکاک، چه گشتاور M_O به طوقه در O وارد می‌شود تا این حرکت را ادامه دهد؟

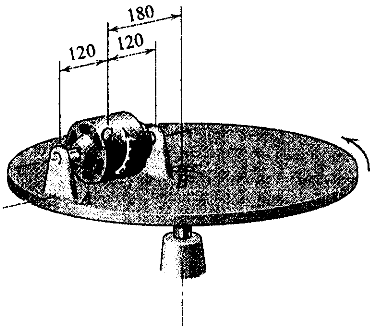
۷-۱۰۷ سازه ابتدایی یک ایستگاه فضایی پیشنهادی، تشکیل شده از چهار پوسته کروی که توسط میله‌های لوله‌ای به یکدیگر متصل شده‌اند. ممان اینرسی سازه حول محور هندسی A-A دو برابر ممان اینرسی حول هر محور گذرنده از O و عمود بر AA می‌باشد. ایستگاه طوری طراحی شده که بتواند حول محور هندسی خود با سرعت ثابت ۳ rev/min دوران نماید. اگر محور چرخش A-A حول محور ثابت Z پیشروش داشته و با آن زاویه‌ای خیلی کوچک بسازد، سرعت لنگ زدن ایستگاه را حساب کنید. مرکز جرم O دارای شتاب قابل چشم پوشی می‌باشد.

جواب پیشروش معکوس، $\dot{\psi} = -۶$ rev/min



شکل مسئله ۷-۱۰۷

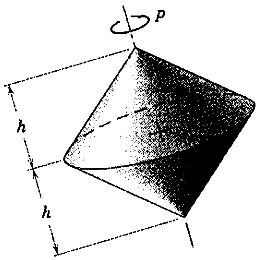
۷-۱۰۸ موتور الکتریکی نشان داده شده به وزن کل ۱۰ kg بوده و بر روی دو تکیه‌گاه A و B که به دیسک دواری متصل هستند، سوار شده است. آرمیچر موتور دارای جرم ۲/۵ kg و شعاع ژیراسیون ۳۵ mm بوده و چنانچه از طرف A به B نظازه شود، در جهت پادساعتگرد با سرعت ۱۷۲۵ rev/min دوران می‌کند. صفحه دوار حول محور قائم خود با میزان ثابت ۴۸ rev/min در جهت نشان داده شده دوران می‌کند. مولفه‌های قائم نیروهای تحمل شده توسط تکیه‌گاه‌های A و B را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷-۱۰۸

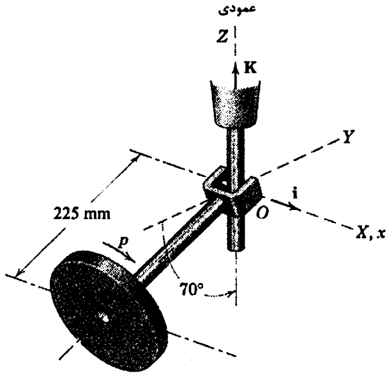
۷-۱۰۹ دو مخروط توپر با قاعده مشترک و ارتفاع‌های مساوی حول محور مشترک خود در فضا با آهنگ p می‌چرخند. به ازای چه نسبت h/r پیشروش محور چرخش آنها غیر ممکن خواهد بود؟

جواب $h/r = \sqrt{\frac{۳}{۲}}$



شکل مسئله ۷-۱۰۹

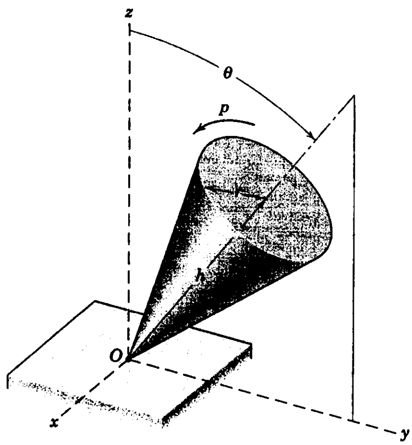
۷-۱۱۰ روتور ٤ کیلوگرمی با شعاع ژیراسیون ۷۵ mm روی بلبرینگ‌هایی با سرعت ۳۰۰۰ rev/min حول شافت OG خود دوران می‌کند. شافت آزادانه حول محور X لولا شده و می‌تواند حول محور Z نیز دوران کند. بردار $\mathbf{\Omega}$ مربوط به حرکت پیشروش حول محور Z را محاسبه کنید. از جرم شافت OG صرفنظر کرده و گشتاور ژیروسکوپی $\mathbf{M}$ اعمال شده توسط شافت بر روتور در نقطه G را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۱۱۰-۷

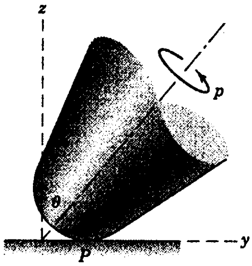
۱۱۱-۷ مخروط توپری به جرم m، شعاع قاعده r و ارتفاع h در حال چرخش با سرعت زیاد p حول محور خود می‌باشد و رها می‌شود تا راس O آن روی سطح افقی قرار گیرد. اصطکاک برای ممانعت از لغزش راس مخروط بر روی سطح x-y کافی است. جهت پیشروش Ω و پریود τ یک دور دوران کامل حول محور قائم z را تعیین کنید.

جواب $\Omega = \Omega \mathbf{k}$ و $\tau = 4\pi r^2 p/(5gh)$



شکل مسئله ۱۱۱-۷

۱۱۲-۷ نوک مخروط مسئله ۱۱۱-۷ در واقع تیز نبوده و به نوعی گرد می‌باشد به طوریکه مطابق شکل، نقطه تماس P با سطح نگهدارنده آن دارای انحرافی جزئی از محور دوران است. با توجه به وجود اصطکاک سینتیکی، نشان دهید چگونه زاویه θ به آهستگی کاهش خواهد یافت.

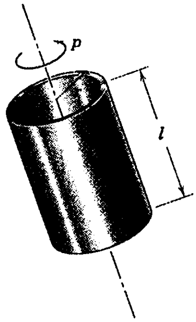


شکل مسئله ۱۱۲-۷

۱۱۳-۷ برای حفظ پایداری کامل یک اتومبیل آزمایشی در برابر واژگون شدن به هنگام دور زدن در یک مسیر منحنی، یک ژیروسکوپ متعادل کننده در آن نصب شده است (تا هیچگونه تغییری در نیروی قائم تایرها و جاده بوجود نیاید). روتور ژیروسکوپ دارای جرم m_0 و شعاع ژیراسیون k بوده و در یاتاقان‌های ثابتی بر روی محوری که موازی محور عقب اتومبیل می‌باشد، سوار شده است. مرکز جرم اتومبیل تا سطح جاده به اندازه h فاصله داشته و اتومبیل با سرعت v در حال دور زدن یک پیچ بدون شیب عرضی و مسطح می‌باشد. روتور با چه سرعت p و در چه جهتی بایستی چرخش نماید تا تمایل اتومبیل به واژگون شدن در هر دو جهت راست یا چپ خنثی گردد؟ جرم مجموع اتومبیل و روتور برابر m است.

جواب $p = \dfrac{mvh}{m_0 k^2}$ در جهت مخالف چرخش چرخ‌های اتومبیل

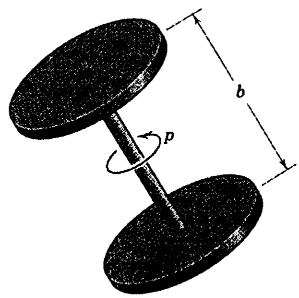
۷-۱۱٤ پوسته استوانه‌ای در فضا حول محور هندسی خود دوران می‌کند. اگر محور دارای لنگ‌زنی جزئی باشد، به ازای چه نسبت l/r حرکت پیشروشی مستقیم یا معکوس خواهد داشت؟



شکل مسئله ۷-۱۱۴

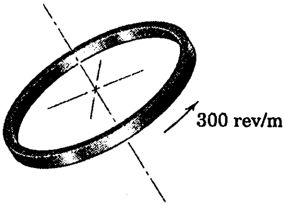
۷-۱۱۵ دو دیسک مدور مشابه، هر کدام به جرم m و شعاع r به صورت یک جسم صلب حول محور مشترک خود در حال چرخش هستند. اگر جسم آزادانه در فضا حرکت نماید، مقدار b را چنان تعیین کنید که حرکت پیشروشی روی ندهد.

جواب $b = r$



شکل مسئله ۷-۱۱۵

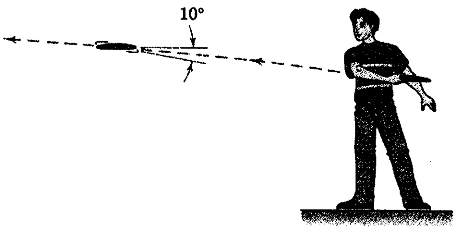
۷-۱۱٦ حلقه نازکی با سرعت ۳۰۰ rev/min در هوا پرتاب می‌گردد. اگر مشاهده شود که محور هندسی آن دارای لنگ زدن پیشروشی جزئی می‌باشد، فرکانس f لنگ زدن را تعیین کنید.



شکل مسئله ۷-۱۱۶

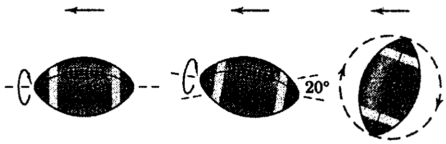
۷-۱۱۷ پسربچه‌ای دیسک مدور نازکی (مثل یک بشقاب پرنده) را با سرعت چرخشی ۳۰۰ rev/min پرتاب می‌کند. مشاهده می‌شود که صفحه دیسک با زاویه کل °۱۰ لنگ می‌زند. پریود τ لنگ زدن را تعیین کرده، مشخص کنید که حرکت پیشروش مستقیم است یا معکوس.

جواب معکوس $\tau = ۰/۰۹۹٦ s$



شکل مسئله۷-۱۷۷

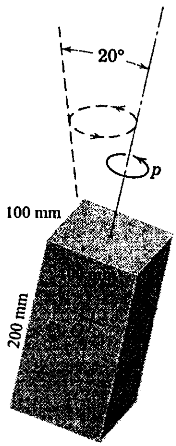
۷-۱۱۸ شکل نشان داده شده، یک نوع توپ فوتبال را در سه وضعیت نشان می‌دهد. حالت (الف) پرتاب کامل مارپیچی با میزان چرخش ۱۲۰ rev/min می‌باشد. حالت (ب) پرتاب مارپیچی با لنگ زدن را نمایش می‌دهد که مجددا با سرعت چرخشی ۱۲۰ rev/min حول محورش می‌باشد. اما زاویه کل لنگ زدن محور توپ °۲۰ می‌باشد. حالت (ج) پرتاب انتها به انتها با سرعت دورانی ۱۲۰ rev/min را نشان می‌دهد. برای هر حالت، مقادیر p، θ، β و ψ را همانگونه که در بخش معرفی شدند، مشخص کنید. ممان اینرسی حول محور طولی توپ برابر ۰/۳ ممان اینرسی حول محور تقارن عرضی آن است.



شکل مسئله ۱۱۸-۷

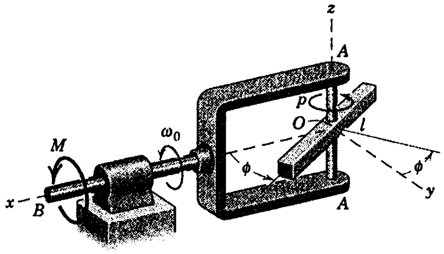
۱۱۹-۷ میله چهارگوشی در فضا حول محور طولی خود با میزان p = ۲۰۰ rev/min می‌چرخد. اگر محورش مطابق شکل با زاویه کل ۲۰° لنگ بزند، پریود τ لنگ زدن را حساب کنید.

جواب τ = ۰/۴۴۳ s



شکل مسئله ۱۱۹-۷

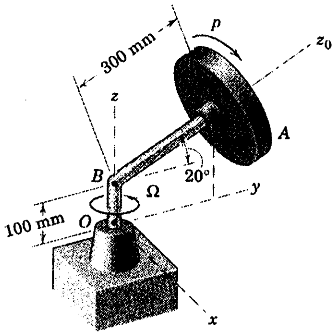
۱۲۰-۷ میله باریک یکنواختی به جرم m و طول l از مرکز بر روی شافت A-A سوار شده و با سرعت ثابت $\dot{\phi} = p$ حول آن دوران می‌کند. همزمان، یوغ با سرعت ثابت ω_0 ملزم به دوران حول محور x می‌باشد. مقدار گشتاور m مورد نیاز برای ثابت نگه داشتن سرعت ω_0 را به صورت تابعی از ϕ تعیین کنید. (*راهنمایی:* برای بدست آوردن مولفه x گشتاور M از رابطه ۱۹-۷ استفاده کنید).



شکل مسئله ۱۲۰-۷

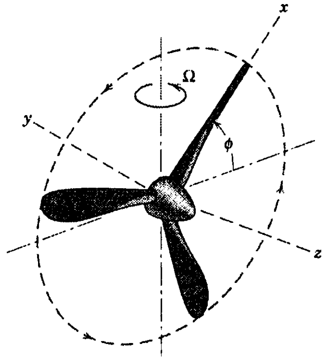
۱۲۱-۷ دیسک A و توپی مرکزی آن به جرم ۵ kg، دارای شعاع ژیراسیون ۸۵ mm حول محور z_0 و سرعت چرخشی p = ۱۲۵۰ rev/min می‌باشند. همزمان، مجموعه حول محور قائم با میزان Ω = ۴۰۰ rev/min دوران می‌کند. گشتاور ژیروسکوپی $\mathbf{M}$ وارد بر شافت در C توسط دیسک را حساب کرده و گشتاور خمشی M_O وارد بر شافت در O را بیابید. از جرم شافت صرفنظر کرده اما برعکس، کلیه نیروهای وارد بر آن را به حساب آورید.

جواب $\mathbf{M}$ = -۱۹۶/۳**i** N.m و M_O = ۳۱۹ N.m



شکل مسئله ۱۲۱-۷

۷-۱۲۲ هر یک از سه پرهٔ پروانه مشابه با فواصل مساوی، دارای ممان اینرسی I حول محور z پروانه می‌باشد. علاوه بر سرعت زاویه‌ای $\dot{\phi} = p$ پروانه حول محور z، هواپیما با میزان زاویه‌ای Ω به سمت چپ می‌چرخد. رابطه‌ای برای مولفه‌های x و y گشتاور خمشی M وارد بر شافت پروانه در محل توپی را بر حسب تابعی از ϕ بیان نمایید. محورهای x-y همراه با پروانه دوران می‌کنند.



شکل مسئله ۷-۱۲۲

۷-۱۲۳ ◀ دیسک مدور توپر به جرم m و ضخامت کم آزادانه روی شافت خود با میزان p می‌چرخد. اگر مجموعه از حالت قائم در موقعیت $\theta = 0$ و $\dot{\theta} = 0$ رها گردد، مولفه‌های افقی نیروهای A و B اعمال شده از طرف یاتاقان‌های متناظر بر شافت افقی را هنگام عبور از موقعیت $\theta = \pi/2$ تعیین کنید. از جرم دو شافت در مقایسه با m صرفنظر کرده و از کلیه اصطکاک‌ها چشم پوشی کنید. مسئله را با استفاده از روابط گشتاور مناسب حل کنید.

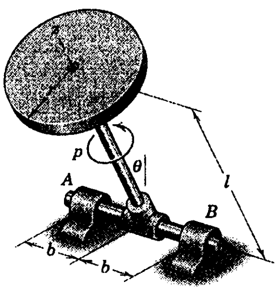
جواب

$$A_z = -\frac{m\dot{\theta}}{2}\left(\frac{r^2}{2b}p + l\dot{\theta}\right)$$

$$B_z = \frac{m\dot{\theta}}{2}\left(\frac{r^2}{2b}p - l\dot{\theta}\right)$$

که در آن:

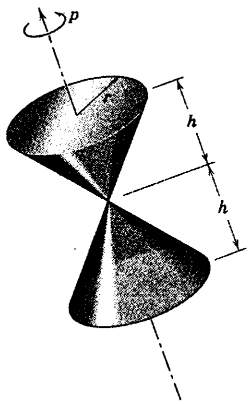
$$\dot{\theta} = 2\sqrt{\frac{2gl}{r^2 + 4l^2}}$$



شکل مسئله ۷-۱۲۳

۷-۱۲۴ ◀ دو مخروط قائم همگن توپر، هر یک به جرم m که از راس به یکدیگر وصل شده‌اند تا یک مجموعه صلب را تشکیل دهند، حول محور تقارن شعاعی‌شان با میزان $p = 200$ rev/min می‌چرخند. (الف) نسبت h/r را برای موقعیتی که محور دوران پیشروش نداشته باشد، تعیین کنید. (ب) مخروط‌های فضایی و جسمی را برای حالتی که h/r کوچکتر از نسبت بحرانی است، رسم کنید. (ج) مخروط‌های فضایی و جسمی را موقعی که $r = h$ و سرعت پیشروش $\dot{\psi} = 18$ rad/s است، رسم نمایید.

جواب $h = r/2$

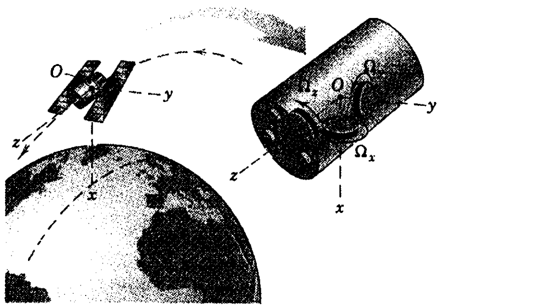


شکل مسئله ۷-۱۲۴

۷-۱۲۵ ◀ ماهواره بررسی‌گر زمین در مداری مدور با پریود τ قرار دارد. سرعت زاویه‌ای ماهواره حول محور عرضی y برابر $\omega = 2\pi/\tau$ بوده و حول محور x و محور z برابر صفر می‌باشد. بنابراین، محور x ماهواره همواره متوجه مرکز زمین است. ماهواره دارای یک سیستم کنترل موقعیت با چرخ

واکنشی است که مطابق شکل، شامل سه چرخ می‌باشد که هر کدام می‌توانند با موتورهای مجزای خود گشتاور متغیری را داشته باشند. در لحظه $t = 0$ سرعت زاویه‌ای چرخ z یعنی Ω_z نسبت به ماهواره برابر Ω_0 بوده و چرخ‌های x و y نسبت به ماهواره در حال سکون می‌باشند. برای اینکه سرعت زاویه‌ای ω ماهواره ثابت باقی بماند، گشتاورهای M_x، M_y و M_z را که بایستی توسط موتورها به ترتیب بر محورهای چرخ‌ها اعمال گردد، تعیین کنید. ممان اینرسی هر کدام از چرخ‌های واکنشی حول محورشان، I می‌باشد. سرعت‌های چرخ‌های واکنشی x و z توابعی هارمونیک بوده و پریود آنها با پریود مدار یکسان است. تغییرات گشتاورها و سرعت‌های نسبی چرخ‌ها یعنی Ω_x، Ω_y و Ω_z را طی مدت یک پریود مدار رسم نمایید. (*راهنمایی:* گشتاوری که به چرخ x شتاب می‌دهد، برابر است با عکس العمل گشتاور ژیروسکوپی بر روی چرخ z و بالعکس).

جواب
$M_x = -I\omega\,\Omega_0 \cos\omega t$
$M_y = 0$
$M_z = -I\omega\,\Omega_0 \sin\omega t$

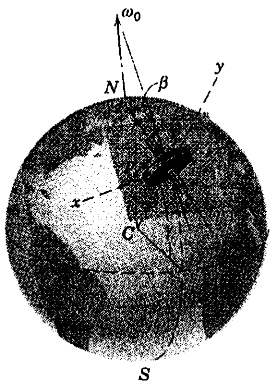


شکل مسئله ۱۲۵-۷

۱۲۶-۷ ◀ اجزای یک قطب‌نمای ژیروسکوپی در شکل نشان داده شده است که در آن روتور در عرض جغرافیایی شمالی γ زمین روی گهواره‌ای قرار دارد که می‌توانند آزادانه حول محور قائم ثابت y دوران نماید. بنابراین محور روتور قادر است در صفحه افقی x-z که با امتداد شمال زاویه β می‌سازد، دوران کند. فرض کنید که سرعت چرخش روتور p، ممان اینرسی آن حول محور چرخش و محور عرضی گذرنده از G به ترتیب I و I_0 باشد. نشان دهید که محور ژیروسکوپ حول امتداد شمال طبق رابطه $\ddot{\beta} + k^2\beta = 0$ نوسان می‌کنند که در آن $K^2 = I\omega_0 p\cos\gamma / I_0$ است. همچنین نشان دهید که پریود نوسانات حول امتداد شمال به ازای مقادیر کوچک β برابر $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{I_0}{I\omega_0 p\cos\gamma}}$ می‌باشد. (*راهنمایی:* مولفه‌های سرعت زاویه‌ای Ω محورها بر حسب سرعت زاویه‌ای ω_0 زمین عبارتند از:

$$\Omega_x = -\omega_0 \cos\gamma \sin\beta$$
$$\Omega_y = -\omega_0 \sin\gamma + \dot{\beta}$$
$$\Omega_z = -\omega_0 \cos\gamma \cos\beta$$

که می‌توان از اینها برای یافتن مولفه y معادلات گشتاور، معادلات ۱۹-۷ به منظور تعیین β به صورت تابعی از زمان بهره برد. توجه کنید که مجذور سرعت زاویه‌ای زمین بسیار کوچک است و می‌توان از آن در مقایسه با حاصلضرب $\omega_0 p$ صرفنظر نمود.)



شکل مسئله ۱۲۶-۷

دوره فصل

در فصل ۷ دینامیک اجسام صلب را در سه بعد مطالعه کردیم. افزودن بُعد سوم، روابط سینماتیکی و سینتیکی را به صورت قابل توجهی پیچیده می‌کند. در مقایسه با حرکت صفحه‌ای، اکنون این امکان وجود دارد که دو مولفه به بردارهای نماینده کمیت‌های زاویه‌ای مانند گشتاور، سرعت زاویه‌ای، مومنتم زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای اضافه شود. به این دلیل از توان کامل تحلیل برداری برای مواجه شدن با دینامیک سه بعدی باید بهره برد.

مطالعه دینامیک سه بعدی را به دو قسمت تقسیم کردیم که در بخش A فصل به سینماتیک و در بخش B به سینتیک پرداخته شد.

سینماتیک

ما سینماتیک سه بعدی را بر اساس پیچیدگی حرکت به انواع مختلف تقسیم کردیم. به این ترتیب:

۱- **انتقال.** همانند حرکت صفحه‌ای که در فصل ۵ (سینماتیک اجسام صلب در صفحه) بیان شد، هر دو نقطه از جسم صلب دارای سرعت و شتاب یکسان می‌باشد.

۲- **دوران حول محور ثابت.** در این حالت بردار سرعت زاویه‌ای تغییر جهت نمی‌دهد و روابط برای سرعت و شتاب نقطه براحتی از روابط ۱-۷ و ۲-۷ بدست می‌آید که از نظر شکل مشابه با معادلات متناظر در حرکت صفحه‌ای فصل ۵ می‌باشند.

۳- **حرکت در صفحه موازی.** این حالت موقعی اتفاق می‌افتد که کلیه نقاط جسم صلب در صفحاتی موازی با صفحه ثابت حرکت نمایند. بنابراین، در هر صفحه، نتایج فصل ۵ بکار گرفته می‌شود.

٤- **دوران حول نقطه ثابت.** در این حالت، هم مقدار و هم جهت بردار سرعت زاویه‌ای ممکن است تغییر نماید. یکبار که از بردار سرعت زاویه‌ای با دقت مشتق گیری شد، شتاب زاویه‌ای بدست می‌آید. معادلات ۱-۷ و ۲-۷ می‌توانند برای تعیین سرعت و شتاب یک نقطه مورد استفاده قرار گیرند.

۵- **حرکت کلی.** اصول حرکت نسبی جهت تشریح این نوع حرکت مورد استفاده قرار می‌گیرد. سرعت نسبی و شتاب نسبی بر حسب محورهای مرجع انتقالی توسط روابط ٤-۷ بیان شدند. موقعی که محورهای مرجع در حال دوران مورد استفاده هستند، مشتق بردارهای یکه نسبت به زمان صفر نیستند. معادلات ٦-۷ سرعت و شتاب را نسبت به محورهای مرجع دوار بیان می‌کنند؛ این معادلات مشابه نتایج متناظر در حرکت صفحه‌ای، معادلات ۱۲-۵ و ١٤-۵ می‌باشند. معادلات ۷-۷a و ۷-۷b روابطی هستند که رابطه مشتقات زمانی برداری را در یک سیستم ثابت و در یک سیستم دواری که اندازه‌گیری نسبت به آنها صورت می‌گیرند را بیان می‌کنند. این روابط در تشریح حرکت کلی مفید هستند.

سینتیک

ما اصول مومنتم و انرژی را در تشریح سینتیک سه بعدی مطابق زیر بکار بردیم:

۱- مومنتم زاویه‌ای. در عبارت برداری حرکت سه بعدی برای مومنتم زاویه‌ای مولفه‌های زیادی را که در حرکت صفحه‌ای وجود نداشتند، اضافه نمودیم. این مولفه‌های مومنتم زاویه‌ای توسط روابط ۱۲-۷ بیان شدند که وابسته به ممان‌ها و حاصلضرب‌های اینرسی بودند. یک موقعیت منحصر بفرد برای محورها وجود دارد که به ازای آن حاصلضرب‌های اینرسی صفر شده و ممان اینرسی‌های دیگر مقادیر ثابت بخود می‌گیرند. این محورها را *محورهای اصلی* می‌نامند. این مقادیر به *ممان‌های اینرسی اصلی* معروف هستند.

۲- انرژی جنبشی. انرژی جنبشی حرکت سه بعدی می‌تواند بر حسب حرکت حول مرکز جرم (معادله ۱۵-۷) و هم بر حسب حرکت حول یک نقطه ثابت (معادله ۱۸-۷) بیان شود.

۳- معادلات مومنتم حرکت. با استفاده از محورهای اصلی می‌توانیم معادلات مومنتم را ساده کرده و *معادلات اویلر* یعنی معادله ۲۱-۷ را بدست آوردیم.

کاربردها

در فصل ۷ دو کاربرد جالب خاص، بنام حرکت در صفحه موازی و حرکت ژیروسکوپی مطالعه گردید.

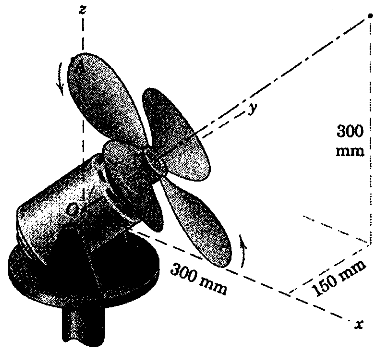
۱- حرکت در صفحه موازی. در این حالت ذرات یک جسم صلب در صفحاتی به موازات یک صفحه ثابت حرکت می‌کنند. معادلات حرکت، معادلات ۲۳-۷ هستند. این روابط برای تشریح اثرات ناميزانی دینامیکی در ماشین‌های دوران کننده و اجسامی که در مسیر مستقیم‌شان می‌غلتند، استفاده می‌گردد.

۲- حرکت ژیروسکوپی. این حرکت در صورتی رخ می‌دهد که محوری که جسم حول آن می‌چرخد، خود نیز حول محور دیگر دوران کند. کاربرد معمول آن در سیستم‌های هدایت با استفاده از خاصیت اینرسی، وسایل متعادل کننده، حرکت وضعیت قرارگیری فضاپیما و هر وضعیتی که روتور با چرخش سریع (مانند موتور هواپیما) شروع تغییر جهت می‌دهد، می‌باشد. در حالتی که گشتاور خارجی وجود دارد، تشریح پایه‌ای می‌تواند بر مبنای رابطه $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{H}}$ باشد. برای حالت حرکت بدون گشتاور که جسم حول محور تقارن خودش می‌چرخد، محور تقارن یک حرکت مخروطی را حول بردار مومنتم زاویه‌ای ثابت می‌سازد.

مسائل دوره‌ای

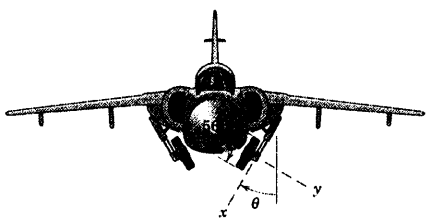
۷-۱۲۷ بادبزن الکتریکی دارای سرعت ثابت ۱۷۲۰ rev/min در جهت نشان داده شده، در حالیکه موقعیت محورهای تقارن مطابق شکل است، قرار گرفته است. اگر مولفه‌های x و y سرعت نقطه A بر لبه پره بادبزن به ترتیب ۱۵ m/s و ۲۰- m/s باشد، مقدار سرعت v لبه پره و همچنین قطر پره‌های بادبزن را بدست آورید.

جواب v = ۲۵/۵ m/s و d = ۲۸۳ mm



شکل مسئله ۷-۱۲۷

۷-۱۲۸ چرخ‌های هواپیمای جت، موقعی که هواپیما با سرعت ۱۵۰ km/h در حال برخاستن است با میزان زاویه‌ای متناظری در حال چرخش است. مکانیزم جمع کردن چرخ‌ها، در حال اضافه کردن θ با میزان ۳۰° در ثانیه است. شتاب زاویه‌ای α چرخ‌ها را در این شرایط حساب کنید.

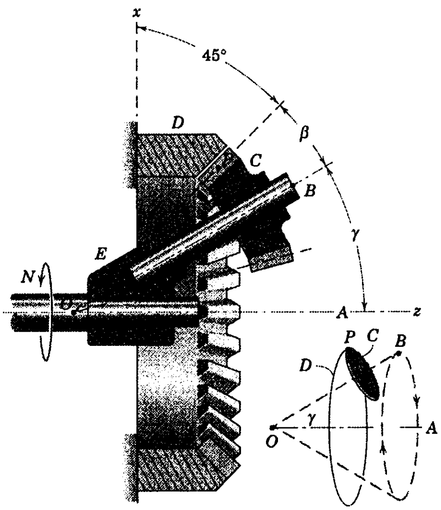


شکل مسئله ۷-۱۲۸

۷-۱۲۹ مقطع طرح یک مجموعه چرخ‌دنده مخروطی داخلی و یک چرخ‌دنده مخروطی حلقوی در شکل نشان داده شده است. چرخ‌دنده حلقوی D ثابت می‌باشد و نمی‌چرخد. غلاف E که شافت چرخ‌دنده مخروطی C را حمل می‌کند، حول محور مرکزی OA با میزان پایای N = ۵ دور در ثانیه دوران می‌کند. بنابراین، خط مرکزی OB چرخ‌دنده مخروطی، یک مخروط را تولید می‌کند که نیم زاویه راس آن γ است. به ازای نسبت دندانه $\frac{۳۳}{۱۲}$، زاویه β = ۱٤/۹۰° می‌باشد. سرعت زاویه‌ای ω و شتاب زاویه‌ای α چرخ‌دنده C را تعیین کنید (هندسه حرکت مجموعه در شکل کمکی نشان داده شده که در آن، چرخ‌دنده مخروطی C توسط یک دیسک مدور که با خط‌چین نمایش داده شده است، درون چرخ‌دنده حلقوی می‌غلتد و محور OB آن، مخروط خط چین را ایجاد می‌کند. مسیر فضایی نقطه P تماس دندانه‌ها، دایره ثابت چرخ‌دنده حلقوی D است).

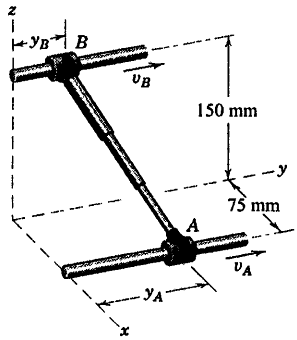
جواب $\boldsymbol{\omega}$ = ٤۳/۳(**i** + **k**) rad/s

$\boldsymbol{\alpha}$ = -۱۳٦۱**j** rad/s^2



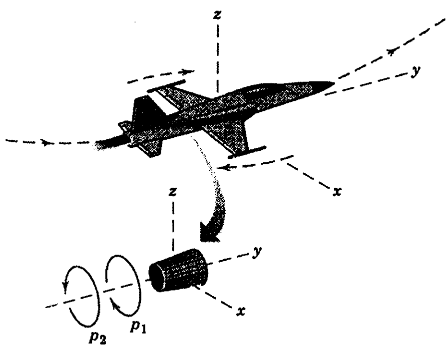
شکل مسئله ۷-۱۲۹

۷-۱۳۰ طوقه‌های واقع در دو انتهای لینک تلسکوپی AB در امتداد شافت‌های ثابت نشان داده شده می‌لغزد. در برهه‌ای از حرکت، v_A = ۱۲۵ mm/s و v_B = ۵۰ mm/s است. رابطه‌ای برداری برای سرعت زاویه‌ای ω_n خط مرکزی لینک در شرایطی که y_A = ۵۰ mm و y_B = ۱۰۰ mm می‌باشد، تعیین کنید.



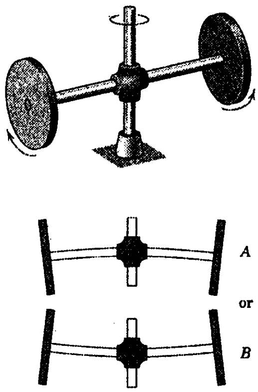
شکل مسئله ۱۳۰-۷

۱۳۱-۷ هواپیمای جت که در پایین حرکت حلقوی قائم خود قرار گرفته، بر اثر عمل ژیروسکوپی روتور موتور خود تمایل به گردش حول محور z به طرف راست دارد (از دید خلبان و مطابق شکل که با خط چین نشان داده شده). جهت چرخش p_1 یا p_2 روتور موتور از منظری مطابق شکل تعیین کنید.



شکل مسئله ۱۳۱-۷

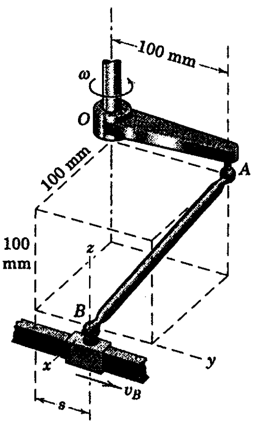
۱۳۲-۷ دو دیسک یکسان مطابق شکل آزادانه بر روی شافت با سرعت زاویه‌ای برابر و خلاف جهت یکدیگر دوران می‌کنند. شافت به نوبه خود حول محور قائم در جهت نشان داده شده وادار به چرخش می‌شود. ثابت کنید: در اثر عمل ژیروسکوپی، شافت مطابق شکل A خم می‌شود یا مانند شکل B.



شکل مسئله ۱۳۲-۷

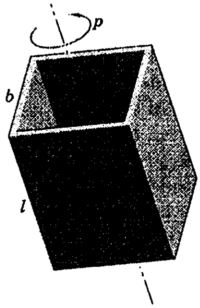
۱۳۳-۷ لینک AB توسط مفصل‌های کاسه ـ ساچمه‌ای در دو انتها به بازوی دوار OA و لغزنده B متصل شده است. بازوی OA مقید به دوران حول محور ثابت عمودی بوده و لغزنده در امتداد ثابت میله چهارگوش مقید به حرکت می‌باشد. اگر سرعت لغزنده در موقعیت نشان داده شده برای OA و هنگامی که $s = ۵۰$ mm است، برابر $v_B = ۰/۵$ m/s باشد، سرعت زاویه‌ای متناظر ω_n لینک AB را محاسبه کنید. از محورهای غیر دوار متصل به B استفاده کنید.

جواب $\omega_n = \frac{۵}{۹}(\text{٤}\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + \text{٥}\mathbf{k})$ rad/s



شکل مسئله ۱۳۳-۷

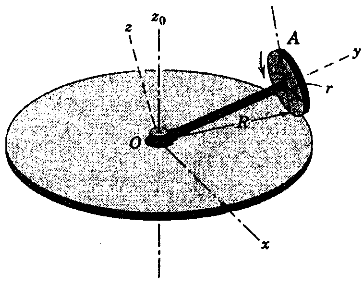
۷-۱۳۴ قوطی مستطیلی جدار نازک دوسر باز، در فضا حول محور مرکزی طولی خود مطابق شکل دوران می‌کند. اگر محور دارای لنگ زدن جزئی باشد، به ازای چه نسبت‌هایی از l/b، پیشروش مستقیم یا معکوس می‌باشد؟



شکل مسئله ۱۳۴-۷

۷-۱۳۵ دیسک مدوری به شعاع r بر روی شافت خود که در O لولا شده، می‌تواند حول محور قائم z_0 دوران کند. اگر دیسک با سرعت ثابت بدون لغزش، بغلتد و یک دور دایره‌ای به شعاع R را در زمان τ بپیماید، رابطه‌ای برای سرعت زاویه‌ای مطلق ω دیسک، تعیین کنید. از محورهای x-y-z که حول محور z_0 می‌چرخد، استفاده کنید. (*راهنمایی:* سرعت زاویه‌ای مطلق دیسک برابر با سرعت زاویه‌ای محورها بعلاوه (برداری) سرعت زاویه‌ای نسبت به محورها می‌باشد که با ثابت نگهداشتن x-y-z و دوران دادن دیسک مدور به شعاع R با سرعت $۲\pi/\tau$ مشاهده می‌شود.)

جواب
$$\omega=\frac{۲\pi}{\tau}\left[\left(-\frac{R}{r}+\frac{r}{R}\right)\mathbf{j}+\frac{\sqrt{R^{۲}-r^{۲}}}{R}\mathbf{k}\right]$$



شکل مسئله ۱۳۵-۷

۷-۱۳۶ شتاب زاویه‌ای α دیسک مدور غلتان مسئله ۱۳۵-۷ را تعیین کنید. از نتایج بدست آمده در مسئله قبل استفاده نمایید.

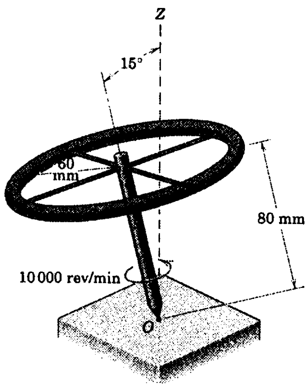
۷-۱۳۷ سرعت $\mathbf{v}$ نقطه A واقع بر لبه دیسک مسئله ۱۳۵-۷ را در موقعیت نشان داده شده، تعیین کنید.

جواب
$$\mathbf{v}_A=-\frac{۴\pi}{\tau}\left(R-\frac{r^{۲}}{R}\right)\mathbf{i}$$

۷-۱۳۸ شتاب $\mathbf{a}$ نقطه A واقع بر لبه دیسک مسئله ۱۳۵-۷ را در موقعیت نشان داده شده، تعیین کنید.

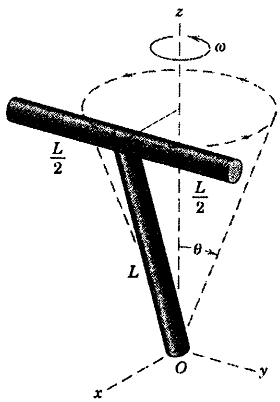
۷-۱۳۹ یک فرفره متشکل از حلقه‌ای به جرم m = ۰/۵۲ kg و شعاع متوسط r = ۶۰ mm روی شافت نوک تیز مرکزی خود، توسط پره‌هایی به جرم ناچیز، سوار شده است. فرفره با سرعت چرخشی ۱۰۰۰۰ rev/min به چرخش درآمده و روی سطح افقی چنان رها می‌شود که موقعیت نقطه O ثابت باقی بماند. مشاهده می‌شود که فرفره همراه با پیشروش، محورش زاویه ۱۵° را با امتداد قائم می‌سازد. تعداد دور N پیشروش فرفره را در هر دقیقه تعیین کنید. همچنین جهت پیشروش را مشخص کرده و مخروط‌های جسمی و فضایی را رسم کنید.

جواب N = ۱/۹۸۸ cycles/min



شکل مسئله ۱۳۹-۷

۷-۱۴۰ دو میله باریک یکنواخت، هر کدام به جرم m و طول L به صورت عمودی به یکدیگر جوش داده شده‌اند و به عنوان یک مجموعه صلب حول محور z با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کنند. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ مجموعه را حول O تعیین کنید و انرژی جنبشی T آنرا بدست آورید.

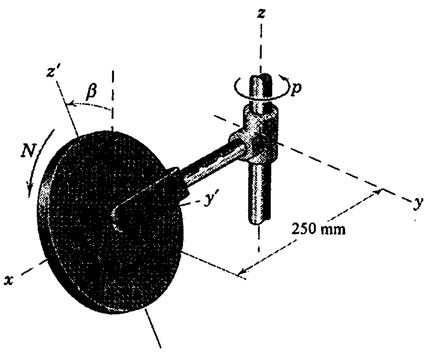


شکل مسئله ۱۴۰-۷

۷-۱۴۱ دیسک مدور یکنواختی به شعاع ۱۰۰ mm و ضخامت باریک دارای جرم ۳/۶ kg بوده و حول محور y' خود با میزان N = ۳۰۰ rev/min می‌چرخد؛ در حالیکه صفحه دوران آن زاویه ثابت β = ۲۰° را نسبت به صفحه قائم x-z می‌سازد. همزمان، مجموعه حول محور ثابت z با میزان p = ۶۰ rev/min دوران می‌کند. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ دیسک به تنهایی را حول مبدا O مختصات x-y-z حساب کنید. همچنین انرژی جنبشی T دیسک را بدست آورید.

جواب $\mathbf{H}_O$ = ۰/۰۵۵۰**j** + ۱/۶۷۰**k** kg.m²/s

T = ۱۴/۷۴ J

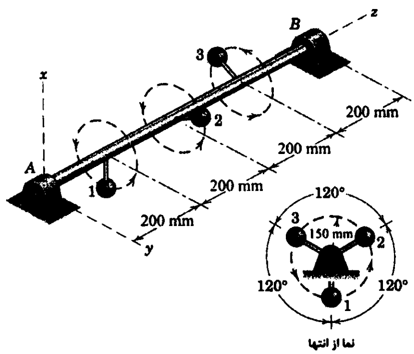


شکل مسئله ۱۴۱-۷

۷-۱۴۲ مسئله ۱۴۱-۷ را دوباره با این شرط که β بجای اینکه ثابت باشد، با میزان پایای ۱۲۰ rev/min در حال افزایش باشد، حل کنید. مومنتم زاویه‌ای $\mathbf{H}_O$ دیسک را برای لحظه‌ای که β = ۲۰° بیابید. همچنین انرژی جنبشی T دیسک را حساب کنید. آیا T به β وابسته است؟

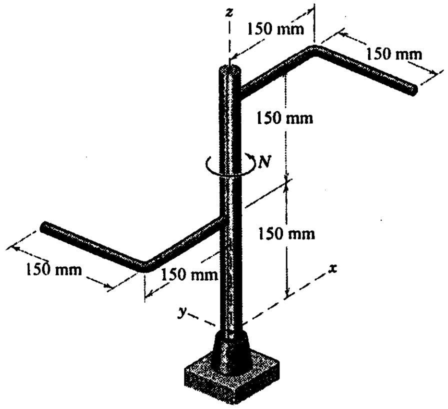
۷-۱۴۳ ناموزونی دینامیکی میل‌لنگی خاص به طور تقریب به صورت مدل فیزیکی نشان داده شده است که در آن شافت حامل سه گوی کوچک ۰/۶ kg می‌باشد و توسط میله‌هایی با جرم ناچیز به آن متصل شده‌اند. اگر شافت با سرعت ثابت ۱۲۰۰ rev/min دوران نماید، نیروهای R_A و R_B وارد بر یاتاقان‌ها را محاسبه کنید. از نیروهای جاذبه صرفنظر کنید.

جواب $|R_A| = |R_B| =$ ۶۱۵ N



شکل مسئله ۷-۱۴۳

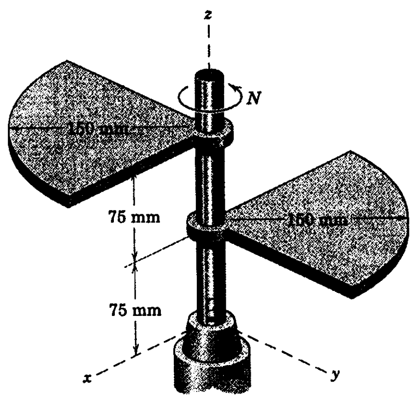
۷-۱۴۴ هر یک از دو میله خمیده قائم الزاویه‌ای، دارای جرم ۱/۲ kg است و به موازات صفحه افقی x-y قرار دارد. میله‌ها به شافت قائمی جوش داده شده‌اند که حول محور z با سرعت دورانی ثابت $N =$ ۱۲۰۰ rev/min دوران می‌کند. گشتاور خمشی M وارد بر شافت در پایه O آنرا حساب کنید.



شکل مسئله ۷-۱۴۴

۷-۱۴۵ هر یک از دو ورق ربع دایره به جرم ۲ kg به شافت قائمی که بر روی لولای ثابت O سوار شده، جوش داده شده‌اند. مقدار M گشتاور خمشی وارد بر شافت در O را به ازای سرعت دورانی ثابت $N =$ ۳۰۰ rev/min محاسبه کنید. ورق‌ها را دقیقا به شکل ربع دایره در نظر بگیرید.

جواب $M =$ ۱۳/۳۳ N.m



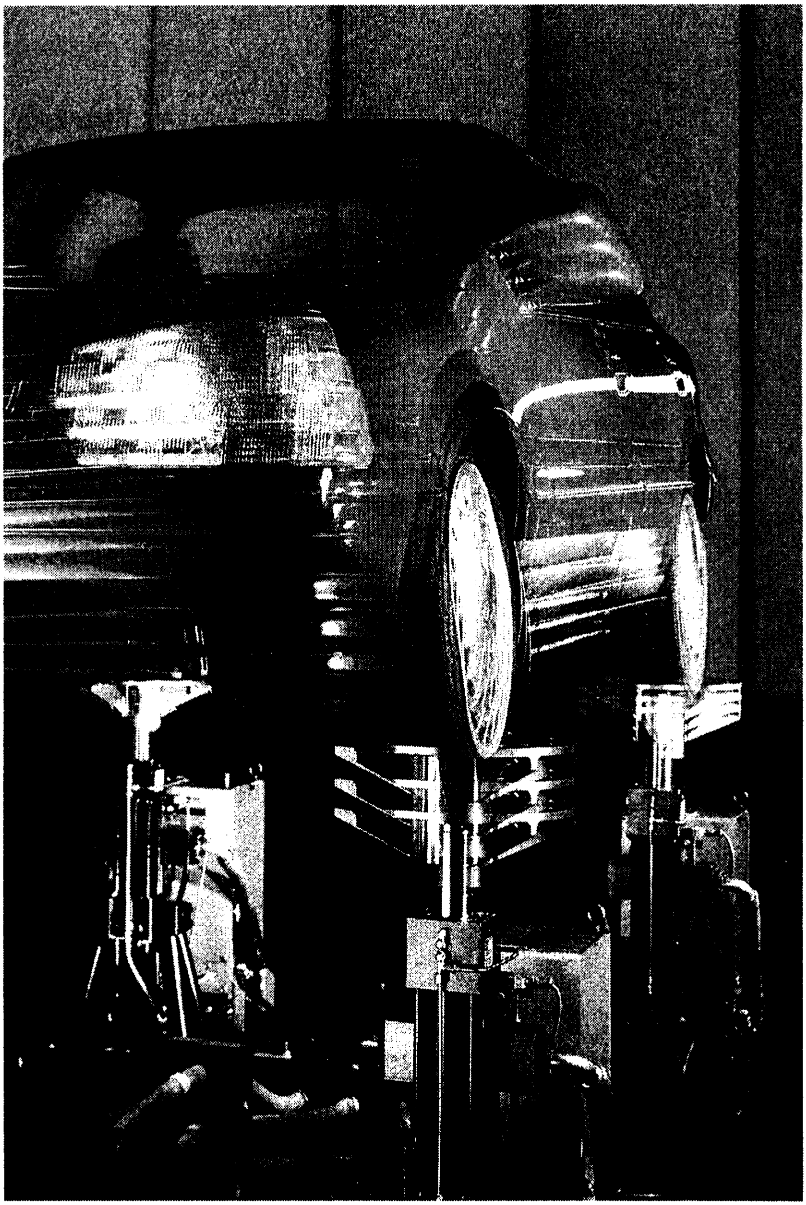
شکل مسئله ۷-۱۴۵

۷-۱۴۶ گشتاور خمشی M وارده بر شافت در O را برای مجموعه دورانی مسئله ۷-۱۴۵ در حالتی حساب کنید که مجموعه از حالت سکون با شتاب زاویه‌ای ۲۰۰ rad/s^2 شروع به دوران نماید.

فصل هشتم

ارتعاش و پاسخ زمانی

فهرست مطالب



ارتعاش یکی از موضوعات مهم رشته دینامیک است. اجسامی که در معرض تحریکات متناوب قرار می‌گیرند، می‌توانند حرکاتی را از خود بروز دهند که مشخصه آنها دامنه‌های بسیار بزرگ و حتی مخرب می‌باشد. تصویر فوق اتومبیلی را نشان می‌دهد که با استفاده از محرک‌های هیدرولیکی، تحت آزمایش ارتعاش قرار گرفته است. در چنین آزمایشگاهی می‌توان شرایط مختلفی برای جاده و اتومبیل شبیه سازی کرد.

۱-۸ مقدمه

دسته مهم و خاصی از مسائل دینامیکی راجع به حرکت خطی و زاویه‌ای اجسامی بحث می‌کنند که در حال نوسان هستند و یا در مقابل تحریکات ایجاد شده در اثر نیروهای بازگرداننده، عکس العمل نشان می‌دهند. مثال‌هایی که برای این دسته از مسائل می‌توان نام برد، عبارتند از: پاسخ یک سازه مهندسی نسبت به زلزله، ارتعاش یک ماشین دوار ناموزون، پاسخ زمانی تارهای کشیده شده یک وسیله موسیقی، ارتعاش یا حرکت شلاقی خطوط انتقال برق در اثر وزش باد و لرزش بال‌های هواپیما. به دلیل محدودیت مواد بکار رفته و نیز عوامل انسانی در بسیاری از موارد، باید از شدت ارتعاش کاسته شود.

در تحلیل هر مسئله مهندسی، سیستم مورد نظر باید توسط یک مدل فیزیکی معرفی شود. اغلب به منظور معرفی یک سیستم *پیوسته یا دارای پارامترهای گسترده* (که در آن، جرم و اجزا فنر به صورت پیوسته در فضا گسترده شده‌اند) را توسط یک *مدل گسسته یا دارای پارامترهای متمرکز* (که در آن، جرم و اجزاء فنر به صورت مجزا و متمرکز قرار دارند) نشان داد. بویژه چنین مدلی هنگامی مفید است که بخش‌هایی از سیستم پیوسته در مقایسه با سایر قسمت‌ها از جرم بیشتری برخوردار باشند. مثلاً در مدل فیزیکی پروانه یک کشتی، شافت بدون جرم در نظر گرفته می‌شود ولی قابلیت پیچش شافت و دیسک‌های متصل به دوانتهای آن که یکی از این دیسک‌ها متصل به توربین و دیگری متصل به پروانه است، از نظر پنهان نمی‌ماند. به عنوان مثال دوم، ملاحظه می‌کنیم که جرم فنرها غالباً در مقایسه با اجسام متصل به آنها ناچیز است.

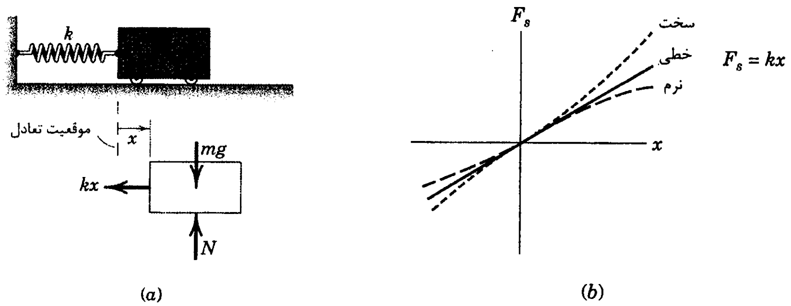
هر سیستم را نمی‌توان به صورت مدل جرم متمرکز، ساده سازی کرد. مثلاً ارتعاشات عرضی یک سکوی شیرجه که پس از شیرجه زدن از روی آن صورت می‌گیرد، جزء مسائل مشکل ارتعاش با پارامترهای گسترده به شمار می‌رود. در این فصل، مطالعه خود را با سیستم‌های جرم متمرکز آغاز می‌کنیم و بحث خود را به مسائلی محدود می‌نماییم که می‌توان حرکت آنها را با یک پارامتر جابجایی توصیف کرد. به چنین سیستم‌هایی سیستم یک *درجه آزادی* گفته می‌شود. برای مطالعه بیشتر در زمینه سیستم‌های پیوسته و نیز سیستم‌های دو درجه آزادی یا بالاتر، شما بایستی به کتابهایی مراجعه کنید که موضوع آن صرفاً ارتعاشات است.

باقیمانده فصل ۸ به چهار بخش تقسیم شده است. بخش ۲-۸ درباره ارتعاش آزاد ذره بحث می‌کند و بخش ۳-۸ ارتعاش اجباری ذره را معرفی می‌کند. هر یک از این دو بخش به دو زیر بخش، حرکت میرا و نامیرا تقسیم شده‌اند. در بخش ٤-۸ ارتعاش اجسام صلب را مورد بحث قرار می‌دهیم و در پایان در بخش ۵-۸ روش انرژی در حل مسائل ارتعاشی معرفی می‌شود.

مباحث ارتعاشات در واقع کاربرد مستقیمی از اصول سینتیک هستند که در فصل‌های ۳ و ٦ مطرح شدند. بویژه، رسم ترسیمه آزاد کامل جسم *برای متغیر جابجایی که به طور دلخواه دارای مقدار مثبت است*، به همراه بکارگیری معادلات دینامیکی مناسب که بر مسئله حاکم هستند، نهایتاً معادله حرکت را مشخص خواهند ساخت. از این معادله حرکت که یک معادله دیفرانسیلی مرتبه دوم است، می‌توان کلیه اطلاعات مورد نظر، از قبیل فرکانس حرکت، پریود یا خود حرکت به صورت تابعی از زمان بدست آورد.

۲-۸ ارتعاش آزاد ذرات

هنگامی که یک جسم متصل به فنر از حالت تعادل خارج می‌شود، به حرکت حاصله که در غیاب تاثیر هرگونه نیروی خارجی صورت می‌گیرد، *ارتعاش آزاد* گفته می‌شود. در هر ارتعاش آزاد واقعی، نیروهای بازدارنده و یا مستهلک کننده‌ای وجود دارند که تمایل به کُند کردن حرکت دارند. نیروهای مستهلک کننده متداول در اثر اصطکاک مکانیکی و یا اصطکاک سیال ایجاد می‌شوند. در بخش (a) از شکل، حالت ایده‌آل در نظر گرفته شده است که در آن نیروهای مستهلک کننده به اندازه‌ای کوچک هستند که می‌توان از آنها صرفنظر کرد. در بخش (b) حالتی مورد بحث قرار گرفته که استهلاک قابل توجه بوده و باید به حساب آید.



شکل ۱-۸

معادله حرکت برای ارتعاش آزاد نامیرا

بحث خود را با در نظر گرفتن ارتعاش افقی سیستم ساده جرم ـ فنر بدون اصطکاک شکل ۱a-۸ آغاز می‌کنیم. توجه داشته باشید که متغیر x معرف جابجایی جرم از وضعیت تعادل است که در مورد این سیستم، x همان میزان موقعیت آزاد یا جابجایی صفر فنر را نیز مشخص می‌کند. شکل ۱b-۸ نمودار نیروی F_s لازم جهت تغییر شکل فنر را نسبت به تغییر شکل متناظر آن برای فنرهای مختلف نشان می‌دهد. گرچه فنرهای غیر خطی سخت و نرم در بعضی از کاربردها مفید هستند، ولی ما توجه خود را به فنرهای خطی محدود می‌کنیم. فنرهای خطی فنرهایی هستند که نیروی بازگرداننده، $-kx$ به جرم وارد می‌کنند. یعنی هنگامی که جرم به سمت راست جابجا می‌شود، نیروی فنر به سمت چپ است و بالعکس. ما باید در تمایز دو نیروی F_s وارد بر دو انتهای فنر بدون جرم برای کشیدگی یا فشردگی آن و نیروی $F = -kx$ وارد از فنر به جرم، تمایز قائل شویم. ثابت تناسب k به *ثابت فنر*، *مدول فنر* یا *سختی فنر* (فنریت) موسوم بوده و واحد آن N/m یا lb/ft می‌باشد.

معادله حرکت جسم شکل ۱a-۸ از روی ترسیمه آزاد نشان داده شده بدست می‌آید. با بکارگیری قانون دوم نیوتن به صورت $\Sigma F_x = m\ddot{x}$ نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$-kx = m\ddot{x} \quad \text{یا} \quad m\ddot{x} + kx = 0 \tag{۸-۱}$$

نوسان جرمی که تحت تاثیر نیروی بازگرداننده خطی قرار گرفته به صورت معادله‌ای بیان می‌شود که به حرکت *هارمونیک ساده* موسوم است و به کمک شتابی مشخص می‌شود که متناسب با جابجایی اما در خلاف جهت آن است. معادله ۱-۸ معمولاً به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0} \tag{۸-۲}$$

که در آن:

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{k/m}} \tag{۸-۳}$$

جایگزینی فوق جایگزینی مناسبی است که اهمیت فیزیکی آن بعداً به طور مختصر توضیح داده خواهد شد.

حل ارتعاش آزاد نامیرا

از آنجایی که از حل معادله دیفرانسیل اخیر انتظار یک حرکت نوسانی را داریم، بنابراین به دنبال راه حلی می‌گردیم که x را به صورت یک تابع تناوبی نسبت به زمان ارائه کند. در نتیجه، انتخاب منطقی به صورت زیر است:

$$x = A\cos\omega_n t + B\sin\omega_n t \tag{۸-٤}$$

و یا به صورت:

$$x = C\sin(\omega_n t + \psi) \tag{۸-۵}$$

با جایگذاری مستقیم این عبارات در معادله ۲-۸ ثابت می‌شود که هر عبارتی از این نوع، جواب معتبری برای معادله حرکت است. ثابت‌های A، B، C و ψ با استفاده از اطلاعات مربوط به جابجایی اولیه x_0 و سرعت اولیه $\dot{x}_0$ جرم m تعیین می‌شوند. مثلاً اگر در راه حل ارائه شده در معادله ٤-۸، x و $\dot{x}$ را در زمان $t = 0$ مورد ارزیابی قرار دهیم، داریم:

$$x_0 = A \quad \text{و} \quad \dot{x}_0 = B\omega_n$$

با جایگذاری مقادیر A و B در معادله ٤-۸ نتیجه می‌دهد:

$$x = x_0\cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t \tag{۸-٦}$$

ثابت‌های C و ψ در معادله ۵-۸ را می‌توان به روش مشابه برحسب شرایط اولیه داده شده، بدست آورد. نتیجه ارزیابی معادله ۵-۸ و مشتق اول آن نسبت به زمان در $t = 0$ چنین است:

$$x_0 = C\sin\psi \quad \text{و} \quad \dot{x}_0 = C\,\omega_n\cos\psi$$

با حل کردن برای C و ψ داریم:

$$C=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\omega_n)^2} \qquad \psi=\tan^{-1}(x_0\omega_n/\dot{x}_0)$$

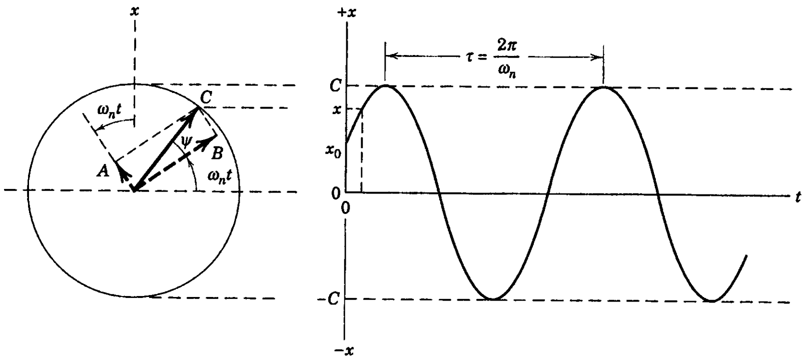
با جایگذاری این مقادیر در معادله ۵–۸ داریم:

$$x=\sqrt{x_0^2+(\dot{x}_0/\omega_n)^2}\,\sin\left[\omega_n t+\tan^{-1}(x_0\omega_n/\dot{x}_0)\right] \qquad (۸–۷)$$

معادلات ٦–۸ و ۷–۸ دو رابطه ریاضی متفاوت را برای یک حرکت وابسته به زمان معرفی می‌کند. ملاحظه می‌کنیم که $C=\sqrt{A^2+B^2}$ و $\psi=\tan^{-1}(A/B)$ است.

نمایش ترسیمی حرکت

شکل ۲–۸ نمایش ترسیمی حرکت را نشان می‌دهد که x تصویر بر روی محور قائم بردار دوار به طول C می‌باشد. بردار با سرعت زاویه‌ای ثابت $\omega_n=\sqrt{k/m}$ دوران می‌کند که به *فرکانس دایره‌ای طبیعی* موسوم بوده و واحد آن رادیان بر ثانیه می‌باشد. به تعداد دورهای کامل در واحد زمان، *فرکانس طبیعی* $f_n=\omega_n/۲\pi$ گفته می‌شود و بر حسب هرتز بیان می‌گردد (۱ دور بر دقیقه = (Hz) ۱ هرتز). زمان لازم برای یک دور کامل حرکت (یک دوران از بردار مرجع) پریود حرکت نامیده شده و از روابط $\tau=۱/f_n=۲\pi/\omega_n$ بدست می‌آید.

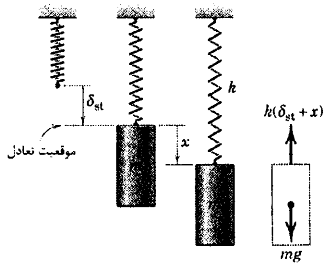


شکل ۲–۸

همچنین از روی شکل می‌بینیم که x با مجموع تصاویر دو بردار عمود بر هم بر روی محور قائم برابر است. اندازه این بردارها A و B بوده و C که اندازه جمع برداری A و B است *دامنه* حرکت می‌باشد. بردارهای A، B و C همگی با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_n دوران می‌کنند. در نتیجه، همانطور که قبلاً دیده‌ایم، $C=\sqrt{A^2+B^2}$ و $\psi=\tan^{-1}(A/B)$ است.

موقعیت تعادل بجای مرجع

در مورد ارتعاش آزاد غیر میرایی ذرات، نکات بیشتری وجود دارد. اگر سیستم شکل a۱–۸ در جهت ساعتگرد، °۹۰ چرخانده شود، سیستم شکل ۳–۸ بدست می‌آید که بجای حرکت افقی دارای حرکت در امتداد قائم می‌باشدو در صورتیکه x را به صورت جابجایی از موقعیت تعادل تعریف کنیم، معادله حرکت (و در نتیجه کلیه مشخصات سیستم) بدون تغییر می‌ماند.



شکل ۳-۸

حال موقعیت تعادل از میزان تغییر شکل δ_{st} فنر که غیر صفر است، محاسبه می‌شود. با توجه به ترسیمه آزاد جسم در شکل ۳-۸ ، قانون دوم نیوتن رابطه زیر را می‌دهد.

$$-k(\delta_{st}+x)+mg=m\ddot{x}$$

در موقعیت تعادل $x=0$ ، مجموع نیروها باید صفر شود، به طوری که:

$$-k\delta_{st}+mg=0$$

در نتیجه، می‌بینیم که دو نیروی $-k\delta_{st}$ و mg در طرف چپ معادله حرکت یکدیگر را حذف کرده و خواهیم داشت:

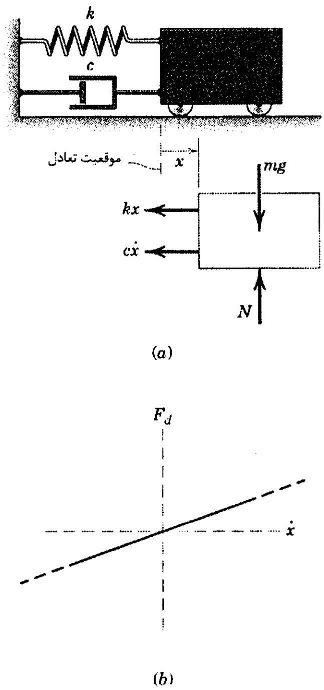
$$m\ddot{x}+kx=0$$

که با معادله ۱-۸ یکسان است. مطلبی که در اینجا فهمیده می‌شود آن است که با صفر تعریف کردن جابجایی برای وضعیت تعادل به جای موقعیت صفر تغییر شکل فنر، می‌توانیم از نیروهای مساوی ولی در خلاف جهت یکدیگر در موقعیت تعادل صرفنظر کنیم*.

معادلات حرکت برای ارتعاش آزاد میرا

هر سیستم مکانیکی به طور ذاتی تا درجه‌ای از اصطکاک را داراست که این اصطکاک به عنوان مصرف کننده انرژی محسوب می‌شود. مدل‌های دقیق ریاضی اتلاف انرژی ناشی از نیروهای اصطکاک معمولاً پیچیده‌اند. ارتعاش‌گیر یا مستهلک کننده لزج (ویسکوز) وسیله‌ای است که عمداً به منظور محدود کردن و یا کاستن از ارتعاشات به سیستم‌ها اضافه می‌شود. این وسیله دارای استوانه‌ای است که با یک سیال ویسکوز پر شده است و پیستونی در آن حرکت می‌کند که دارای سوراخ و گذرگاه‌هایی برای عبور سیال از یک طرف پیستون به طرف دیگر آن می‌باشد. ارتعاش‌گیر ساده‌ای که در شکل ۴a-۸ به طور شماتیک نشان داده شده، نیروی F_d را همانند شکل ۴b-۸ به گونه‌ای وارد می‌کنند که اندازه این نیرو با سرعت جرم m متناسب است. ثابت تناسب c به *ضریب میرایی ویسکوز* موسوم بوده و واحد آن N.s/m یا lb-sec/ft می‌باشد. جهت نیروی مستهلک کننده که به جرم m وارد می‌شود، در خلاف جهت سرعت $\dot{x}$ است. و از این رو نیروی وارد بر جرم برابر $-c\dot{x}$ می‌شود.

ارتعاش‌گیرهای پیچیده یک سوپاپه که از دبی جریان داخلی مستقل هستند، می‌توانند در هنگام کشش و فشار، ضرایب استهلاک متفاوتی را ایجاد کنند و همچنین می‌توانند دارای مشخصات غیر خطی باشند. ما توجه خود را فقط به ارتعاش‌گیر خطی ساده محدود می‌کنیم.



شکل ۴-۸

* در سیستم‌های غیر خطی، همه نیروها از جمله نیروهای استاتیکی در حال تعادل، می‌بایست در تجزیه و تحلیل گنجانده شوند.

معادله حرکت جسمی که به مستهلک کننده‌ای متصل است از روش ترسیمه آزاد شکل ٤a–٨ تعیین می‌شود. از قانون دوم نیوتن داریم:

$$-kx - c\dot{x} = m\ddot{x} \quad \text{یا} \quad m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{۸–۸}$$

علاوه بر جایگزینی $\omega_n = \sqrt{k/m}$، به دلایلی که بعداً معلوم خواهد شد، مناسب است که ترکیبی از ثابت‌ها را به صورت زیر تعریف کنیم.

$$\zeta = c/(2m\omega_n)$$

کمیت ζ (زِتا) به *فاکتور میرایی ویسکوز* یا *نسبت میرایی* موسوم بوده و معیاری برای شدت استهلاک است. شما باید ثابت کنید که ζ بدون بُعد است. اکنون می‌توان معادله ۸–۸ را به صورت زیر نوشت.

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = 0} \tag{۸–۹}$$

حل ارتعاش آزاد میرا

برای حل معادله حرکت، معادله ۸–۹ ، فرض می‌کنیم که جواب به صورت زیر باشد.

$$x = A\,e^{\lambda t}$$

با جایگزین کردن در معادله ۸–۹ خواهیم داشت:

$$\lambda^2 + 2\zeta\omega_n\lambda + \omega_n^2 = 0$$

که به *معادله مشخصه* معروف است. ریشه‌های آن عبارتند از:

$$\lambda_1 = \omega_n\left(-\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) \qquad \lambda_2 = \omega_n\left(-\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}\right)$$

سیستم‌های خطی دارای خاصیت جمع *آثار* هستند. بدین معنی که حل عمومی آن از جمع حل‌های مجزای هر یک از ریشه‌های معادله مشخصه بدست می‌آید. بنابراین، حل عمومی چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} x &= A_1\,e^{\lambda_1 t} + A_2\,e^{\lambda_2 t} \\ &= A_1\,e^{\left(-\zeta+\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} + A_2\,e^{\left(-\zeta-\sqrt{\zeta^2-1}\right)\omega_n t} \end{aligned} \tag{۸–۱۰}$$

طبقه بندی حرکت میرا

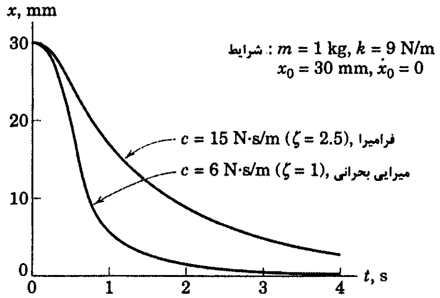
چون $0 \leq \zeta \leq \infty$ ، عبارت زیر رادیکال (ζ^2-1) می‌تواند مثبت، منفی و یا حتی صفر باشد. بر اساس آنها سه طبقه‌بندی زیر برای حرکت میرا در نظر گرفته می‌شود.

I) $\zeta > 1$ (*فرامیرا*): λ_1 و λ_2 دو ریشه حقیقی متمایز منفی می‌باشند. حرکتی که معادله ۸–۱۰ بیانگر آن است طوری کاهش می‌یابد که به ازای مقادیر بزرگ زمان t، x به سمت صفر میل می‌کند. هیچگونه نوسانی وجود نداشته باشد و بنابراین حرکت دارای پریود نمی‌باشد.

II) $\zeta = 1$ (*میرایی بحرانی*): λ_1 و λ_2 دو ریشه حقیقی منفی یکسان می‌باشند ($\lambda_1 = \lambda_2 = -\omega_n$) و جواب معادله دیفرانسیل برای حالت خاصی که ریشه‌ها یکسان هستند، چنین است:

$$x = (A_1 + A_2 t)e^{-\omega_n t}$$

باز هم به ازای مقادیر بزرگ زمان، حرکت در اثر میل کردن x به سمت صفر، رو بـه کـاهش مـی‌رود. یـک سیسـتم میرایی بحرانی، در صورتی که با سرعت و یا جابجایی اولیه (یا هر دو) تحریک شود، نسبت به سیستم فرامیرا سریعتر رو به وضعیت تعادل می‌رسد. شکل ۵-۸ پاسخ یک سیستم فرامیرا و یک سیستم بحرانی را نسـبت بـه جابجـایی اولیـه x_0 بـدون سرعت اولیه $\dot{x}_0$ $(\dot{x}_0 = 0)$ نشان می‌دهد.



شکل ۵-۸

III) $\zeta < 1$ *(فرو میرا)*: توجه داشته باشید که عبارت زیر رادیکال $(1-\zeta^2)$ در این حالت منفی است. با دانستن رابطـه $e^{(a+b)} = e^a e^b$ رابطه ۱۰-۸ را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$x = \left\{A_1 e^{i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t} + A_2 e^{-i\sqrt{1-\zeta^2}\omega_n t}\right\} e^{-\zeta \omega_n t}$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ است. در اینجا مناسب است که متغیـر جدیـد ω_d را بجـای $\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ جـایگزین کنیم. در نتیجه:

$$x = \left\{A_1 e^{i\omega_d t} + A_2 e^{-i\omega_d t}\right\} e^{-\zeta \omega_n t}$$

با بکارگیری فرمول اویلر $e^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x$ معادله قبلی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = \{A_1(\cos\omega_d t + i\sin\omega_d t) + A_2(\cos\omega_d t - i\sin\omega_d t)\}e^{-\zeta\omega_n t}$$
$$= \{(A_1 + A_2)\cos\omega_d t + i(A_1 - A_2)\sin\omega_d t\}e^{-\zeta\omega_n t}$$
$$= \{A_3 \cos\omega_d t + A_4 \sin\omega_d t\}e^{-\zeta\omega_n t} \qquad (۸-۱۱)$$

که در آن $A_3 = (A_1 + A_2)$ و $A_4 = i(A_1 - A_2)$ می‌باشند. با معادلات ٤-۸ و ۵-۸ نشان داده‌ایم کـه مجمـوع دو حرکـت هارمونیکی نظیر آنچه که در آکولادهای معادله ۱۱-۸ آمده را می‌توان با یک تـابع مثلثـاتی کـه دارای زاویـه فـاز می‌باشـد، جایگزین نمود. در نتیجه معادله ۱۱-۸ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x = \{C\sin(\omega_d t + \psi)\}e^{-\zeta\omega_n t}$$

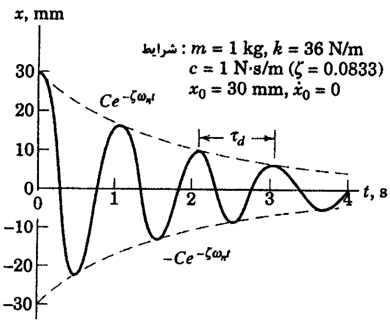
یا:

$$x = C e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi) \qquad (۸-۱۲)$$

همانطور که در شکل ۶-۸ نشان داده شده، به ازای مقادیر عددی خاصی، معادله ۱۲-۸ معرف یک تابع هارمونیکی است که به طور نمایی کاهش می‌یابد. به فرکانس:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\zeta^2}$$

فرکانس طبیعی میرا می‌گویند. *پریود میرا* نیز با رابطه $\tau_d = 2\pi/\omega_d = 2\pi/\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ بیان می‌شود.



شکل ۶-۸

باید به این نکته مهم توجه داشت که عباراتی که برای ثابت‌های C و ψ بر حسب شرایط اولیه در حالت غیر میرا در بخش (a) بدست آمد، برای حالت میرا که در بخش (b) آمده، معتبر نیستند. برای پیدا کردن C و ψ در حالت میرا، می‌بایست یک رابطه جدید و کلی برای جابجایی در معادله ۱۲-۸ و نیز مشتق اول آن نسبت به زمان بدست آورد و هردو رابطه را در $t = 0$ مورد ارزیابی قرار داد که به ترتیب اولی با جابجایی x_0 و دومی با سرعت اولیه $\dot{x}_0$ برابر قرار داده می‌شود.

تعیین میرایی توسط آزمایش

غالباً مطلوب است که برای یک سیستم فرومیرا نسبت میرایی ζ از طریق آزمایش تعیین شود. دلیل آن این است که مقدار ضریب میرایی ویسکوز c به درستی معلوم نیست. سیستم در شرایط اولیه تحریک شده و همانند شکل ۷-۸ نمودار جابجایی x بر حسب زمان t بدست می‌آید. دو دامنه متوالی x_1 و x_2 اندازه گیری می‌شوند و نسبت آنها:

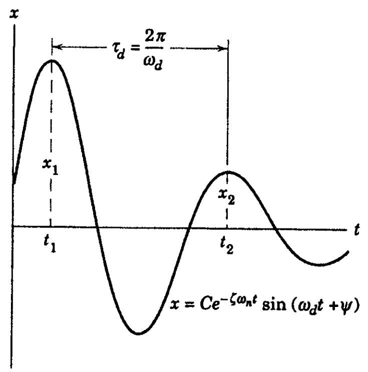
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{C\,e^{-\zeta\omega_n t}}{C\,e^{-\zeta\omega_n(t_1+\tau_d)}} = e^{\zeta\omega_n\tau_d}$$

بدست می‌آید. *کاهش لگاریتمی* δ به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) = \zeta\omega_n\tau_d = \zeta\omega_n\frac{2\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

از روی این معادله می‌توان ζ را بدست آورد.

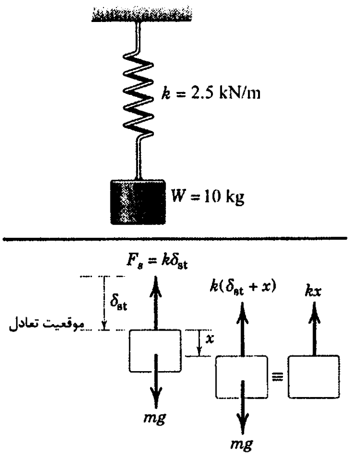
$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}}$$



شکل ۷-۸

به ازای یک نسبت میرایی کوچک، $x_1 \cong x_2$ و $\delta << 1$ نتیجه می‌شود که $\zeta \cong \delta/2\pi$ است. اگر x_1 و x_2 آنقدر به یکدیگر نزدیک باشند که تمایز آنها از طریق آزمایش غیر عملی باشد، تجزیه و تحلیل فوق را می‌توان به کمک دو دامنه قابل تمایز که به فاصله n سیکل از یکدیگر قرار دارند، تکمیل و اصلاح کرد.

مسئله نمونه ۱-۸



جسمی به جرم ۱۰ kg از فنری با ثابت k = ۲/۵ kN/m آویزان اســت. در لحظه ۰ = t ، هنگامی‌که جسم از وضعیت تعادل استاتیکی عبـور می‌کنـد، سرعت آن ۰/۵ m/s به سمت پایین می‌باشد. مطلوب است تعیین:

(a) تغییر شکل الاستیکی فنر، δ_{st}

(b) فرکانس طبیعی فنر بر حسب (ω_n) rad/s و (f_n) cycles/s

(c) پریود τ سیستم

(d) جابجایی x به صـورت تـابعی از زمـان کـه x از وضعیـت تعـادل استاتیکی سنجیده می‌شود.

(e) حداکثر سرعت v_{max} جرم

(f) حداکثر شتاب a_{max} جرم

حل، **(a)**: از رابطه فنر $F_s = kx$ برای وضعیت تعادل داریم:

$$mg = k\delta_{st} \qquad \delta_{st} = \frac{mg}{k} = \frac{10(9.81)}{2500} = 0.0392 \text{ m} \text{ یا } 39.2 \text{ mm}$$ جواب ❶

(b) جواب $$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2500}{10}} = 15.81 \text{ rad/s}$$

جواب $$f_n = (15.81)\left(\frac{1}{2\pi}\right) = 2.52 \text{ cycles/s}$$

(c) جواب $$\tau = \frac{1}{f_n} = \frac{1}{2.52} = 0.397 \text{ s}$$

(d) از معادله ٦-٨ : ❷

$$x = x_0 \cos\omega_n t + \frac{\dot{x}_0}{\omega_n}\sin\omega_n t$$
$$= (0)\cos 15.81t + \frac{0.5}{15.81}\sin 15.81t$$
$$= 0.0316 \sin 15.81t$$ جواب

به عنوان تمرین، x را از معادله ۷-۸ بدست می‌آوریم:

$$x = \sqrt{x_0^2 + (\dot{x}_0/\omega_n)^2}\,\sin\left[\omega_n t + \tan^{-1}(x_0\omega_n/\dot{x}_0)\right]$$
$$= \sqrt{0^2 + \left(\frac{0.5}{15.81}\right)^2}\,\sin\left\{15.81t + \tan^{-1}\left[\frac{(0)(15.81)}{0.5}\right]\right\}$$
$$= 0.0316 \sin 15.81t$$

(e) سرعت برابر است با $\dot{x}$=۱۵/۸۱(۰/۰۳۱۶) cos۱۵/۸۱t = ۰/۵cos۱۵/۸۱t. چون تابع کسینوسی نمی‌تواند بیشتر از ۱ و یا کمتر از ۱- شود، حداکثر سرعت v_{max} برابر ۰/۵ m/s می‌شود که در این حالت، برابر سرعت اولیه است. جواب:

(f) شتاب برابر است با:

$$\ddot{x} = -15.81(0.5)\sin 15.81t = -7.91\sin 15.81t$$

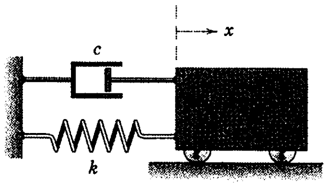
جواب: حداکثر شتاب a_{max} برابر $۷/۹۱\ m/s^2$ می‌باشد.

نکات مفید

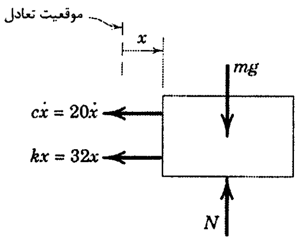
❶ *شما همیشه باید به آحاد توجه زیادی داشته باشید. در مبحث ارتعاشات، به سادگی مرتکب خطاهای ناشی از ترکیب متر و میلیمتر، دور و رادیان و سایر زوج واحدهایی می‌شویم که به طور مکرر در محاسبات وارد می‌شوند.*

❷ *به خاطر داشته باشید که حرکت را به موقعیت تعادل استاتیکی ارتباط می‌دهیم، معادله حرکت و جواب آن در مورد سیستم حاضر با سیستم متناظری که دارای ارتعاش افقی است، یکسان می‌باشد.*

مسئله نمونه ۲-۸



جسمی به جرم ۸ kg به اندازه ۰/۲ m به سمت راست وضعیت تعادل حرکت داده شده و در لحظه $t = ۰$ از حالت سکون رها می‌شود. جابجایی جسم را در لحظه $t = ۲\ s$ تعیین کنید. ضریب میرایی ویسکوز c برابر ۲۰ N.s/m و سختی فنر برابر ۳۲ N/m می‌باشد.



حل: باید تعیین کنیم که سیستم دارای کدام حالت فرومیرا، میرایی بحرانی و یا فرامیرا می‌باشد. به این منظور، نسبت میرایی ζ را محاسبه می‌کنیم.

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{32/8} = 2\ \text{rad/s} \qquad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{20}{2(8)(2)} = 0.625$$

چون $\zeta < ۱$ است، سیستم فرومیرا می‌باشد. فرکانس طبیعی میرا برابر است با:

$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = 2\sqrt{1-(0.625)^2} = 1.561\ \text{rad/s}$. به کمک معادله ۱۲-۸ معادله حرکت بدست می‌آید:

$$x = C\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi) = C\,e^{-1.25t}\sin(1.561t + \psi)$$

در این صورت سرعت برابر است با:

$$\dot{x} = -1.25C\,e^{-1.25t}\sin(1.561t + \psi) + 1.561C\,e^{-1.25t}\cos(1.561t + \psi)$$

جابجایی و سرعت را در لحظه $t = ۰$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$x_0 = C\sin\psi = 0.2 \qquad \dot{x}_0 = -1.25C\sin\psi + 1.561C\cos\psi = 0$$

از حل دو معادله فوق، C و ψ بدست می‌آیند: $C = ۰/۲۵۶\ m$ و $\psi = ۰/۸۹۶\ rad$. بنابراین، جابجایی بر حسب متر چنین است:

$$x = 0.256\,e^{-1.25t}\sin(1.561t + 0.896)$$

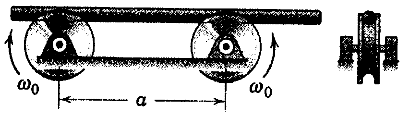
در $t = 2\text{ s}$ میزان جابجایی برابر می‌شود با:

❶ جواب $$x_2 = -0.01616\ \text{m}$$

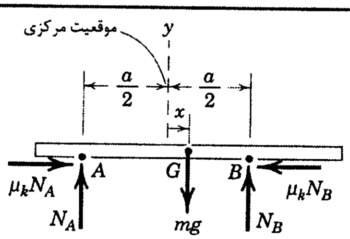
نکته مفید

❶ *به این نکته توجه داریم که در $t = 2\text{ s}$ عامل نوایی $e^{-1.25t}$ برابر ۰/۰۸۲۱ می‌شود. در نتیجه، $\zeta = 0/625$ معرف شدت میرایی است، گرچه حرکت هنوز نوسانی می‌باشد.*

مسئله نمونه ۳-۸



دو پولی با مفصل ثابت با سرعت زاویه‌ای ω_0 در خلاف جهت یکدیگر می‌چرخند. مطابق شکل، میله گردی به صورت خارج از مرکز روی دو پولی قرار داده می‌شود. فرکانس طبیعی حاصل از حرکت میله را تعیین کنید. ضریب اصطکاک سینتیکی بین میله و پولی‌ها μ_k می‌باشد.



حل: ترسیمه آزاد میله به ازای یک جابجایی دلخواه x از موقعیت مرکزی آن در شکل نشان داده شده است. معادلات حاکم به صورت زیر می‌باشند.

$$[\Sigma F_x = m\ddot{x}] \qquad \mu_k N_A - \mu_k N_B = m\ddot{x}$$

$$[\Sigma F_y = 0] \qquad N_A + N_B - mg = 0$$

❶ $$[\Sigma M_A = 0] \qquad a N_B - \left(\frac{a}{2} + x\right)mg = 0$$

با حذف N_A و N_B از معادله اول داریم:

❷ $$\ddot{x} + \frac{2\mu_k g}{a}x = 0$$

این معادله همانند معادله ۲-۸ می‌باشد. به طوریکه فرکانس طبیعی بر حسب رادیان بر ثانیه برابر با: $\omega_n = \sqrt{2\mu_k g/a}$ و فرکانس طبیعی بر حسب سیکل بر ثانیه برابر است با:

جواب $$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{2\mu_k g/a}$$

نکات مفید

❶ *چون میله باریک است و دوران ندارد، می‌توان از معادله تعادل گشتاور استفاده کرد.*

❷ *به این نکته توجه داریم که سرعت زاویه‌ای ω_0 در معادله حرکت وارد نمی‌شود. دلیل این است که فرض کرده‌ایم که نیروی اصطکاک سینتیکی به سرعت نسبی در سطح تماس بستگی ندارد.*

مسائل

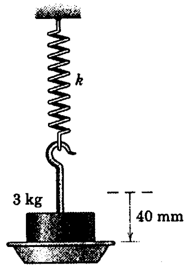
مسائل مقدماتی

(بجز مواردی که قید شده است، فرض کنید که کلیه متغیرهای حرکت از موقعیت تعادل سنجیده شده‌اند)

مسائل مقدماتی ـ *ارتعاشات آزاد نامیرا*

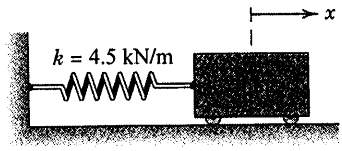
۸-۱ طوقه‌ای به جرم ۳ kg توسط یک گیره به فنری با سختی نامعلوم متصل شده است. میزان جابجایی استاتیکی اضافی ظرف ۴۰ mm اندازه گیری شده است. ثابت k فنر را بر حسب N/m ، lb/in و lb/ft تعیین کنید.

جواب
k = ۷۳۶ N/m
k = ۴/۲۰ lb/in
k = ۵۰/۴ lb/ft



شکل مسئله ۱-۸

۸-۲ فرکانس طبیعی سیستم جرم ـ فنر را بر حسب rad/s و سیکل بر ثانیه (Hz) تعیین کنید.



شکل مسئله ۲-۸

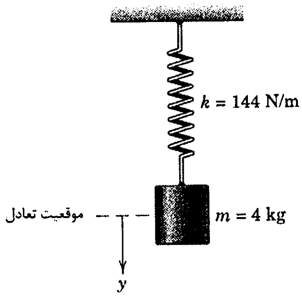
۸-۳ در سیستم مسئله ۲-۸ ، جابجایی x جرم را به صورت تابعی از زمان بنویسید به شرطی که جرم در لحظه t = ۰ از موقعیت ۳۰ mm در طرف چپ موقعیت تعادل رها شود.

جواب x = ۳۰cos۱۵t mm

۸-۴ در سیستم مسئله ۲-۸ ، جابجایی x جرم را به صورت تابعی از زمان بنویسید به شرطی که جرم در لحظه t = ۰ از موقعیت ۳۰ mm در طرف چپ موقعیت تعادل با سرعت اولیه ۱۲۰ mm/s به سمت راست رها شود. دامنه C حرکت را تعیین کنید.

۸-۵ در سیستم جرم ـ فنر نشان داده شده، مطلوب است تعیین میزان جابجایی استاتیکی δ_{st} ، پریود τ سیستم و حداکثر سرعت v_{max} که در اثر جابجایی استوانه به اندازه ۰/۱ m از موقعیت تعادل و به سمت پایین و رها شدن آن حاصل می‌شود.

جواب δ_{st} = ۰/۲۷۳ m و $\tau = \pi$/۳ s و v_{max} = ۰/۶ m/s

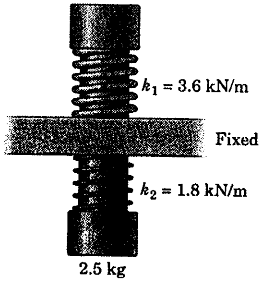


شکل مسئله ۵-۸

۸-۶ استوانه سیستم مسئله ۵-۸ به اندازه ۰/۱ m از موقعیت تعادلش خارج شده و به سمت پایین کشیده می‌شود و در لحظه t = ۰ رها می‌گردد. جابجایی y و سرعت v را در لحظه t = ۳ s تعیین کنید. حداکثر شتاب چقدر است؟

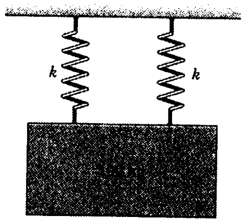
۸-۷ سمبه قائمی به جرم ۲/۵ kg توسط دو فنر که همیشه در حالت فشردگی قرار دارند، نگهداری می‌شود. فرکانس طبیعی f_n ارتعاشات سمبه را در صورتی محاسبه کنید که سمبه از موقعیت تعادل خارج و سپس رها گردد. اصطکاک در حفره راهنما سمبه ناچیز است.

جواب f_n = ۷/۴۰ Hz



شکل مسئله ۷-۸

۸-۸ اگر جرم ۱۰۰ کیلوگرمی در هنگام عبور از موقعیت تعادل دارای سرعت ۰/۵ m/s به سمت پایین باشد، حداکثر مقدار شتاب a_{max} را محاسبه کنید. هر یک از دو فنر دارای سختی k = ۱۸۰ kN/m است.

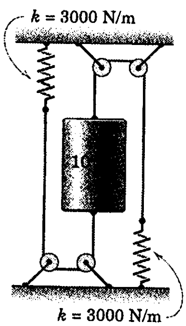


شکل مسئله ۸-۸

مسائل ویژه ـ *ارتعاشات آزاد نامیرا*

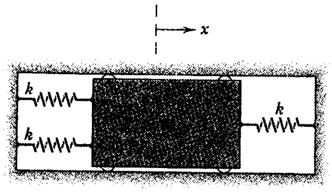
۹-۸ فرکانس طبیعی f_n نوسان قائم استوانه فنربندی شده را موقع حرکتش حساب کنید. هر دو فنر همیشه در حالت کشیدگی است.

جواب f_n = ۳/۹۰ Hz



شکل مسئله ۹-۸

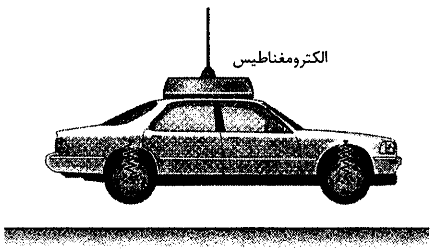
۱۰-۸ لغزنده ۰/۱ کیلوگرمی در شیار ثابت تحت تاثیر سه فنر، هر یک با سختی k = ۹۰ N/m نوسان می‌کند. اگر شرایط اولیه در زمان t = ۰ برابر x = ۳ mm و $\dot{x}_0$ = ۱۲ mm/s باشند، موقعیت و سرعت لغزنده را در t = ۲ s تعیین کنید. پریود سیستم چقدر است؟



شکل مسئله ۱۰-۸

۱۱-۸ یک اتومبیل قدیمی توسط یک جرثقیل مغناطیسی بلند شده و سپس به فاصله اندکی از زمین رها می‌شود. از هرگونه اثر میرایی ناشی از فرسودگی کمک‌فنر صرفنظر کرده و فرکانس طبیعی f_n ارتعاش در امتداد قائم را که پس از برخورد با زمین صورت می‌گیرد بر حسب سیکل بر ثانیه (Hz) محاسبه کنید. جرم اتومبیل ۱۰۰۰ kg و هر یک از چهار فنر دارای سختی ۱۷/۵ kN/m می‌باشند. چون مرکز جرم فنر در بین دو اکسل واقع شده و اتومبیل هم‌تراز با سطح زمین سقوط می‌کند، لذا هیچگونه حرکت چرخشی وجود ندارد. هر فرضی را که استفاده می‌کنید، بیان کنید.

جواب f_n = ۱/۳۳۲ Hz



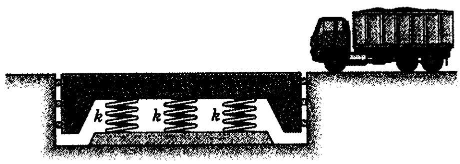
شکل مسئله ۱۱-۸

۸-۱۲ یک ترازوی فنری، نیروی قائم وارد بر پاهای شخصی که در حال وزن شدن است را ثبت می‌کند. چنین نیروی قائمی در یک شاتل فضایی که در یک مدار قرار دارد، وجود ندارد. با استفاده از معلوماتتان در زمینه ارتعاشات توضیح دهید که یک فضانورد چگونه خود را «وزن» می‌کند؟

۸-۱۳ در طی طراحی یک باسکول فنربندی شده به جرم ٤۰۰۰ kg، تصمیم گرفته می‌شود که فرکانس ارتعاش آزاد قائم آن در حالت بدون بار، از ۳ سیکل بر ثانیه تجاوز نکند. (الف) حداکثر ضریب ثابت فنر قابل قبول برای هر یک از سه فنر یکسان را تعیین کنید. (ب) به ازای این مقدار ثابت، فرکانس طبیعی f_n ارتعاش قائم باسکول را به هنگام وزن شدن کامیونی به جرم ٤۰ Mg چقدر است؟

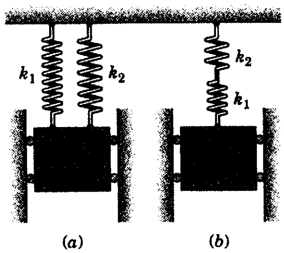
جواب (الف) k = ٤٧٤ kN/m

(ب) f_n = ۰/۹۰۵ Hz



شکل مسئله ۸-۱۳

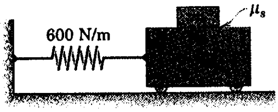
۸-۱٤ بجای فنرهای نشان داده شده در هر یک از دو حالت، یک فنر به سختی k (سختی معادل فنر) جایگزین نمایید، به نحوی که جرم با همان فرکانس اولیه ارتعاش نماید.



شکل مسئله ۸-۱۴

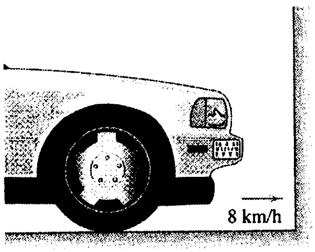
۸-۱۵ با فرض عدم لغزش، جرم m بلوکی را تعیین کنید که باید بر روی یک ارابه به جرم ٦ kg گذاشته شود تا پریود سیستم ۰/۷۵ s شود. حداقل ضریب اصطکاک استاتیکی μ_s که به ازای آن بلوک نسبت به ارابه لغزش نمی‌کند، چقدر است؟ فرض بر این است که ارابه به اندازه ۵۰ mm از موقعیت تعادل خارج شده و سپس رها می‌گردد.

جواب m = ۲/۵۵ kg و μ_s = ۰/۳۵۸



شکل مسئله ۸-۱۵

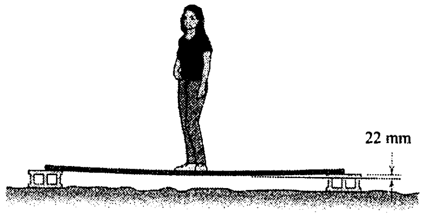
۸-۱۶ سپر یک اتومبیل که دارای خاصیت جذب انرژی است، فنرهایی دارد که در ابتدا طول آزاد خود را داشته و دارای ثابت فنری معادل ۵۲۵ kN/m می‌باشند. اگر اتومبیل ۱۲۰۰ کیلوگرمی با سرعت ۸ km/h به یک دیوار ضخیم برخورد کند، مطلوب است، تعیین (الف) سرعت v اتومبیل به صورت تابعی از زمان در لحظه برخورد؛ که t = ۰ بیانگر زمان آغاز برخورد است و (ب) حداکثر فشردگی x_{max} سپر اتومبیل را.



شکل مسئله ۸-۱۶

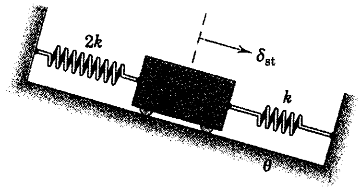
۸-۱۷ شخصی به جرم ۵۵ kg در وسط تخته‌ای که دو انتهای آن بر روی تکیه‌گاه قرار دارد، ایستاده است و سبب یک تغییر شکل برابر ۲۲ mm در وسط تخته می‌شود. اگر شخص با خم کردن زانوی خود سبب ایجاد ارتعاش قائم شود، فرکانس f_n حرکت چقدر است؟ فرض کنید که تخته به صورت الاستیک عمل می‌کند و از جرم نسبتاً کوچک آن می‌توان صرفنظر کرد.

جواب f_n = ۳/۳٦ Hz



شکل مسئله ۱۷-۸

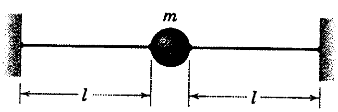
۱۸-۸ اگر هنگامی‌که جرم m مطابق شکل در وسط قرار گرفته و هر دو فنر بدون فشردگی باشند، جابجایی استاتیکی δ_{st} جرم را تعیین کنید. پریود حرکت نوسانی حول موقعیت تعادل استاتیکی چقدر است؟



شکل مسئله ۱۸-۸

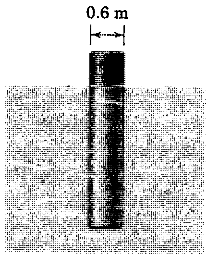
۱۹-۸ ذره کوچکی به جرم m مطابق شکل به دو سیم با کشش خیلی زیاد متصل شده‌اند. فرکانس طبیعی ω_n سیستم را برای نوسانات قائم کوچک در صورتی تعیین کنید که کشش T در هر دو سیم ثابت باشد. آیا محاسبه جابجایی جزئی استاتیکی ذره لازم است؟

جواب $\omega_n = \sqrt{\dfrac{۲T}{ml}}$



شکل مسئله ۱۹-۸

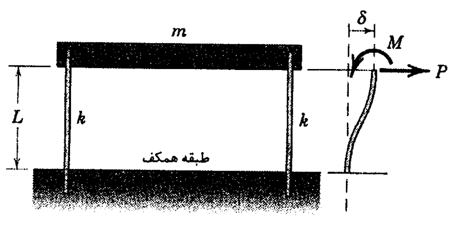
۲۰-۸ شناور استوانه‌ای شکل در آب شور (با چگالی ۱۰۳۰ kg/m^3) شناور بوده و دارای جرم ۸۰۰ kg می‌باشد و مرکز جرم آن در پایین استوانه قرار دارد تا پایایی قائم خود را حفظ کند. فرکانس نوسانات قائم شناور f_n را تعیین کنید. فرض کنید که سطح آب در مجاورت شناور دچار آشفتگی نمی‌شود.



شکل مسئله ۲۰-۸

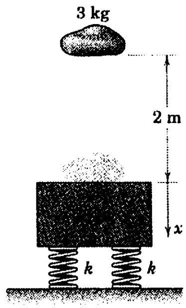
۲۱-۸ آنچه که در شکل نشان داده شده مدلی از یک ساختمان یک طبقه می‌باشد. تیری به جرم m بر روی دو ستون الاستیکی سبک و قائم قرار داده شده که انتهای بالا و پایین آنها در مقابل دوران مقاومت می‌کند. اگر بر هر ستون نیروی P و گشتاور M همانند شکل سمت راست وارد شوند، تغییر مکان δ از رابطه $\delta = PL^۳/۱۲EI$ بدست می‌آید که L طول موثر ستون، E مدول یانگ و I ممان اینرسی سطح مقطع ستون نسبت به محور خنثی می‌باشد. فرکانس طبیعی نوسانات افقی میله را در صورتی که ستون‌ها مانند شکل خمیده شده باشند، تعیین کنید.

جواب $\omega_n = ۲\sqrt{\dfrac{۶EI}{mL^۳}}$



شکل مسئله ۲۱-۸

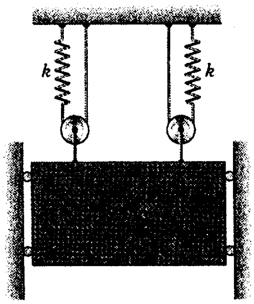
۸-۲۲ سنگی به جرم ۳ kg از فاصله ۲ متری از یک بلوک ساکن به جرم ۲۸ kg سقوط می‌کند. بلوک بر روی چهار فنر قرار دارد که سختی هر یک از آنها برابر $k = ۸۰۰$ N/m می‌باشد. جابجایی x حاصل از ارتعاش را به صورت تابعی از زمان تعیین کنید، بطوریکه سنجش x از موقعیت اولیه بلوک مطابق شکل می‌باشد.



شکل مسئله ۲۲-۸

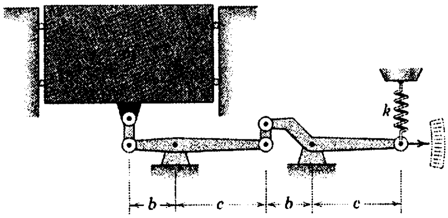
۸-۲۳ فرکانس f_n نوسانات قائم بلوک ۵۰ کیلوگرمی را در حین حرکت محاسبه کنید. ثابت فنر ۱۲۰۰ N/m می‌باشد. از جرم قرقره‌ها صرفنظر کنید.

جواب $f_n = ۳/۱۲$ Hz



شکل مسئله ۲۳-۸

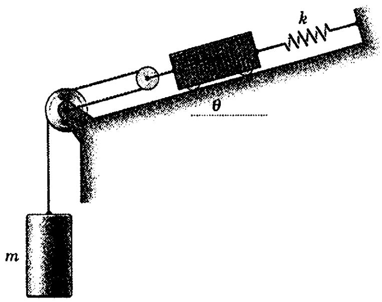
۸-۲۴ سکوی یک ترازو، دارای جرم m بوده و توسط سیستم اهرم‌بندی نشان داده شده به یک فنر متصل شده است. برای نوسانات کوچک و عمودی سکوها، معادله دیفرانسیلی بدست آورده و پریود τ را بیابید. y را به عنوان جابجایی سکو از موقعیت تعادل در نظر بگیرید و از جرم اهرمها صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۲۴-۸

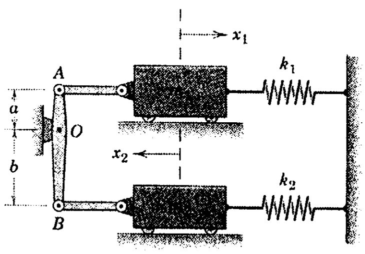
۸-۲۵ فرکانس طبیعی ω_n مجموعه نشان داده شده را حساب کنید. از جرم و اصطکاک قرقره‌ها صرفنظر کنید.

جواب $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{۵m}}$



شکل مسئله ۲۵-۸

۸-۲۶ معادله دیفرانسیل حرکت سیستم نشان داده شده را بر حسب متغیر $x_۱$ بدست آورید. جرم اهرم‌بندی ناچیز است. فرکانس طبیعی ω'_n برای حالتی که $k_۱ = k_۲ = k$ و $m_۱ = m_۲ = m$ می‌باشد، بر حسب rad/s بیان کنید. فرض کنید که نوسانات کوچک هستند.

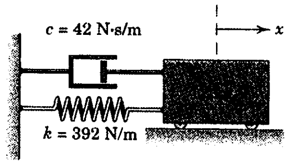


شکل مسئله ۲۶-۸

مسائل مقدماتی ـ ارتعاشات آزاد میرا

۸-۲۷ مقدار نسبت میرایی ζ را برای سیستم مستهلک کننده جرم ـ فنر که در شکل نشان داده شده، تعیین کنید.

جواب $\zeta = ۰/۷۵$



شکل مسئله ۸-۲۷

۸-۲۸ پریود τ_d نوسانات میرا شونده خطی جسمی به جرم ۱ kg برابر ۰/۳ s می‌باشد. اگر ثابت فنر خطی برابر ۸۰۰ N/m باشد، ضریب میرایی c را محاسبه کنید.

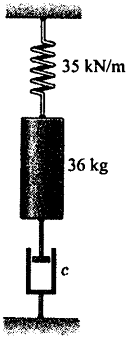
۸-۲۹ به یک سیستم جرم ـ فنر که در ابتدا نامیرا بوده، یک مستهلک کننده ویسکوز اضافه می‌کنیم. به ازای چه مقداری از نسبت میرایی ζ، فرکانس طبیعی میرا ω_d برابر ۹۰ درصد فرکانس طبیعی سیستم نامیرای اولیه خواهد شد؟

جواب $\zeta = ۰/٤۳٦$

۸-۳۰ افزودن مستهلک کننده به یک سیستم جرم و فنر نامیرا، سبب کاهش پریود آن به اندازه ۲۵ درصد می‌شود. نسبت میرایی ζ را بدست آورید.

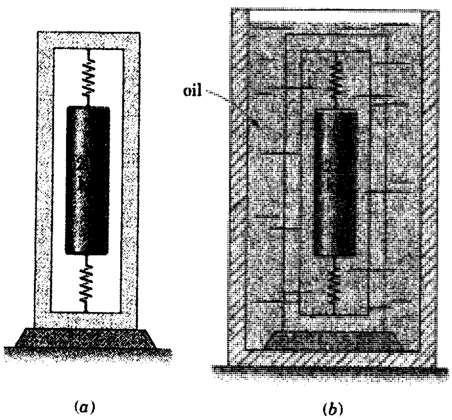
۸-۳۱ مقدار ضریب مستهلک کننده ویسکوز c را برای سیستم نشان داده شده که در حالت میرایی بحرانی قرار دارد، بدست آورید.

جواب $c = ۲۲٤۰$ N.s/m



شکل مسئله ۸-۳۱

۸-۳۲ استوانه فنربندی شده ۲/۵ کیلوگرمی به ارتعاش آزاد قائم در می‌آید و مشاهده می‌شود که دارای پریود ۰/۷۵ s در قسمت (a) شکل، می‌باشد. سپس مجموعه کاملاً در یک ظرف روغن مطابق شکل (b) فرو برده می‌شود و استوانه از موقعیت تعادل خود خارج می‌شود و رها می‌گردد. در اینصورت مستهلک کننده ویسکوز باعث می‌شود نسبت دو دامنه متوالی با جابجایی مثبت برابر ٤ شود. نسبت میرایی ویسکوز ζ، ثابت میرایی ویسکوز c و ثابت فنر معادل k را حساب کنید.



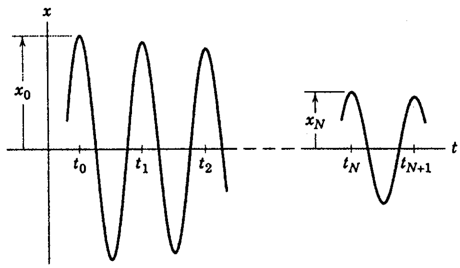
شکل مسئله ۸-۳۲

مسائل ویژه ـ ارتعاشات آزاد میرا

۸-۳۳ مطابق شکل، رابطه جابجایی ـ زمان برای ارتعاشاتی با میرایی کوچک نشان داده شده است، که در آن نمی‌توان با اندازه گیری دو دامنهٔ تقریباً مساوی در دو سیکل متوالی، عملاً نتایج دقیقی را بدست آورد. رابطه‌ای برای فاکتور میرایی ویسکوز ζ بر اساس اندازه گیری دو دامنه x_0 و x_N به فاصله N سیکل از هم اصلاح و بیان کنید.

جواب $$\zeta = \frac{\delta_N}{\sqrt{(2\pi N)^2 + \delta_N^2}}$$

که در آن: $$\delta_N = \ln\left(\frac{x_0}{x_N}\right)$$

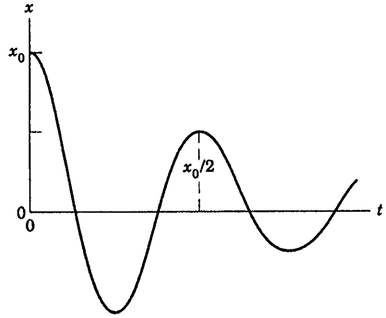


شکل مسئله ۸-۳۳

۸-۳۴ جرم ۲ کیلوگرمی مسئله ۸-۲۷ از حالت سکون در فاصله x_0 از طرف راست موقعیت تعادل رها می‌شود. در صورتیکه $t = 0$ زمان رها شدن باشد، جابجایی x را بر حسب تابعی از زمان t تعیین کنید.

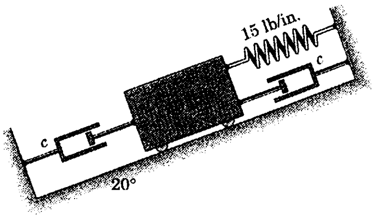
۸-۳۵ یک سیستم جرم ـ فنر میرا، از حالت سکون از جابجایی مثبت اولیه x_0 رها می‌شود. اگر حداکثر مقدار اولین نوسان $x_0/2$ باشد، نسبت میرایی ζ سیستم را تعیین کنید.

جواب $\zeta = 0/1097$



شکل مسئله ۸-۳۵

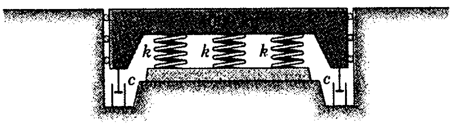
۸-۳۶ مقدار ضریب مستهلک کننده ویسکوز c را برای سیستمی با نسبت میرایی (الف) ۰/۵ و (ب) ۱/۵ تعیین کنید.



شکل مسئله ۸-۳۶

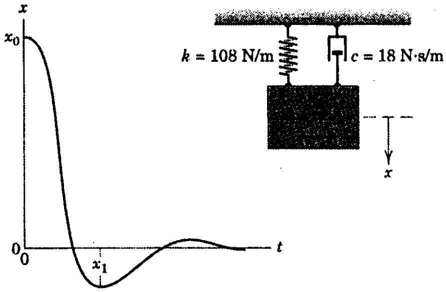
۸-۳۷ طرح آینده برای یک باسکول توزین مسئله ۸-۱۳ مجدداً در اینجا نشان داده شده است که در آن با اضافه کردن دو مستهلک کننده ویسکوز، نسبت دامنه‌های متوالی مثبت ارتعاشات قائم در شرایط بدون بار، به مقدار ٤ محدود می‌شود. ضریب میرایی ویسکوز c لازم برای هر یک از مستهلک کننده‌ها را تعیین کنید.

جواب $c = 16/24(10^3)$ N.s/m



شکل مسئله ۸-۳۷

۸-۳۸ سیستم نشان داده شده از حالت سکون از موقعیت اولیه x_0 رها می‌شود. x_1 را تعیین کنید. فرض کنید که حرکت انتقالی در امتداد محور x انجام می‌شود.

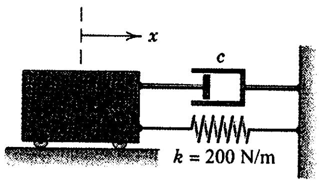


شکل مسئله ۳۸-۸

۳۹-۸ در یک سیستم میرایی بحرانی، جرم در لحظه $t = ۰$ از موقعیت $x_۰ > ۰$ با سرعت اولیه منفی رها می‌شود. مقدار سرعت اولیه بحرانی $(\dot{x}_۰)_c$ را پس از آنکه جرم از موقعیت تعادل عبور کرد، بدست آورید.

جواب $(\dot{x}_۰)_c = -\,\omega_n x_۰$

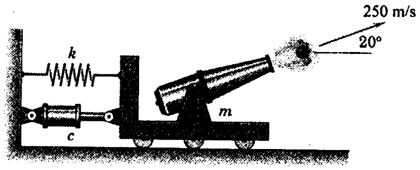
۴۰-۸ جرم سیستم نشان داده شده، در $x_۰ = ۱۵۰$ mm و در $t = ۰$ از حالت سکون رها می‌شود. جابجایی x را در $t = ۰/۵$ s در حالت (الف) $c = ۲۰۰$ N.s/m و (ب) $c = ۳۰۰$ N.s/m تعیین کنید.



شکل مسئله ۴۰-۸

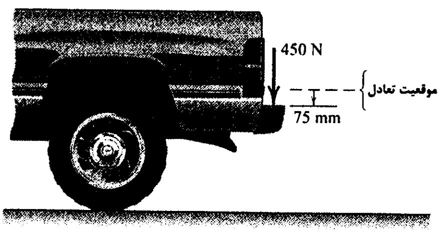
۴۱-۸ توپ کوچکی، گلوله ٤/٥ کیلوگرمی را با سرعت مطلق ۲۵۰ m/s تحت زاویه °۲۰ نسبت به افق شلیک می‌کند. مجموع توپ و ارابه آن ۷۵۰ kg جرم دارند. اگر مکانیزم پس ـ زنش توپ شامل فنری با ثابت $k = ۲۷$ kN/m و مستهلک کننده‌ای با ضریب میرایی ویسکوز $c = ۹۰۰۰$ N.s/m باشد، حداکثر مقدار پس ـ زنش x_{max} مجموعه توپ را تعیین کنید.

جواب $x_{max} = ۸٦/٤$ m



شکل مسئله ۴۱-۸

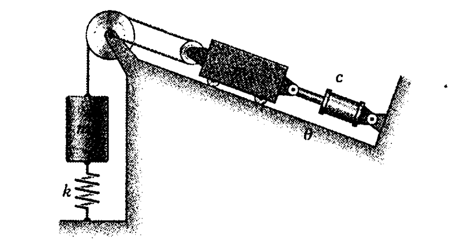
۴۲-۸ صاحب یک وانت‌بار ۱٦۰۰ کیلوگرمی، برای آزمایش عملکرد کمک‌فنرهای عقب، نیروی ٤٥۰ N را بر سپر عقب وانت وارد می‌آورد و جابجایی استاتیکی آنها را ۷٥ mm اندازه گیری می‌کند. به محض برداشتن نیرو، سپر به اندازه ۱۲ mm به سمت بالا نسبت به موقعیت تعادل، جهش یافته و سپس یک حرکت نوسانی را حول موقعیت تعادل انجام می‌دهد. این عمل را به صورت یک بُعدی با جرمی معادل نصف جرم وانت در نظر بگیرید. فاکتور میرایی ویسکوز ζ را برای زیربندی عقب و ضریب میرایی ویسکوز c را برای هر یک از کمک‌فنرها، با فرض حرکت قائم بدست آورید.



شکل مسئله ۴۲-۸

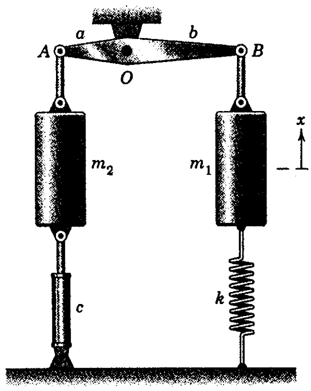
۸-۴۳ نسبت میرایی ζ سیستم نشان داده شده را تعیین کنید. جرم و اصطکاک قرقره‌ها ناچیز بوده و کابل همواره در حالت کشیده و محکم باقی می‌ماند.

جواب $\zeta = \dfrac{c}{4\sqrt{k(m_1 + 4m_2)}}$



شکل مسئله ۸-۴۳

۸-۴۴ معادله دیفرانسیل حرکت نشان داده شده را در موقعیت تعادلش بدست آورید. از جرم لینک AB صرفنظر کرده و نوسانات را کوچک فرض کنید.

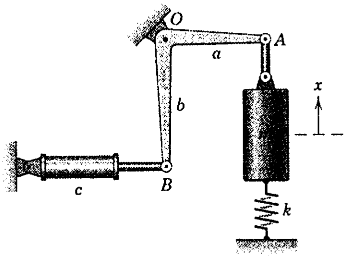


شکل مسئله ۸-۴۴

۸-۴۵ معادله حرکت سیستم نشان داده شده را بر حسب متغیر x بدست آورید. برای نسبت میرایی ζ عبارتی بر حسب خواص سیستم بدست آورید. از جرم لنگ AB صرفنظر کرده و فرض کنید که نوسانات کوچکی حول موقعیت نشان داده شده، صورت می‌گیرد.

جواب $\ddot{x} + \dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{c}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m}x = 0$

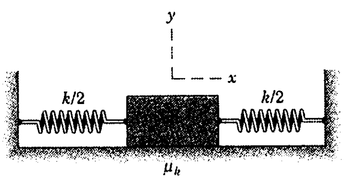
$\zeta = \dfrac{1}{2}\dfrac{b^2}{a^2}\dfrac{c}{\sqrt{km}}$



شکل مسئله ۸-۴۵

۸-۴۶ میرایی کولمب را در مورد بلوک نشان داده شده، تحقیق کنید. اصطکاک سینتیکی بلوک μ_k و ثابت فنر $k/2$ می‌باشد. بلوک به اندازه x_0 از موقعیت خنثی جابجا شده و سپس رها می‌گردد. معادله دیفرانسیل حرکت را بدست آورده و آن را حل کنید. نمودار ارتعاشات حاصله را ترسیم کرده و میزان کاهش r دامنه را نسبت به زمان بدست آورید.

جواب $r = \dfrac{2\mu_k g}{\pi}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$



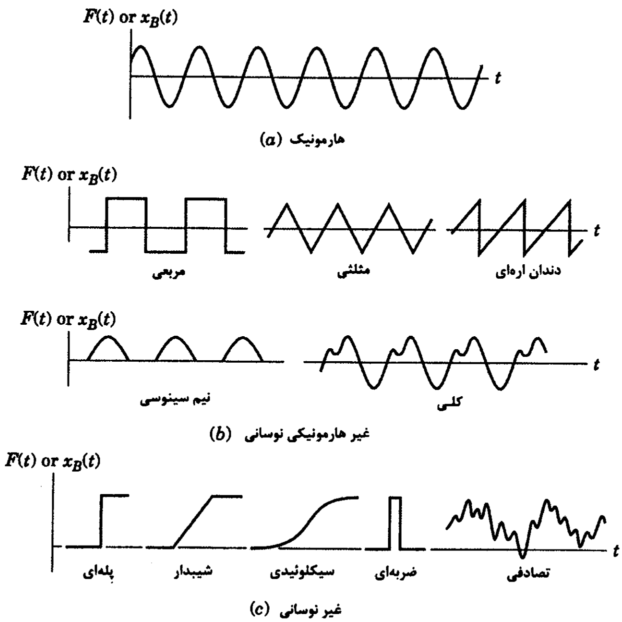
شکل مسئله ۸-۴۶

۳-۸ ارتعاش اجباری ذرات

اگرچه کاربردهای مهم زیادی در مورد ارتعاشات آزاد وجود دارند، ولی مهمترین دسته‌بندی مسائل ارتعاشی آنهایی هستند که حرکت در اثر یک نیروی اغتشاش‌گر به طور پیوسته تحریک می‌گردد. ممکن است که نیرو از طرف خارج به سیستم وارد شود و یا مثلاً توسط قطعات دورانی ناموزون در خود سیستم ایجاد گردد. ارتعاشات اجباری همچنین ممکن است که در اثر حرکت فونداسیون سیستم ایجاد شود.

تحریک هارمونیک

در شکل ۸-۸ اشکال مختلف توابع اجباری $F = F(t)$ و جابجایی فونداسیون $x_B = x_B(t)$ نشان داده شده‌اند. نیروی هارمونیکی که در بخش a از شکل نشان داده شده، غالباً مورد کاربردهای مهندسی قرار می‌گیرد و درک تجزیه و تحلیلی مرتبط با نیروهای هارمونیکی اولین قدم لازم در مطالعه شکل‌های پیچیده‌تر می‌باشد. به همین دلیل، توجه خود را بر روی تحریک‌های هارمونیکی معطوف خواهیم کرد.



شکل ۸-۸

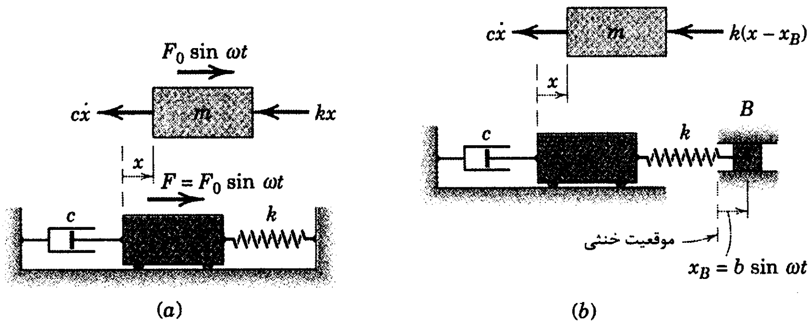
ابتدا سیستم ۹a-۸ را در نظر می‌گیریم که در آن جسم تحت تاثیر نیروی هارمونیک خارجی $F = F_0 \sin\omega t$ قرار می‌گیرد که در آن F_0 دامنه نیرو و ω فرکانس حرکت (بر حسب رادیان بر ثانیه) می‌باشد. مطمئن شوید که بین $\omega_n = \sqrt{k/m}$ که از خواص سیستم است و ω که خاصیت نیروی اعمال شده به سیستم می‌باشد، تمایز قائل شوید. همچنین باید توجه داشته باشیم که می‌توان بجای $\sin\omega t$ از $\cos\omega t$ استفاده کرد و نیرو را به صورت $F = F_0 \cos\omega t$ نوشت.

با استفاده از ترسیمه آزاد شکل ۹a-۸ می‌توان قانون دوم نیوتن را اعمال کرده و رابطه زیر را بدست آورد.

$$-kx - c\dot{x} + F_0 \sin \omega t = m\ddot{x}$$

با جایگزینی همان متغیرهای بخش ۲-۸ شکل استاندارد معادله حرکت چنین می‌شود:

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m}} \qquad (۸\text{-}۱۳)$$



شکل ۸-۹

تحریک پایه

در بسیاری از حالات، تحریک جرم مستقیماً از طریق نیروی اعمال شده، انجام نمی‌شود بلکه عامل آن، حرکت پایه یا فونداسیون است که جرم از طریق فنر یا سایر اتصالات جمع شونده بـه آن متصـل اسـت. زلزلـه‌نگارها، سیسـتم تعلیـق اتومبیل‌ها و سازه‌هایی که در اثر زلزله به لرزش در می‌آیند، همگی مثال‌هایی از چنین کاربردهایی هستند.

حرکت هارمونیکی پایه با اعمال مستقیم نیروی هارمونیکی معادل است. برای نشان دادن این مطلب، سیسـتم شـکل ۹b-۸ را که در آن، فنر به پایه متحرک متصل است در نظر بگیرید. ترسیمه آزاد جسم نشان می‌دهد که اگر پایه در موقعیت تعادل قرار می‌داشت، در آن صورت جرم به اندازه x نسبت به موقعیت تعادل جابجا می‌شد. در برگشت، فرض می‌شود کـه پایه دارای حرکت هارمونیکی $x_B = b \sin\omega t$ باشد. توجه داشته باشید که تغییر شکل فنر از تفاضل جابجایی‌های جرم و پایه نسبت به وضعیت ساکن بدست می‌آید. با استفاده از ترسیمه آزاد جسم و اعمال قانون دوم نیوتن داریم:

$$-k(x - x_B) - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\zeta\omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{kb \sin \omega t}{m}} \qquad (۸\text{-}۱٤)$$

بلافاصله، ملاحظه می‌شود که معادله ۱٤-۸ همان حرکت ۱۳-۸ می‌باشد که kb جایگزین F_0 شده اسـت. در نتیجـه، همه نتایجی که باید مورد بسط قرار گیرد به معادله ۱۳-۸ یا ۱٤-۸ قابل اعمال است.

ارتعاش اجباری نامیرا

ابتدا حالتی را که میرایی، ناچیز است ($c = 0$) مورد بحث قرار می‌دهیم. معادله اساسی حرکت یعنی معادله ۱۳-۸ چنین می‌شود:

$$\boxed{\ddot{x}+\omega_n^2 x=\frac{F_0}{m}\sin\omega t} \quad (8\text{-}15)$$

حل کامل معادله ۱۵-۸ عبارت است از مجموع حل عمودی x_c و حل خصوصی x_p که حل عمومی از حل معادله ۱۵-۸ که طرف راست آن برابر صفر است، بدست می‌آید و حل خصوصی جوابی است که در معادله اصلی صدق می‌کند. در نتیجه، $x = x_c + x_p$ می‌باشد. حل عمومی معادله در قسمت (a) بخش ۲-۸ بدست آمد. با این فرض به دنبال حل خصوصی می‌گردیم که پاسخ نسبت به نیرو شبیه خود نیروی وارده باشد. یعنی فرض می‌کنیم:

$$x_p = X\sin\omega t \quad (8\text{-}16)$$

که در آن X دامنه (بر حسب واحد طول) جواب خصوصی می‌باشد. با قرار دادن این عبارت در معادله ۱۵-۸ و حل آن بر حسب X خواهیم داشت:

$$X=\frac{F_0/k}{1-(\omega/\omega_n)^2} \quad (8\text{-}17)$$

در نتیجه، جواب خصوصی بدینصورت می‌شود:

$$x_p=\frac{F_0/k}{1-(\omega/\omega_n)^2}\sin\omega t \quad (8\text{-}18)$$

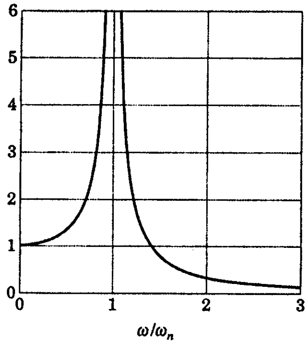
در اینجا جواب عمومی را که به *پاسخ گذرا* موسوم است، مورد توجه قرار نمی‌دهیم، چون به ازای مقادیر کوچکی از میرایی که هرگز نمی‌توان آن را حذف کرد، با گذشت زمان از بین می‌رود. جواب خصوصی x_p، حرکت مداومی را توصیف می‌کند و به *پاسخ پایا* موسوم است. پریود آن همانند تابع تحریک اجباری، برای $\tau = 2\pi/\omega$ می‌باشد.

کمیت مورد نظر در این مورد، دامنه X حرکت است. اگر δ_{st} بیانگر مقدار جابجایی استاتیکی جرم تحت اثر نیروی استاتیکی F_0 باشد. در این صورت $\delta_{st} = F_0/k$ است و نسبت زیر را می‌توانیم تشکیل دهیم.

$$M=\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{1}{1-(\omega/\omega_n)^2} \quad (8\text{-}19)$$

نسبت M به *نسبت دامنه* یا *ضریب بزرگنمایی* موسوم بوده و معیاری برای شدت ارتعاش می‌باشد. خصوصاً به این نکته توجه داریم، هنگامی که ω به سمت ω_n میل می‌کند، M *به سمت بینهایت* میل خواهد کرد. در نتیجه، اگر سیستم میرا نباشد و توسط یک نیروی هارمونیک تحریک شود که فرکانس آن به سمت فرکانس طبیعی ω_n سیستم میل کند، در این صورت M و در نتیجه X بدون هیچگونه محدودیتی، افزایش می‌یابد. از لحاظ فیزیکی، این بدان معنی است که دامنه حرکت به حدی می‌رسد که دیگر اتصالی بین جرم و فنر وجود نخواهد داشت که باید از چنین شرایطی پرهیز شود.

مقدار ω_n به *فرکانس تشدید* یا *فرکانس بحرانی* موسوم است و حالت *تشدید*، حالتی است که ω به مقدار ω_n نزدیک شده و دامنه جابجایی X خیلی بزرگ می‌شود. برای $\omega < \omega_n$ ، ضریب بزرگنمایی M مثبت بوده و ارتعاش ایجاد شده، با نیروی F هم‌فاز است. برای $\omega > \omega_n$ ، ضریب بزرگنمایی منفی بوده و ارتعاش ایجاد شده به اندازه °۱۸۰ با نیروی F اختلاف فاز دارد. شکل ۱۰-۸ نمودار مقدار مطلق M را به صورت تابعی از نسبت فرکانس محرک ω/ω_n نشان می‌دهد.



شکل ۱۰-۸

ارتعاش اجباری میرا

هم اکنون میرایی را در روابط مربوط به ارتعاش اجباری دوباره مطرح می‌کنیم. معادله دیفرانسیل اساسی حرکت چنین است:

$$\ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = \frac{F_0 \sin\omega t}{m} \qquad [۸-۱۳]$$

مجدداً یادآوری می‌شود، حل کامل، عبارت است از مجموع حل عمومی x_c و حل خصوصی x_p که حل عمومی از حل معادله ۱۳-۸ که طرف راست آن برابر صفر است، بدست می‌آید و حل خصوصی x_p ، یعنی هر جوابی که در معادله اصلی صدق می‌کند. حل عمومی x_c را قبلاً در بخش ۲-۸ مطرح کرده‌ایم. موقعی که میرایی وجود دارد، در می‌یابیم که یک عبارت منفرد سینوسی یا کسینوسی برای حل خصوصی کفایت نمی‌کند. بنابراین جواب‌های زیر را امتحان می‌کنیم:

$$x_p = X_1 \cos\omega t + X_2 \sin\omega t \quad \text{یا} \quad x_p = X \sin(\omega t - \phi)$$

با قرار دادن رابطه اخیر در معادله ۱۳-۸ و نیز هم ارز قرار دادن ضرایب $\sin\omega t$ و $\cos\omega t$ و سپس حل دو معادله بدست آمده، داریم:

$$X = \frac{F_0/k}{\left\{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2 + \left[2\zeta\omega/\omega_n\right]^2\right\}^{1/2}} \qquad (۸-۲۰)$$

$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] \qquad (۸-۲۱)$$

اکنون حل کامل معادله دیفرانسیل مشخص شده و برای سیستم فرومیرا می‌توان نوشت:

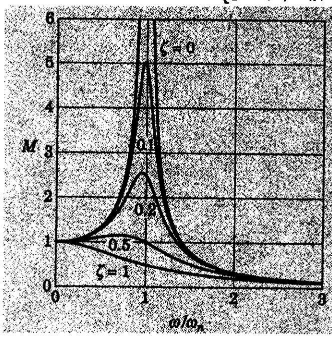
$$x = C\,e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi) + X\sin(\omega t - \phi) \qquad (۸-۲۲)$$

از آنجایی که جمله اول طرف راست معادله با پیشرفت زمان کاهش می‌یابد، بنابراین به *حل گذرا* معروف است. حل خصوصی x_p به *حل پایا* موسوم بوده و بخشی از جواب معادله دیفرانسیل است که توجه ما بیشتر به آن معطوف است. تمام کمیت‌های طرف راست معادله ۲۲-۸ از خواص سیستم و نیز نیروی وارده می‌باشند. به استثنای C و ψ (که از شرایط اولیه می‌توان آنها را تعیین کرد) و متغیر زمان t که در حال گذراست.

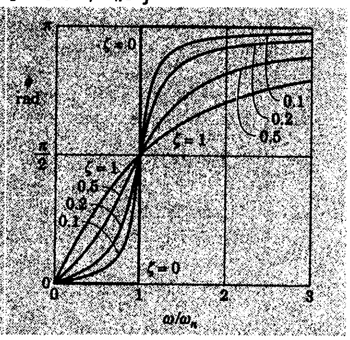
ضریب بزرگنمایی و زاویه فاز

در نزدیکی حالت تشدید دامنه X پاسخ پایا تابعی قوی از نسبت میرایی ζ و نسبت فرکانسی بی بُعد ω/ω_n می‌باشد. تشکیل نسبت بی بعد $M = X/(F_0/k)$ که *نسبت دامنه* یا *ضریب بزرگنمایی* موسوم است، بدیهی می‌باشد:

$$M = \frac{1}{\left\{\left[1-(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2\zeta\omega/\omega_n\right]^2\right\}^{1/2}} \qquad (۸-۲۳)$$



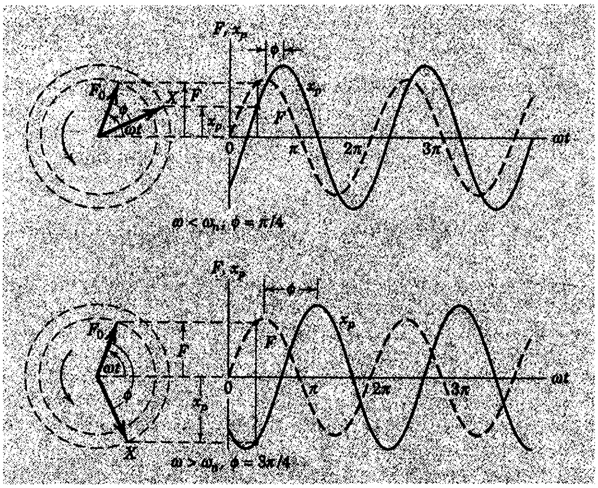
شکل ۱۱-۸



شکل ۱۲-۸

در شکل ۱۱-۸ نمودار ضرایب بزرگنمایی M بر حسب نسبت فرکانسی ω/ω_n به ازای مقادیر مختلف نسبت میرایی ζ به طور دقیق ترسیم شده است. این شکل، اساسی‌ترین اطلاعات مربوط به ارتعاش اجباری یک سیستم یک درجه آزادی را در اثر تحریک هارمونیک نشان می‌دهد. از روی نمودار مشخص است که اگر دامنه حرکت زیاد شود، دو راه حل وجود دارد، (الف) افزایش میزان میرایی (جهت دستیابی به مقادیر بزرگتر از ζ) یا (ب) تغییر فرکانس تحریک به طوری که ω از فرکانس تشدید فاصله داشته باشد. افزایش میرایی در نزدیکی فرکانس تشدید موثرتر است. شکل ۱۱-۸ همچنین نشان دهنده آن است که به جز $\zeta = ۰$ ، منحنی‌های ضریب بزرگنمایی در $\omega/\omega_n = ۱$ دارای حداکثر مقدار خود نیستند. به ازای مقدار معینی از ζ حداکثر مقدار برای هر منحنی را می‌توان با پیدا کردن حداکثر مقدار M از معادله ۲۳-۸ محاسبه کرد.

زاویه فاز ϕ که در معادله ۲۱-۸ آمده، می‌تواند از ۰ تا π تغییر کند و بخشی از یک سیکل (در نتیجه زمان) را نشان می‌دهد که پاسخ x_p در تابع اجباری F تاخیر ایجاد می‌کند. شکل ۱۲-۸ نشان می‌دهد که زاویه فاز ϕ چگونه به ازای مقادیر مختلف نسبت میرایی ζ با نسبت فرکانسی تغییر می‌کند. توجه داشته باشید که به ازای تمام مقادیر ζ مقدار ϕ در حالت تشدید برابر $۹۰°$ است. برای آنکه اختلاف فاز بین پاسخ بدست آمده و تابع اجباری بیشتر مشخص شود، در شکل ۱۳-۸ دو نمونه از تغییرات F و x_p با ωt نشان داده شده است. در نمونه اول، $\omega<\omega_n$ و ϕ برابر $\pi/۴$ در نظر گرفته شده‌اند. در نمونه دوم، $\omega>\omega_n$ و ϕ برابر $۳\pi/۴$ می‌باشد.



شکل ۱۳-۸

کاربردها

در اغلب کاربردهایی که با تحریک هارمونیک مواجه هستند، از ابزارهای ارتعاش‌سنج نظیر زلزله‌نگار و شتاب‌سنج استفاده می‌شود. عناصر تشکیل دهنده این نوع ابزار در شکل ۱٤a-۸ نشان داده شده است. توجه داریم که کل سیستم تحت تاثیر حرکت x_B قاب دستگاه قرار دارد. از x جهت نشان دادن موقعیت جرم نسبت به قاب استفاده می‌کنیم. با اعمال قانون دوم نیوتن داریم:

$$-c\dot{x}-kx=m\frac{d^2}{dt^2}(x+x_B) \quad \text{یا} \quad \ddot{x}+\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}x=-\ddot{x}_B$$

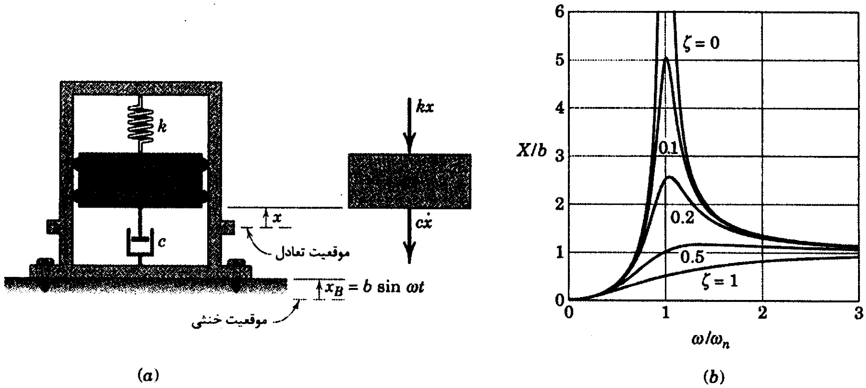
که در آن $(x+x_B)$ جابجایی جرم می‌باشد. اگر $x_B=b\sin\omega t$ باشد، در این صورت معادله حرکت با نمادهای معمول به صورت زیر خواهد شد:

$$\ddot{x}+2\zeta\omega_n\dot{x}+\omega_n^2x=b\omega^2\sin\omega t$$

که اگر بجای F_0/m عبارت $b\omega^2$ جایگزین شود، همان معادله ۱۳-۸ بدست می‌آید. دوباره فقط به حل پاسخ پایا x_p توجه می‌کنیم. در نتیجه از معادله ۲۰-۸ داریم:

$$x_p=\frac{b(\omega/\omega_n)^2}{\left\{\left[1+(\omega/\omega_n)^2\right]^2+\left[2\zeta\omega/\omega_n\right]^2\right\}^{1/2}}\sin(\omega t-\phi)$$

اگر X بیانگر دامنه پاسخ نسبی x_p باشد، در اینصورت نسبت بی بُعد X/b به صورت تابعی از نسبت فرکانسی ω/ω_n نشان داده شده است. به موارد تشابه و اختلاف بین نسبت‌های بزرگنمایی شکل‌های ۱٤b-۸ و ۱۱-۸ می‌بایست توجه کرد.



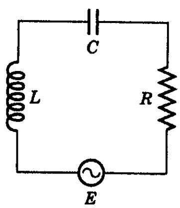
شکل ۱۴-۸

اگر نسبت فرکانسی ω/ω_n بزرگ باشد، در اینصورت برای تمام مقادیر نسبت میرایی ζ داریم: $X/b \cong 1$. تحت چنین شرایطی، جابجایی جرم نسبت به قاب با جابجایی مطلق آن تقریباً یکسان است و ابزار اندازه گیری به صورت یک *جابجایی‌سنج* عمل می‌کند. جهت دستیابی به مقادیر بزرگتر ω/ω_n، به مقادیر کوچک $\omega_n = \sqrt{k/m}$ نیازمند هستیم که کوچکی این مقدار به مفهوم نرمی فنر و بزرگی جرم می‌باشد. با چنین ترکیبی، جرم تمایل دارد که به لحاظ اینرسی، ثابت باقی بماند. جابجایی‌سنج‌ها عموماً دارای میرایی بسیار کوچکی هستند.

از طرف دیگر، اگر نسبت فرکانسی ω/ω_n کوچک باشد، در این صورت M به سمت ۱ میل می‌کند (شکل ۱۱-۸ را ببینید) و $X/b \cong (\omega/\omega_n)^2$ یا $X \cong b(\omega/\omega_n)^2$ است. اما $b\omega^2$ حداکثر شتاب قاب می‌باشد. در نتیجه، X با حداکثر شتاب قاب متناسب بوده و ابزار اندازه گیری را می‌توان به عنوان یک *شتاب‌سنج* بکار برد. نسبت میرایی عموماً طوری انتخاب می‌شود که در محدودهٔ وسیعی از تغییرات ω/ω_n، M به سمت ۱ میل کند. از شکل ۱۱-۸ دیده می‌شود که ضریب میرایی که در محدوده $\zeta = 1$ و $\zeta = 0/5$ قرار دارد، چنین معیاری را فراهم می‌کند.

شباهت مدار الکتریکی

بین مدارهای الکتریکی و سیستم‌های مکانیکی جرم ـ فنر شباهت زیادی وجود دارد. شکل ۱۵-۸ یک مدار سری را نشان می‌دهد که شامل ولتاژ E که تابعی از زمان است، سلف یا القا کننده L، خازن C و مقاومت R می‌باشد. اگر بار الکتریکی مدار با q نشان داده شده شود، معادله حاکم بر بار الکتریکی مدار چنین است.



شکل ۱۵-۸

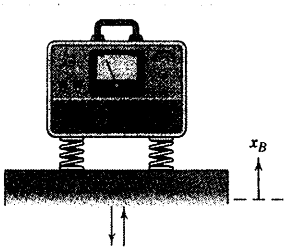
$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = E \qquad (8\text{-}24)$$

این معادله همانند معادله‌ای است که برای سیستم مکانیکی بدست آورده شده است. در نتیجه، با یک تغییر ساده در نمادها، رفتار مدار الکتریکی می‌تواند نشان دهنده رفتار سیستم مکانیکی باشد یا بالعکس. به همین منظور در جدول زیر معادل‌های الکتریکی و مکانیکی آورده شده است:

معادل‌های مکانیکی ـ الکتریکی

مکانیکی			الکتریکی		
کمیت‌ها	نماد	واحد SI	کمیت‌ها	نماد	واحد SI
جرم	m	kg	ضریب القا	L	H (هنری)
ثابت فنر	k	N/m	$\frac{۱}{\text{ضریب خازن}}$	$\frac{1}{C}$	$\frac{1}{F}$ ($\frac{۱}{\text{فاراد}}$)
نیرو	F	N	ولتاژ	E	V (ولت)
سرعت	$\dot{x}$	m/s	شدت جریان	I	A (آمپر)
جابجایی	x	m	بار الکتریکی	q	C (کولمب)
ضریب میرایی ویسکوز	c	N.s/m	مقاومت	R	Ω (اهم)

مسئله نمونه ۴-۸



یک دستگاه اندازه‌گیری به جرم ۵۰ kg بر روی چهار فنر که سختی هر یک برابر ۷۵۰۰ N/m است، قرار دارد. اگر پایه (فونداسیون) دستگاه حرکت هارمونیک $x_B = ۰/۰۰۲\cos ۵۰t$ بر حسب متر را داشته باشد، دامنه حرکت پایای دستگاه را تعیین کنید. میرایی ناچیز است.

حل: به دلیل نوسان هارمونیک پایه، کمیت kb را جایگزین F_0 در نتایج مربوط به حل خصوصی می‌کنیم به طوری که از معادله ۱۷-۸ دامنه حرکت پایا چنین می‌شود:

$$X = \frac{b}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$ ❶

فرکانس تشدید برابر است با $\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{\frac{۴(۷۵۰۰)}{۵۰}} = ۲۴/۵$ rad/s، فرکانس تحریک نیز $\omega = ۵۰$ rad/s می‌باشد.

در نتیجه:

$$X = \frac{0.002}{1-(50/24.5)^2} = -6.32(10^{-4})\ \text{m} \quad \text{یا} \quad 0.632\ \text{mm}$$ جواب ❷

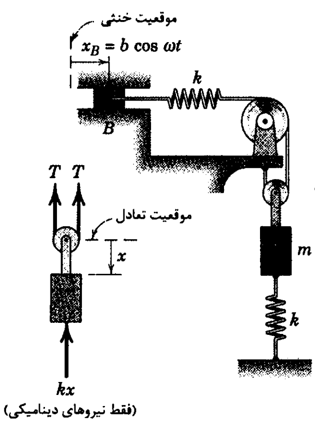
توجه داشته باشید که نسبت فرکانسی ω/ω_n تقریباً برابر ۲ است، به طوریکه از شرایط مربوط به حالت تشدید به دور است.

نکات مفید

❶ *توجه داشته باشید که $\sin ۵۰t$ یا $\cos ۵۰t$ هر دو می‌توانند به عنوان تابع اجباری و با نتایج یکسان مورد استفاده قرار گیرند.*

❷ *علامت منفی نشان دهنده آن است که حرکت دستگاه با تحریک وارد شده ۱۸۰° اختلاف فاز دارد.*

مسئله نمونه ۵-۸



نقطه B که محل اتصال فنر بدون جرم است، دارای حرکت افقی $x_B = b\cos \omega t$ می‌باشد. فرکانس بحرانی ω_c که به ازای آن نوسان‌های جرم m تمایل به افزایش فوق العاده زیاد دارند را تعیین کنید. از اصطکاک و جرم قرقره‌ها صرفنظر کنید. دو فنر دارای سختی یکسان k می‌باشند.

حل: ترسیمه آزاد جسم برای جابجایی‌های دلخواه و مثبت x و x_B ترسیم شده است. متغیر حرکت x به سمت پایین و از وضعیت تعادل استاتیکی در $x_B = ۰$ سنجیده می‌شود. کشش اضافی ایجاد شده در فنر فوقانی در وضعیت تعادل استاتیکی برابر $۲x - x_B$ می‌باشد. بنابراین، نیروی *دینامیکی* در فنر فوقانی، کشش ❶ *دینامیکی* T را در کابل ایجاد می‌کند و برابر $k(۲x - x_B)$ می‌باشد. از برآیند نیروها در ❷ جهت x داریم:

$$[\Sigma F_x = m\ddot{x}] \qquad -2k(2x - x_B) - kx = m\ddot{x}$$

که می‌شود:

$$\ddot{x} + \frac{5k}{m}x = \frac{2kb\cos\omega t}{m}$$

فرکانس طبیعی سیستم برابر است با: $\omega_n = \sqrt{5k/m}$. در نتیجه:

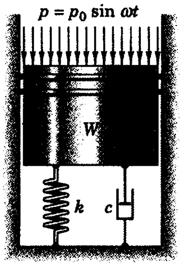
جواب $\qquad \omega_c = \omega_n = \sqrt{5k/m}$

نکات مفید

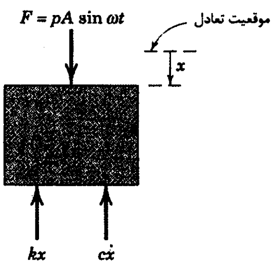
❶ لازم است که مبحث مربوط به سینماتیک حرکت مقید در بخش ۹-۲ مرور شود.

❷ از بحث مربوط به بخش ۲-۸ آموختیم که نیروهای مساوی ولی در خلاف جهت یکدیگر را در موقعیت استاتیکی می‌توان از تحلیل‌هایمان حذف کنیم. منظور ما در استفاده از عباراتی همچون نیروی دینامیکی فنر و نیز کشش دینامیکی، فقط این است که مقدار افزایشی که به نیروی استاتیکی افزوده می‌شود، مورد توجه قرار گیرند.

مسئله نمونه ۶-۸



پیستون ۴۵ کیلوگرمی بر روی یک فنر با مدول $k =$ ۳۵ kN/m قرار دارد. یک ارتعاش‌گیر با ضریب میرایی $c =$ ۱۲۵۰ N.s/m به موازات فنر بر روی جرم عمل می‌کند. فشار متناوب $P =$ ۴۰۰۰ sin۳۰t Pa بر روی پیستون وارد می‌شود و سطح مقطع سر پیستون برابر m^2 (۱۰$^{-۳}$)۵۰ است. جابجایی پایا را به صورت تابعی از زمان تعیین کرده و حداکثر نیروی انتقال یافته به پایه را بدست آورید.



(فقط نیروهای دینامیکی)

حل: ابتدا با محاسبه فرکانس طبیعی سیستم و نسبت میرایی، شروع می‌کنیم:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{(35)(10^3)}{45}} = 27.9 \text{ rad/s}$$

$$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} \frac{1250}{2(45)(27.9)} = 0.498 \quad \text{(فرو میرا)}$$

دامنه پایا از معادله ۲۰-۸ چنین می‌شود:

$$X = \frac{F_0/k}{\left\{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2\zeta\omega/\omega_n]^2\right\}^{1/2}}$$

$$= \frac{(4000)(50)(10^{-3})/[35(10^3)]}{\left\{[1-(30/27.9)^2]^2 + [2(0.493)(30/27.9)]^2\right\}^{1/2}}$$

$= 0.00528$ m یا 5.28 mm ❶

زاویه فاز از معادله ۲۱-۸ چنین می‌شود:

❷
$$\phi = \tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\omega/\omega_n}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right] = \tan^{-1}\left[\frac{2(0.493)(30/27.9)}{1-(30/27.9)^2}\right] = 1.716 \text{ rad}$$

در این صورت حرکت پایا از جمله دوم سمت راست معادله ۲۲-۸ چنین می‌شود:

$$x_p = X\sin(\omega t-\phi) = 5.28\sin(30t-1.716) \text{ mm}$$ جواب

نیروی F_{tr} انتقال یافته به پایه برابر است با مجموع نیروی فنر و میراکننده:

$$F_{\text{tr}} = k\,x_p + c\,\dot{x}_p = k\,X\sin(\omega t-\phi) + c\omega\,X\cos(\omega t-\phi)$$

حداکثر مقدار F_{tr} برابر است با:

$$(F_{\text{tr}})_{\max} = \sqrt{(kX)^2+(c\omega X)^2} = X\sqrt{k^2+c^2\omega^2} = 0.00528\sqrt{[35000]^2+(1250)^2(30)^2} = 271 \text{ N}$$ جواب ❶

نکات مفید

❶ شما می‌توانید محاسبات را با ضریب میرایی صفر تکرار کنید و تاثیر نسبتا زیاد ناشی از حضور میراکننده را مشاهده نمایید.

❷ توجه داشته باشید که آرگومان مربوط به آرک‌تانژانت در عبارت ϕ دارای مقدار مثبت در صورت کسر و دارای مقدار منفی در مخرج کسر می‌باشد. در نتیجه، انتهای کمان ϕ در ناحیه دوم مثلثاتی قرار می‌گیرد. بیاد داشته باشید که محدوده ϕ به صورت $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ می‌باشد.

مسائل

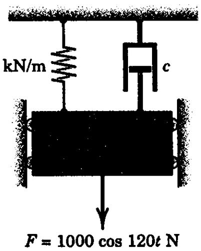
(بجز مواردی که ذکر می‌شود، فرض کنید که میرایی کوچک است به طوریکه دامنه پاسخ اجباری در $\omega/\omega_n \cong ۱$ حداکثر مقدار خود را دارد.)

مسائل مقدماتی

۸-٤۷ دامنه X حرکت پایای جرم ۱۰ کیلوگرمی را در صورتی تعیین کنید که (الف) $c = ۵۰۰$ N.s/m و (ب) $c = ۰$ باشد.

جواب (الف) $X = ۱/۳٤٤(۱۰^{-۲})$ m

(ب) $X = ۲/۲۷(۱۰^{-۲})$ m

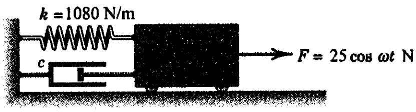


شکل مسئله ۴۷-۸

۸-٤۸ یک سیستم جرم ـ فنر میرا شونده ویسکوز، توسط نیروهای هارمونیکی با دامنه ثابت F_0 تحریک می‌شود ولی فرکانس ω متغیر است. اگر در صورتی که نسبت فرکانسی ω/ω_n از ۱ تا ۲ تغییر کند، مشاهده شود که دامنه پایای حرکت با ضریب ۸ کاهش می‌یابد، نسبت میرایی ζ سیستم را تعیین کنید.

۸-٤۹ مطابق شکل به ارابه ۳۰ کیلوگرمی، نیروی هارمونیکی وارد می‌شود. در صورتیکه $c = ۰$ باشد، مطلوبست تعیین محدودهٔ فرکانسی تحریک ω که به ازای آن دامنه پاسخ پایا از ۷۵ mm کمتر باشد.

جواب $\omega < ٤/۹۹$ rad/s یا $\omega > ٦/۸٦$ rad/s



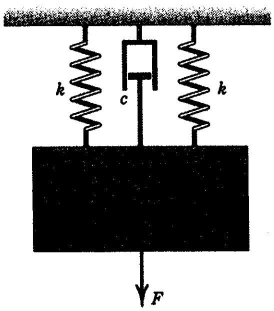
شکل مسئله ۴۹-۸

۸-۵۰ اگر ضریب میرایی ویسکوز مستهلک کننده در سیستم مسئله ٤۹-۸ برابر $c = ۳٦$ N.s/m باشد، محدوده فرکانس محرک ω را که به ازای آن دامنه پاسخ فرکانس از ۷۵ mm کمتر می‌شود، بدست آورید. صحت جواب خود را در مقایسه با جواب مسئله ٤۹-۸ ارزیابی کنید.

۸-۵۱ اگر فرکانس تحریک سیستم مسئله ٤۹-۸ برابر $\omega = ٦$ rad/s باشد، ضریب میرایی c لازم را چنان تعیین کنید که دامنه پاسخ پایا از ۷۵ mm بیشتر نشود.

جواب $c = ۵۵/٦$ N.s/m

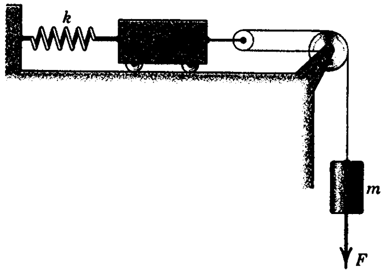
۸-۵۲ بلوکی به جرم $m = ٤۵$ kg توسط دو فنر هر یک به سختی $k = ۳$ kN/m آویزان شده است و نیروی $F = ۳۵۰\cos ۱۵t$ N بر آن وارد می‌شود که در آن t زمان بر حسب ثانیه می‌باشد. دامنه X حرکت پایا را در صورتی که ضریب میرایی ویسکوز c برابر (الف) صفر و (ب) ۹۰۰ N.s/m باشد، تعیین کنید. این دامنه‌ها را با جابجایی استاتیکی δ_{st} فنر مقایسه کنید.



شکل مسئله ۵۲-۸

۸-۵۳ نیروی خارجی $F = F_0 \cos\omega t$ بر استوانه‌ای مطابق شکل وارد می‌گردد. مقدار ω_n فرکانس محرک که باعث بزرگ شدن نوسانات سیستم گردد، چقدر است؟

جواب $\omega_c = \sqrt{\dfrac{k}{9m}}$



شکل مسئله ۵۳-۸

۵٤-۸ یک سیستم جرم ـ فنر میرا شونده ویسکوز در شرایط فرکانس طبیعی نامیرا ($\omega/\omega_n = ۱$) تحت نیروی محرک هارمونیکی قرار می‌گیرد. اگر نسبت میرایی ζ دو برابر شده و از ۰/۱ به ۰/۲ برسد، درصد کاهش $R_۱$ را در دامنه پایا محاسبه کنید. $R_۱$ را با $R_۲$ که تحت شرایط $\omega / \omega_n = ۲$ محاسبه شده، مقایسه کنید. درستی نتایج حاصله را به کمک شکل ۱۱-۸ مورد بررسی قرار دهید.

مسائل ویژه

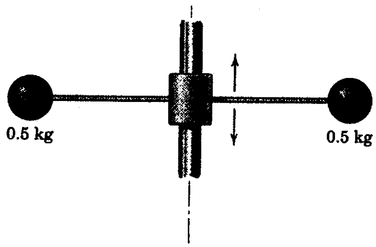
۵۵-۸ سیستم جرم ـ فنر نوسان کننده خطی، دارای فاکتور میرایی ویسکوز $\zeta = ۰/۲$ و فرکانس طبیعی نامیرایی $f_n = ٦$ Hz است. با استفاده از شکل ۱۱-۸ محدودهٔ فرکانس f نیروی متناوب وارده را چنان تخمین بزنید که به ازای آن محدوده، دامنه حرکت نوسان کننده از دو برابر جابجایی استاتیکی آن تجاوز نکند، در حالیکه نیروی استاتیکی وارده دارای مقداری برابر با نیروی وارده متناوب باشد. با استفاده از معادله ۲۳-۸ تخمین خود را امتحان نمایید.

جواب $f \leqslant ٤/٦٨$ Hz یا $f \geqslant ٦/٦٦$ Hz

۵٦-۸ در متن درس اشاره شده که منحنی‌های ضریب بزرگنمایی M در $\omega/\omega_n = ۱$ دارای ماکزیمم نیستند. مطلوب است تعیین عبارتی بر حسب نسبت میرایی ζ برای نسبت فرکانسی که به ازای آن بیشترین مقدار رخ دهد.

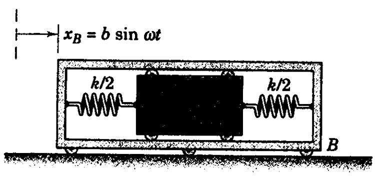
۵۷-۸ هر گوی به جرم ۰/۵ kg به انتهای میله الاستیک سبکی متصل شده و هنگامی که به طور استاتیکی نیروی ۲ N به گوی اعمال می‌شود به اندازه ٤ mm جابجا می‌شود. اگر طوقه مرکزی با فرکانس ٤ Hz و دامنه ۳ mm حرکت هارمونیک قائمی را انجام دهد، دامنه $y_۰$ ارتعاش قائم هر گوی را پیدا کنید.

جواب $y_۰ = ۸/۱۵$ mm



شکل مسئله ۵۷-۸

۵۸-۸ حرکت ارابه بیرونی B با رابطه $x_B = b \sin\omega t$ مشخص می‌شود. در چه محدوده فرکانس محرک ω دامنه حرکت جرم m نسبت به ارابه کمتر از $۲b$ می‌باشد؟

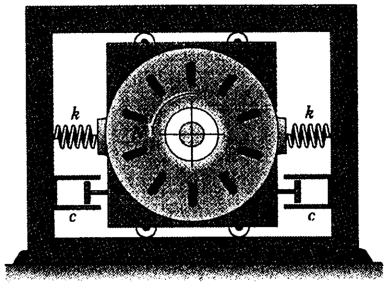


شکل مسئله ۵۸-۸

۸-۵۹ حرکت دستگاه موتور سرعت متغیر به جرم ۲۰ kg توسط دو فنر هر یک به سختی ۲/۱ kN/m در امتداد افقی مقید شده است. هر یک از دو مستهلک کننده دارای ضریب میرایی ویسکوز c = ۵۸ N.s/m می‌باشد. محدوده سرعت N موتور چقدر می‌تواند باشد تا ضریب بزرگنمایی M از مقدار ۲ تجاوز نکند؟

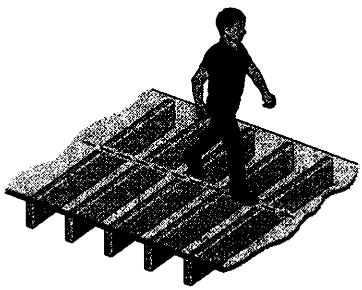
جواب $N \leqslant$ ۱۰۸/۱ rev/min

یا $N \geqslant$ ۱۵۳/۵ rev/min



شکل مسئله ۵۹-۸

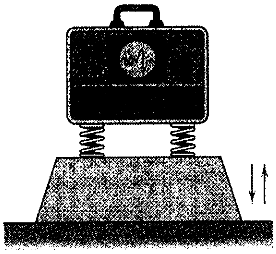
۸-۶۰ ایستادن شخص بر روی مرکز سقف سیستم نشان داده شده، سبب ایجاد جابجایی استاتیکی δ_{st} سقف در زیر پاهای او می‌شود. اگر او بر روی همان سطح راه برود (یا به سرعت بدود)، در هر ثانیه چند قدم سبب خواهد شد که سقف سیستم با بزرگترین دامنه قائم به ارتعاش در آید؟



شکل مسئله ۶۰-۸

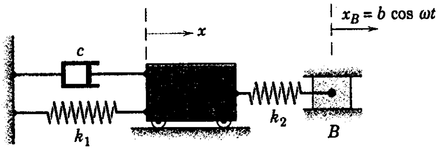
۸-۶۱ جرم دستگاه نشان داده شده ۴۳ kg بوده و بر روی فنرهای متصل به پایه افقی قرار دارد. اگر دامنه ارتعاش قائم پایه برابر ۰/۱۰ mm باشد، محدوده فرکانس‌های پایه f_n مرتعش را که می‌بایست حذف گردد، در صورتی تعیین کنید که ارتعاش قائم دستگاه از ۰/۱۵ mm تجاوز نکند. هر چهار فنر دارای سختی یکسان ۷/۲ kN/m می‌باشند.

جواب ۲/۳۸ < fn < ۵/۳۲ Hz



شکل مسئله ۶۱-۸

۸-۶۲ به جرم اتصالی B حرکت افقی $x_B = b\ \cos\omega t$ داده می‌شود. معادله حرکت جرم m را بدست آورده و فرکانس بحرانی ω_c را برای حالتی بدست آورید که نوسانات جرم فوق العاده زیاد شود.

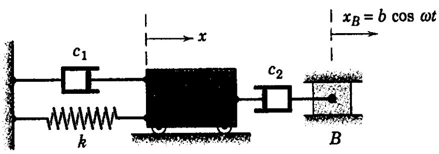


شکل مسئله ۶۲-۸

۸-۶۳ به جرم اتصالی B حرکت افقی $x_B = b\ \cos\omega t$ داده می‌شود. معادله حرکت جرم m را بدست آورده و فرکانس بحرانی ω_c را برای حالتی بدست آورید که نوسانات جرم فوق العاده زیاد شود. نسبت میرایی ζ سیستم چقدر است؟

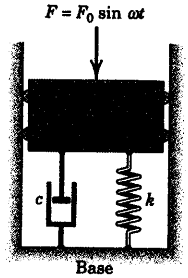
جواب $m\ddot{x} + (c_۱ + c_۲)\dot{x} + kx = -c_۲ b\omega \sin\omega t$

$\omega_c = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ و $\zeta = \dfrac{c_۱ + c_۲}{۲\sqrt{km}}$



شکل مسئله ۶۳-۸

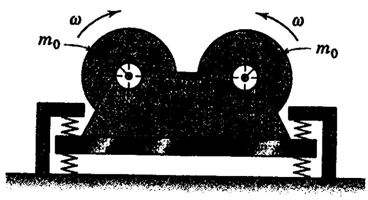
۸-٦٤ برای *نسبت انتقال* T سیستم نشان داده شده، عبارتی بدست آورید. این نسبت به صورت تقسیم حداکثر نیروی انتقالی به پایه به دامنه F_0 تابع نیروی اجباری تعریف شده است. جواب خود را بر حسب ζ، ω و ω_n و ضریب بزرگنمایی M بیان کنید.



شکل مسئله ۶۴-۸

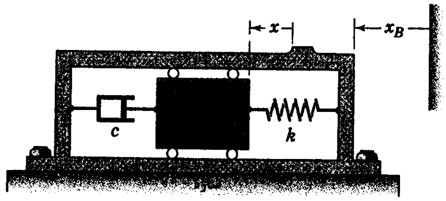
۸-٦٥ یک وسیله ایجاد ارتعاشات، شامل دو چرخ است که در خلاف جهت یکدیگر می‌چرخند. هر یک از چرخ‌ها جرم خارج از مرکز $m_0 = 1$ kg را با خود حمل می‌کنند که فاصله مرکز جرم آن از محور دوران برابر $e = 12$ mm می‌باشد. چرخ‌ها به گونه‌ای با هم هماهنگ شده‌اند که وضعیت قائم جرم‌های ناموزون همیشه یکسان هستند. جرم کل دستگاه ۱۰ kg است. مطلوبست تعیین دو مقدار ممکن برای ثابت فنر k معادل فنرهای نگهدارنده که اجازه می‌دهند، دامنه نیروی متناوب برابر ۱۵۰۰ N که ناشی از ناموزونی چرخ‌ها در سرعت ۱۸۰۰ rev/min است به پایه ثابت انتقال یابد. از میرایی صرفنظر کنید.

جواب $k = 227$ kN/m یا 823 kN/m



شکل مسئله ۶۵-۸

۸-٦٦ لرزه‌نگار نشان داده شده به سازه‌ای متصل شده که دارای ارتعاش هارمونیک افقی با فرکانس ۳ Hz می‌باشد. جرم دستگاه برابر $m = 0/5$ kg، ثابت فنر $k = 20$ N/m و ضریب میرایی ویسکوز برابر $c = 3$ N.s/m می‌باشد. در صورتیکه حداکثر مقدار x ثبت شده در حرکت پایا برابر $X = 2$ mm باشد، دامنه b حرکت افقی x_B سازه را تعیین کنید.

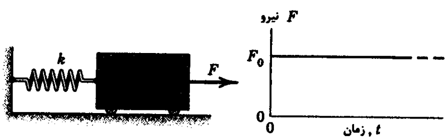


شکل مسئله ۶۶-۸

۸-٦٧ دستگاهی شبیه آنچه در مسئله ۶۶-۸ نشان داده شده، جهت اندازه گیری شتاب افقی سازه‌ای بکار می‌رود که با فرکانس ۵ Hz ارتعاش می‌کند. جرم $m = 0/008$ kg، ثابت فنر $k = 150$ N/m و ضریب میرایی برابر $\zeta = 0/75$ می‌باشد. اگر دامنه x برابر ۴/۰ mm باشد، حداکثر شتاب a_{max} سازه را برآورد نمایید.

جواب $a_{max} = 75/0$ m/s^2

۸-٦٨ معادله حرکت جرمی را که به آن نیروی F به طور ناگهانی وارد شده و پس از آن ثابت باقی می‌ماند، بدست آورده و حل کنید. در لحظه $t = 0$ جابجایی و سرعت جرم هر دو صفحه صفر می‌باشند. نمودار x بر حسب t را برای چند سیکل از حرکت ترسیم کنید.

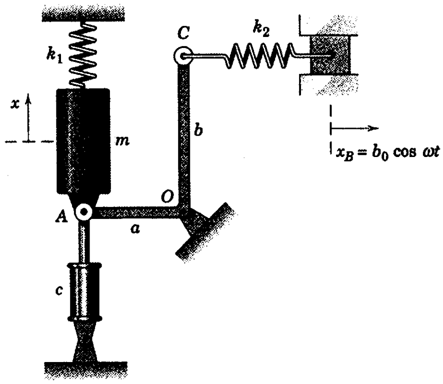


شکل مسئله ۶۸-۸

۸-۶۹ برای سیستم نشان داده شده، معادله حرکت جرم m را بر حسب متغیر x بدست آورده و حل کنید. از جرم اهرم AOC صرفنظر کرده و نوسانات را کم دامنه فرض نمایید.

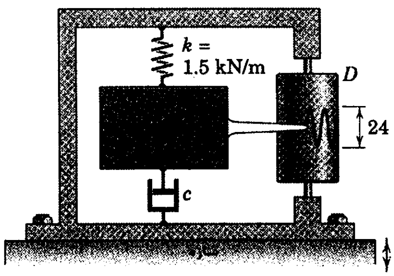
جواب

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+\left(k_۱+k_۲\frac{b^۲}{a^۲}\right)x = k_۲\frac{b}{a}b_\circ\cos\omega t$$



شکل مسئله ۶۹-۸

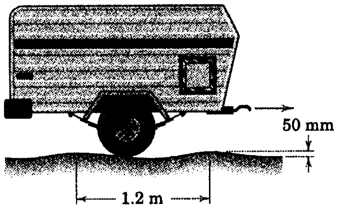
۸-۷۰ لرزه‌نگاری بر روی سازه‌ای قرار دارد که با فرکانس ۵ Hz و دامنه ۱۸ mm در امتداد قائم ارتعاش می‌کند. جرم قطعه حس کننده برابر m = ۲ kg و ثابت فنر k = ۱/۵ kN/m می‌باشد. حرکت جرم نسبت به پایه دستگاه بر روی استوانه‌ای چرخان ثبت شده و دو برابر دامنه یعنی ۲۴ mm را در طی حرکت پایا نشان می‌دهد. ضریب میرایی ویسکوز c را محاسبه کنید.



شکل مسئله ۷۰-۸

۸-۷۱ ◀ مطلوب است تعیین دامنه ارتعاش قائم یدک‌کش مجهز به سیستم تعلیق فنربندی شده در صورتی که با سرعت ۲۵ km/h از روی جاده موج‌دار، با موج سینوسی یا کسینوسی، حرکت کند. جرم یدک‌کش ۵۰۰ kg بوده و از جرم چرخ‌ها می‌توان صرفنظر کرد. در حین بارگیری به ازای هر ۷۵ kg بار اضافه شده، یدک‌کش به اندازه ۳ mm بر روی فنرها پایین می‌رود. فرض کنید که چرخ‌ها دائماً با جاده در تماس بوده و میرایی ناچیز است. به ازای چه سرعت بحرانی υ_c دامنه ارتعاش به بیشترین مقدار خود می‌رسد؟

جواب X = ۱٤/۷۵ mm و υ_c = ۱۵/۲۳ km/h



شکل مسئله ۷۱-۸

۸-۷۲ ◀ رابطه‌ای برای میانگین افت توان P، در طی یک سیکل کامل در حرکت پایای یک نوسانگر خطی با میرایی ویسکوز ناشی از اتلاف انرژی اصطکاکی، بیان کنید. تابع نیروی اجباری $F_\circ \sin\omega t$ بوده و رابطه جابجایی با زمان در حرکت پایا $x_p=X\sin(\omega t-\phi)$ است که در آن X از رابطه ۲۰-۸ داده می‌شود. (*راهنمایی:* اتلاف انرژی اصطکاکی در طی جابجایی dx برابر $c\dot{x}dx$ است که در آن c ضریب میرایی ویسکوز می‌باشد. از این رابطه بر روی یک سیکل کامل انتگرال گرفته و آنرا بر پریود آن تقسیم نمایید.)

جواب $P = cX^۲\omega^۲/۲$

۸-۴ ارتعاش اجسام صلب

موضوع ارتعاشات اجسام صلب در صفحه اساساً همانند ارتعاشات ذره می‌باشد. در ارتعاشات ذره، متغیر جابجایی (x) مورد توجه قرار می‌گیرد. در حالی که در ارتعاشات اجسلم صلب، متغیر دوران (θ) مورد توجه واقع می‌شود. در نتیجه، اصول دینامیک دورانی نقش اصلی را در طرح معادله حرکت ایفا می‌کند.

خواهیم دید که معادله حرکت ارتعاش دورانی اجسام صلب دارای ریاضیات یکسانی با آنچه که در بخش‌های ۲-۸ و ۳-۸ در مورد ارتعاش انتقالی ذرات گفته شد، می‌باشد. همانند بحث مربوط به ذرات، در اینجا مرسوم است که ترسیمه آزاد جسم برای یک متغیر جابجایی مثبت دلخواه ترسیم شود، چون جابجایی منفی سبب بروز خطاهای مربوط به علامت در معادله حرکت می‌شود. در صورتی که مبنای سنجش جابجایی به جای اینکه از موقعیت صفر جابجایی فنر محاسبه شود، از موقعیت تعادل استاتیکی سنجیده شود؛ فرمول‌بندی سیستم‌های خطی را ساده می‌کند. چون نیروها و گشتاورهای مساوی در خلاف جهت یکدیگر، در موقعیت تعادل استاتیکی اثر یکدیگر را به هنگام تحلیل حذف می‌کنند.

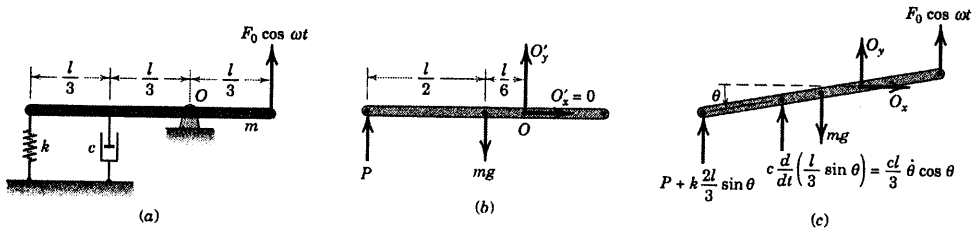
به جای اینکه بحث خود را به صورت (a) ارتعاش آزاد نامیرا و میرا و (b) ارتعاشات اجباری نامیرا و میرا، همانگونه که در بخش‌های ۲-۸ و ۳-۸ در مورد ذرات مطرح شد، مورد بررسی قرار دهیم، مستقیماً به سراغ مسئله ارتعاش اجباری میرا می‌رویم.

ارتعاش دورانی یک میله

به عنوان مثال، ارتعاش دورانی یک میله باریک یکنواخت شکل ۱۶a-۸ را در نظر بگیرید. شکل ۱۶b-۸ ترسیمه آزاد جسم را در موقعیت تعادل استاتیکی به طور افقی نشان می‌دهد. از مساوی صفر قرار دادن مجموع گشتاورها حول نقطه O نتیجه می‌شود:

$$-P\left(\frac{l}{2}+\frac{l}{6}\right)+mg\left(\frac{l}{6}\right)=0 \qquad P=\frac{mg}{4}$$

که P مقدار نیروی استاتیکی فنر است.



شکل ۱۶-۸

شکل ۱۶c-۸ ترسیمه آزاد جسم را به همراه جابجایی زاویه‌ای θ اختیاری با مقدار مثبت نشان می‌دهد. با استفاده از معادله حرکت دورانی $\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta}$ که در فصل ۶ مورد بحث قرار گرفت، می‌نویسیم:

$$(mg)\left(\frac{l}{6}\cos\theta\right)-\left(\frac{cl}{3}\dot{\theta}\cos\theta\right)\left(\frac{l}{3}\cos\theta\right)-\left(P+k\frac{2l}{3}\sin\theta\right)\left(\frac{2l}{3}\cos\theta\right)+\left(F_0\cos\omega t\right)\left(\frac{l}{3}\cos\theta\right)=\frac{1}{9}ml^2\ddot{\theta}$$

که در آن $I_O = \bar{I} + md^2 = \frac{ml^2}{12} + m\left(\frac{l}{6}\right)^2 = \frac{ml^2}{9}$ از قضیه محورهای موازی در مورد ممان اینرسی جرم بدست آمده است.

به ازای تغییر مکانهای کوچک زاویه‌ای، تقریب $\sin\theta \cong \theta$ و $\cos\theta \cong 1$ را می‌توان بکار برد. با توجه به رابطه $P = mg/4$ ، معادله حرکت پس از مرتب کردن جملات و ساده سازی آن به صورت زیر می‌شود.

$$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + 4\frac{k}{m}\theta = \frac{(F_0 l/3)\cos\omega t}{ml^2/9} \qquad (۸-۲۵)$$

طرف راست معادله فوق، بدون ساده سازی، به شکل $M_0(\cos\omega t)/I_O$ باقی می‌ماند که $M_0 = F_0 l/3$ مقدار گشتاور نیروی خارجی اعمال شده حول نقطه O می‌باشد. توجه داشته باشید که دو گشتاور مساوی ولی در خلاف جهت یکدیگر که از نیروهای استاتیکی در حال تعادل ناشی می‌شوند، در طرف چپ معادله حرکت یکدیگر را حذف می‌کنند. از اینرو، نیازی به ورود نیروها و گشتاورهای استاتیکی در حال تعادل در تجزیه و تحلیل مسئله نیست.

همتای دورانی ارتعاش انتقالی

در این مرحله، ملاحظه می‌کنیم که معادله ۲۵-۸ و ۱۳-۸ برای حالت خطی، همانند یکدیگر هستند. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم:

$$\ddot{\theta} + 2\zeta\omega_n\dot{\theta} + \omega_n^2\theta = \frac{M_0\cos\omega t}{I_O} \qquad (۸-۲۶)$$

در نتیجه می‌توان کلیه روابط مطرح شده در بخش‌های ۲-۸ و ۳-۸ را فقط با جایگزین ساختن کمیت‌های خطی به جای همتای دورانی آنها مورد استفاده قرار داد. جدول زیر نتایج حاصل از این روند را در مورد میله دورانی شکل ۱۶-۸ نشان می‌دهد.

روابط زاویه‌ای (برای مسئله حاضر)	روابط خطی
$\ddot{\theta} + \frac{c}{m}\dot{\theta} + \frac{4k}{m}\theta = \frac{M_0\cos\omega t}{I_O}$	$\ddot{x} + \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0\cos\omega t}{m}$
$\omega_n = \sqrt{4k/m} = 2\sqrt{k/m}$	$\omega_n = \sqrt{k/m}$
$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{4\sqrt{km}}$	$\zeta = \frac{c}{2m\omega_n} = \frac{c}{2\sqrt{km}}$
$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{1}{2m}\sqrt{16km - c^2}$	$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} = \frac{1}{2m}\sqrt{4km - c^2}$
$\theta_c = C e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi)$	$x_c = C e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t + \psi)$
$\theta_p = \Theta\cos(\omega t - \phi)$	$x_p = X\cos(\omega t - \phi)$
$\Theta = M\left(\frac{M_0}{k_\theta}\right) = M\frac{F_0(l/3)}{\frac{4}{9}kl^2} = \frac{3F_0}{4kl}$	$X = M\left(\frac{F_0}{k}\right)$

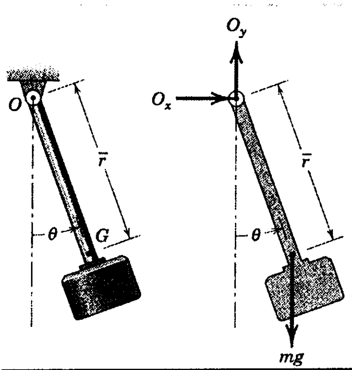
در جدول فوق، متغیر k_θ بیانگر ثابت پیچشی فنر سیستم شکل ۱۶-۸ بوده و از روی گشتاور بازگرداننده فنر تعیین شده است. برای حالتی که زاویه θ کوچک است، این گشتاور حول نقطه O چنین می‌شود:

$$M_k = -[k(2l/3)\sin\theta][(2l/3)\cos\theta] \cong -\left(\frac{4}{9}kl^2\right)\theta$$

در نتیجه $k_\theta = \frac{4}{9}kl^2$ می‌گردد. توجه داشته باشید که M_0/k_θ جابجایی زاویه‌ای استاتیکی است که توسط گشتاور خارجی ثابت M_0 ایجاد می‌شود.

نتیجه گیری می‌کنیم که بین ارتعاش خطی ذرات و ارتعاش زاویه‌ای کوچک اجسام صلب، یک تشابه دقیق وجود دارد. به علاوه، استفاده از چنین تشابهی می‌تواند به لحاظ صرفه‌جویی در وقت، کار بدست آوردن معادلات حاکم بر مسائل ارتعاش اجسام صلب را که جنبه عمومی دارند، آسان کند.

مسئله نمونه ۷-۸



نمونه ساده‌ای از یک آونگ که در آزمایش ضربه مورد استفاده قرار می‌گیرد، در شکل نشان داده شده است. معادله حرکت را بدست آورده و پریود نوسان‌های کوچک حول محور گذرنده از O را تعیین کنید. مرکز جرم G به فاصله $\bar{r}$ = ۰/۹ m از نقطه O واقع شده است و شعاع ژیراسیون حول نقطه O برابر k_O = ۰/۹۵ m می‌باشد. از اصطکاک یاتاقان صرفنظر کنید.

حل: ترسیمه آزاد جسم را به طور دلخواه برای متغیر جابجایی زاویه‌ای θ که دارای مقدار مثبت است، رسم می‌کنیم. جهت چرخش θ در دستگاه مختصات انتخاب شده در جهت پادساعتگرد است. قدم بعدی این است که معادله حرکت حاکم را بنویسیم.

❶ $$[\Sigma M_O = I_O\ddot{\theta}] \qquad -mg\bar{r}\sin\theta = mk_O^2\ddot{\theta}$$

جواب $$\ddot{\theta} + \frac{g\bar{r}}{k_O^2}\sin\theta = 0$$

توجه داشته باشید که معادله حاکم، مستقل از جرم است. در صورتیکه θ کوچک باشد، $\sin\theta \cong \theta$ بوده و معادله حرکت را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\ddot{\theta} + \frac{g\bar{r}}{k_O^2}\theta = 0$$

❷ فرکانس بر حسب سیکل بر ثانیه و پریود بر حسب ثانیه به صورت زیر می‌باشند.

جواب $$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g\bar{r}}{k_O^2}} \qquad \tau = \frac{1}{f_n} = 2\pi\sqrt{\frac{k_O^2}{g\bar{r}}}$$

با توجه به مشخصات داده شده داریم:

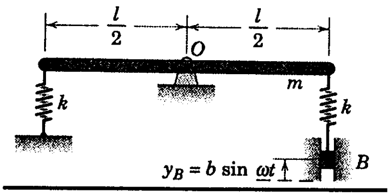
جواب $$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{(0.95)^2}{(9.81)(0.9)}} = 2.01 \text{ s}$$

نکات مفید

❶ *با انتخاب نقطه O به عنوان مرکز گشتاورگیری، عکس العمل‌های O_x و O_y یاتاقان هرگز در معادله حرکت ظاهر نمی‌شوند.*

❷ *برای نوسان‌ها با زوایای بزرگ، تعیین پریود آونگ ایجاب می‌کند که یک انتگرال بیضوی مورد بررسی قرار گیرد.*

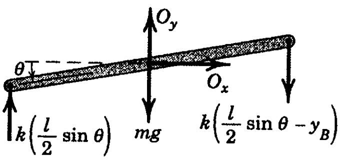
مسئله نمونه ۸-۸



میله یکنواخت به جرم m و به طول l در مرکزش مفصل شده است. انتهای فنر به سمت چپ با ثابت k به سطح ساکن متصل شده، ولی انتهای فنر سمت راست که آن هم دارای ثابت k می‌باشد، به تکیه‌گاهی متصل گشته است که به آن حرکت هارمونیک $y_B = b \sin\omega t$ داده می‌شود. مطلوب است تعیین فرکانس محرک ω_c که سبب ایجاد تشدید می‌شود.

حل: معادله گشتاور حرکت را حول نقطه ثابت O می‌نویسیم.

❶ $$-\left(k\frac{l}{2}\sin\theta\right)\frac{l}{2}\cos\theta - k\left(\frac{l}{2}\sin\theta - y_B\right)\frac{l}{2}\cos\theta = \frac{1}{12}ml^2\ddot{\theta}$$



با فرض کوچک بودن جابجایی‌ها و انجام ساده سازی‌های لازم داریم:

$$\ddot{\theta} + \frac{6k}{m}\theta = \frac{6kb}{ml}\sin\omega t$$

❷ فرکانس طبیعی را می‌توان از روی شکل آشنای معادله فوق بدست آورد.

$$\omega_n = \sqrt{6k/m}$$

جواب: بنابراین $\omega_c = \omega_n = \sqrt{6k/m}$ همان فرکانس تشدید خواهد بود (که فرض کوچک بودن θ را نقض می‌کند!)

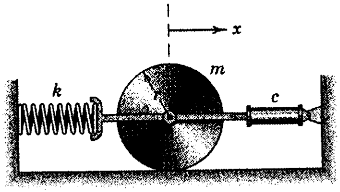
نکات مفید

❶ *همانند قبل، فقط تغییرات نیروهای ناشی از جابجا شدن نسبت به موقعیت تعادل را در نظر می‌گیریم.*

❷ *شکل استاندارد به صورت $\ddot{\theta} + \omega_n^2\theta = \frac{M_0 \sin\omega t}{I_O}$ می‌باشد که $M_0 = \frac{klb}{2}$ و $I_O = \frac{1}{12}ml^2$ می‌باشد. فرکانس طبیعی ω_n یک سیستم به اغتشاش خارجی وارد بر آن بستگی ندارد.*

مسئله نمونه ۹-۸

معادله حرکت استوانه مدور همگنی را که بدون لغزش می‌غلتد، بدست آورید. اگر جرم استوانه برابر ۵۰ kg، شعاع استوانه ۰/۵ m، ثابت فنر ۷۵ N/m و ضریب میرایی ۱۰ N.s/m باشد، مطلوب است، تعیین:



(a) فرکانس طبیعی نامیرا

(b) نسبت میرایی

(c) فرکانس طبیعی میرا

(d) پریود سیستم میرا

علاوه بر این، در صورتی که استوانه از حالت سکون در موقعیت $x=-0/2$ m و در لحظه $t=0$ رها شود، x را به صورت تابعی از زمان بدست آورید.

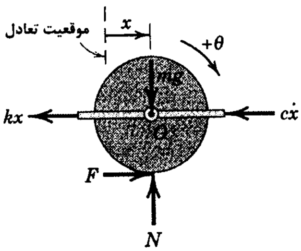
---

❶ **حل:** هم x و هم جابجایی زاویه‌ای θ استوانه را می‌توانیم به عنوان متغیر حرکت مورد استفاده قرار دهیم. چون در صورت مسئله از x استفاده شده، ترسیمه آزاد جسم را برای متغیر اختیاری x که دارای مقدار مثبت است، رسم می‌کنیم و برای استوانه، دو معادله حرکت می‌نویسیم.

❷

$$[\Sigma F_x = m\ddot{x}] \qquad -c\dot{x}-kx+F=m\ddot{x}$$

$$[\Sigma M_G = \bar{I}\ddot{\theta}] \qquad -Fr=\frac{1}{2}mr^2\ddot{\theta}$$



حالت غلتش بدون لغزش به صورت $\ddot{x}=r\ddot{\theta}$ می‌باشد. با قرار دادن این رابطه در معادله گشتاور، داریم: $F=-\frac{1}{2}m\ddot{x}$. در نتیجه ورود این عبارت در نیروی اصطکاک و از آنجا در معادله نیرو در امتداد x داریم:

$$-c\dot{x}-kx-\frac{1}{2}m\ddot{x}=m\ddot{x} \quad \text{یا} \quad \ddot{x}+\frac{2}{3}\frac{c}{m}\dot{x}+\frac{2}{3}\frac{k}{m}=0$$

از مقایسه معادله فوق با معادله استاندارد نوسان‌گر میرا (معادله ۹-۸)، مستقیماً می‌توانیم نتیجه بگیریم که:

$$\text{(a)}\ \omega_n^2=\frac{2}{3}\frac{k}{m} \qquad \omega_n=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{k}{m}}=\sqrt{\frac{2}{3}\frac{75}{50}}=1\ \text{rad/s}$$ جواب

$$\text{(b)}\ 2\zeta\omega_n=\frac{2}{3}\frac{c}{m} \qquad \zeta=\frac{1}{3}\frac{c}{m\omega_n}=\frac{10}{3(50)(1)}=0.0667$$ جواب

از اینرو فرکانس طبیعی میرا و پریود به صورت زیر می‌باشند.

$$\text{(c)}\ \omega_d=\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}=(1)\sqrt{1-(0.0667)^2}=0.998\ \text{rad/s}$$ جواب

$$\text{(d)}\ \tau_d=2\pi/\omega_d=2\pi/0.998=6.30\ \text{s}$$ جواب

از معادله ۱۲-۸ ، جواب فرومیرای معادله حرکت چنین می‌شود:

$$x=Ce^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t+\psi)=Ce^{-(0.0667)(1)t}\sin(0.998t+\psi)$$

سرعت چنین بدست می‌آید:

$$\dot{x} = -0.0667C\,\mathrm{e}^{0.0667t}\sin(0.998t+\psi)$$
$$+\,0.998C\,\mathrm{e}^{-0.0667t}\cos(0.998t+\psi)$$

در لحظه $t = 0$ ، x و $\dot{x}$ چنین می‌شوند:

$$x_0 = C\sin\psi = -0.2$$

$$\dot{x}_0 = -0.0667C\sin\psi + 0.998C\cos\psi = 0$$

از حل دو معادله فوق، C و ψ بدست می‌آیند.

$$C = -0.200 \ \text{m} \qquad \psi = 1.504 \ \text{rad}$$

بنابراین، حرکت استوانه به صورت زیر می‌شود:

جواب $$x = -0.200\,\mathrm{e}^{-0.0667\,t}\sin(0.998t + 1.504) \ \text{m}$$

نکات مفید

❶ زاویه θ در جهت ساعتگرد مثبت در نظر گرفته شده تا به لحاظ سینماتیکی با x سازگار باشد.

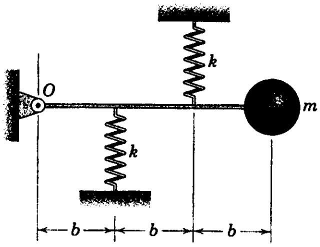
❷ نیروی اصطکاک F را می‌توان در دو جهت فرض کرد. ما دریافتیم که به ازای $x > 0$ جهت واقعی به سمت راست و به ازای $x < 0$ به سمت چپ می‌باشد و موقعی که $x = 0$ می‌باشد، $F = 0$ است.

مسائل

مسائل مقدماتی

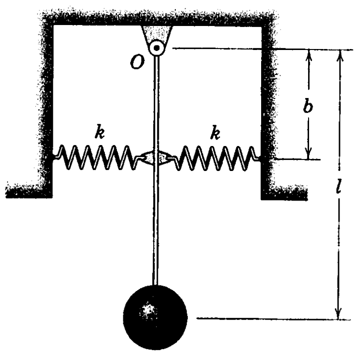
۷۳-۸ گوی به جرم m به میلهٔ سبکی در موقعیت افقی نشان داده شده که در حال سکون قـرار دارنـد، متصـل اسـت. پریود τ نوسانات کوچک را در صفحه قائم حول محور مفصـل O تعیین کنید.

جواب $\tau = 6\pi\sqrt{\dfrac{m}{5k}}$



شکل مسئله ۷۳-۸

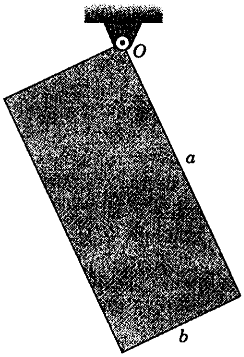
۷۴-۸ معادلـه دیفرانسـیل نوسـانات کـوچـک آونـگ فنربندی شده را نوشته و پریود τ آن را بدست آورید. موقعیـت تعادل مطابق شکل در امتداد قائم است. از جرم میلـه صرفنظـر کنید.



شکل مسئله ۷۴-۸

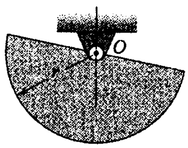
۷۵-۸ ورق مستطیل شکل یکنواخت حول محور افقـی گذرنده از یکی از لبـه‌هایش، مطـابق شـکل لـولا شـده اسـت. فرکانس طبیعی ω_n نوسانات کوچک را تعیین کنید.

جواب $\omega_n = \dfrac{\sqrt{\dfrac{3g}{2}}}{\sqrt[4]{a^2 + b^2}}$



شکل مسئله ۷۵-۸

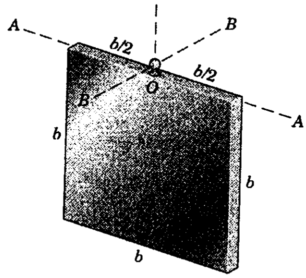
۷۶-۸ فرکانس طبیعـی f_n نوسـانات کـوچـک دیسـک نیمدایره‌ای به شعاع r را در صفحه قائم حول یاتاقان O بدست آورید.



شکل مسئله ۷۶-۸

۷۷-۸ ورق نازک مربعی شکل، توسط گوی کوچک O به یک مفصل کاسه ساچمه‌ای (کـه نشـان داده نشـده) آویـزان است. اگر صفحـه حـول محـور A-A چرخـانده شـود، پریـود نوسانات کوچک را تعیین کنید. از خروج از مرکز جزئی، جـرم و اصطکاک صرفنظر کنید.

جواب $\tau = 2\pi\sqrt{\dfrac{2b}{3g}}$

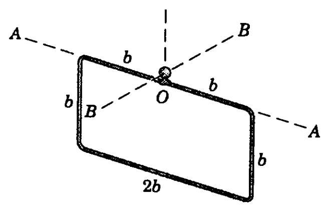


شکل مسئله ۷۷-۸

۷۸-۸ اگر ورق مربع شکل مسئله ۷۷-۸ حول محور B-B به نوسان درآید، پریود نوسانات کوچک را تعیین کرده و آنرا با جواب مسئله ۷۷-۸ مقایسه نمایید.

۷۹-۸ قاب مستطیل شکل از یک میله نازک یکنواختی تشکیل شده و توسط گوی کوچک O به یک مفصل کاسه ساچمه‌ای (که نشان داده نشده) آویزان شده است. اگر قاب حول A-A چرخانده شود، فرکانس طبیعی نوسانات کوچک را تعیین کنید. از خروج از مرکز جزئی، جرم و اصطکاک گوی صرفنظر کنید.

جواب $\omega_n = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{g}{2b}}$

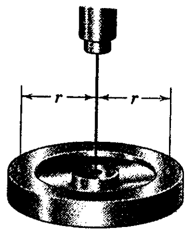


شکل مسئله ۷۹-۸

۸۰-۸ اگر قاب مستطیلی مسئله ۷۹-۸ حول محور B-B به نوسان در آورده شود، فرکانس طبیعی نوسانات کوچک را بدست آورده و آن را با جواب مسئله ۷۹-۸ مقایسه کنید.

۸۱-۸ چرخ طیار، توسط سیم متصل به تکیه‌گاه ثابت از مرکزش آویزان شده و پریود نوسانات پیچشی چرخ طیار حول محور قائم برابر τ_1 اندازه گیری شده است. دو وزنه هر یک به جرم m به چرخ طیار متصل شده و در فاصله δ از مرکز در مقابل یکدیگر قرار دارند. نتیجه این جرم اضافی طولانی‌تر شدن جزئی پریود τ_2 می‌باشد. برای ممان اینرسی I چرخ طیار، رابطه‌ای بر حسب کمیت‌های اندازه گیری شده بدست آورید.

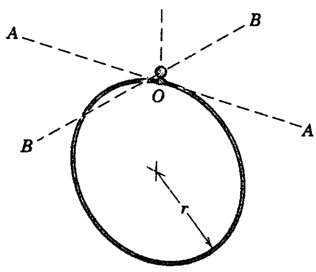
جواب $I = \frac{2mr^2}{(\tau_2/\tau_1)^2 - 1}$



شکل مسئله ۸۱-۸

مسائل ویژه

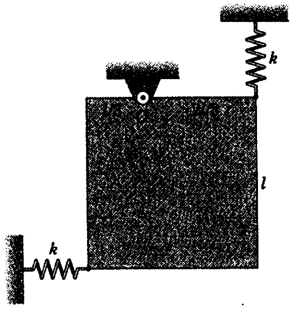
۸۲-۸ حلقه مدور به شعاع r توسط گوی کوچک O به یک مفصل کاسه ساچمه‌ای (که نشان داده نشده) آویزان شده است. نسبت R پریود نوسانات کوچک حول محور B-B را به پریود نوسانات حول محور A-A تعیین کنید. از خروج از مرکز جزئی، جرم و اصطکاک گوی صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۸۲-۸

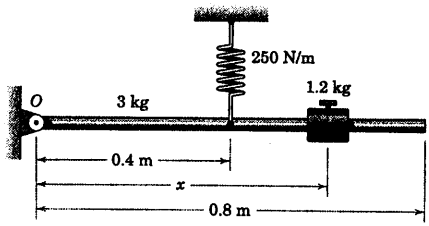
۸-۸۳ ورق همگن فنربندی شده به جرم m حول محور قائم گذرنده از نقطه O آزادانه لولا شده است. فرکانس طبیعی f_n نوسانات کوچک حول موقعیت نشان داده شده را تعیین کنید.

جواب $f_n = \frac{۱}{۴\pi}\sqrt{\frac{۱۳k}{m}}$



شکل مسئله ۸-۸۳

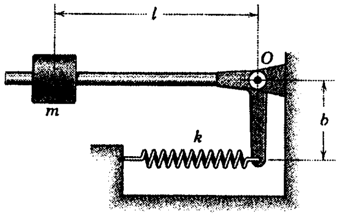
۸-۸۴ جرم میله باریک یکنواخت ۳ kg است. موقعیت x لغزنده ۱/۲ کیلوگرمی را طوری تعیین کنید که پریود سیستم ۱ s باشد. فرض کنید نوسانات کوچک حول موقعیت افقی تعادل مطابق شکل صورت می‌گیرد.



شکل مسئله ۸-۸۴

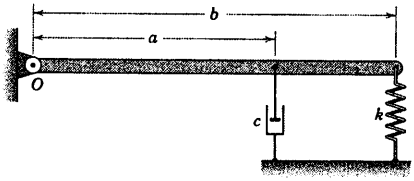
۸-۸۵ برای فرکانس طبیعی f_n نوسانات کوچک بازوی وزنه‌دار حول O ، رابطه‌ای بدست آورید. ثابت فنر k بوده و طول آن طوری تنظیم شده که در موقعیت افقی نشان داده شده، بازو در حال تعادل است. از جرم فنر و بازو در مقایسه با m صرفنظر کنید.

جواب $f_n = \frac{b}{۲\pi l}\sqrt{\frac{k}{m}}$



شکل مسئله ۸-۸۵

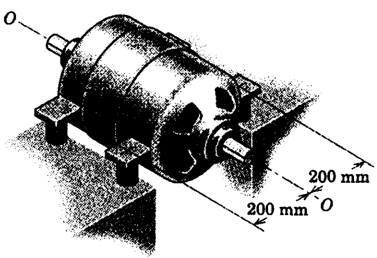
۸-۸۶ میله یکنواختی به جرم m حول نقطه O مفصل شده است. با فرض کوچک بودن نوسانات، برای نسبت میرایی ζ عبارتی بدست آورید. بـه ازای چـه مقـداری از c_{cr} ضریب میرایی c سیستم بحرانی خواهد بود؟



شکل مسئله ۸-۸۶

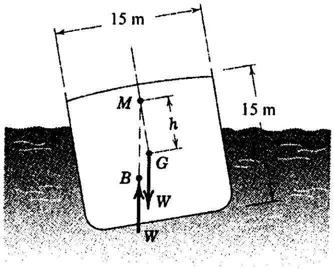
۸-۸۷ هنگامی که موتور به آرامی سرعت می‌گیرد، در سرعت ۳۶۰ rev/min نوسان ارتعاشی بزرگی حول محور O-O اتفاق می‌افتد که نشان دهنده این موضوع است که چنین سرعتی متناظر با فرکانس طبیعی نوسان آزاد موتور می‌باشد. اگر جرم موتور ۴۳ kg و شعاع ژیراسیون آن حول محور O-O برابر ۱۰۰ mm باشد، سختی k هر یک از چهار فنر یکسان را که موتور بر روی آنها سوار شده است، بدست آورید.

جواب $k = ۳۸۲۰$ N/m



شکل مسئله ۸-۸۷

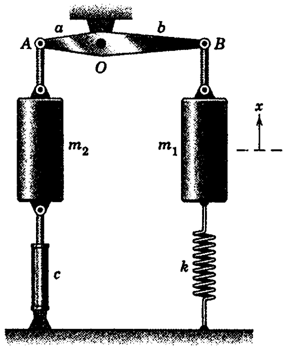
۸-۸۸ می‌توان فرض کرد که مرکز جرم کشتی در مرکز مقطع مربع معادلی به ضلع ۱۵ m واقع شده است. ارتفاع مرکز شناوری h کشتی، یعنی نقطه M تقاطع خط مرکزی کشتی با خط اثر نیروی شناوری کل وارد بر مرکزی شناوری B تعیین می‌شود که محل آن در نقطه M قرار داشته و h برابر ۰/۹ m می‌باشد. در صورتی که دامنه نوسان کوچک بوده و مقاومت آب ناچیز شمرده شود، پریود τ یکبار پهلو به پهلو شدن کامل کشتی را تعیین کنید. از تغییرات سطح مقطع کشتی در جلو و عقب آن صرفنظر کرده و کشتی حامل بار را به صورت یک بلوک توپر با سطح مقطع مربع در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۸-۸۸

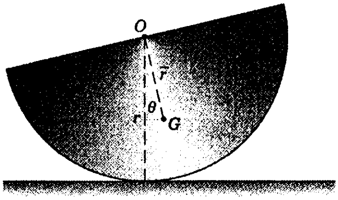
۸-۸۹ سیستم مسئله ۸-٤٤ دوباره در اینجا مطرح می‌شود. اگر لینک AB حالا دارای جرم m_3 و شعاع ژیراسیون k_O حول نقطه O باشد، معادله حرکت را بر حسب متغیر x تعیین کنید. نوسانات را کم دامنه در نظر بگیرید. ضریب میرایی مستهلک کننده برابر c است.

جواب $\left[m_1+\frac{a^2}{b^2}m_2+\frac{k_O^2}{b^2}m_3\right]\ddot{x}+\left[\frac{a^2}{b^2}c\right]\dot{x}+kx=0$



شکل مسئله ۸-۸۹

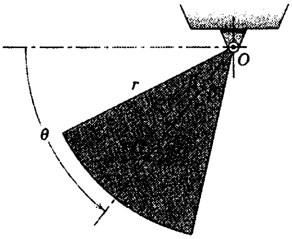
۸-۹۰ پریود τ نوسانات کوچک نیم استوانه به جرم m و شعاع r را در حرکت غلتشی بدون لغزش بر روی سطح افقی تعیین کنید.



شکل مسئله ۸-۹۰

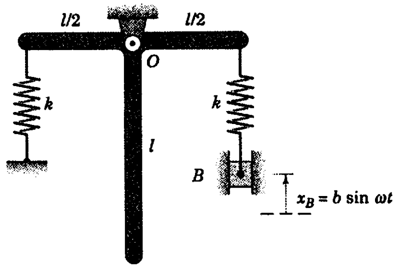
۸-۹۱ قطاع مدور به جرم m از یک ورق فولادی به ضخامت یکنواخت بریده شده و مرکز O آن در یک یاتاقان سوار شده است، به نحوی که بتواند آزادانه در صفحه قائم نوسان کند. اگر قطاع از حالت سکون در موقعیت $\theta = 0$ رها شود، با فرض میرایی ناچیز، معادله دیفرانسیل حرکت را بنویسید. پریود τ نوسانات کوچک قطاع را حول موقعیت $\theta = \pi/2$ تعیین کنید.

جواب $\tau=\pi\sqrt{\frac{3r\beta}{g\sin\beta}}$



شکل مسئله ۸-۹۱

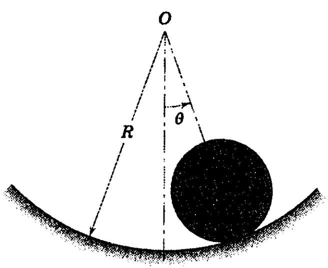
۸-۹۲ دو میله یکنواخت و یکسان با زاویه ۹۰° به یکدیگر جوش شده و مطابق شکل حول محور افقی گذرنده از O مفصل شده‌اند. فرکانس بحرانی ω_c بلوک B را که باعث می‌شود دامنهٔ نوسانات مجموعه فوق‌العاده زیاد شود، بدست آورید. جرم مجموعه جوشکاری شده m می‌باشد.



شکل مسئله ۹۲-۸

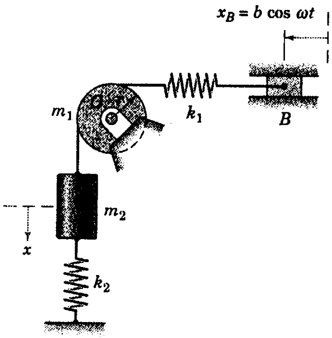
۸-۹۳ استوانه‌ای توپر و یکنواخت به جرم m و شعاع r در حین نوسانش بر روی سطح مدور به شعاع R بدون لغزش می‌غلتد. اگر حرکت منحصر به دامنه‌های کوچک $\theta = \theta_\circ$ باشد، پریود τ نوسانات را تعیین کنید. همچنین سرعت زاویه‌ای ω استوانه را به هنگام عبور از خط مرکزی قائم بدست آورید (تذکر: ω استوانه را با $\dot{\theta}$ یا ω_n که در معادلات تعریف شده بکار می‌روند، اشتباه نگیرید. همچنین توجه داشته باشید که θ جابجایی زاویه‌ای استوانه نیست).

جواب $\quad \omega = \dfrac{\theta_\circ}{r}\sqrt{\dfrac{۲g(R-r)}{۳}}$ و $\tau = ۲\pi\sqrt{\dfrac{۳(R-r)}{۲g}}$



شکل مسئله ۹۳-۸

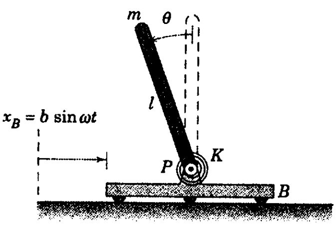
۸-۹۴ قرقره استوانه‌ای شکل توپر و همگن دارای جرم $m_۱$ و شعاع r می‌باشد. اگر بلوک B تحت تاثیر جابجایی هارمونیک نشان داده شده، قرار گیرد، معادله حرکت سیستم را بر حسب متغیر x بدست آورید. ریسمانی که جرم $m_۲$ را به فنر بالایی متصل می‌کند، روی قرقره نمی‌لغزد.



شکل مسئله ۹۴-۸

۸-۹۵ به ارابه B جابجایی هارمونیک $x_B = b \ \sin\omega t$ داده می‌شود. دامنه پایای Θ نوسان تناوبی میله باریک و یکنواخت را که در نقطه P به ارابه متصل شده، بدست آورید. فرض کنید که زوایا کوچک بوده و از اصطکاک در مفصل صرفنظر کنید. فنر پیچشی در $\theta = ۰$ بدون تغییر شکل است.

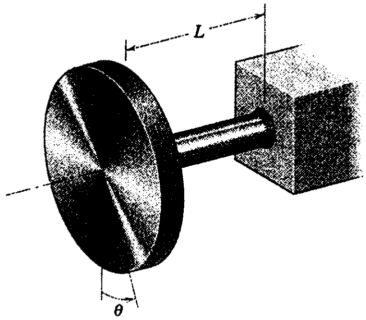
جواب $\quad \omega_n = \sqrt{\dfrac{۳k}{ml^۲} - \dfrac{۳g}{۲l}}$ که $\Theta = \dfrac{-\dfrac{۳}{۲}\dfrac{b}{l}\omega^۲}{\omega_n^۲ - \omega^۲}$



شکل مسئله ۹۵-۸

۸-۹۶ دیسک مدور به جرم m و ممان اینرسی I حول محور مرکزی خود به شافت فولادی جوش داده شده و شافت نیز به نوبه خود به بلوک ثابت جوش داده شده است. به دیسک جابجایی زاویه‌ای $\theta_\circ$ داده می‌شود و سپس رها می‌شود تا باعث ارتعاش پیچشی دیسک با تغییرات θ بین $+\theta_\circ$ و $-\theta_\circ$ گردد. شافت با گشتاور پیچشی مقاوم $M = JG\theta/L$ در مقابل پیچش مقاومت می‌کند که در آن J ممان اینرسی قطبی سطح مقطع شافت حول محور دوران، G مدول الاستیسیته برشی

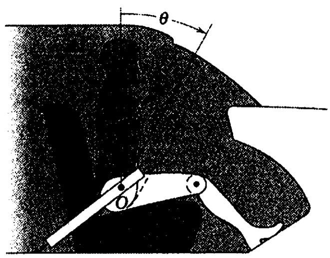
شافت (مقاومت در مقابل تنش برشی)، θ زاویه پیچش بر حسب رادیان و L طول شافت پیچانده شده می‌باشد. رابطه‌ای برای فرکانس طبیعی f_n ارتعاش پیچشی بیان کنید.



شکل مسئله ۹۶-۸

۹۷-۸ «آدمک» چند تکه مسئله ۱۰۱-۶ در اینجا دوباره مطرح شده است. فرض می‌شود که مفصل لگن O آدمک نسبت به اتومبیل ثابت باقی می‌ماند و ستون فقرات بالای لگن، جسم صلبی به جرم m تلقی می‌شود. مرکز جرم ستون فقرات در G بوده و شعاع ژیراسیون آن حول نقطه O برابر k_O می‌باشد. یک فنر پیچشی داخلی گشتاور $M = K\theta$ را بر بالای ستون فقرات اعمال می‌کند که در آن K ثابت فنر پیچشی و θ جابجایی زاویه‌ای از موقعیت قائم اولیه می‌باشد. اگر اتومبیل ناگهان با شتاب ثابت کاهنده a متوقف گردد، معادله دیفرانسیل حرکت ستون فقرات را پیش از برخورد با داشبورد بدست آورید.

جواب $mk_O^2\ddot{\theta} + K\theta - m\bar{r}(g\sin\theta + a\cos\theta) = 0$

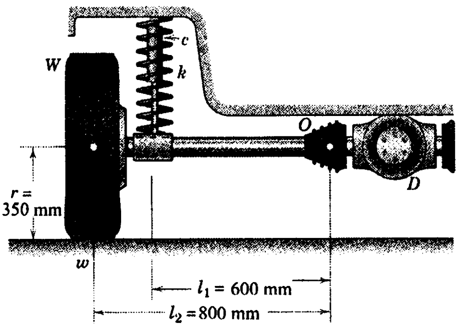


شکل مسئله ۹۷-۸

۹۸-۸ ◀ در شکل، اجزای مختلف یک نوع «اکسل گهواره‌ای» اتومبیل با سیستم تعلیق مستقل نشان داده شده است. دیفرانسیل D به صورت صلب به بدنه اتومبیل متصل است. نیم اکسل‌ها از قسمت انتهایی خود به صورت صلب به چرخ‌ها متصل می‌باشند (نقطه O مربوط به نیم اکسل نشان داده شده). اجزای مختلف تعلیق که نشان داده نشده، چرخ را وادار به حرکت در صفحه شکل می‌کنند. جرم مجموعه چرخ و لاستیک برابر $M = 45$ kg و ممان اینرسی جرم مجموعه حول محور قطری گذرنده از مرکز آن در G برابر $1.4\ \text{kg.m}^2$ می‌باشد. جرم نیم‌اکسل ناچیز است. ثابت فنر و ضریب میرایی کمک‌فنر به ترتیب برابر $k = 8.75$ kN/m و $c = 2600$ N.s/m می‌باشند. همانطور که در شکل نشان داده شده، در صورتی که وزنهٔ افزوده متمرکز $m = 0.25$ kg باعث ناموزونی استاتیکی در لاستیک شود، سرعت زاویه‌ای ω که به ازای آن سیستم تعلیق با فرکانس طبیعی نامیرا به حرکت در خواهد آمد را بدست آورید. سرعت متناظر v اتومبیل چقدر است؟ نسبت میرایی ζ را تعیین کنید. فرض کنید که جابجایی‌های زاویه‌ای کوچک بوده و اثرات ژیروسکوپی و نیز هرگونه ارتعاش ناشی از اتومبیل ناچیزند. به منظور اجتناب از پیچیدگی‌های حاصل از نیروی قائم متغیر که از طرف جاده به لاستیک وارد می‌شود، فرض کنید که اتومبیل بر روی یک جک بالابر قرار دارد که چرخ‌ها آزادانه آویزان هستند.

جواب $\omega = 10.21$ rad/s و $v = 12.87$ km/h

$\zeta = 1.517$

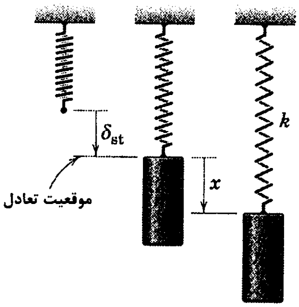


شکل مسئله ۹۸-۸

۸-۵ روش‌های انرژی

در بخش‌های ۸-۲ تا ۸-٤ ، معادلات حرکت اجسام مرتعش را با اعمال قانون دوم حرکت نیوتــن بــه ترسیمه آزاد نیروهای وارد به جسم بدست آورده و آنها را حل کردیم. با این روش توانستیم اثر کلیه نیروهای وارد بر جســم، از جملـه نیروهای میرا کننده اصطکاکی را بدست آوریم. مسائل زیادی وجود دارند که در آنها اثر میرایی کوچک بوده و می‌توان از آن صرفنظر کرد؛ به طوری که انرژی کل سیستم اساساً حفظ می‌شود. برای چنین سیستم‌هایی، اصل بقای انرژی را که غالباً بــه دلیل داشتن مزایای قابل توجه می‌توان به معادله حرکت اعمال کرد، هنگامی که حرکت از نوع هارمونیک ساده باشد، از این اصل می‌توان در تعیین فرکانس ارتعاش کمک گرفت.

تعیین معادله حرکت



شکل ۸-۱۷

به منظور تشریح این روش، ابتدا حــالت ســاده‌ای را در نظــر بگیریــد کــه جسمی به جرم m به فنری با ثابت k متصــل بــوده و مطـابق شــکل ۸-۱۷ بـدون هیچگونه میرایی در امتداد قائم، ارتعاش می‌کند. همــانند قبـل بــا انتخـاب چنیـن مبنایی، انرژی پتانسیل کل سیستم‌های الاستیک و جاذبه‌ای چنین می‌شود:

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}k\left(x+\delta_{st}\right)^2 - \frac{1}{2}k\delta_{st}^2 - mgx$$

که در آن $\delta_{st} = mg/k$ جابجــایی اســتاتیکی اولیــه اسـت. بــا قــرار دادن $k\delta_{st} = mg$ و ساده کردن داریم:

$$V = \frac{1}{2}kx^2$$

و در نتیجه، انرژی کل سیستم می‌شود:

$$T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

چون در مورد یک سیستم ابقایی $T+V$ مقداری ثابت است، مشتق آن نسبت به زمان صفر است. در نتیجه:

$$\frac{d}{dt}(T+V) = m\dot{x}\,\ddot{x} + kx\,\dot{x} = 0$$

با حذف $\dot{x}$ به معادله دیفرانسیل اساسی حرکت می‌رسیم:

$$m\ddot{x} + kx = 0$$

که همان معادله ۸-۱ است که در بخش ۸-۲ در مورد همان سیستم شکل ۸-۳ بدست آمد.

تعیین فرکانس ارتعاش

بقای انرژی را همچنین می‌توان جهت تعیین پریود یا فرکانس ارتعاش یک سیستم کنسرواتیو خطــی مـورد اسـتفاده قرار داد، بدون اینکه نیازی برای بدست آوردن و حل معادله حرکت باشد. در مورد سیستمی که با حرکت هارمونیک سـاده حول موقعیت تعادل نوسان می‌کند، یعنی از جایی که جابجایی x اندازه گیری می‌شود، انرژی از بیشترین مقدار آن در انرژی

جنبشی و انرژی پتانسیل صفر در موقعیت تعادل $x = 0$ بـه انـرژی جنبشـی صفـر و حداکـثر انـرژی پتانسـیل در حداکـثر جابجایی $x = x_{max}$ تغییر می‌کند. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$T_{max} = V_{max}$$

بیشترین مقدار انرژی جنبشی برابر $\frac{1}{2}m(\dot{x}_{max})^2$ و بیشترین مقدار انرژی پتانسیل برابر $\frac{1}{2}k(x_{max})^2$ می‌باشد.

در مورد نوسانگر هارمونیک شکل ۱۷-۸ ، می‌دانیم که می‌توان جابجایی را به صورت $x = x_{max}\sin(\omega_n t + \psi)$ نوشت، به طوری که حداکثر سرعت برابر $\dot{x}_{max} = \omega_n x_{max}$ باشد. در نتیجه می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}m(\omega_n x_{max})^2 = \frac{1}{2}k(x_{max})^2$$

که در آن x_{max} حداکثر جابجایی به ازای بیشترین مقدار انرژی پتانسیل است. از این موازنه انرژی به سادگی داریم:

$$\omega_n = \sqrt{k/m}$$

این روش تعیین مستقیم فرکانس را می‌توان در مورد هر ارتعاش نامیرا خطی بکار برد.

مزیت اصلی روش انرژی در مورد ارتعاش آزاد سیستم‌های کنسرواتیو آن است که به تجزیه سیستم نیـازی نبـوده و کلیه نیروهای وارد بر هر عضو به حساب می‌آیند. در بخش‌های ٦-٦ و ٧-٦ از فصل ٦، آموختیم که ترسیمه نـیروی موثـر سیستم کاملی که دارای اجزاء به هم پیوسته باشد، توانایی ارزیابی و تخمین کار نیروی موثر خارجی U' و نیز مساوی قـرار دادن آن با تغییر انرژی مکانیکی کل $T+V$ سیستم را می‌دهد.

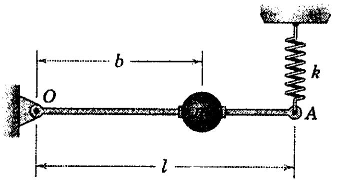
بنابراین در مورد سیستم مکانیکی کنسرواتیو یک درجه آزادی با اجزای به هم پیوسته کـه در آن $U' = 0$ اسـت، بـه سادگی می‌توان معادله حرکت آنرا با مساوی صفر قرار دادن مشتق زمانی انرژی مکانیکی کل که مقدار ثـابتی دارد، بدسـت آورد. داریم:

$$\frac{d}{dt}(T + V) = 0$$

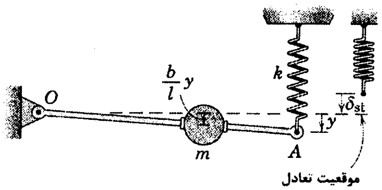
در اینجا $V = V_e + V_g$ برابر است با مجموع انرژی‌های الاستیک و پتانسیل سیستم.

همچنین، در مورد یک سیستم مکانیکی با اجزاء به هم پیوسته، فرکانس طبیعی ارتعاش همانند یک جسـم منفـرد، از طریق برابر قرار دادن روابط مربوط به حداکثر انرژی جنبشی کل و حداکثر انرژی پتانسیل کل بدست می‌آید که در موقعیت تعادل، انرژی پتانسیل صفر در نظر گرفته می‌شود. این روش در تعیین فرکانس طبیعی، فقـط در صورتـی معتبر اسـت کـه مشخص شود که سیستم با حرکت هارمونیک ساده ارتعاش می‌کند.

مسئله نمونه ۱۰-۸



گوی کوچکی به جرم m به میله سبکی که در نقطه O مفصل شده، متصل بوده و از انتهای A توسط فنر قائم با سختی k نگهداشته شده است. انتهای A به اندازه y_0 به زیر موقعیت تعادل افقی برده شده و رها می‌گردد. y_0 مقدار کوچکی است. به کمک روش انرژی، معادله دیفرانسیل حرکت نوسان‌های کوچک میله را بدست آورده و برای فرکانس طبیعی ω_n ارتعاش آن نیز رابطه‌ای بدست آورید. میرایی ناچیز است.



حل: مبنای سنجش جابجایی y انتهای میله، از موقعیت تعادل است و انرژی پتانسیل حاصل از جابجایی کوچک y چنین می‌شود:

$$V = V_e + V_g = \frac{1}{2}k(y+\delta_{st})^2 - \frac{1}{2}k\delta_{st}^2 - mg\left(\frac{b}{l}y\right)$$ ❶

که در آن δ_{st} جابجایی استاتیکی فنر در حال تعادل می‌باشد. با توجه به صفر بودن برآیند گشتاورها حول نقطه O، نیروی فنر در حال تعادل برابر با $(b/l)mg = k\delta_{st}$ است. با قرار دادن این مقدار در رابطه V و ساده کردن آن داریم:

$$V = \frac{1}{2}ky^2$$ ❷

انرژی جنبشی در موقعیت جابجا شده، برابر است با:

$$T = \frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\dot{y}\right)^2$$

ملاحظه می‌شود که جابجایی m در راستای قائم برابر $(b/l)y$ می‌باشد. در نتیجه، با ثابت بودن مجموع انرژی، مشتق آن نسبت به زمان صفر می‌شود و داریم:

$$\frac{d}{dt}(T+V) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\dot{y}\right)^2 + \frac{1}{2}ky^2\right] = 0$$

که نتیجه می‌شود:

جواب $$\ddot{y} + \frac{l^2}{b^2}\frac{k}{m}y = 0$$

در معادله فوق $\dot{y}$ حذف شده است. از مقایسه این معادله با معادله ۲-۸، می‌توانیم فرکانس حرکت را مستقیماً به صورت زیر بنویسیم:

جواب $$\omega_n = \frac{l}{b}\sqrt{k/m}$$

فرکانس را می‌توان از مساوی قرار دادن حداکثر انرژی جنبشی در $y = 0$ با حداکثر انرژی پتانسیل در $y = y_0 = y_{max}$ که جابجایی حداکثر است، بدست آورد. در نتیجه:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}\dot{y}_{max}\right)^2 = \frac{1}{2}ky_{max}^2$$: می‌دهد $T_{max}=V_{max}$

با علم به اینکه نوسان هارمونیک به صورت $y = y_{\max}\sin\omega_n t$ است، خواهیم داشت: $\dot{y}_{\max} = y_{\max}\omega_n$. با قرار دادن این رابطه در معادله مربوط به موازنه انرژی داریم:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{b}{l}y_{\max}\omega_n\right)^2 = \frac{1}{2}ky_{\max}^2 \quad \text{به طوری که} \quad \omega_n = \frac{l}{b}\sqrt{k/m}$$ جواب

که همان جواب قبلی است.

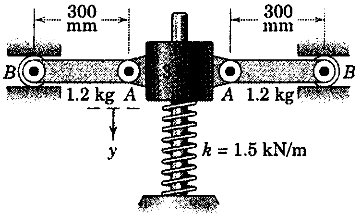
نکات مفید

❶ *به ازای مقادیر بزرگ y ، حرکت دایره‌ای انتهای میله سبب خواهد شد که رابطه مربوط به جابجایی فنر با خطا همراه باشد.*

❷ *در اینجا دوباره توجه داریم که سادگی رابطه مربوط به انرژی پتانسیل به این علت است که مبنای جابجایی نسبت به موقعیت تعادل می‌باشد.*

مسئله نمونه ۱۱-۸

مطلوب است تعیین فرکانس طبیعی ω_n ارتعاش طوقه به جرم ۳ kg در راستای قائم که به دو لینک یکنواخت به جرم ۱/۲ kg متصل شده است. لینک‌ها را می‌توان به مثابه میله‌های باریک در نظر گرفت. سختی فنر متصل به طوقه و پایه برابر k = ۱/۵ kN/m بوده و هر دو میله به صورت افقی در موقعیت تعادل قرار دارند. غلتک B موجود در انتهای لینک‌ها اجازه می‌دهد که انتهای A با طوقه حرکت کند. تاثیر اصطکاک در کُند کردن حرکت، ناچیز است.



حل: در موقعیت تعادل، نیروی فشاری P با مجموع وزن طوقه به جرم ۳ kg و نصف وزن لینک‌ها برابر است. یعنی:

$$P = 3(9.81) + 2(\tfrac{1}{2})(1.2)(9.81) = 41.2 \text{ N}$$

در ازای این نیرو، جابجایی استاتیکی فنر برابر $\delta_{st} = P/k = \frac{۴۱/۲}{۱/۵(۱۰^{۳})} = ۲۷/۵(۱۰^{-۳})$ m می‌باشد. در صورتیکه مبنای سنجش متغیر جابجایی y به سمت پایین موقعیت تعادل انتخاب شود، یعنی موقعیتی که انرژی پتانسیل صفر است، انرژی پتانسیل هر عضو در وضعیت جابجا شده، چنین است:

(فنر)
$$V_e = \frac{1}{2}k(y+\delta_{st})^2 - \frac{1}{2}k\delta_{st}^2 = \frac{1}{2}ky^2 + k\delta_{st}y$$
$$= \frac{1}{2}(1.5)(10^3)y^2 + 1.5(10^3)(27.5)(10^{-3})y$$
$$= 750y^2 + 41.2y \text{ J}$$

(طوقه)
$$V_g = -m_c gy = -3(9.81)y = -29.4y \text{ J}$$

❶ (هر لینک)
$$V_g = -m_l g\frac{y}{2} = -1.2(9.81)\frac{y}{2} = -5.89y \text{ J}$$

در اینصورت انرژی پتانسیل کل سیستم چنین می‌شود:

❷
$$V = 750\,y^2 + 41.2\,y - 29.4\,y - 2(5.89)\,y = 750\,y^2 \text{ J}$$

❸ حداکثر انرژی جنبشی در موقعیت تعادل رخ می‌دهد که سرعت $\dot{y}$ طوقه دارای بیشترین مقدار است. در این موقعیت که لینک‌های AB افقی هستند، انتهای B مرکز آنی بدون سرعت بوده به طوری که هر لینک را می‌توان این طور در نظر گرفت که با سرعت زاویه‌ای $\frac{\dot{y}}{۰/۳}$ حول نقطه ثابت B دوران می‌کند. در نتیجه، انرژی جنبشی هر قسمت چنین می‌شود:

(طوقه) $$T = \frac{1}{2} m_c \dot{y}^2 = \frac{3}{2} \dot{y}^2 \ \text{J}$$

(هر لینک) $$T = \tfrac{1}{2} I_B \omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{3} m_l l^2\right)(\dot{y}/l)^2 = \tfrac{1}{6} m_l \dot{y}^2$$

$$= \tfrac{1}{6}(1.2)\dot{y}^2 = 0.2\dot{y}^2$$

بنابراین، انرژی جنبشی طوقه و هر دو لینک چنین می‌شود:

$$T = \frac{3}{2}\dot{y}^2 + 2\left(0.2\dot{y}^2\right) = 1.9\dot{y}^2$$

❹ حرکت هارمونیک با رابطه $y = y_{max} \sin\omega_n t$ بیان می‌شود و از آنجا: $\dot{y}_{max} = y_{max}\omega_n$ است. به طوریکه از رابطه موازنه انرژی $T_{max} = V_{max}$ به ازای $\dot{y} = \dot{y}_{max}$ داریم:

❺ جواب $$1.9(y_{max}\omega_n)^2 = 750 y_{max}^2 \quad \text{یا} \quad \omega_n = \sqrt{750/1.9} = 19.87 \ \text{Hz}$$

نکات مفید

❶ توجه داشته باشید که جابجایی مرکز جرم هر لینک به اندازه نصف جابجایی طوقه به سمت پایین است.

❷ دوباره توجه می‌کنیم که نتیجه سنجش متغیر y حرکت از موقعیت تعادل در انرژی پتانسیل کل به صورت ساده $V = \frac{1}{2}ky^2$ ظاهر می‌شود.

❸ آگاهی ما در زمینه سینماتیک اجسام صلب در اینجا ضرورت می‌یابد.

❹ به منظور درک مزایای روش کار ـ انرژی در اینجا و نیز در مسائل مشابه با سیستم‌های متشکل از اجزاء به هم پیوسته، شما باید مراحل لازم جهت حل مسئله را به کمک معادلات نیرو و گشتاور حرکت اجزاء مختلف مورد بررسی قرار دهید.

❺ اگر دامنه نوسانات بزرگ باشند، در می‌یابیم که سرعت زاویه‌ای هر لینک از موقعیت کلی‌اش $\frac{\dot{y}}{\sqrt{0.09 - y^2}}$ می‌گردد که سبب ایجاد یک پاسخ غیر خطی می‌شد و با رابطه $y = y_{max}\sin\omega t$ نمی‌توان آنرا توصیف کرد.

مسائل

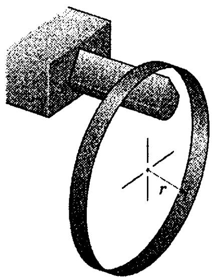
(مسائل زیر را به کمک روش انرژی که در بخش ۵-۸ آمده، حل کنید.)

مسائل مقدماتی

۹۹-۸ انرژی پتانسیل V یک سیستم جرم ـ فنر خطی بر حسب ژول با رابطه $٦٤x^{۲}$ بیان شده است که در آن، x جابجایی بر حسب متر از موقعیت تعادل خنثی سنجیده می‌شود. انرژی جنبشی T سیستم، بر حسب ژول با رابطه $۸\dot{x}^{۲}$ داده شده است. معادله دیفرانسیل حرکت را برای سیستم تعیین کرده و پریود τ نوسان آن را پیدا کنید. از اتلاف انرژی صرفنظر کنید.

جواب $\ddot{x}+۸x=۰$ و $\tau = ۲/۲۲\ \text{s}$

۱۰۰-۸ پریود τ حلقه مدور یکنواخت به شعاع r را تعیین کنید در حالی که با دامنه کوچک حول لبه تیز افقی نوسان کند.



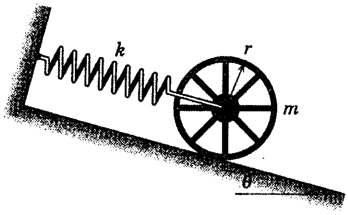
شکل مسئله ۱۰۰-۸

۱۰۱-۸ چرخ پره‌دار به شعاع r، جرم m و شعاع ژیراسیون $\bar{k}$ بدون لغزش بر روی سطح شیبدار می‌غلتد. فرکانس طبیعی نوسان را تعیین کرده و حالت‌های حدی $\bar{k}=۰$ و $\bar{k}=r$ را مورد بررسی قرار دهید.

جواب $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m\left(۱+\dfrac{\bar{k}^{۲}}{r^{۲}}\right)}}$

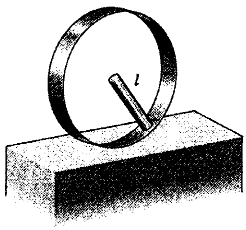
$\bar{k}=۰ : \omega_n = \sqrt{k/m}$

$\bar{k}=r : \omega_n = \sqrt{k/۲m}$



شکل مسئله ۱۰۱-۸

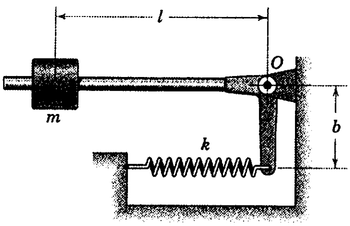
۱۰۲-۸ میله یکنواختی به جرم m و طول l به جداره داخلی حلقه مدور و سبکی به شعاع l جوش داده شده است. انتهای دیگر میله در مرکز حلقه قرار دارد. پریود τ نوسانات کوچک را حول موقعیت قائم میله در حالتی تعیین کنید که حلقه بدون لغزش بر روی سطح افقی بغلتد.



شکل مسئله ۱۰۲-۸

۱۰۳-۸ بازوی وزنه‌بردار مسئله ۸۵-۸ در اینجا تکرار شده است. طول فنر طوری تنظیم شده که در موقعیت افقی نشان داده شده، بازو در حال تعادل است. از جرم فنر و بازو صرفنظر کرده و فرکانس طبیعی f_n نوسانات کوچک را محاسبه کنید.

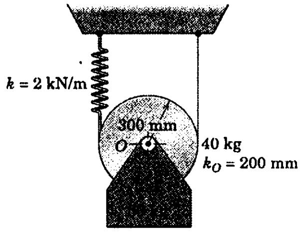
جواب $f_n = \dfrac{b}{۲\pi l}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$



شکل مسئله ۱۰۳-۸

مسائل ویژه

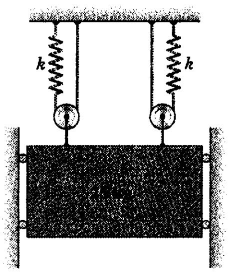
۸-۱۰۴ فرکانس f_n نوسانات قائم سیستم نشان داده شده را محاسبه کنید. جرم قرقره ۴۰ kg و شعاع ژیراسیون آن حول مرکز O برابر ۲۰۰ mm می‌باشد.



شکل مسئله ۸-۱۰۴

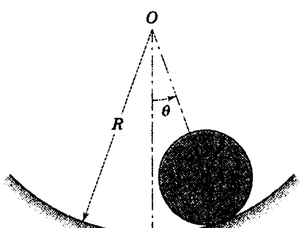
۸-۱۰۵ با استفاده از روش این بخش، پریود نوسانات قائم را تعیین کنید. سختی هر فنر ۱۲۰۰ N/m است و از جرم قرقره‌ها می‌توان صرفنظر کرد.

جواب $\tau = 0/321$ s



شکل مسئله ۸-۱۰۵

۸-۱۰۶ استوانهٔ مدور همگن مسئله ۸-۹۳ در اینجا تکرار شده است که بدون لغزش بر روی مسیر مدور به شعاع R می‌غلتد. پریود τ نوسانات کوچک را تعیین کنید.



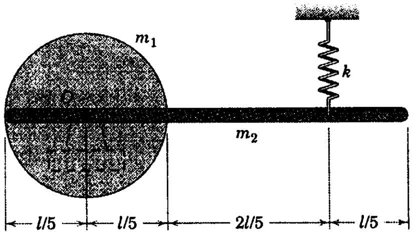
شکل مسئله ۸-۱۰۶

۸-۱۰۷ میله باریک و یکنواختی به طول l و جرم m_2 به دیسک یکنواختی به شعاع $l/5$ و جرم m_1 متصل شده است. اگر سیستم نشان داده شده در موقعیت تعادل خود باشد، فرکانس طبیعی ω_n و حداکثر سرعت زاویه‌ای ω نوسانات کوچک دامنه θ_0 را حول مفصل O تعیین کنید.

جواب

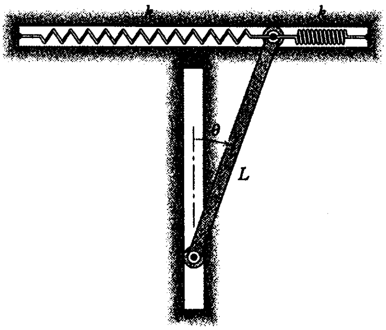
$$\omega_n = 3\sqrt{\frac{6k}{3m_1 + 26m_2}}$$

$$\omega = 3\theta_0\sqrt{\frac{6k}{3m_1 + 26m_2}}$$



شکل مسئله ۸-۱۰۷

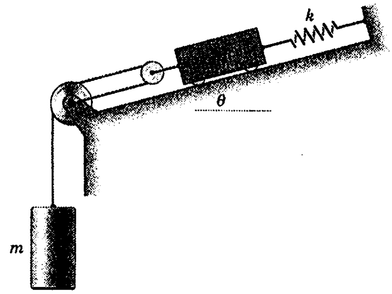
۸-۱۰۸ دو انتهای میله باریک یکنواخت به جرم m و طول L در شیارهای قائم و افقی آزادانه تحت تاثیر دو فنر از پیش فشرده، هر یک به سختی k مطابق شکل حرکت می‌کنند. اگر میله در موقعیت $\theta = 0$ در تعادل استاتیکی باشد، فرکانس طبیعی ω_n ارتعاشات کوچک آنرا تعیین کنید.



شکل مسئله ۸-۱۰۸

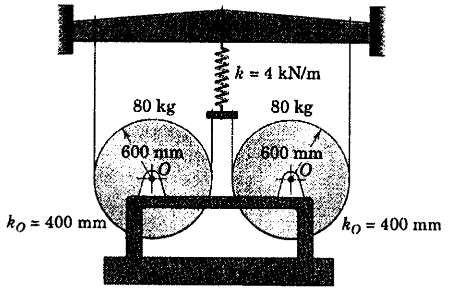
۸-۱۰۹ رابطه‌ای برای فرکانس طبیعی دورانی ω_n سیستم مسئله ۸-۲۵ که در اینجا تکرار شده، بیان کنید. از جرم و اصطکاک قرقره‌ها صرفنظر کنید.

جواب $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{5m}}$



شکل مسئله ۱۰۹-۸

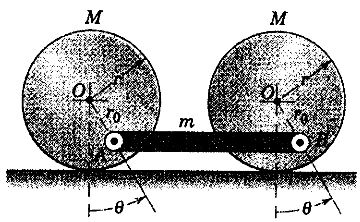
۱۱۰-۸ پریود τ نوسانات قائم سیستمی را تعیین کنید که جرم قاب آن ۱۴۰ kg و جرم دو قرقره آن ۸۰ kg بوده و شعاع ژیراسیون هر یک از آنها $k_O = ۴۰۰$ mm می‌باشد. سیم‌های انعطاف پذیر روی قرقره‌ها نمی‌لغزند.



شکل مسئله ۱۱۰-۸

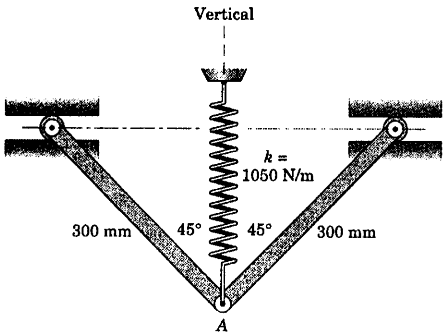
۱۱۱-۸ فرکانس طبیعی f_n سیستمی را که متشکل از دو استوانه همگن، هر یک به جرم M و لینک رابط AB به جرم m تشکیل شده، بدست آورید. نوسانات را کوچک فرض کنید.

جواب $f_n = \dfrac{۱}{۲\pi}\sqrt{\dfrac{mgr_\circ}{۳Mr^۲ + m(r - r_\circ)^۲}}$



شکل مسئله ۱۱۱-۸

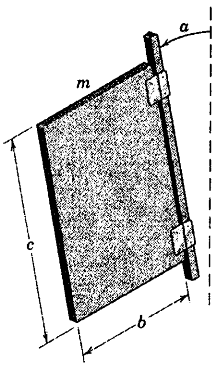
۱۱۲-۸ هر یک از دو میله باریک یکنواخت به جرم ۱/۵ kg، آزادانه در A به یکدیگر مفصل شده‌اند و غلتک‌های کوچک بالایی آنها به آزادی در راهنماهای افقی حرکت می‌کنند. میله‌ها در موقعیت تعادل ۴۵° خود، توسط فنر قائم به سختی ۱۰۵۰ N/m نگهداشته‌اند. اگر به نقطه A جابجایی بسیار کوچک قائمی داده شود و سپس رها گردد، فرکانس طبیعی حاصله را حساب کنید.



شکل مسئله ۱۱۲-۸

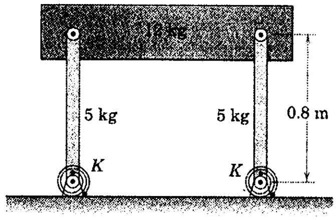
۱۱۳-۸ ورق نازک همگنی به جرم m چنان لولا شده که حول محور ثابتی که زاویه α را با قائم می‌سازد، آزادانه چرخش نماید. پریود نوسانات کوچک را تعیین کنید.

جواب $\tau = ۲\pi\sqrt{\dfrac{۲b}{۳g\sin\alpha}}$



شکل مسئله ۱۱۳-۸

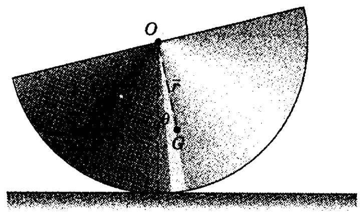
۸-۱۱٤ بلوکی به جرم ۱۲ kg توسط لینک‌هایی به جرم ٥ kg به همراه دو فنر پیچشی با ثابت $k =$ ٥۰۰ N.m/rad مطابق شکل نگهداری می‌شود. سختی فنرها آنقدر است که تعادل پایا را در موقعیت نشان داده شده برقرار کند. فرکانس طبیعی f_n نوسانات کوچک را حول موقعیت تعادل تعیین کنید.



شکل مسئله ۸-۱۱۴

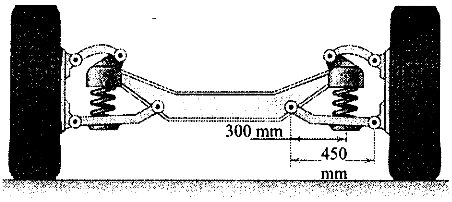
۸-۱۱٥ نیم استوانه‌ای به جرم m و شعاع r (مسئله ۸-۹۰ در اینجا تکرار شده است) بدون لغزش روی سطح افقی می‌غلتد. با استفاده از روش این بخش، پریود τ نوسانات کوچک را تعیین کنید.

جواب $\tau =$ ۷/۷۸$\sqrt{r/g}$



شکل مسئله ۸-۱۱۵

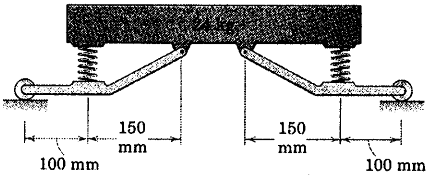
۸-۱۱٦ سیستم تعلیق جلوی یک اتومبیل در شکل نشان داده شده است. ثابت هر یک از فنرها برابر ٤٦/۸ kN/m می‌باشد. اگر جرم قاب سیستم تعلیق جلو و بخشی از بدنه معادل متصل به آن برابر ۸۰۰ kg باشد، فرکانس طبیعی f_n نوسانات قائم قاب و بدنه را در غیاب هر گونه کمک‌فنر (ضربه گیر) تعیین کنید. (*راهنمایی:* به منظور ارتباط جابجایی فنر با جابجایی قاب و بدنه، قاب را ثابت در نظر گرفته و فرض کنید که زمین و چرخ‌ها در امتداد قائم حرکت می‌کنند.)



شکل مسئله ۸-۱۱۶

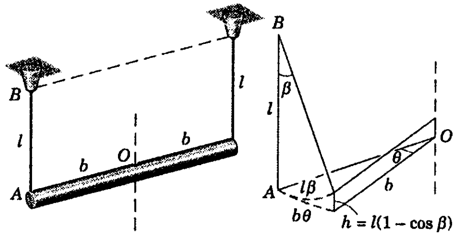
۸-۱۱۷ اگر به قاب فنر بندی شده، جابجایی جزئی نسبت به موقعیت تعادل نشان داده شده در امتداد قائم داده شود، فرکانس f_n ارتعاش را بدست آورید. جرم قطعه بالایی ۲٤ kg و جرم قطعه پایینی ناچیز است. ثابت هر فنر ۹ kN/m است.

جواب $f_n =$ ۲/٦۲ Hz



شکل مسئله ۸-۱۱۷

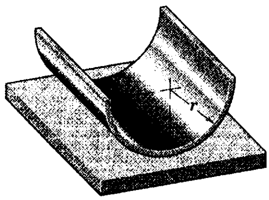
۸-۱۱۸ میله باریک یکنواخت به طول $2b$ در صفحه افقی توسط دو سیم موازی آویزان شده است. میله حول محور قائم گذرنده از مرکز O خود به نوسان زاویه‌ای کوچک در می‌آید. رابطه‌ای برای پریود τ نوسان بدست آورید. (*راهنمایی:* با بررسی شکل کمکی، توجه کنید که میله به اندازه h به ازای چرخش زاویه‌ای θ ، بالا می‌رود. همچنین توجه کنید که برای زوایای کوچک $l\beta \cong b\theta$ بوده و $\cos\beta$ را نیز می‌توان با دو جمله اولیه سری بسط داد. به ازای زوایای کوچک می‌توان از پاسخی به شکل هارمونیک ساده $\theta = \theta_o \sin\omega_n t$ استفاده نمود.)



شکل مسئله ۱۱۸-۸

۱۱۹-۸ پوسته استوانه‌ای نیم‌دایره‌ای به شعاع r و ضخامت دیواره یکنواخت ولی کوچک، بر روی سطح افقی نوسان گهواره‌ای کوچکی را انجام می‌دهد. در صورتیکه لغزشی وجود نداشته باشد، برای پریود τ هر نوسان کامل عبارتی بدست آورید.

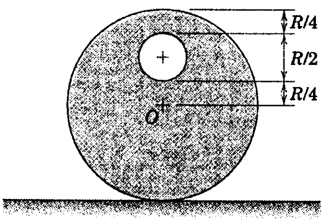
جواب $\tau = ۲\pi\sqrt{\frac{(\pi - ۲)r}{g}}$



شکل مسئله ۱۱۹-۸

۱۲۰-۸ ◀ مطابق شکل سوراخی به شعاع $R/4$ در استوانه‌ای به شعاع R و جرم m ایجاد شده است. در صورتی که استوانه بدون لغزش بر روی سطح افقی بغلتد، پریود τ نوسانات کوچک را تعیین کنید.

جواب $\tau = ۴۱/۴\sqrt{\frac{R}{g}}$



شکل مسئله ۱۲۰-۸

دوره فصل

در مطالعه ارتعاشات ذرات و اجسام صلب در فصل ۸ ، ملاحظه کردیم که موضوع بحث به سادگی به کاربرد مستقیم اصول اساسی دینامیک مربوط می‌شود که در فصول ۳ و ٦ مورد بررسی قرار گرفت. در این دو فصل رفتار دینامیکی جسم را در برهه‌ای از زمان مورد بحث قرار دادیم و نیز تغییرات حرکت در برهه‌ای محدود از زمان یا جابجایی بدست آمدند. از سوی دیگر، در فصل ۸ پاسخ معادله دیفرانسیل حرکت را مورد بحث قرار دادیم. به طوریکه جابجایی‌های خطی و زاویه‌ای را می‌توان به صورت تابعی از زمان بیان کرد.

ارتعاش ذره

مطالعه ما بر روی پاسخ زمانی ذرات به دو دسته حرکت آزاد و اجباری تقسیم بندی می‌شوند که هر یک به نوبه خود تقسیماتی را بر اساس اهمیت میرایی و یا ناچیز بودن آن دارند. دیدیم که نسبت میرایی ζ متغیر مناسبی جهت تعیین ماهیت ارتعاشات غیر اجباری اما با میرایی ویسکوز است.

اولین درسی که از مبحث حرکت هارمونیک اجباری آموختیم این است که در سیستم‌هایی که میزان میرایی آنها کوچک است، یک نیرو که فرکانس آن به فرکانس طبیعی نزدیک است، می‌تواند سبب ایجاد دامنه‌های خیلی بزرگ در حرکت جسم شود. به چنین حالتی تشدید گفته می‌شود که باید از آن اجتناب کرد.

ارتعاش جسم صلب

در مطالعه ارتعاش جسم صلب، ملاحظه کردیم که شکل معادله حرکت، همانند معادله‌ای است که در مورد ارتعاشات ذره بدست آمده است. ارتعاشات ذره را می‌توان به طور کامل توسط معادلات حاکم بر حرکت خطی تشریح کرد و این در حالی است که ارتعاشات اجسام صلب احتیاج به معادلات دینامیکی دورانی دارند.

روش‌های انرژی

در بخش پایانی فصل ۸ ، آموختیم که چگونه روش انرژی در تعیین فرکانس طبیعی ω_n مسائل ارتعاش آزاد که میرایی ناچیزی دارند کار را ساده کند. در اینجا فرض می‌شود که انرژی مکانیکی کل سیستم ثابت است. با مساوی قرار دادن مشتق انرژی مکانیکی کل نسبت به زمان، مستقیماً به معادله دیفرانسیل حرکت سیستم می رسیم. روش انرژی را نیز می‌توان در تجزیه و تحلیل‌های مربوط به یک سیستم کنسرواتیو با اجزاء متصل به هم بکار برد. در صورتیکه اتلاف انرژی مکانیکی ناچیز نباشد، باید قوانین حرکت را بر حسب نیرو، جرم و شتاب مورد استفاده قرار دهیم.

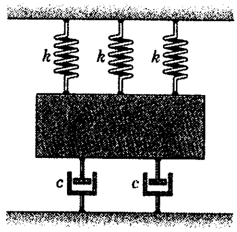
درجات آزادی

در کل فصل، توجه خود را به سیستم‌های یک درجهٔ آزادی محدود کردیم. در سیستم یک درجه آزادی موقعیت سیستم را می‌توان با یک متغیر مشخص کرد. در بسیاری از مسائل مهندسی، یک متغیر حرکت کافی است. در صورتی که سیستم دارای n درجه آزادی باشد، n فرکانس طبیعی خواهد داشت. در نتیجه، اگر یک نیروی هارمونیک به چنین سیستمی که میرایی آن خیلی کوچک است اعمال شود، n فرکانس وجود خواهد داشت که سبب ایجاد دامنه‌های بزرگ در حرکت می‌شود. با روشی که به آن آنالیز مودال گفته می‌شود، یک سیستم پیچیده با n درجه آزادی را می‌توان به n سیستم یک درجه آزادی کاهش داد. به همین دلیل درک کامل مطلب این فصل در ادامه مطالعه ارتعاشات، حیاتی است.

مسائل دوره‌ای

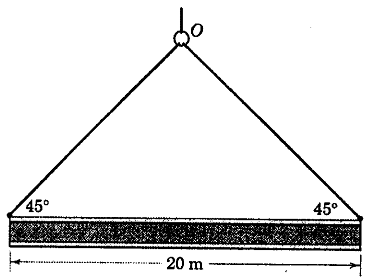
۸-۱۲۱ مقدار ضریب میرایی c را در مورد سیستمی که در حالت میرایی بحرانی قرار دارد، تعیین کنید؛ در حالیکه k = ۷۰ kN/m و m = ۱۰۰ kg باشد.

جواب c = ٤٥٨٠ N.s/m



شکل مسئله ۸-۱۲۱

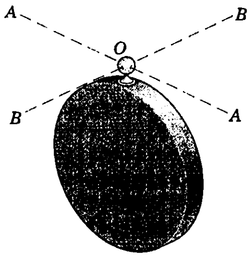
۸-۱۲۲ تیرآهن I شکل ۲۰ متری توسط کابل‌هایی مطابق شکل، بالا برده می‌شود. پریود τ نوسانات کوچک حول قلاب O را تعیین کنید. با فرض اینکه قلاب ثابت باقی مانده و مفصل کابل‌ها آزادانه حول آن نوسان کنند. تیرآهن را به مثابه یک میله باریک در نظر بگیرید.



شکل مسئله ۸-۱۲۲

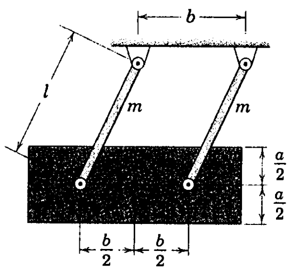
۸-۱۲۳ دیسک مدور یکنواختی توسط گوی کوچک O به یک مفصل کاسه ساچمه‌ای (که نشان داده نشده) آویزان شده است. پریود حرکت دیسک را در صورتی تعیین کنید که دیسک آزادانه حول محورهای زیر بچرخد. (الف) محور A-A و (ب) محور B-B . از خروج از مرکز جزئی، جرم و اصطکاک گوی صرفنظر کنید.

جواب (الف) $\omega_n = ۲\sqrt{\frac{g}{۵r}}$ و (ب) $\omega_n = \sqrt{\frac{۲g}{۳r}}$



شکل مسئله ۸-۱۲۳

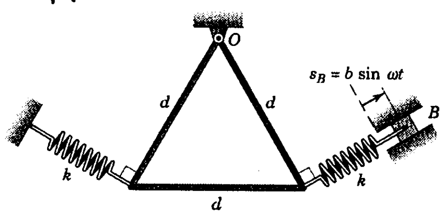
۸-۱۲٤ بلوکی به جرم M توسط دو میله باریک یکنواخت هر یک به جرم m آویزان شده است. فرکانس طبیعی ω_n نوسانات کوچک سیستم نشان داده شده را تعیین کنید.



شکل مسئله ۸-۱۲۴

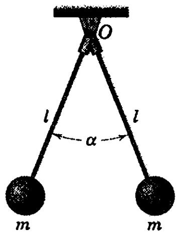
۸-۱۲۵ قاب مثلثی شکل از میله باریک یکنواختی ساخته شده و حول محور افقی گذرنده از نقطه O مفصل شده است. فرکانس بحرانی ω_c بلوک B که در اثر نوسانات مجموعه، ایجاد شده و تمایل به زیاد شدن دارد را بدست آورید.

جواب $\omega_c = \sqrt{\frac{۲g}{\sqrt{۳}d} + ۴\frac{k}{m}}$



شکل مسئله ۸-۱۲۵

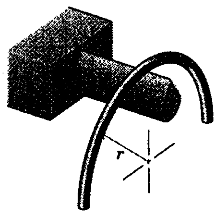
۸-۱۲۶ پریود τ نوسانات کوچک مجموعه متشکل از دو میله سبک و دو ذره هر یک به جرم m را تعیین کنید. رابطه بدست آمده را هنگامیکه α به سمت ۰ و °۱۸۰ میل می‌کند، مورد بررسی قرار دهید.



شکل مسئله ۸-۱۲۶

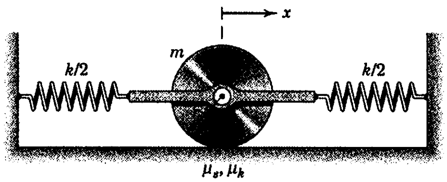
۸-۱۲۷ میله باریک مطابق شکل نشان داده شده به فرم یک نیم حلقه به شعاع r درآمده است. فرکانس طبیعی f_n نوسانات کوچک میله را هنگامی که بر روی لبه تیز افقی در وسط طولش لولا شده، تعیین کنید.

جواب $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{2r}}$



شکل مسئله ۸-۱۲۷

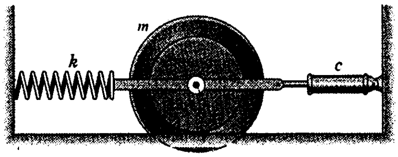
۸-۱۲۸ بزرگترین دامنه x_0 حرکت را چنان تعیین کنید که دیسک مدور، بدون لغزش روی سطح افقی بغلتد.



شکل مسئله ۸-۱۲۸

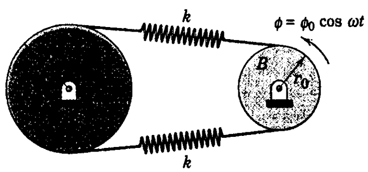
۸-۱۲۹ نسبت میرایی ζ سیستم نشان داده شده را در صورتی بدست آورید که جرم و شعاع ژیراسیون استوانه پله‌ای شکل برابر $m = ۸\ \text{kg}$ و $\bar{k} = ۱۳۵\ \text{mm}$، ثابت فنر برابر $k = ۲/۶\ \text{kN/m}$ و ضریب میرایی سیلندر هیدرولیکی برابر $c = ۳۰\ \text{N.s/m}$ می‌باشد. استوانه از جاییکه $r = ۱۵۰\ \text{mm}$ است، بدون لغزش بر روی سطح افقی می‌غلتد و فنر می‌تواند هم کشش و هم فشار را تحمل کند.

جواب $\zeta = ۰/۰۷۷۳$



شکل مسئله ۸-۱۲۹

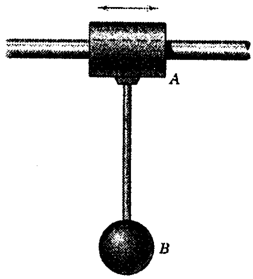
۸-۱۳۰ استوانه A به شعاع r، جرم m و شعاع ژیراسیون $\bar{k}$ توسط یک سیستم کابل ـ فنر متصل به استوانه B که مطابق شکل نوسان می‌کند به حرکت در می‌آید. در صورتیکه کابل‌ها بر روی استوانه‌ها نلغزند و هر دو فنر به اندازه‌ای کشیده شده باشند که در حین سیکل حرکت شل نشوند، برای دامنه θ_{max} نوسان پایای استوانه A رابطه‌ای تعیین کنید.



شکل مسئله ۸-۱۳۰

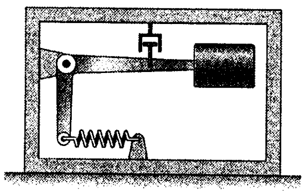
۸-۱۳۱ هنگامیکه طوقه A در جای خود نگهداشته شود، نیروی استاتیکی افقی ۱۴ N که بر گوی B به جرم ۲/۲ kg وارد آید، باعث ۱۵ mm جابجایی گوی در مقابل مقاومت الاستیکی میله باریک با جرم ناچیز می‌شود که به آن متصل شده است. اگر به طوقه A نوسان افقی هارمونیک با فرکانس ۲ سیکل بر ثانیه و دامنه ۷/۵ mm داده شود، دامنه X ارتعاش افقی گوی را حساب کنید. فرض کنید میرایی ناچیز است.

جواب $X = ۱۱/۹۵$ mm



شکل مسئله ۱۳۱-۸

۱۳۲-۸ لرزه نگار نشان داده شده در قسمتی از عرشه نزدیک موتورخانه یک کشتی نصب شده است که در آنجا، ارتعاش ناشی از پروانه محرک کشتی، بیشترین اثر خود را دارا می‌باشد. کشتی دارای یک پروانه سه پره است که با سرعت ۱۸۰ rev/min می‌چرخد و قسمتی از آن خارج از آب قرار دارد و باعث ایجاد ضربه‌هایی می‌شود که هر کدام از پره‌ها در برخورد با سطح آب بوجود می‌آورند. نسبت میرایی دستگاه $\zeta = ۰/۵$ و فرکانس طبیعی نامیرای آن ۳ Hz است. اگر دامنه حرکت A نسبت به قابش ۰/۷۵ میلی‌متر اندازه گیری شود، دامنه δ_0 ارتعاش قائم عرشه را حساب کنید.

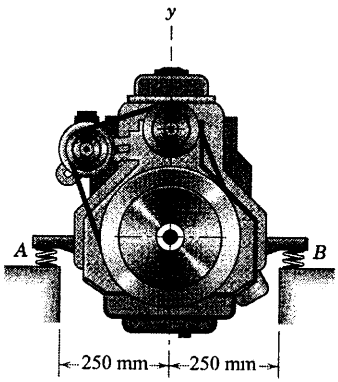


شکل مسئله ۱۳۲-۸

۱۳۳-۸ یک موتور آزمایشی به جرم ۲۲۰ kg بر روی سکوی آزمایش بر روی فنرهای A و B که سختی هر کدام ۱۰۵ kN/m می‌باشد، نصب شده است. شعاع ژیراسیون موتور حول مرکز جرم G آن برابر ۱۱۵ mm می‌باشد. در صورتی که موتور خاموش باشد، فرکانس طبیعی $(f_n)_y$ ارتعاش قائم و $(f_n)_\theta$ ارتعاش دورانی حول G را محاسبه کنید. اگر از حرکت موتور در امتداد قائم جلوگیری شود و ناموزونی دورانی کوچکی در موتور وجود داشته باشد، در چه سرعت دورانی N موتور نباید کار کند؟

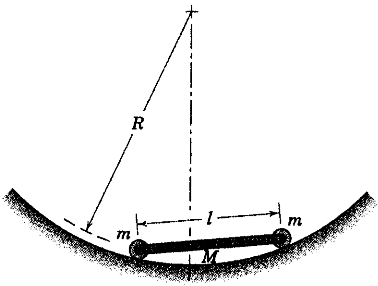
جواب $(f_n)_y = ۴/۹۲$ Hz و $(f_n)_\theta = ۱۰/۶۹$ Hz

$N = ۶۴۱$ rev/min



شکل مسئله ۱۳۳-۸

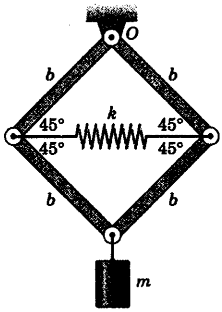
۱۳۴-۸ میله یکنواخت به جرم M و طول l دارای غلتک‌هایی هر یک به جرم m می‌باشد و اصطکاک یاتاقان‌ها در دو انتها ناچیز است. پریود τ سیستم را به ازای نوسانات کوچک در مسیر منحنی آن بدست آورید.



شکل مسئله ۱۳۴-۸

۸-۱۳۵ ◀ سیستمی که از چهار میله صلب سبک و استوانه‌ای به جرم m تشکیل شده در موقعیت تعادلش نشان داده شده است. فرکانس طبیعی ω_n نوسانات قائم با دامنه کوچک را تعیین کنید. (*راهنمایی:* فقط جمله مرتبه اول را در نظر بگیرید.)

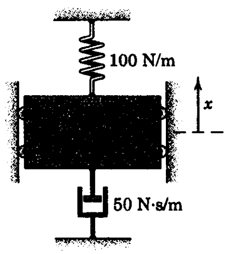
جواب $\omega_n = \sqrt{\dfrac{k}{m} + \dfrac{g}{b}\sqrt{۲}}$



شکل مسئله ۸-۱۳۵

مسائل کامپیوتری

***۸-۱۳۶** جرم سیستم نشان داده شده با شرایط اولیه $x_0 = ۰/۱$ m و $\dot{x}_0 = -۵$ m/s در لحظه $t = ۰$ رها می‌شود. پاسخ سیستم را ترسیم کرده و زمان یا زمان‌هایی (در صورت وجود) را که به ازای آن $x = -۰/۰۵$ m می‌شود، تعیین کنید.

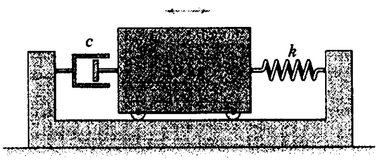


شکل مسئله ۸-۱۳۶

***۸-۱۳۷** نوسانگری به جرم ۱۰ kg دارای موتور ناموزونی است که سرعت N آن بر حسب دور بر دقیقه می‌تواند متغیر باشد. حرکت افقی نوسانگر، توسط فنری با سختی $k = ۱۰۸۰$ N/m و مستهلک کننده ویسکوز، مقید شده است؛ در حالیکه بر پیستون مستهلک کننده، نیروی مقاوم ۳۰ N در سرعت ۰/۵ m/s وارد می‌آید. فاکتور میرایی ویسکوز ζ را تعیین کرده و فاکتور بزرگنمایی M موتور را در محدوده سرعت صفر تا ۳۰۰ دور بر دقیقه ترسیم کنید. حداکثر مقدار M و سرعت متناظر موتور را تعیین کنید.

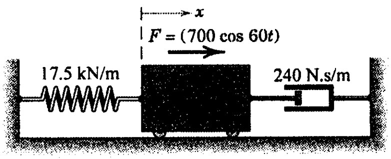
جواب $M_{max} = ۱/۸۰۹$ در $N = ۹۰/۶$ rev/min

$\zeta = ۰/۲۸۹$



شکل مسئله ۸-۱۳۷

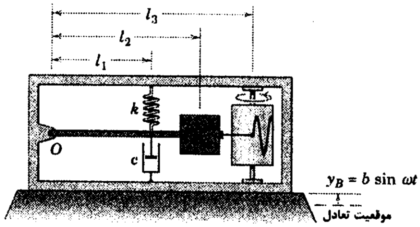
***۸-۱۳۸** نمودار پاسخ x جسمی به وزن ۲۹ kg را در فاصله زمانی $۰ \leqslant t \leqslant ۱$ ثانیه ترسیم کنید. حداکثر و حداقل مقدار x و زمان‌های متناظر را بدست آورید. شرایط اولیه عبارتند از: $x_0 = ۰$ و $\dot{x}_0 = ۶$ m/s .



شکل مسئله ۸-۱۳۸

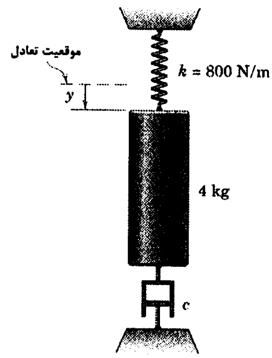
***۸-۱۳۹** آنچه که در شکل نشان داده شده، اجزا یک جابجایی سنج هستند که به منظور مطالعه حرکت $y_B = b \sin\omega t$ پایه دستگاه مورد استفاده قرار می‌گیرد. حرکت جرم نسبت به قاب دستگاه بر روی یک استوانه دوار ثبت می‌شود. در صورتیکه $l_1 = ۳۶۰$ mm ، $l_2 = ۴۸۰$ mm ، $l_3 = ۶۰۰$ mm ، $m = ۰/۹$ kg ، $c = ۱/۴$ N.s/m و $\omega = ۱۰$ rad/s باشد، حدود تغییرات ثابت فنر k را با توجه به اینکه مقدار جابجایی نسبی ثبت شده کمتر از $۱/۵b$ است،

بدست آورید. فرض بر این است که نسبت ω/ω_n همواره بزرگتر از واحد باقی بماند. جواب $۰ < k < ۲۷/٤$ N/m



شکل مسئله ۸-۱۳۹

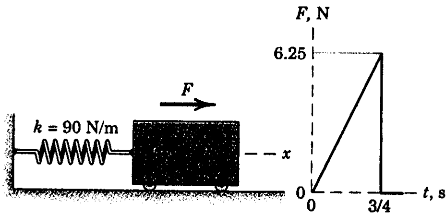
*۸-۱٤۰ استوانه‌ای به جرم ٤ kg به مستهلک کننده ویسکوز و فنری با سختی $k = ۸۰۰$ N/m وصل شده است. اگر استوانه از حالت سکون در لحظه $t = ۰$ از موقعیتی که در آن جابجایی $y = ۱۰۰$ mm از موقعیت تعادلش رها گردد. جابجایی y را بر حسب تابعی از زمان در اولین ثانیه حرکت برای دو حالت که در آن ضریب میرایی ویسکوز (الف) $c = ۱۲٤$ N.s/m و (ب) $c = ۸۰$ N.s/m است، رسم کنید.



شکل مسئله ۸-۱۴۰

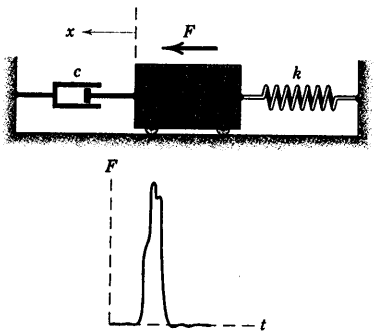
*۸-۱٤۱ پاسخ $x = f(t)$ را برای نوسانگر خطی نامیرا که تحت تاثیر نیروی F قرار گرفته و به طور خطی نسبت به زمان در طی $\frac{۳}{۴}$ ثانیه اول حرکت، تغییر می‌کند، تعیین و رسم کنید. جرم در ابتدا در $x = ۰$ و در لحظه $t = ۰$ در حال سکون بوده است.

جواب $x = ۰/۰۹۲۶(t - ۰/۰۹۱۳ \sin ۱۰/۹۵t)$ m



شکل مسئله ۸-۱۴۱

*۸-۱٤۲ نوسانگر خطی میرا به جرم $m = ٤$ kg با ثابت فنر $k = ۲۰۰$ N/m و فاکتور میرایی ویسکوز $\zeta = ۰/۱$ در موقعیت خنثی، ابتدا در حال سکون است که ناگهان تحت نیروی ضربه‌ای F که در برهه‌ای کوتاه از زمان، مطابق شکل رخ می‌دهد، قرار می‌گیرد. اگر ضربه به صورت $I = \int F dt = ۸$ N.s باشد، جابجایی حاصله x را بر حسب تابعی از زمان تعیین کرده و آنرا برای ۲ ثانیه اول پس از ضربه، رسم نمایید.



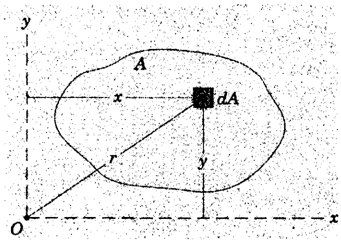
شکل مسئله ۸-۱۴۲

پیوست A

ممان اینرسی سطح

مباحث مربوط به تئوری و محاسبات ممان‌های اینرسی سطح در پیوست A جلد اول از کتاب *استاتیک* را ملاحظه کنید. از آنجایی که این کمیت نقش مهمی در طراحی سازه‌ها، بخصوص سازه‌های مورد بررسی در استاتیک را ایفا می‌کند، در کتاب *دینامیک* فقط تعریف مختصری از آنرا می‌آوریم تا دانشجو بتواند تفاوت اساسی بین ممان‌های اینرسی سطح و جرم را تشخیص دهد.

ممان‌های اینرسی سطح به مساحت A حول محورهای x و y که در همان صفحه و نیز حول محور z عمود بر آن صفحه، مطابق شکل A-۱ به صورت زیر تعریف می‌شوند.



شکل ۱ـ A

$$I_x = \int y^2 dA \qquad I_y = \int x^2 dA \qquad I_z = \int r^2 dA$$

که در آن dA المان دیفرانسیلی سطح بوده و $r^2 = x^2 + y^2$ می‌باشد. واضح است که ممان اینرسی قطبی I_z با مجموع‌های اینرسی مستطیلی یعنی $I_x + I_y$ برابر است. همان طور که در پیوست B توضیح داده شده در مورد ورق‌های نازک مسطح، ممان اینرسی سطح در محاسبه ممان اینرسی جرم مورد استفاده قرار می‌گیرد.

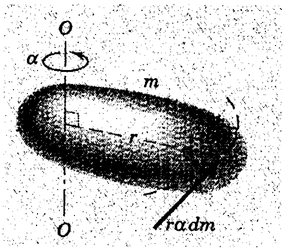
ممان اینرسی سطح معیاری است جهت سنجش چگونگی توزیع سطح حول محور مورد نظر که حول آن محور دارای خواص سطحی ثابت می‌باشد. دیمانسیون ممان اینرسی سطح عبارتند از ^{4}(فاصله) که بر حسب m^4 یا mm^4 در سیستم آحاد SI و در سیستم آحاد متداول آمریکایی بر حسب ft^4 یا in^4 بیان می‌شود. به طور خلاصه، ممان اینرسی جرم معیاری جهت سنجش چگونگی توزیع جرم حول محور مورد نظر بوده و دیمانسیون آن عبارتند از ^{2}(فاصله)(جرم) می‌باشد که در سیستم آحاد SI بر حسب $kg.m^2$ و در سیستم آحاد متداول آمریکایی $lb\text{-}in\text{-}sec^2$ بیان می‌شود.

پیوست B

ممان اینرسی جرم

فهرست مطالب

B-۱ ممان اینرسی جرم حول یک محور



شکل B-۱

معادله حرکت دورانی حول یک محور عمود بر صفحهٔ حرکت یک جسم صلب به صورت یک انتگرال است که بستگی به چگونگی توزیع جرم نسبت به محور گشتاورگیری دارد. این انتگرال در مواقعی بوجود می‌آید که جسم صلب حول محور دوران خود دارای شتاب زاویه‌ای می‌باشد. بنابراین در مطالعه دینامیک دورانی، شما بایستی آشنایی کافی برای محاسبه ممان اینرسی جرم اجسام صلب داشته باشید.

مطابق شکل B-۱ ، جسمی به جرم m را در نظر بگیرید که با شتاب زاویه‌ای α حول محور O-O دوران می‌کند. کلیه ذرات جسم در صفحاتی به موازات یکدیگر که به محور دوران O-O عمود هستند، حرکت می‌کنند. هر یک از این صفحات را می‌توانیم به عنوان صفحه حرکت انتخاب کنیم. اگرچه صفحه‌ای که مرکز جرم در آن قرار دارد، معمولاً مورد توجه قرار می‌گیرد. یک المان به جرم dm دارای مولفه شتاب مماسی $r\alpha$ می‌باشد که بر مسیر دایره‌ای مماس است و به کمک قانون دوم نیوتن در حرکت، برآیند نیروی مماسی وارد بر این المان برابر $r\alpha dm$ می‌شود. گشتاور این نیرو حول محور O-O برابر $r^2\alpha dm$ و مجموع گشتاورهای این نیروها برای همه المانهای جسم برابر $\int r^2\alpha\, dm$ می‌باشد.

در مورد یک جسم صلب، α برای کلیه خطوط شعاعی جسم یکسان بوده و می‌توانیم آن را از انتگرال بیرون بیاوریم. انتگرال باقیمانده به ممان اینرسی جرم I جسم حول محور O-O موسوم است و برابر است با:

$$\boxed{I=\int r^2 dm} \qquad \text{(B-۱)}$$

این انتگرال نشانگر خاصیت مهمی از یک جسم است و در تجزیه و تحلیل هر جسمی که حول یک محور معین دارای شتاب زاویه‌ای است، دخالت دارد. همانطور که جرم m یک جسم معیاری برای سنجش مقاومت جسم در مقابل شتاب انتقالی است، ممان اینرسی I سنجشی از مقاومت جسم در مقابل شتاب زاویه‌ای است.

انتگرال ممان اینرسی را می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

$$I=\Sigma r_i^2 m_i \qquad \text{(B-۱a)}$$

که r_i فاصله شعاعی از محور اینرسی تا ذره مورد نظر به جرم m_i می‌باشد که سری مجموع فوق، کلیه ذرات جسم را تحت پوشش قرار می‌دهد.

اگر چگالی ρ در سراسر جسم ثابت باشد، ممان اینرسی چنین بیان می‌شود:

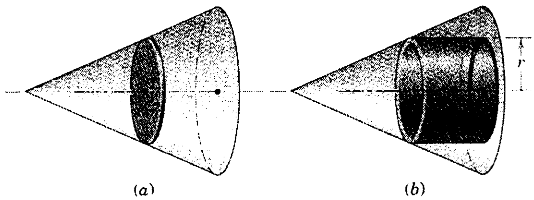
$$I = \rho \int r^2 dV$$

که در آن dV المان حجمی است. در چنین حالتی، انتگرال، معرف خواص هندسی جسم می‌باشد. در صورتیکه چگالی ثابت نباشد و به صورت تابعی از مختصات جسم بیان شود، ρ باید داخل انتگرال قرار گیرد تا اثرش در انتگرال‌گیری بحساب آید.

به طور کلی، در انتگرال گیری مختصاتی که مرزهای جسم را بهتر تحت پوشش قرار می‌دهند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین انتخاب یک المان حجمی dV مناسب نیز دارای اهمیت خاصی است. به منظور ساده کردن مراحل انتگرال گیری، یک المان که دارای کوچکترین درجه ممکن است را انتخاب می‌کنیم و رابطه صحیح مربوط به ممان اینرسی المان حول محور را می‌نویسیم. مثلاً در پیدا کردن ممان اینرسی یک مخروط قائم حول محور مرکزیش، المان را به صورت یک برش دایره‌ای با ضخامت بسیار ناچیز مطابق شکل B-۲b انتخاب می‌کنیم. ممان اینرسی دیفرانسیلی این المان در واقع رابطه‌ای است برای ممان اینرسی یک استوانه مدور با ارتفاع بسیار ناچیز حول محور مرکزی آن (این رابطه در مسئله نمونه B-۱ بدست خواهد آمد).

علاوه بر این، می‌توانیم همانند شکل B-۲b المانی را به شکل یک پوسته استوانه‌ای به ضخامت ناچیز انتخاب کنیم. چون کل جرم المان در همان فاصله r از محور اینرسی واقع شده، ممان اینرسی دیفرانسیل این المان برابر r^2dm خواهد شد که dm جرم دیفرانسیل پوسته المانی شکل می‌باشد.

با توجه به تعریف ممان اینرسی جرم، دیمانسیون‌های آن به صورت ۲(فاصله)(جرم) بوده و در سیستم آحاد SI با $kg.m^2$ و در سیستم آحاد متداول آمریکایی با $lb\text{-}ft\text{-}sec^2$ بیان می‌شوند.



شکل B-۲

شعاع ژیراسیون

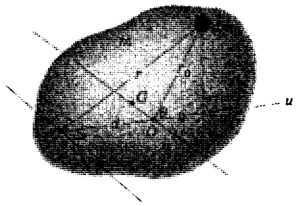
شعاع ژیراسیون k جسمی به جرم m حول محوری که برای آن ممان اینرسی I می‌باشد، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad \text{یا} \quad I = k^2 m} \qquad \text{(B-۲)}$$

در نتیجه، k معیاری جهت سنجش توزیع جرم یک جسم حول محور مورد نظر بوده و تعریف آن شبیه تعریف شعاع ژیراسیون در مورد ممان اینرسی سطح می‌باشد. اگر تمام جرم m یک جسم در فاصله k از محور متمرکز باشد، ممان اینرسی تغییر نخواهد کرد.

ممان اینرسی یک جسم حول محور بخصوص، غالباً با دانستن جرم جسم صلب و شعاع ژیراسیون آن حول محور مورد نظر مشخص می‌شود. در این صورت ممان اینرسی توسط معادله ۲-B محاسبه می‌شود.

انتقال محورها



شکل ۳-B

اگر ممان اینرسی یک جسم حول محور گذرنده از مرکز جرم آن مشخص باشد، به آسانی می‌توان ممان اینرسی جسم حول هر محور موازی با آن را تعیین کرد. جهت اثبات این مطلب، دو محور موازی نشان داده شده در شکل ۳-B را در نظر بگیرید. یکی از این محورها از مرکز جرم G و دیگری از نقطه C عبور کرده است.

فاصله شعاعی هر المان جرمی dm از دو محور برابر r_0 و r می‌باشد و فاصله دو محور d است. با قرار دادن قانون کسینوس‌ها $r^2 = r_0^2 + d^2 + 2r_0 d\cos\theta$ در تعریف مربوط به ممان اینرسی حول محور غیر گذرنده از مرکز جرم که از نقطه C عبور کرده داریم:

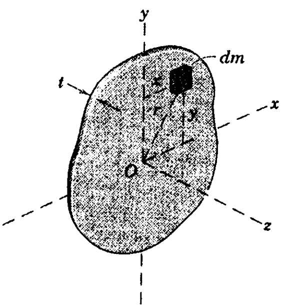
$$I = \int r^2 dm = \int \left(r_0^2 + d^2 + 2r_0 d^2 \cos\theta\right) dm$$
$$= \int r_0^2 dm + d^2 \int dm + 2d \int u\, dm$$

اولین انتگرال عبارت است از ممان اینرسی $\bar{I}$ حول محور گذرنده از مرکز جرم، جمله دوم برابر md^2 و سومین انتگرال برابر صفر می‌باشد؛ چون مختصات u مرکز جرم نسبت به محور گذرنده از G برابر صفر است. در نتیجه، قضیه محورهای موازی به صورت زیر خواهد شد.

$$\boxed{I = \bar{I} + md^2} \qquad \textbf{(B-3)}$$

باید به خاطر داشت که انتقال صورت نمی‌گیرد، مگر اینکه محور یا از مرکز جرم عبور کند و یا با آن موازی باشد. با قرار دادن روابط مربوط به شعاع ژیراسیون در معادله ۳-B ، نتیجه می‌شود:

$$\boxed{k^2 = \bar{k}^2 + d^2} \qquad \textbf{(B-3a)}$$



شکل ۴-B

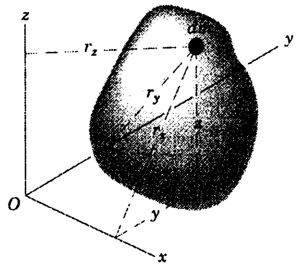
رابطه B-۳a همان قضیه محورهای موازی جهت بدست آوردن شعاع ژیراسیون k حول محوری است که به فاصله d به موازات محور گذرنده از مرکز جرم با شعاع ژیراسیون $\bar{k}$ قرار دارد.

در مورد مسائل حرکت صفحه‌ای که دارای دوران حول یک محور عمود بر صفحه حرکت هستند، یک اندیس برای I کافی است تا محور اینرسی را مشخص کند. در نتیجه، اگر ورق نازک شکل ٤-B در صفحه x-y دارای حرکت صفحه‌ای باشد، ممان اینرسی ورق حول محور z گذرنده از O با I_O مشخص می‌شود. ولی در حرکت سه بعدی که ممکن است مولفه‌های دوران حول بیش از یک محور چرخش داشته باشند،

از دو اندیس جهت نمایش وجود تقارن در جملات حاصلضرب اینرسی استفاده می‌کنیم که در بخش B-۲ تشریح شده است. در نتیجه، ممان‌های اینرسی حول محورهای x، y و z به ترتیب I_{xx} ، I_{yy} و I_{zz} نشان داده می‌شوند و از شکل B-۵ دیده می‌شود که:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int r_x^2 dm = \int \left(y^2 + z^2\right) dm \\ I_{yy} &= \int r_y^2 dm = \int \left(x^2 + z^2\right) dm \\ I_{zz} &= \int r_z^2 dm = \int \left(x^2 + y^2\right) dm \end{aligned} \qquad \text{(B-٤)}$$

این انتگرال‌ها در معادلات ۱۰-۷ در بخش ۷-۷ در مبحث مربوط به مومنتم زاویه‌ای در سه بعد، اشاره شده است.



شکل B-۵

به آسانی می‌توان شباهت بین عبارات تعریف کنندهٔ ممان‌های اینرسی جرم و ممان‌های اینرسی سطح را ملاحظه کرد. رابطه دقیق بین دو عبارت مربوط به ممان اینرسی‌ها در مورد ورق‌های مسطح موجود است. اگر ضخامت ثابت ورق برابر t و چگالی آن برابر ρ باشد، ممان اینرسی جرم I_{zz} ورق حول محور z عمود بر آن چنین است.

$$I_{zz} = \int r^2 dm = \rho t \int r^2 dA = \rho\, t I_z \qquad \text{(B-٥)}$$

بنابراین، ممان اینرسی جرم حول محور z برابر می‌شود با حاصلضرب جرم بر واحد سطح ρt در ممان اینرسی قطبی I_z سطح ورق حول محور z . اگر t در مقایسه با ابعاد ورق کوچک باشد، ممان اینرسی‌های جرم I_{xx} و I_{yy} ورق حول محورهای x و y تقریباً به یکدیگر نزدیک هستند.

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int y^2 dm = \rho t \int y^2 dA = \rho\, t I_x \\ I_{yy} &= \int x^2 dm = \rho t \int x^2 dA = \rho\, t I_y \end{aligned} \qquad \text{(B-٦)}$$

بنابراین، ممان‌های اینرسی جرم با حاصلضرب جرم بر واحد سطح ρt در ممان‌های اینرسی متناظر با آن مساوی‌اند. دو اندیس موجود در ممان‌های اینرسی جرم، این کمیت‌ها را از ممان‌های اینرسی سطح متمایز می‌سازند.

همانطور که رابطه $I_z = I_x + I_y$ را در مورد ممان‌های اینرسی سطح داشتیم، در مورد ممان‌های اینرسی جرم داریم:

$$I_{zz} = I_{xx} + I_{yy} \qquad \text{(B-٧)}$$

که این رابطه فقط در مورد یک ورق مسطح نازک صادق است. این محدودیت را می‌توان در معادلات B-٦ دید. چون روابط مذکور برقرار نیستند، مگر اینکه ضخامت t یا ضخامت z المان در مقایسه با فاصله المان از محور x یا y ناچیز باشند. معادلـه B-۷ در صورتی خیلی مفید است که المان دیفرانسیلی جرم به صورت برش مسطحی با ضخامت بینهایت جزئی در نظر گرفته شود. در چنین حالتی معادله B-۷ کاملاً صدق می‌کند و به صورت زیر می‌شود:

$$dI_{zz} = dI_{xx} + dI_{yy} \tag{B-7a}$$

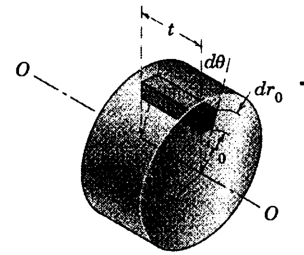
در صورتیکه محورهای x و y در صفحه ورق واقع شده باشند.

اجسام مرکب

در این حالت ممان اینرسی سطح، ممان اینرسی جرم اجسام مرکب با مجموع ممان‌های اینرسی اجزای آن حول همان محور برابر است. در صورتیکه جسم مرکب را به صورت احجام مثبت و منفی در نظر بگیریم، محاسبات مربوط به ممان اینرسی جرم آن ساده می‌شود. ممان اینرسی یک المان اینرسی یک المان با حجم منفی، نظیر سوراخی که در جسم ایجاد می‌شود، باید به صورت یک کمیت منفی در نظر گرفته شود.

خلاصه‌ای از چند فرمول نسبتاً مهم در خصوص ممان‌های اینرسی جرم‌های مختلف با شکل‌های هندسی متداول، در جدول D-٤ آمده است.

مسئله نمونه B-۱



ممان اینرسی و شعاع ژیراسیون استوانه قائم همگنی بـه جـرم m و شـعاع r را حـول محور مرکزی O-O آن تعیین کنید.

حل: یک المان جرم در صفحات استوانه‌ای به صورت $dm = \rho \ dV = \rho t r_0 dr_0 d\theta$

❶ است که در آن ρ چگالی استوانه می‌باشد. ممان اینرسی حول محور استوانه برابر است با:

❷ جواب
$$I = \int r_0^2 dm = \rho t \int_0^{2\pi} \int_0^{r} r_0^3 dr_0 d\theta = \rho t \frac{\pi r^4}{2} = \frac{1}{2} m r^2$$

شعاع ژیراسیون برابر است با:

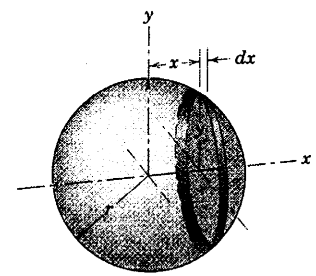
جواب
$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

نکات مفید

❶ *اگر پوسته‌ای به شعاع r_0 و طول محوری t را به عنوان المان جرمی dm انتخاب می‌کردیم، آنگاه مستقیماً $dI = r_0^2 dm$ می‌شد. شما باید انتگرال را ارزیابی نمایید.*

❷ *نتیجه $I = \frac{1}{2} m r^2$ تنها برای استوانه همگن توپر بکار می‌رود و نمی‌توان از آن برای هر چرخ مدوری استفاده نمود.*

مسئله نمونه B-۲



ممان اینرسی و شعاع ژیراسیون کره توپر همگنی به جرم m و شعاع r را حول قطـر آن بیابید.

حل: برش مدوری به شعاع y و ضخامت dx به عنوان المان حجم انتخاب می‌شـود.

از نتایج مسئله نمونه B-۱ ، ممان اینرسی حول x المان استوانه برابر است با:

❶
$$dI_{xx} = \frac{1}{2}(dm)y^2 = \frac{1}{2}\left(\pi \rho y^2 dx\right) y^2 = \frac{\pi \rho}{2}\left(r^2 - x^2\right)^2 dx$$

که در آن ρ چگالی کره است. ممان اینرسی کل حول محور x برابر است با:

جواب
$$I_{xx} = \frac{\pi \rho}{2} \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2\right)^2 dx = \frac{8}{15} \pi \rho r^5 = \frac{2}{5} m r^2$$

شعاع ژیراسیون برابر است با:

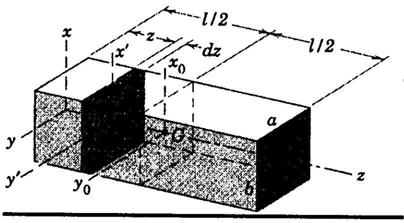
جواب
$$k = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{2}{5}}\, r$$

نکته مفید

در اینجا از نتیجه قبلی برای ممان اینرسی، المان انتقالی که در این حالت یک استوانه مدور قائم به طول محور کوچک dx است، استفاده نمودیم. وقتی می‌توانیم به راحتی مسئله را با یک المان مرتبه اول حل کنیم، استفاده از یک المان مرتبه سوم مانند $\rho\, dx\, dy\, dz$ صحیح نمی‌باشد. ❶

مسئله نمونه B-۳

ممان اینرسی مکعب مستطیلی همگن به جرم m را حول محورهای مرکزی x_0 و z و حول محور گذرنده از یک انتهای آن، تعیین کنید.



حل: برش عرضی به ضخامت dz به عنوان المان حجم انتخاب می‌شود. ممان اینرسی این برش با ضخامت بینهایت کوچک برابر است با ممان اینرسی سطح مقطع ضرب در جرم بر واحد سطح ρdz. بنابراین، ممان اینرسی برش عرضی مزبور حول محور y' برابر است با:

$$dI_{y'y'} = (\rho dz)\left(\frac{1}{12}ab^3\right)$$

و حول محور x' برابر است با: ❶

$$dI_{x'x'} = (\rho dz)\left(\frac{1}{12}a^3 b\right)$$

تا زمانی که المان انتخابی ورقی به ضخامت جزئی است، اصلی که توسط رابطه B-۷a داده می‌شود را می‌توان بکار برد.

$$dI_{zz} = dI_{x'x'} + dI_{y'y'} = (\rho\, dz)\frac{ab}{12}\left(a^2+b^2\right)$$

اکنون از رابطه فوق می‌توان انتگرال گیری نمود تا نتایج مورد نظر را بدست آورد. ممان اینرسی حول محور z برابر است با:

جواب $$I_{zz} = \int dI_{zz} = \frac{\rho ab}{12}\left(a^2+b^2\right)\int_0^l dz = \frac{1}{12}m\left(a^2+b^2\right)$$

که در آن m جرم بلوک است. با تغییر علائم، ممان اینرسی حول محور x_0 برابر است با:

جواب $$I_{x_0x_0} = \frac{1}{12}m\left(a^2+l^2\right)$$

ممان اینرسی حول محور x را می‌توان توسط قضیه انتقال محورهای موازی یعنی رابطه B-۳ بدست آورد. بنابراین:

جواب $$I_{xx} = I_{x_0x_0} + m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}m\left(a^2+4l^2\right)$$

این نتیجه اخیر را می‌توان با بیان ممان اینرسی برش جزئی حول محور x و انتگرال گیری از این عبارت روی میله بدست آورد. مجدداً با استفاده از قضیه انتقال محورهای موازی داریم:

$$dI_{xx} = dI_{x'x'} + z^2 dm = (\rho\, dx)\left(\frac{1}{12}a^3 b\right) + z^2 \rho ab\, dz = \rho ab\left(\frac{a^2}{12}+z^2\right)dz$$

با انتگرال گیری از این رابطه همان نتیجه قبلی بدست می‌آید.

$$I_{xx} = \rho\, a\, b\int_0^l\left(\frac{a^2}{12}+z^2\right)dz = \frac{\rho abl}{3}\left(l^2+\frac{a^2}{4}\right) = \frac{1}{12}m\left(a^2+4l^2\right)$$

عبارت مربوط به I_{xx} را می‌توان برای یک میله منشوری بلند یا یک میله باریک که ابعاد عرضی آن در مقایسه با طولش بسیار کوچک هستند، ساده کرد. در این حالت از a^2 در مقایسه با $4l^2$ می‌توان صرفنظر کرد و ممان اینرسی چنین میله باریکی حول محوری که از انتهای آن گذشته و عمود بر میله است برابر $I=\frac{1}{3}ml^2$ می‌شود. با همین تقریب، ممان اینرسی حول محوری که از مرکز جرم گذشته و عمود بر میله است، برابر $I=\frac{1}{12}ml^2$ می‌باشد.

نکته مفید

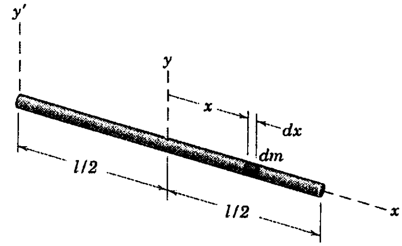
❶ *به رابطه B-٦ مراجعه کنید و رابطه‌ای که ممان اینرسی سطح مستطیل حول محوری که از مرکز آن موازی با قاعده‌اش می‌گذرد را به خاطر آورید.*

مسائل

مسائل مقدماتی

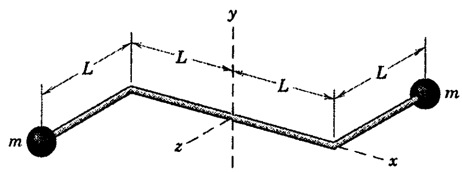
B-۱ از المان $dm = \rho\, dx$ که در آن ρ جرم بر واحد طول است، استفاده کنید و ممان اینرسی جرم I_{yy} و $I_{y'y'}$ میله باریکی به جرم m و طول l را تعیین کنید.

جواب $I_{yy} = \frac{۱}{۱۲} ml^{۲}$ و $I_{y'y'} = \frac{۱}{۳} ml^{۲}$



شکل مسئله ۱-B

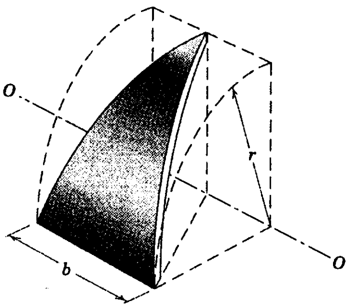
B-۲ دو گوی کوچک هر یک به جرم m به میله‌ای صلب و سبک متصل شده‌اند که در صفحه x-z قرار دارد. ممان‌های اینرسی مجموعه را حول محورهای x، y و z تعیین کنید.



شکل مسئله ۲-B

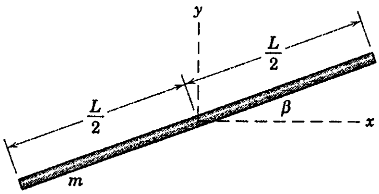
B-۳ قطعه گوه شکلی به جرم m از یک پوسته استوانه یکنواخت به شعاع r و ضخامتی ناچیز در مقایسه با r، بریده شده است. بدون محاسبات، ممان اینرسی قطعه را حول محور مرکزی O-O بنویسید.

جواب $I_{OO} = mr^{۲}$



شکل مسئله ۳-B

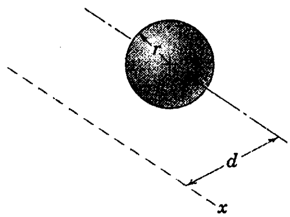
B-٤ ممان‌های اینرسی جرم میله را حول محورهای x، y و z تعیین کنید، در حالیکه طول میله l و جرم آن m بوده و با محور x مطابق شکل زاویه β را می‌سازد.



شکل مسئله ۴-B

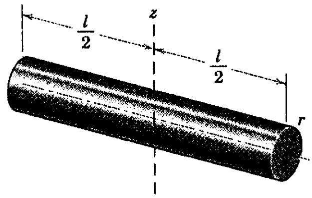
B-۵ ممان اینرسی گوی توپر همگنی به شعاع r حول هر محور غیر مرکزی x را می‌توان تقریبا با ضرب نمودن جرم گوی در مجذور فاصله d بین محور مرکزی بدست آورد. چند درصد خطا e حاصل می‌شود، اگر (الف) $d = ۲r$ و (ب) $d = ۱۰r$ باشد؟

جواب (الف) $e = \%-۹/۰۹$ و (ب) $e = \%-۰/۳۹۸$



شکل مسئله ۵-B

B-۶ هر میله «باریک» دارای یک شعاع محدود r است. به جدول D-٤ مراجعه نموده و درصد خطای ناشی از صرفنظر کردن شعاع یک میله استوانه‌ای توپر همگنی به طول l را در محاسبه ممان اینرسی I_{zz} توسط رابطه‌ای بیان نمایید. رابطه بدست آمده را به ازای ۰/۵۰، ۰/۱ و ۰/۰۱ = $\frac{r}{l}$ حساب کنید.

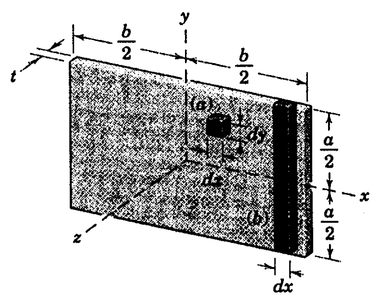


شکل مسئله B-۶

B-۷ برای نشان دادن راحت‌ترین انتگرال گیری با المان‌های با درجه پایین‌تر، ممان اینرسی جرم I_{xx} ورق نازک یکنواخت را با استفاده از المان مربعی (a) و سپس با استفاده از المان مستطیل (b) تعیین کنید. جرم ورق m است. سپس I_{yy} را بدون محاسبه بدست آورده و بالاخره I_{zz} را تعیین کنید.

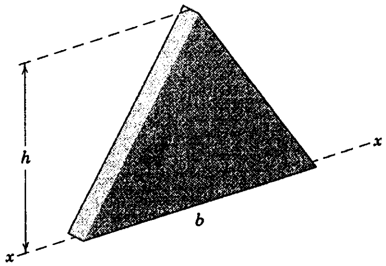
جواب $I_{xx} = \frac{۱}{۱۲}ma^{۲}$ و $I_{yy} = \frac{۱}{۱۲}mb^{۲}$

$I_{zz} = \frac{۱}{۱۲}m(a^{۲}+b^{۲})$



شکل مسئله B-۷

B-۸ شعاع ژیراسیون ورق مستطیل شکل نازکی به جرم m را حول محور x-x گذرنده از قاعده‌اش تعیین کنید.

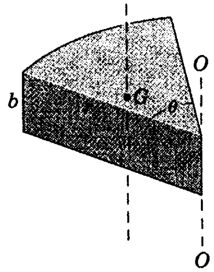


شکل مسئله B-۸

B-۹ قاچی از یک استوانه توپر دارای جرمی برابر m و شعاع r و طول محوری b است. از نتایج مسئله نمونه B-۱ استفاده نموده و ممان اینرسی قاچ را حول محور O-O بدون محاسبه بنویسید. سپس رابطه‌ای برای ممان اینرسی قاچ حول محور گذرنده از مرکز جرم آن و موازی با O-O بدست آورید.

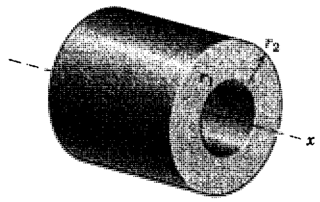
جواب $I_{OO} = \frac{۱}{۲}mr^{۲}$

$$I_{GG} = mr^{۲}\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱۶}{۹}\frac{\sin^{۲}(\theta/۲)}{\theta^{۲}}\right)$$



شکل مسئله B-۹

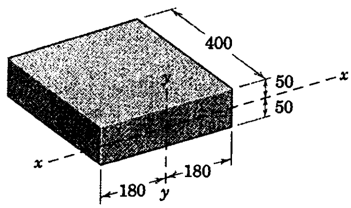
B-۱۰ I_{xx} استوانه‌ای با سوراخ مرکزی را تعیین کنید. جرم جسم برابر m است.



شکل مسئله ۱۰-B

۱۱-B بلوک پلاستیکی دارای چگالی $1300\ \mathrm{kg/m^3}$ است. ممان اینرسی آن را حول محور y-y حساب کنید. چند درصد خطا e ایجاد می‌شود، اگر رابطه تقریبی $\frac{1}{3}ml^2$ برای I_{xx} استفاده نماییم.

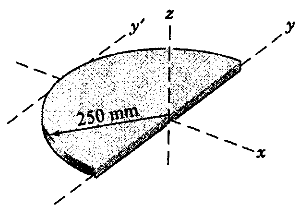
جواب $I_{yy} = 1/201\ \mathrm{kg.m^2}$ و $|e| = \%1/538$



شکل مسئله ۱۱-B

مسائل ویژه

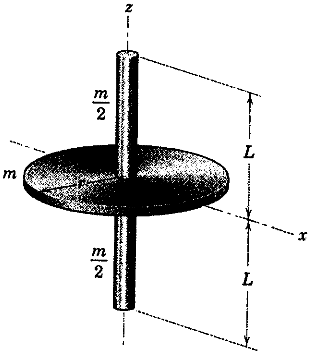
۱۲-B دیسک نیمدایره‌ای دارای جرم ۲ kg بوده و از ضخامت ناچیز آن در مقایسه با شعاع ۲۵۰ mm آن می‌توان صرفنظر کرد. ممان اینرسی دیسک را حول محورهای x، y، y' و z حساب کنید.



شکل مسئله ۱۲-B

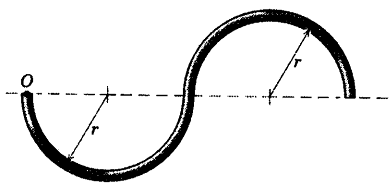
۱۳-B طول L هر یک از دو میله باریک به جرم $m/2$ را چنان تعیین کنید که اگر به مرکز دیسک نازکی همگن به جرم m نصب شوند، باعث شوند که ممان اینرسی جرم مجموعه حول محورهای x و z برابر یکدیگر شوند.

جواب $L = \frac{r\sqrt{3}}{2}$



شکل مسئله ۱۳-B

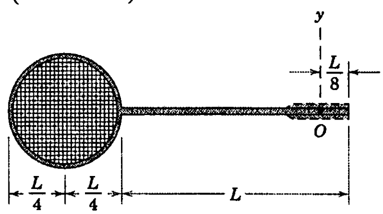
۱۴-B میله باریکی به جرم m به شکل دو نیم حلقه مطابق شکل خم شده است. ممان اینرسی میله را حول محوری که از O گذشته و بر صفحه خم شده میله عمود است، تعیین کنید. جواب را بدون استفاده از رابطه مرکز جرم قوس نیم حلقه بدست آورید.



شکل مسئله ۱۴-B

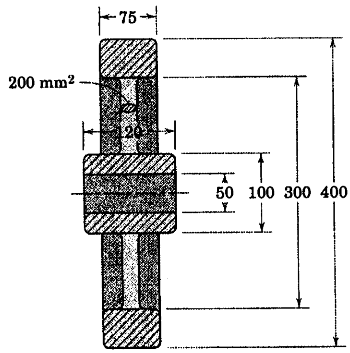
B-۱۵ راکت بدمینتون از میله باریک یکنواختی که به شکل نشان داده شده خم شده‌اند، ساخته می‌شود. با صرفنظر کردن از شبکه توری و دسته چوبی آن، ممان اینرسی جرمی راکت را حول محور y گذرنده از O که محل بدست گرفتن راکت است، بدست آورید. جرم بر واحد طول جنس میله ρ است.

جواب $I_{yy}=\left(\frac{43}{192}+\frac{83}{128}\pi\right)\rho L^3$



شکل مسئله B-۱۵

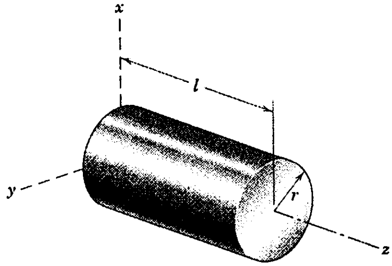
B-۱۶ ممان اینرسی چرخان فرمان فولادی با مقطعی مطابق شکل را حول محور مرکزی حساب کنید. این چرخ دارای ۸ پره که هر یک دارای سطح مقطعی ثابت به مساحت ۲۰۰ mm^2 است. چه درصدی، n از کل ممان اینرسی به حلقه خارجی چرخ مربوط می‌شود.



شکل مسئله B-۱۶

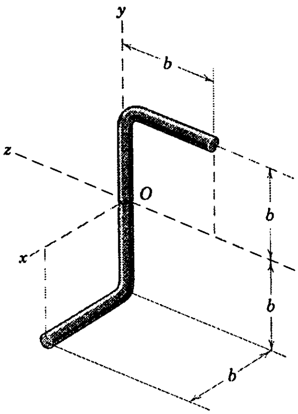
B-۱۷ استوانه مدور یکنواختی دارای جرم m، شعاع r و طول l است. رابطه‌ای برای ممان اینرسی آن حول محور انتهایی x-x بنویسید.

جواب $I_{xx}=m\left(\frac{r^2}{4}+\frac{l^2}{3}\right)$



شکل مسئله B-۱۷

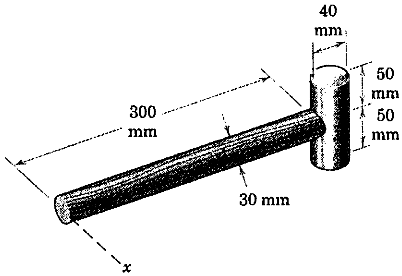
B-۱۸ میله یکنواخت به طول $4b$ و جرم m مطابق شکل خم شده است. قطر میله در مقایسه با طول آن کوچک می‌باشد. ممان اینرسی میله را حول سه محور مختصات تعیین کنید.



شکل مسئله B-۱۸

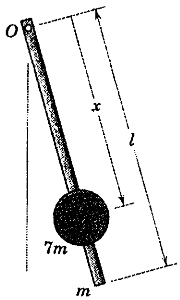
B-۱۹ ممان اینرسی چکش را حول محور x تعیین کنید. چگالی دسته چوبی برابر ۸۰۰ kg/m^3 بوده و چگالی سر فلزی آن ۹۰۰۰ kg/m^3 است. محور طولی سر استوانه‌ای، عمود بر محور x می‌باشد. هر فرض دیگری را بیان کنید.

جواب $I_{xx}=0/1220\ kg.m^2$



شکل مسئله B-۱۹

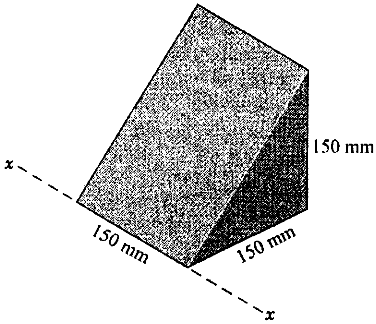
B-۲۰ آونگ ساعتی از یک میله باریک به طول l و جرم m و یک گوی به جرم $7m$ تشکیل می‌شود. با صرفنظر کردن از اثرات شعاع گوی، مطلوب است I_O بر حسب موقعیت x گوی. نسبت I_O به ازای $x = \frac{3}{4}l$ را به I_O به ازای $x = l$ محاسبه کنید.



شکل مسئله B-۲۰

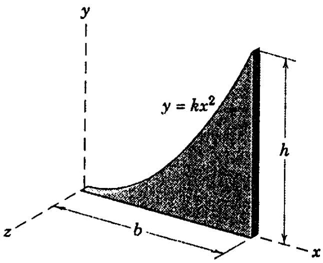
B-۲۱ مکعب فولادی به ضلع ۱۵۰ mm در امتداد صفحه قطری آن بریده شده است. ممان اینرسی منشور حاصل را حول لبه x-x محاسبه کنید.

جواب $I_{xx} = ۰/۱۹۸۲ \text{ kg.m}^2$



شکل مسئله B-۲۱

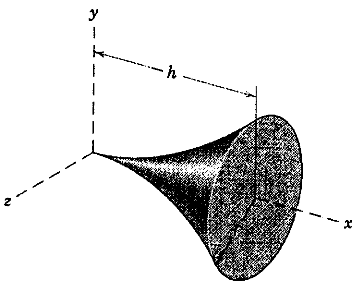
B-۲۲ ممان اینرسی جرم ورق نازک سهمی شکل به جرم m را حول محورهای x، y و z تعیین کنید.



شکل مسئله B-۲۲

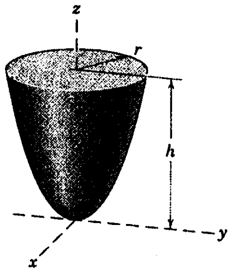
B-۲۳ شعاع جسم مدور و توپری متناسب با مجذور مختص x آن است. اگر جرم جسم m باشد، I_{xx} را تعیین کنید.

جواب $I_{xx} = \frac{5}{18} mr^2$



شکل مسئله B-۲۳

B-۲٤ شعاع ژیراسیون سهمی‌گون دوار نشان داده شده را حول محور z آن تعیین کنید. جرم جسم همگن برابر m است.

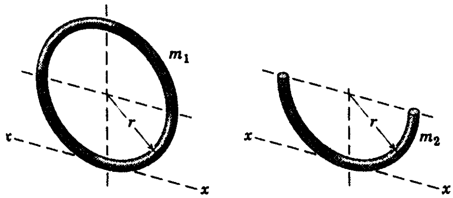


شکل مسئله B-۲۴

B-۲۵ ممان اینرسی سهمی‌گون دوار مسئله B-۲٤ را حول محور y تعیین کنید.

جواب $I_{yy}=\frac{۱}{۲}m\left(h^{۲}+\frac{r^{۲}}{۳}\right)$

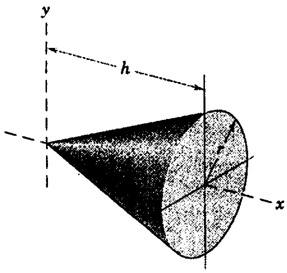
B-۲٦ ممان اینرسی حول محور مماسی x-x را برای یک حلقه کامل به جرم $m_۱$ و یک نیم حلقه به جرم $m_۲$ تعیین کنید.



شکل مسئله B-۲۶

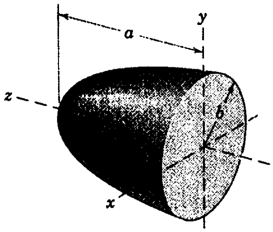
B-۲۷ ممان اینرسی مخروط قائم همگن به جرم m، شعاع قاعده r و ارتفاع h را حول محور x مخروط و حول محور y که از راس مخروط می‌گذرد، تعیین کنید.

جواب $I_{xx}=\frac{۳}{۱۰}mr^{۲}$ و $I_{yy}=\frac{۳}{۵}m\left(\frac{r^{۲}}{۴}+h^{۲}\right)$



شکل مسئله B-۲۷

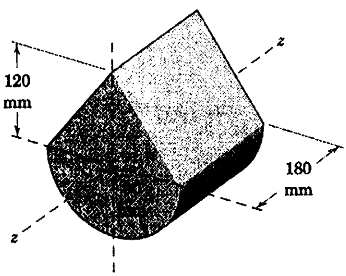
B-۲۸ ممان اینرسی حول محور x نیم ـ بیضی‌گون مدور توپر همگنی به جرم m را تعیین کنید.



شکل مسئله B-۲۸

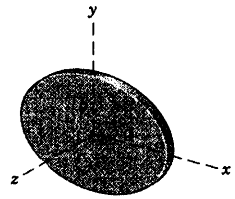
B-۲۹ قطعه‌ای مطابق شکل از تیتانیوم ساخته شده است. ممان اینرسی آن را حول محور z محاسبه کنید.

جواب $I_{zz}=۰/۰۵۱۰\ \text{kg.m}^2$



شکل مسئله B-۲۹

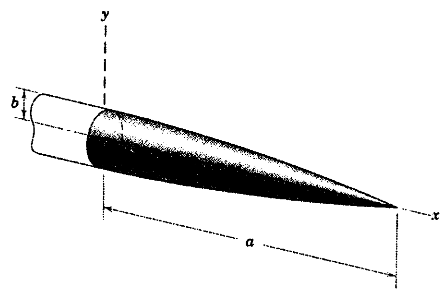
B-۳۰ ممان اینرسی ورق نازک بیضی شکل به جرم m را حول محور x تعیین کنید.



شکل مسئله B-۳۰

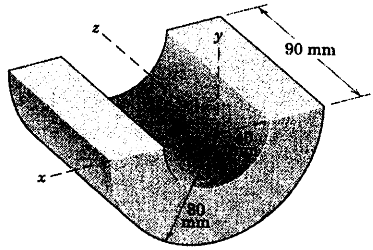
B-۳۱ مدل راکت استوانه‌ای دارای نوک مخروطی شکل توپری مطابق شکل نشان داده شده است. انحنای مرزی آن در صفحه x-y توسط رابطه سهمی $y = b\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ داده شده است. اگر جرم نوک مخروط همگن برابر m باشد، ممان اینرسی آن را حول محور x تعیین کنید.

جواب $I_{xx} = \frac{8}{21} mb^2$



شکل مسئله B-۳۱

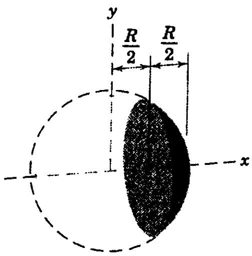
B-۳۲ در طرح یک ماشین دسته‌بندی، نیم استوانه فولادی تحت تاثیر شتاب زاویه‌ای تند شونده و کند شونده سریع حول محور y قرار می‌گیرد و لازم است ممان اینرسی آن حول این محور برای طراحی ماشین محاسبه گردد. I_{yy} را محاسبه نمایید. از جدول D-۱ و D-٤ در صورت نیاز استفاده نمایید.



شکل مسئله B-۳۲

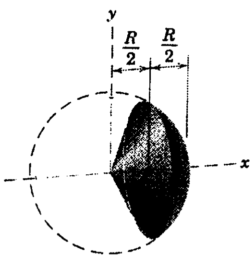
B-۳۳ ممان اینرسی جرمی حول محور x یک قطعه از کره توپری به جرم m را تعیین کنید.

جواب $I_{xx} = \frac{53}{200} mR^2$



شکل مسئله B-۳۳

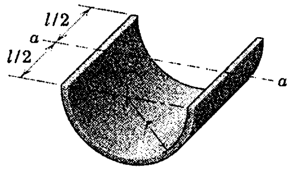
B-۳٤ ممان اینرسی حول محور x یک قطعه از کره همگن نشان داده شده را تعیین کنید. جرم قطعه کره برابر m است.



شکل مسئله B-۳۴

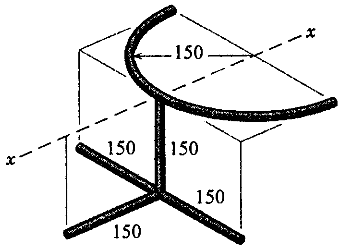
B-۳۵ با انتگرال گیری، ممان اینرسی پوسته نیم ـ استوانه‌ای به جرم m را حول محور a-a تعیین کنید. ضخامت پوسته در مقایسه با r کوچک است.

جواب $I_{aa}=\frac{m}{2}\left(r^2+\frac{l^2}{6}\right)$



شکل مسئله B-۳۵

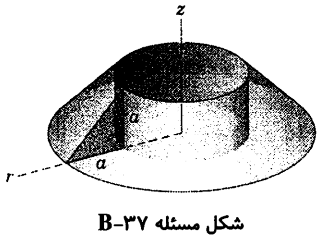
B-۳۶ مجموعه به هم جوش شده نشان داده شده، از میله فولادی که دارای جرم ۰/۹۹۳ کیلوگرم بر متر طول است، ساخته شده است. ممان اینرسی مجموعه را حول محور x-x محاسبه کنید.



شکل مسئله B-۳۶

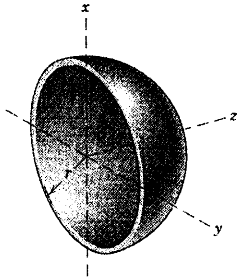
B-۳۷ جسم تویری به جرم m با چرخش مثلث قائم الزاویه °۴۵ حول محور z بوجود آمده است. شعاع ژیراسیون جسم را حول محور z تعیین کنید.

جواب $k=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{39}{5}}$



شکل مسئله B-۳۷

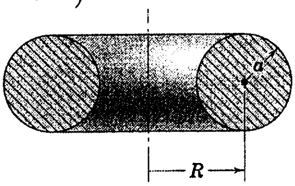
B-۳۸ ممان اینرسی پوسته نیم کره‌ای را نسبت به محورهای x و z تعیین کنید. جرم پوسته برابر m بوده و ضخامت آن در مقایسه با شعاع r قابل صرفنظر کردن است.



شکل مسئله B-۳۸

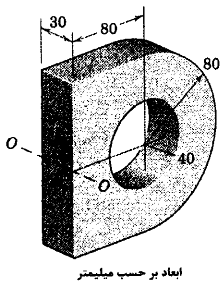
B-۳۹ ممان اینرسی یک حلقه کامل به جرم m که دارای مقطع دایره‌ای (تیوپ پر) با ابعاد نشان داده شده در نمای مقطع خورده است را حول محور مولدش تعیین کنید.

جواب $I=m\left(R^2+\frac{3}{4}a^2\right)$



شکل مسئله B-۳۹

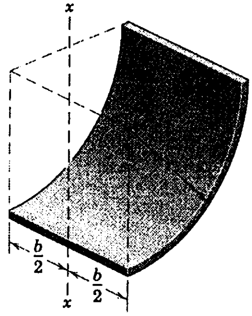
B-۴۰ قطعه‌ای از ماشین، از فولاد ساخته شده و چنان طراحی شده که حول محور O-O دوران کند. شعاع ژیراسیون k_O قطعه را حول این محور محاسبه کنید.



شکل مسئله B-۴۰

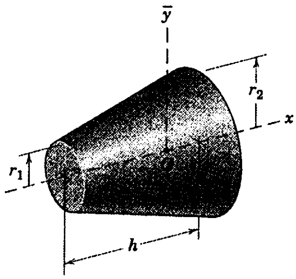
B-٤١ ممان اینرسی پوسته یک چهارم استوانه‌ای به جرم m را حول محور x-x تعیین کنید. ضخامت پوسته در مقایسه با r کوچک است.

جواب $$I_{xx}=\frac{۱}{۲}m\left(r^{۲}+\frac{b^{۲}}{۶}\right)$$



شکل مسئله B-۴۱

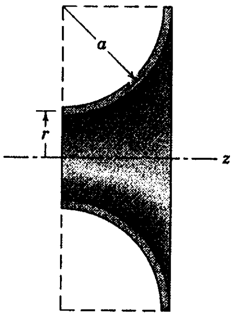
B-٤٢ I_{xx} یک مخروط ناقص که دارای شعاع‌های قاعده $r_۱$ و $r_۲$ و جرم m می‌باشد را تعیین کنید.



شکل مسئله B-۴۲

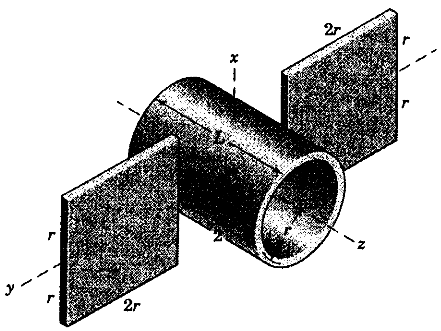
B-٤٣ ◀ پوسته‌ای به جرم m توسط دوران یک قطاع مدور حول محور z ایجاد شده است. ضخامت پوسته در مقایسه با a کوچک بوده و اگر $r = a/۳$ باشد، شعاع ژیراسیون پوسته را حول محور z تعیین کنید.

جواب $k_z = ۰/۸۹۰a$



شکل مسئله B-۴۳

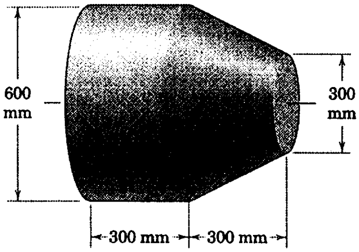
B-٤٤* مدل طراحی اولیه برای اطمینان از پایداری دورانی یک فضاپیما شامل یک پوسته استوانه و دو صفحه مربعی مطابق شکل می‌باشد. پوسته و صفحات دارای ضخامت و چگالی یکسانی هستند. می‌توان نشان داد که پایداری حول محور z حفظ خواهد شد، در صورتیکه I_{zz} کمتر از I_{xx} و I_{yy} باشد. برای مقدار معلوم r ، حد L را تعیین کنید.



شکل مسئله B-۴۴

B-٤٥ ◀ مدل سازه‌ای یک فضاپیما تشکیل شده از یک پوسته فرم داده شده مطابق شکل که از موادی با جرم ۱۷/۵ kg/m^2 ساخته شده است. هر دو انتهای بسته شده آن از همان مواد ساخته شده است. ممان اینرسی I مدل را حول محور تقارنش محاسبه کنید.

جواب $I = ۱/۵۹٤\ \text{kg.m}^2$



شکل مسئله B-۴۵

B-٤٦ ◀ ممان اینرسی جرم مخروط ناقص مسئله B-٤۲ را حول محور مرکزی $\bar{y}$ تعیین کنید.

جواب

$$\bar{I}_{yy} = \frac{m}{۲P_۱P_۲}\left\{\frac{۳}{۱۰}\left[P_۲ + ۴h^۲\right]\left(r_۲^۵ - r_۱^۵\right) - \frac{۹}{۸}h^۲\,\frac{r_۲^۴ - r_۱^۴}{P_۱}\right\}$$

که در آن: $P_۲ = (r_۲ - r_۱)^۲$ و $P_۱ = r_۲^۳ - r_۱^۳$

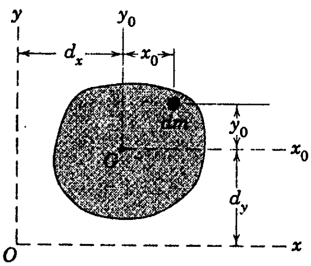
۲-B حاصلضرب‌های اینرسی

در مورد مسائل مربوط به دوران اجسام صلب سه بعدی، رابطه مومنتم زاویه‌ای علاوه بر جملات مربوط به ممان اینرسی، *حاصلضرب‌های اینرسی* را نیز شامل می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\begin{aligned} I_{xy} &= I_{yx} = \int xydm \\ I_{xz} &= I_{zx} = \int xzdm \\ I_{yz} &= I_{zy} = \int yxdm \end{aligned} \qquad \textbf{(B-۸)}$$

این روابط در هنگام بدست آوردن مومنتم زاویه‌ای از معادله ۹-۷، در معادلات ۱۰-۷ مورد اشاره قرار گرفتند.

محاسبه حاصلضرب‌های اینرسی از همان روش اساسی مربوط به محاسبات ممان‌های اینرسی پیروی می‌کنند و در این راستا، ارزیابی سایر انتگرال‌های حجمی مانند انتخاب المان و تعیین حدود انتگرال گیری، مورد توجه قرار می‌گیرند. تنها نکته بخصوصی که نیاز به دقت دارد، در رابطه با علامت‌های جبری عبارات است. در حالیکه ممان‌های اینرسی همواره مثبت هستند، حاصلضرب‌های اینرسی ممکن است مثبت یا منفی باشند. آحاد حاصلضرب‌های اینرسی همانند ممان‌های اینرسی می‌باشند.



شکل ۶-B

ملاحظه کردیم که استفاده از قضیه انتقال محورهای موازی غالباً محاسبات مربوط به ممان‌های اینرسی را ساده می‌کنند. قضیه مشابهی در مورد انتقال حاصلضرب‌های اینرسی وجود دارد و آنرا به سادگی در زیر اثبات می‌کنیم. در شکل ٦-B نمایی از یک جسم صلب در صفحه x-y نشان داده شده که به موازات محورهای x_0-y_0 جسم می‌باشند. محورهای مذکور از مرکز جرم G عبور کرده و به فاصله dx و dy از محورهای x-y قرار دارند. حاصلضرب‌های اینرسی حول محورهای x-y به صورت زیر تعریف می‌شود.

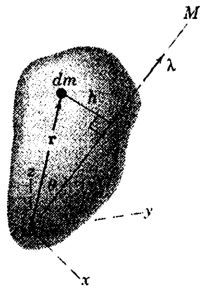
$$\begin{aligned} I_{xy} &= \int xy\,dm = \int (x_0 + d_x)(y_0 + d_y)dm \\ &= \int x_0 y_0 dm + d_x d_y \int dm + d_x \int y_0 dm + d_y \int x_0 dm \\ &= I_{x_0 y_0} + md_x d_y \end{aligned}$$

دو انتگرال آخر حذف شدند، چون گشتاورهای اول جرم حول مرکز جرم الزاماً صفر می‌شوند. روابط مشابهی برای دو جمله حاصلضرب اینرسی باقیمانده وجود دارند. اندیس‌های صفر را حذف می‌کنیم و با گذاشتن یک خط تیره روی کمیت‌های مربوط به جرم به منظور مشخص کردن آنها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} I_{xy} &= \bar{I}_{xy} + md_x d_y \\ I_{xz} &= \bar{I}_{xz} + md_x d_z \\ I_{yz} &= \bar{I}_{yz} + md_y d_z \end{aligned} \qquad \textbf{(B-۹)}$$

روابط انتقال محور فوق الذکر *فقط* جهت *انتقال* محور له موازات محور گذرنده از مرکز جرم معتبر هستند.

به کمک جملات مربوط به حاصلضرب اینرسی می‌توانیم ممان اینرسی یک جسم صلب را حول هر محور گذرنده از مبدا مختصات محاسبه کنیم. در مورد جسم صلب شکل B-۷ لازم است که ممان اینرسی حول محور OM تعیین شود. l ، m و n کسینوس‌های هادی OM هستند و λ بردار یکه در راستای OM را می‌توان به صورت $\lambda = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$ نوشت. ممان اینرسی حول OM چنین است:



شکل B-۷

$$I_M = \int h^2\,dm = \int (\mathbf{r}\times\lambda)\cdot(\mathbf{r}\times\lambda)\,dm$$

که در آن $|\mathbf{r}\times\lambda| = r\sin\theta = h$ است. ضرب برداری چنین است:

$$(\mathbf{r}\times\lambda) = (yn - zm)\mathbf{i} + (zl - xn)\mathbf{j} + (xm - yl)\mathbf{k}$$

و پس از انجام ضرب داخلی و بسط دادن جملات، آنها را به صورت زیر مرتب می‌کنیم.

$$(\mathbf{r}\times\lambda)\cdot(\mathbf{r}\times\lambda) = h^2 = (y^2+z^2)l^2 + (x^2+z^2)m^2 + (x^2+y^2)n^2 - 2xylm - 2xzln - 2yzmn$$

در نتیجه با قرار دادن روابط B-٤ و B-٨ داریم:

$$\boxed{I_M = I_{xx}l^2 + I_{yy}m^2 + I_{zz}n^2 - 2I_{xy}lm - 2I_{xz}ln - 2I_{yz}mn} \qquad \text{(B-۱۰)}$$

این رابطه، ممان اینرسی را حول هر محور دلخواه OM بر حسب کسینوس‌های هادی محور OM، ممانهای اینرسی و نیز حاصلضرب‌های اینرسی حول محورهای دستگاه‌های مختصات بدست می‌دهد.

محورهای اصلی اینرسی

چنان که در بخش ۷-۷ توجه شد، آرایش زیر:

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

که عناصر آن در رابطه ۷-۱۱ بیانگر مومنتم زاویه‌ای، برای یک جسم صلب با محورهای الصاقی بـه آن ظاهر می‌شوند و به *محورهای اصلی اینرسی* یا *تانسور اینرسی* موسوم است. اگر جملات ممان اینرسی و حاصلضرب اینرسی مربوط به کلیه وضعیت‌های ممکنه محورها نسبت به جسم و با یک مبدا مشخص مورد ارزیابی قرار گیرد، در حالت کلی فقط یک وضعیت را می‌توان برای محورهای x-y-z پیدا کرد که در آن وضعیت، جملات حاصلضرب اینرسی صفر می‌شوند و ماتریس فوق به صورت قطری در می‌آید.

$$\begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

در چنین حالتی محورهای x-y-z *محورهای اصلی اینرسی* و I_{xx} ، I_{yy} و I_{zz} *ممان‌های اصلی اینرسی* نامیده می‌شوند و معرف مقادیر حداکثر، حداقل و میانی ممان‌های اینرسی برای یک مبدا خاص می‌باشند.

می‌توان نشان داد* که به ازای هر وضعیتی از محورهای x-y-z با حل معادله دترمینانی

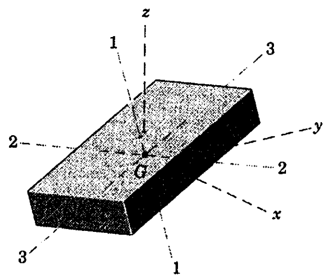
* کتاب قبلی اثر اولین مولف را ببینید. دینامیک، سیستم SI ، سال ۱۹۷۵، انتشارات John Wiley & Sons ، بخش ۴۱.

$$\begin{bmatrix} I_{xx}-I & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy}-I & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}-I \end{bmatrix}=0 \qquad \textbf{(B-11)}$$

معادله درجه سومی بر حسب I بدست می‌آید و دارای ریشه‌های I_1، I_2 و I_3 هستند که در واقع سه ممان اینرسی اصلی می‌باشند. همچنین کسینوس‌های هادی l، m و n محورهای اصلی اینرسی از دستگاه معادلات زیر بدست می‌آیند.

$$\begin{aligned} (I_{xx}-I)l - I_{xy}m - I_{xz}n &= 0 \\ -I_{yx}l - (I_{yy}-I)m - I_{yz}n &= 0 \\ -I_{zx}l - I_{zy}m - (I_{zz}-I)n &= 0 \end{aligned} \qquad \textbf{(B-12)}$$

این معادلات به همراه رابطه $l^2+m^2+n^2=1$ این توانایی را ایجاد می‌کنند که کسینوس‌های هادی به طور جداگانه برای هر یک از سه ممان اینرسی اصلی بدست آیند.

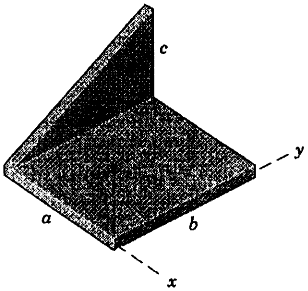


شکل B-۸

جهت کمک به متصور ساختن نتایج حاصله، بلوک مستطیل نشان داده شده در شکل B-۸ را به همراه یک وضعیت دلخواه نسبت به محورهای x-y-z در نظر بگیرید. جهت تسهیل در محاسبات، مرکز جرم G بر مبدا مختصات قرار دادن شده است. اگر ممان‌های اصلی اینرسی و حاصلضرب‌های اینرسی بلوک حول محورهای x-y-z معلوم باشند، در آن صورت از حل معادله B-۱۱ سه ریشه I_1، I_2 و I_3 بدست می‌آید که ممان‌های اصلی اینرسی هستند. اگر ریشه‌های بدست آمده، به ترتیب در معادله B-۱۲ قرار داده شوند، به همراه رابطه $l^2+m^2+n^2=1$ کسینوس‌های هادی l، m و n برای هر یک از محورهای اصلی بدست می‌آید. با توجه به تناسب ابعاد نشان داده شده برای بلوک، می‌بینیم که I_1 حداکثر ممان اینرسی است، I_2 مقدار میانی بوده و I_3 حداقل ممان اینرسی می‌باشند.

مسئله نمونه ۴-B

ورق خم خورده‌ای دارای ضخامت t بوده که در مقایسه با سایر ابعاد قابل اغماض است. چگالی ماده ورق برابر ρ است. حاصلضرب‌های اینرسی صفحه را نسبت به محورهای انتخابی تعیین کنید.

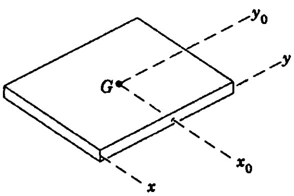


حل: هر یک از قسمت‌های ورق به طور جداگانه بررسی می‌گردد.

❶ **قسمت مستطیلی:** در شمای مجزا شده این قسمت، محورهای موازی x_0- y_0 که از مرکز جرم G گذشته‌اند را رسم کرده و سپس از قضیه انتقال محورهای موازی استفاده می‌کنیم. از تقارن ملاحظه می‌شود که $\bar{I}_{xy} = I_{xy} = 0$ است. بنابراین:

$$\left[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_x d_y\right] \qquad I_{xy} = 0 + \rho tab\left(-\frac{a}{2}\right)\left(\frac{b}{2}\right) = -\frac{1}{4}\rho ta^2b^2$$

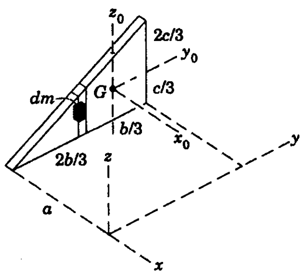
چون مختص z تمام اجزاء ورق برابر صفر است، نتیجه می‌شود: $I_{xz} = I_{yz} = 0$.



قسمت مثلثی: در نمای مجزا شده این قسمت، مرکز جرم G را قرار داده و محورهای x_0، y_0 و z_0 را از آن عبور می‌دهیم. چون مختص x_0 تمام اجزاء صفر است، نتیجه می‌شود که $\bar{I}_{xy} = I_{x_0y_0} = 0$ و $\bar{I}_{xz} = I_{x_0z_0} = 0$. سپس از قضیه انتقال محورها داریم:

$$\left[I_{xy} = \bar{I}_{xy} + md_x d_y\right] \qquad I_{xy} = 0 + \rho t\frac{b}{2}c(-a)\left(\frac{2b}{3}\right) = -\frac{1}{3}\rho tab^2c$$

$$\left[I_{xz} = \bar{I}_{xz} + md_x d_z\right] \qquad I_{xz} = 0 + \rho t\frac{b}{2}c(-a)\left(\frac{c}{3}\right) = -\frac{1}{6}\rho tabc^2$$



I_{yz} را توسط انتگرال گیری مستقیم بدست می‌آوریم و توجه می‌کنیم که فاصله a، صفحه مثلث از صفحه y-z هیچ تاثیری بر مختصات y و z ندارد. با در نظر گرفتن المان جرم $dm=\rho\, t\, dy\, dz$ داریم:

❷
$$\left[I_{yz} = \int yz\, dm\right] \qquad I_{yz} = \rho t\int_0^b\int_0^{cy/b} yz\, dz\, dy = \rho t\int_0^b y\left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{cy/b} dy$$

$$= \frac{\rho tc^2}{2b^2}\int_0^b y^3 dy = \frac{1}{8}\rho tb^2c^2$$

با جمع کردن رابطه‌های بدست آمده از دو قسمت نتیجه می‌شود:

$$I_{xy} = -\frac{1}{4}\rho ta^2b^2 - \frac{1}{3}\rho tab^2c = -\frac{1}{12}\rho tab^2(3a+4c) \qquad \text{جواب}$$

$$I_{xz} = 0 \qquad -\frac{1}{6}\rho tabc^2 = -\frac{1}{6}\rho tabc^2 \qquad \text{جواب}$$

$$I_{yz} = 0 \qquad +\frac{1}{8}\rho tb^2c^2 = +\frac{1}{8}\rho tb^2c^2 \qquad \text{جواب}$$

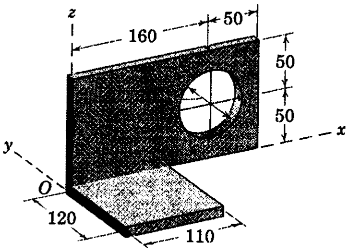
نکات مفید

❶ باید مراقب باشیم که جهت‌های مختصات، ثابت بماند. بنابراین، مثبت x_0 و y_0 باید مطابق با مثبت x و y باشد.

❷ انتگرال را ابتدا نسبت به z می‌گیریم که در آن حد بالایی متغیر $z = cy/b$ می‌باشد. اگر ابتدا انتگرال را نسبت به y می‌گرفتیم، حدود انتگرال از متغیر $y = bz/c$ تا b می‌شد.

مسئله نمونه B-۵

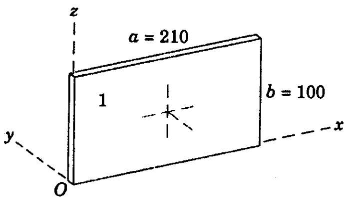
قطعه خم شده‌ای از ورق آلومینیوم ساخته شده که جرم هر متر مربع آن برابر ۱۳/٤۵ kg است. ممان‌های اینرسی اصلی آن را حول مبدا O و کسینوس‌های هادی محورهای اصلی اینرسی را محاسبه کنید. ضخامت ورق در مقایسه با سایر ابعاد ناچیز است.



ابعاد بر حسب میلیمتر

حل: جرم‌های سه قسمت برابرند با:

$$m_1 = 13.45\,(0.21)(0.1) = 0.282 \text{ kg}$$
$$m_2 = -13.45\,\pi\,(0.035)^2 = -0.0518 \text{ kg} \quad ❶$$
$$m_3 = 13.45\,(0.12)(0.11) = 0.1775 \text{ kg}$$



قسمت ۱

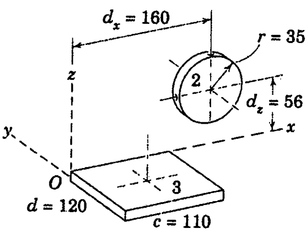
$$I_{xx} = \frac{1}{3}mb^2 = \frac{1}{3}(0.282)(0.1)^2 = 9.42\,(10^{-4}) \text{ kg.m}^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3}m(a^2+b^2) = \frac{1}{3}(0.282)[(0.21)^2 + (0.1)^2] = 50.9\,(10^{-4}) \text{ kg.m}^2 \quad ❷$$

$$I_{zz} = \frac{1}{3}ma^2 = \frac{1}{3}(0.282)(0.21)^2 = 41.5\,(10^{-4}) \text{ kg.m}^2$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{yz} = 0$$

$$I_{xz} = 0 + \text{m}\,(a/2)(b/2) = 0.282\,(0.105)(0.05) = 14.83\,(10^{-4}) \text{ kg.m}^2$$



قسمت ۲

$$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + md_z^2 = -0.0518\left[\frac{(0.035)^2}{4} + (0.050)^2\right]$$

$$= -1.453\,(10^{-4}) \text{ kg.m}^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2 + m\left(d_x^2 + d_z^2\right)$$

$$= -0.0518\left[\frac{(0.035)^2}{2} + (0.16)^2 + (0.05)^2\right]$$

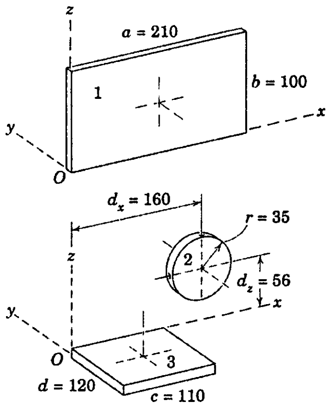
$$= -14.86\,(10^{-4}) \text{ kg.m}^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{4}mr^2 + md_x^2 = -0.0518\left[\frac{(0.035)^2}{4} + (0.16)^2\right]$$

$$= -13.41\,(10^{-4}) \text{ kg.m}^2$$

$$I_{xy} = 0 \qquad I_{yz} = 0$$

$$I_{xz} = 0 + md_x\,d_z = -\,0.0518\,(0.16)(0.05) = -\,4.14\,(10^{-4}) \text{ kg.m}^2$$



قسمت ۳

$$I_{xx} = \frac{1}{3}md^2 = \frac{1}{3}(0.1775)(0.12)^2 = 8.52\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$$

$$I_{yy} = \frac{1}{3}mc^2 = \frac{1}{3}(0.1775)(0.11)^2 = 7.16\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$$

$$I_{zz} = \frac{1}{3}m(c^2 + d^2) = \frac{1}{3}(0.1775)[(0.11)^2 + (0.12)^2] = 15.68\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$$

$$I_{xy} = m\frac{c}{2}\left(\frac{-d}{2}\right) = 0.1775\ (0.055)(-0.06) = -5.86\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$$

$$I_{yz} = 0 \qquad , \qquad I_{xz} = 0$$

مجموع

$I_{xx} = 16.48\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$ $\qquad I_{xy} = -5.86\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$

$I_{yy} = 43.2\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$ $\qquad I_{yz} = 0$

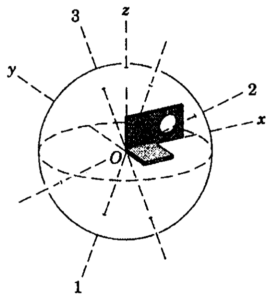
$I_{zz} = 43.8\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$ $\qquad I_{xz} = 10.69\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$

با قرار دادن آنها در رابطه B-۱۱ و بسط دترمینان و ساده کردن، نتیجه می‌شود:

$$I^3 - 103.5\ (10^{-4})I^2 + 3180\ (10^{-8})I - 24800\ (10^{-12}) = 0$$

با حل این معادله درجه سوم ریشه‌های زیر که ممان‌های اینرسی اصلی است، بدست می‌آید. ❸

$$I_1 = 48.3\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$$
$$I_2 = 11.82\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$$
$$I_3 = 43.4\ (10^{-4})\ \text{kg.m}^2$$



کسینوس‌های هادی هر یک از محورهای اصلی از جایگزینی ریشه مربوط به آن در رابطه B-۱۲ و استفاده از رابطه $l^2+m^2+n^2=1$ بدست می‌آید. نتایج عباتند از:

$l_1 = 0.375$	$l_2 = 0.934$	$l_3 = 0.01830$
$m_1 = 0.410$	$m_2 = -0.1742$	$m_3 = 0.895$
$n_1 = -0.839$	$n_2 = 0.312$	$n_3 = 0.445$

شکل پایینی نمای ورق خم شده و جهت‌های محورهای اصلی اینرسی را نشان می‌دهد.

نکات مفید

❶ توجه کنید که جرم سوراخ به عنوان عدد منفی در نظر گرفته شده است.

❷ می‌توانید به راحتی این فرمول را بدست آورید. همچنین جدول D-٤ ملاحظه می‌شود.

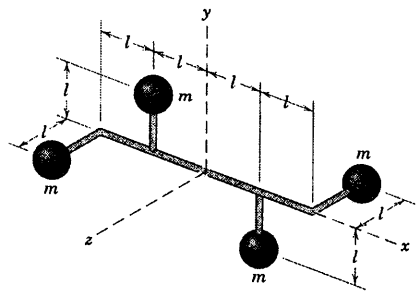
❸ برای حل معادله درجه سوم، می‌توان از برنامه کامپیوتری استفاده کرد و یا با روش جبری و با استفاده از بند بخش C-٤ از پیوست C می‌توان جوابها را بدست آورد.

مسائل

مسائل مقدماتی

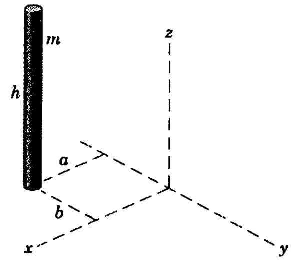
B-٤٧ حاصلضرب‌های اینرسی مجموعه نشان داده شده را که از چهار گوی کوچک هر یک به جرم m که توسط میله‌های سبک باریک اما صلب متصل شده، تشکیل می‌گردد را حول محورهای مختصات تعیین کنید.

جواب $I_{xy} = -۲ml^۲$ و $I_{xz} = -٤ml^۲$ و $I_{yz} = ۰$



شکل مسئله B-۴۷

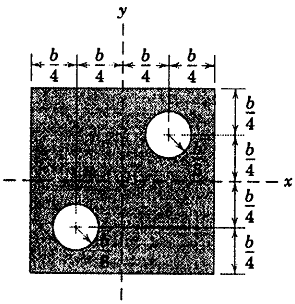
B-٤٨ حاصلضرب‌های اینرسی میله باریک یکنواخت به جرم m را حول محورهای نشان داده شده تعیین کنید.



شکل مسئله B-۴۸

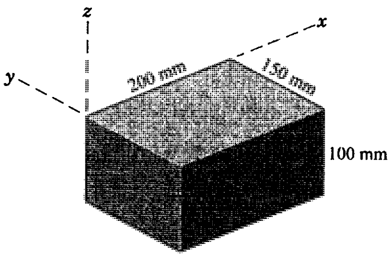
B-٤٩ حاصلضرب‌های اینرسی ورق باریک مربعی شکل را که دارای دو سوراخ مدور می‌باشد، حول محورهای مختصات نشان داده شده، تعیین کنید. جرم ماده ورق بر واحد سطح برابر ρ است.

جواب $I_{xy} = -\dfrac{\rho\pi b^۴}{۵۱۲}$ و $I_{xz} = I_{yz} = ۰$



شکل مسئله B-۴۹

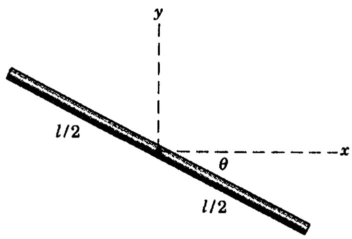
B-۵۰ قطعه مکعب مستطیل یکنواخت نشان داده شده، ۲۵ kg جرم دارد. حاصلضرب‌های اینرسی را حول محورهای مختصات حساب کنید.



شکل مسئله B-۵۰

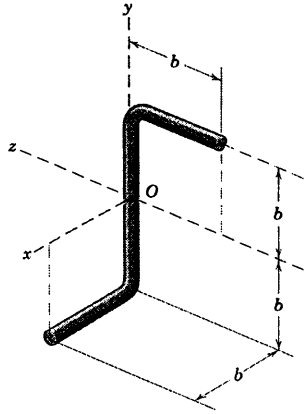
B-۵۱ حاصلضرب‌های اینرسی I_{xy} میله باریک نشان داده شده به جرم m را تعیین کنید.

جواب $I_{xy} = -\dfrac{۱}{۲۴} ml^۲ \sin ۲\theta$



شکل مسئله B-۵۱

B-۵۲ حاصلضرب‌های اینرسی را برای میله مسئله B-۱۸ که در اینجا تکرار شده، تعیین کنید.



شکل مسئله B-۵۲

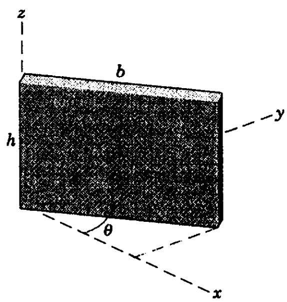
B-۵۳ سه حاصلضرب اینرسی ورق مستطیل شکل یکنواخت به جرم m را حول محورهای مشخص شده تعیین کنید.

جواب

$$I_{xy} = \frac{1}{6}\, mb^2 \sin 2\theta$$

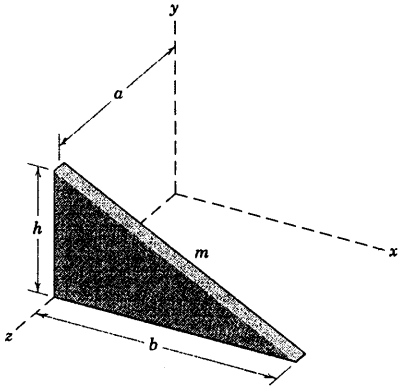
$$I_{xz} = \frac{1}{4}\, mbh \cos\theta$$

$$I_{yz} = \frac{1}{4}\, mbh \sin\theta$$



شکل مسئله B-۵۳

B-۵٤ مطلوب است حاصلضرب‌های اینرسی حول محورهای مختصات را برای ورق مثلثی شکل به جرم m.

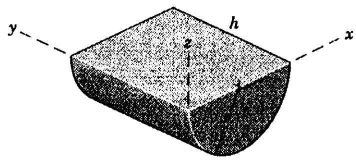


شکل مسئله B-۵۴

B-۵۵ حاصلضرب‌های اینرسی نیم ـ استوانه توپر همگنی به جرم m را حول محورهای نشان داده شده، تعیین کنید.

جواب $I_{xy} = \frac{1}{2} mrh$ و $I_{yz} = -\frac{2}{3\pi} mrh$

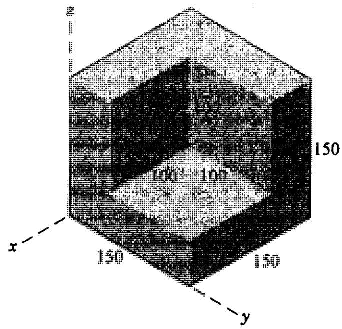
$$I_{xz} = -\frac{4}{3\pi} mr^2$$



شکل مسئله B-۵۵

مسائل ویژه

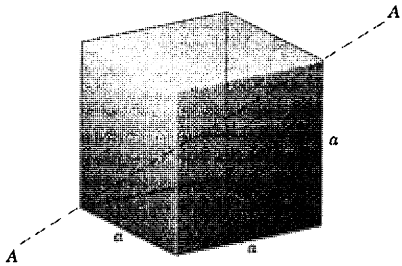
B-۵٦ قطعه ریخته‌گری شده‌ای از آلومینیوم تشکیل شده از مکعبی به ضلع ۱۵۰ mm که مکعبی به ضلع ۱۰۰ mm از آن جدا شده است. حاصلضرب‌های اینرسی قطعه را حول محورهای نشان داده شده، محاسبه کنید.



شکل مسئله ۵۶-B

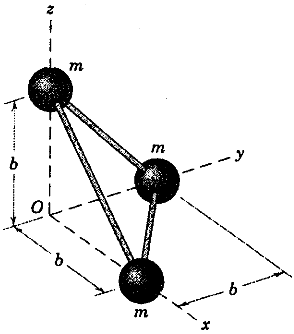
۵۷-B ممان اینرسی مکعب توپر بـه جـرم m را حـول محور قطری A-A گذرنده از گوشه‌های مخالف تعیین کنید.

جواب $I_{AA} = \dfrac{ma^۲}{۶}$



شکل مسئله ۵۷-B

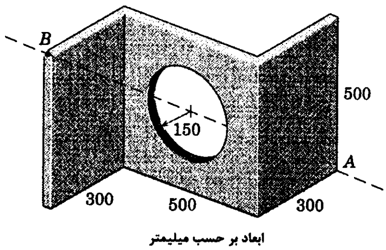
۵۸-B ثابت کنید کـه ممـان اینرسـی مجموعـه صلبـی متشکل از سه گوی یکسان، هر یک به جرم m و شعاع r برای کلیه محورهای گذرنده از O یکسان اسـت. از جـرم میلـه‌های رابط صرفنظر کنید.



شکل مسئله ۵۸-B

۵۹-B ورق فولادی نشان داده شده، دارای دو خم قائم الزاویه و یـک سـوراخ مرکـزی بـوده و ضخـامت آن ۱۵ mm اسـت. ممـان اینرسـی آنـرا حـول محـور قطری گذرنـــده از گوشه‌های A و B محاسبه کنید.

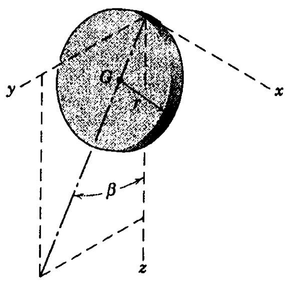
جواب I_{AB} = ۲/۵۸ kg.m^2



شکل مسئله ۵۹-B

۶۰-B ◀ صفحه دیسک مـدور نـازکی بـه جـرم m و شـعاع r بـا صفحـه x-y زاویـه β می‌سـازد. حاصلضرب‌هـای اینرسی دیسک را نسبت به صفحه y-z تعیین کنید.

جواب $I_{yz} = \dfrac{۵}{۸} mr^۲ \sin ۲\beta$



شکل مسئله ۶۰-B

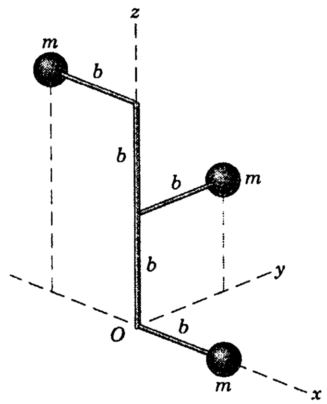
مسائل کامپیوتری

***B-۶۱** هر یک از گوی‌های به جرم m دارای قطری ناچیز در مقایسه با بُعد b است. از جرم میله‌های رابط صرفنظر کرده و ممان‌های اینرسی اصلی مجموعه را نسبت به مختصات نشان داده شده تعیین کنید. کسینوس‌های هادی محور مربوط به ممان اینرسی حداکثر را نیز تعیین کنید.

جواب $I_۱ = ۷/۵۲۵mb^۲$ و $l_۱ = ۰/۵۲۱$

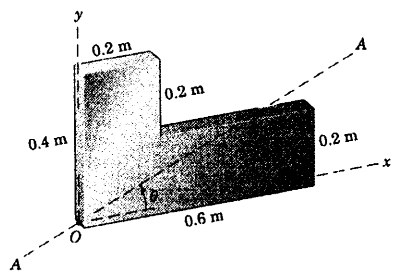
$I_۲ = ۶/۶۳۱mb^۲$ و $m_۱ = -۰/۷۵۶$

$I_۳ = ۱/۸۴۴mb^۲$ و $n_۱ = ۰/۳۹۷$



شکل مسئله B-۶۱

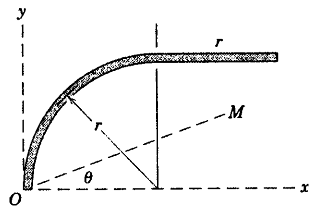
***B-۶۲** قطعه L شکل از ورقی فولادی به جرم بر واحد سطح ۱۶۰ kg/m^2 بریده شده است. ممان اینرسی قطعه حول محور A-A را به صورت تابعی از θ در محدوده $\theta = ۰$ تا $\theta = ۹۰°$ تعیین و رسم نمایید و حداقل مقدار آن را پیدا کنید.



شکل مسئله B-۶۲

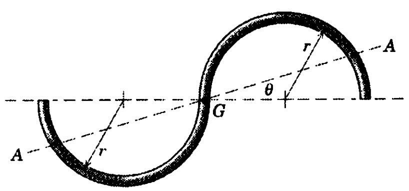
***B-۶۳** ممان اینرسی I میله یکنواختی را که مطابق شکل خم شده، حول محور OM تعیین کنید. I را بر حسب θ از $\theta = ۰$ تا $\theta = ۹۰°$ رسم نموده و مقدار حداقل I و زاویه α را که محور آن با امتداد x می‌سازد، تعیین کنید. (توجه: چون مختص z در تحلیل این مسئله وجود ندارد، رابطه‌های A-۹ ، A-۱۰ و A-۱۱ در پیوست A جلد اول کتاب استاتیک، می‌تواند به جای روابط سه بعدی پیوست B بکار رود.) جرم بر واحد طول میله برابر ρ است.

جواب $I_{min} = ۰/۱۸۷۰\rho r^۳$ و $\alpha = ۳۸/۶°$



شکل مسئله B-۶۳

***B-۶۴** میله منحنی شکل مسئله B-۱۴ با محور A-A گذرنده از مرکز جرم G در صفحه میله مجددا در اینجا نشان داده شده است. ممان اینرسی I میله را حول محور A-A بر حسب θ تعیین کرده و I بر حسب θ را از $\theta = ۰$ تا مقداری که I_{min} و I_{max} را نشان دهد، رسم کنید. مقادیر I_{min} و I_{max} بدست آمده از ترسیمه را با مقادیر بدست آمده از رابطه A-۱۱ جلد یک کتاب استاتیک مقایسه کنید.



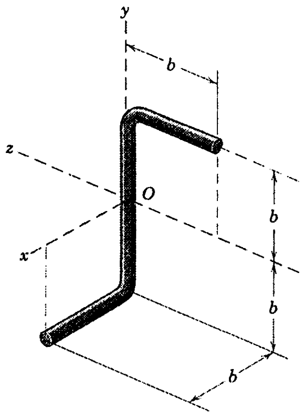
شکل مسئله B-۶۴

***B-۶۵** میله خمیده مسئله B-۱۸ و B-۵۲ در اینجا تکرار شده است. جرم میله m بوده و قطر آن در مقایسه با طولش کوچک است. ممان اینرسی اصلی میله را حول مبدا O تعیین کنید. همچنین کسینوس‌های هادی محور مربوط به ممان اینرسی حداقل را پیدا کنید.

جواب $I_۱ = ۰/۷۵۰mb^۲$ و $I_۲ = ۰/۷۹۹mb^۲$

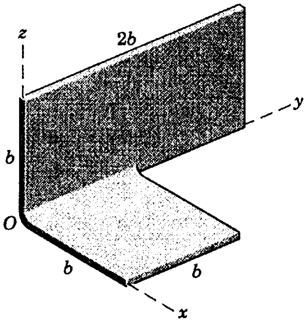
$I_۳ = ۰/۱۱۷۳mb^۲$

$l = ۰/۱۹۰۳$ و $m = -۰/۹۶۳$ و $n = ۰/۱۹۰۳$



شکل مسئله ۶۵-B

*۶۶-B ورق نازکی دارای جرم بر واحد سطح ρ بـوده و به شکل نشان داده شده در آمـده اسـت. ممان‌هـای اینرسـی اصلی ورق را حول محورهای گذرنده از O تعیین کنید.



شکل مسئله ۶۶-B

پیوست C

مباحث برگزیده از ریاضیات

فهرست مباحث پیوست

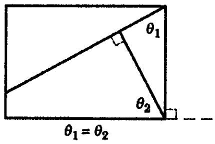
C-۱ مقدمه

پیوست C شامل خلاصه‌ای کوتاه و یادآور مباحث برگزیده از ریاضیات بنیادین است که مکرراً در مکانیک از آنها استفاده می‌کنیم. روابط، بدون استدلال ذکر شده‌اند. دانشجوی مکانیک بسیاری از این روابط را در موقعیت‌های مختلف بکار خواهد برد و اگر به آنها خوب مسلط نباشد، دچار اشکال خواهد شد. موارد دیگری که در فهرست نیامده‌اند نیز ممکن است گاهگاهی مورد نیاز باشند.

موقعی که خواننده، ریاضیات را مرور کرده و بکار می‌برد، باید به خاطر داشته باشد که مکانیک، علمی کاربردی است که اجسام حقیقی و حرکت‌های واقعی را بیان می‌کند. بنابراین در هنگام بسط تئوری و حل مسائل باید مفاهیم هندسی و فیزیکی ریاضیات کاربردی به روشنی در ذهن جای گیرد.

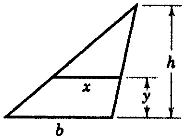
C-۲ هندسه مسطحه

۱. هنگامی که دو ضلع از یک زاویه بر دو ضلع از زاویه دیگر عمود باشد، آن دو زاویه با هم برابرند.



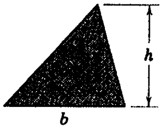
۲. مثلث‌های متشابه:

$$\frac{x}{b} = \frac{h-y}{h}$$



۳. در هر مثلث:

$$\text{مساحت} = \frac{1}{2} bh$$



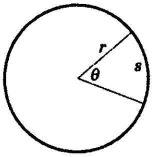
٤. دایره:

$$\text{محیط} = 2\pi r$$

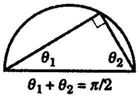
$$\text{مساحت} = \pi r^2$$

$$\text{طول قوس } s = r\theta$$

$$\text{مساحت قطاع} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

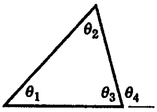


۵. هر مثلث محاط بر نیمدایره مثلثی قائم الزاویه است.



٦. زاویای یک مثلث:

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 180°$$
$$\theta_4 = \theta_1 + \theta_2$$

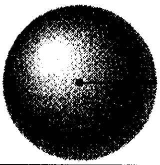


C-۳ هندسه فضایی

۱. کره:

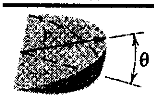
$$\text{حجم} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

$$\text{سطح رویه} = 4\pi r^2$$



۲. قاچ کروی:

$$\text{حجم} = \frac{2}{3} r^3 \theta$$

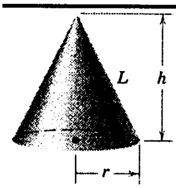


۳. مخروط مدور قائم:

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

$$\text{سطح جانبی} = \pi r L$$

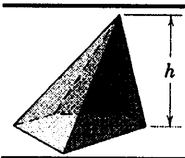
$$L = \sqrt{r^2 + h^2}$$



٤. هرم یا مخروط کامل:

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} Bh$$

که در آن B = مساحت قاعده



۴-C جبر

۱. معادله درجه دوم:

$ax^2 + bx + c = 0$ برای ریشه‌های حقیقی $b^2 \geqslant 4ac$ ، $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

۲. لگاریتم‌ها:

$b^x = y$ ، $x = \log_b y$

لگاریتم طبیعی

$b = \mathrm{e} = 2.718282$ $\log(1/n) = -\log n$

$\mathrm{e}^x = y$ ، $x = \log_{\mathrm{e}} y = \ln y$ $\log a^n = n \log a$

$\log(ab) = \log a + \log b$ $\log 1 = 0$

$\log(a/b) = \log a - \log b$ $\log_{10} x = 0.4343 \ln x$

۳. دترمینان‌ها:

مرتبه دوم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

مرتبه سوم:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = +a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 - a_2 b_1 c_3 - a_1 b_3 c_2$$

٤. معادله درجه سوم:

$$x^3 = Ax + B$$

اگر: $q = B/2$ و $p = A/3$

حالت I : $q^2 \quad p^3$ منفی است (سه ریشه حقیقی و مختلف)

$$\cos u = q/\left(p\sqrt{p}\right) \text{ و } 0 < u < 180^\circ$$

$$x_1 = 2\sqrt{p}\cos(u/3)$$

$$x_2 = 2\sqrt{p}\cos\left(u/3 + 120^\circ\right)$$

$$x_3 = 2\sqrt{p}\cos\left(u/3 + 240^\circ\right)$$

حالت II : $q^2 \quad p^3$ مثبت است (یک ریشه حقیقی و دو ریشه موهومی)

$$x_1 = \left(q + \sqrt{q^2 - p^3}\right)^{1/3} + \left(q - \sqrt{q^2 - p^3}\right)^{1/3}$$

حالت III : $q^2 \quad p^3 = 0$ (سه ریشه حقیقی، دو ریشه مساوی)

$$x_1 = 2q^{1/3} \text{ و } x_2 = x_3 = -q^{1/3}$$

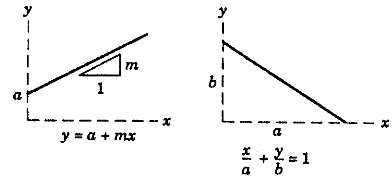
برای معادله کلی درجه سوم:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

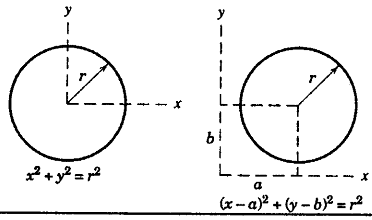
با قرار دادن $x = x_0 - a/3$ و در نظر گرفتن $x_0^3 = Ax_0 + B$ سپس همانند حالت فوق الذکر عمل نموده و مقدار x_0 را از $x = x_0 - a/3$ بدست آورید.

C-۵ هندسه تحلیلی

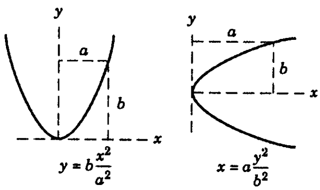
۱. خط مستقیم:



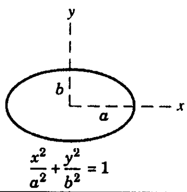
۲. دایره:



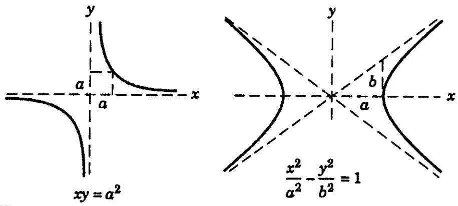
۳. سهمی:



۴. بیضی:

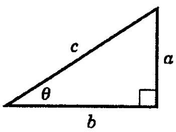


۵. هذلولی:



C-۶ مثلثات

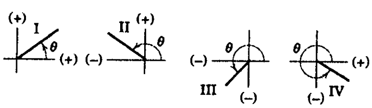
۱. تعاریف:



$\sin\theta = a/c$ $\csc\theta = c/a$
$\cos\theta = b/c$ $\mathrm{sce}\theta = c/b$
$\tan\theta = a/b$ $\cot\theta = b/a$

۲. علامت‌ها در چهار ربع:

IV	III	II	I	
−	−	+	+	$\sin\theta$
+	−	−	+	$\cos\theta$
−	+	−	+	$\tan\theta$
−	−	+	+	$\csc\theta$
+	−	−	+	$\sec\theta$
−	+	−	+	$\cot\theta$

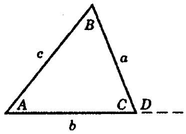


۳. روابط متفرقه:

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$$
$$1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$
$$\sin\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\theta)}$$
$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\theta)}$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin(a \pm b) = \sin a\cos b \pm \cos a\sin b$$
$$\cos(a \mp b) = \cos a\cos b \mp \sin a\sin b$$

۴. قانون سینوس‌ها:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$$

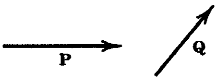


۵. قانون کسینوس‌ها:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos D$$

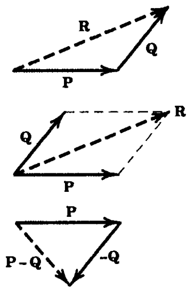
C-۷ عملیات برداری

۱. **نشانه:** کمیت‌های برداری با حروف ضخیم و کمیت‌های اسکالر با حروف نازک ایتالیک (مورب) چاپ شده‌اند. بنابراین، کمیت برداری $\mathbf{V}$ دارای مقدار اسکالر V می‌باشد. در دستنویس کمیت‌های برداری، همیشه باید توسط نشانه‌ای مثل $\underline{V}$ یا $\vec{V}$ که آنها را از کمیت اسکالر جدا می‌سازد، مشخص کرد.



۲. جمع:

جمع مثلثی	$\mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{R}$
جمع متوازی الاضلاع	$\mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{R}$
قانون جابجا پذیری	$\mathbf{P}+\mathbf{Q}=\mathbf{Q}+\mathbf{P}$
قانون شرکت پذیری	$\mathbf{P}+(\mathbf{Q}+\mathbf{R})=(\mathbf{P}+\mathbf{Q})+\mathbf{R}$



۳. تفاضل:

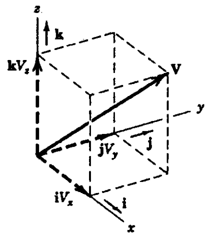
$$\mathbf{P}-\mathbf{Q}=\mathbf{P}+(-\mathbf{Q})$$

۴. بردارهای یکه: $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$ و $\mathbf{k}$

$$\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$$

که در آن : $|\mathbf{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}$

۵. **کسینوس‌های هادی:** l، m و n کسینوس‌های زاویه بین $\mathbf{V}$ و محورهای x، y و z می‌باشند. بنابراین:

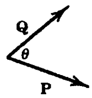


$$l = V_x / V \qquad m = V_y / V \qquad n = V_z / V$$

به طوریکه: $\mathbf{V} = V(l\,\mathbf{i} + m\,\mathbf{j} + n\,\mathbf{k})$

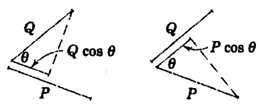
و: $l^2 + m^2 + n^2 = 1$

۶. ضرب داخلی یا اسکالر:



$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ\cos\theta$$

این ضرب را می‌توان به صورت ضرب مقدار **P** در مولفه $Q\cos\theta$ ، از بردار **Q** در امتداد **P** در نظر گرفت یا آنرا برابر حاصلضرب مقدار **Q** در مولفه $P\cos\theta$ از **P** در امتداد **Q** دانست.



از قانون جابجاپذیری داریم: $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{P}$

از تعریف ضرب داخلی داریم:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$$
$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0$$
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x\,\mathbf{i} + P_y\,\mathbf{j} + P_z\,\mathbf{k}) \cdot (Q_x\,\mathbf{i} + Q_y\,\mathbf{j} + Q_z\,\mathbf{k})$$
$$= P_xQ_x + P_yQ_y + P_zQ_z$$
$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$$

از تعریف ضرب داخلی چنین نتیجه می‌شود که دو بردار **P** و **Q** هنگامی بر هم عمودند که ضرب داخلی آنها صفر گردد، $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = 0$

زاویه θ بین دو بردار $\mathbf{P}_1$ و $\mathbf{P}_2$ را می‌توان از عبارت ضرب داخلی $\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2 = P_1 P_2 \cos\theta$ بدست آورد که چنین است:

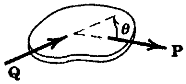
$$\cos\theta = \frac{\mathbf{P}_1 \cdot \mathbf{P}_2}{P_1 P_2} = \frac{P_{1_x}P_{2_x} + P_{1_y}P_{2_y} + P_{1_z}P_{2_z}}{P_1 P_2} = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$$

که در آن l و m و n به ترتیب کسینوس‌های هادی بردارها می‌باشند. همچنین مشاهده می‌شود که دو بردار موقعی بر هم عمودند که کسینوس‌های هادی آنها در رابطه زیر صدق نمایند. یعنی $l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0$.

از قانون توزیع پذیری:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} + \mathbf{R}) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{R}$$

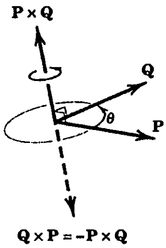
۷. ضرب خارجی یا برداری: ضرب برداری $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ دو بردار **P** و **Q** به صورت برداری با مقدار زیر تعریف شده است.



$$|\mathbf{P}\times\mathbf{Q}| = PQ\sin\theta$$

و جهت آن مطابق شکل توسط قانون دست راست بدست می‌آید. عوض کردن ترتیب بردارها و استفاده از قانون دست راست چنین نتیجه می‌دهد:

$$\mathbf{Q}\times\mathbf{P} = -\mathbf{P}\times\mathbf{Q}$$



از قانون توزیع پذیری:

$$\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}+\mathbf{R}) = \mathbf{P}\times\mathbf{Q} + \mathbf{P}\times\mathbf{R}$$

از تعریف ضرب برداری و استفاده از *دستگاه‌های مختصات راستگرد*، چنین نتیجه می‌گیریم:

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k} \qquad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k} \qquad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i} \qquad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j}$$
$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0$$

با استفاده از این تعاریف و قانون توزیع‌پذیری، ضرب برداری به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\times\mathbf{Q} &= (P_x\,\mathbf{i} + P_y\,\mathbf{j} + P_z\,\mathbf{k})\times(Q_x\,\mathbf{i} + Q_y\,\mathbf{j} + Q_z\,\mathbf{k}) \\ &= (P_y Q_z - P_z Q_y)\mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z)\mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x)\mathbf{k}\end{aligned}$$

ضرب برداری را می‌توان به صورت عبارت دترمینان زیر نمایش داد.

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q} = \begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z\end{vmatrix}$$

۸. رابطه‌های دیگر:

ضرب اسکالر سه‌گانه $(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\cdot\mathbf{R} = \mathbf{R}\cdot(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})$. مکان ضرب نقطه‌ای و برداری را به شرطی که ترکیب بردارها ثابت باشد، می‌توان عوض کرد. پرانتزها لزومی ندارد زیرا $\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R})$ بدون معنی است، چراکه بردار $\mathbf{P}$ نمی‌تواند در اسکالر $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R}$ ضرب برداری شود. بنابراین، عبارت بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R} = \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\times\mathbf{R}$$

ضرب اسکالر سه گانه به صورت دترمینان چنین می‌شود:

$$\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\cdot\mathbf{R} = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z\end{vmatrix}$$

ضرب برداری سه‌گانه $(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{R} = -\mathbf{R}\times(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}) = \mathbf{R}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{P})$.

در اینجا از پرانتزها باید استفاده نمود. زیرا عبارت $\mathbf{P}\times\mathbf{Q}\times\mathbf{R}$ مبهم است چرا که نمی‌توان معین کرد که کدام بردارها بایستی در هم ضرب برداری شوند. می‌توان نشان داد که ضرب برداری سه‌گانه معادل است با:

$$(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})\times\mathbf{R} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{P}\mathbf{Q} - \mathbf{R}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{P}$$

یا:

$$\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{R}) = \mathbf{P}\cdot\mathbf{R}\mathbf{Q} - \mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}\mathbf{R}$$

برای مثال در اولین جمله از عبارت اول ضرب اسکالر $\mathbf{R}\cdot\mathbf{P}$ اسکالری است که در بردار $\mathbf{Q}$ ضرب می‌شود.

۹. مشتقات بردارها: از همان قوانین مربوط به اسکالرها تبعیت می‌کند.

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \dot{\mathbf{P}} = \dot{P}_x\mathbf{i} + \dot{P}_y\mathbf{j} + \dot{P}_z\mathbf{k}$$

$$\frac{d(\mathbf{P}u)}{dt} = \mathbf{P}\dot{u} + \dot{\mathbf{P}}u$$

$$\frac{d(\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P}\cdot\dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}}\cdot\mathbf{Q}$$

$$\frac{d(\mathbf{P}\times\mathbf{Q})}{dt} = \mathbf{P}\times\dot{\mathbf{Q}} + \dot{\mathbf{P}}\times\mathbf{Q}$$

۱۰. **انتگرال گیری بردارها:** اگر $\mathbf{V}$ تابعی از x، y و z باشد و یک المان حجمی به اندازه $d\tau = dx \; dy \, dz$ در نظر بگیریم، انتگرال $\mathbf{V}$ بر روی کل حجم را می‌توان به صورت جمع برداری سه انتگرال مولفه‌های آن نوشت. بنابراین:

$$\int \mathbf{V}d\tau = \mathbf{i}\int V_x d\tau + \mathbf{j}\int V_y d\tau + \mathbf{k}\int V_z d\tau$$

C-۸ سری‌ها

(عبارت داخل کروشه که به دنبال سری می‌آید، حدود همگرایی را نشان می‌دهد)

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 \pm \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \quad [x^2 < 1]$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \quad [x^2 < \infty]$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}$$

که در آن: $a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx$

[بسط فوریه برای $-l < x < l$]

C-۹ مشتق‌ها

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}, \quad \frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}, \quad \frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx} = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin\Delta x = \sin dx = \tan dx = dx$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \cos\Delta x = \cos dx = 1$$

$$\frac{d\sin x}{dx} = \cos x, \quad \frac{d\cos x}{dx} = -\sin x, \quad \frac{d\tan x}{dx} = \sec^2 x$$

$$\frac{d\sinh x}{dx} = \cosh x, \quad \frac{d\cosh x}{dx} = \sinh x, \quad \frac{d\tanh x}{dx} = \operatorname{sech}^2 x$$

۱۰-C انتگرال‌ها

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{15b^2}(3bx-2a)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{105b^3}(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b}$$

$$\int \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b-x}}\,dx = -\sqrt{a+x}\sqrt{b-x} + (a+b)\sin^{-1}\sqrt{\frac{a+x}{a+b}}$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{1}{b^2}[a+bx-a\ln(a+bx)]$$

$$\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^n} = \frac{(a+bx)^{1-n}}{b^2}\left(\frac{a+bx}{2-n}-\frac{a}{1-n}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{-ab}}\tanh^{-1}\frac{x\sqrt{-ab}}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(a+bx^2)$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2})]$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\sin^{-1}\frac{x}{a}\right)$$

$$\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\tfrac{1}{5}(x^2+\tfrac{2}{3}a^2)\sqrt{(a^2-x^2)^3}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \ln\left(\sqrt{a + bx + cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right) \quad \text{or} \quad \frac{-1}{\sqrt{-c}} \sin^{-1}\left(\frac{b + 2cx}{\sqrt{b^2 - 4ac}}\right)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \sqrt{x^2 - a^2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm\sqrt{a^2 \pm x^2}$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \tfrac{1}{3}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}$$

$$\int x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2 \pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x$$

$$\int \sec x\,dx = \frac{1}{2}\ln\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$$

$$\int \sin^2 x\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$$

$$\int \sin x \cos x\,dx = \frac{\sin^2 x}{2}$$

$$\int \sinh x\,dx = \cosh x$$

$$\int \cosh x\,dx = \sinh x$$

$$\int \tanh x\,dx = \ln\cosh x$$

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax - 1)$$

$$\int e^{ax}\sin px\,dx = \frac{e^{ax}(a\sin px - p\cos px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int e^{ax}\cos px\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos px + p\sin px)}{a^2 + p^2}$$

$$\int e^{ax}\sin^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2}\left(a\sin^2 x - \sin 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\cos^2 x\,dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2}\left(a\cos^2 x + \sin 2x + \frac{2}{a}\right)$$

$$\int e^{ax}\sin x\cos x\,dx = \frac{e^{ax}}{4 + a^2}\left(\frac{a}{2}\sin 2x - \cos 2x\right)$$

$$\int \sin^3 x\,dx = -\frac{\cos x}{3}(2 + \sin^2 x)$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{\sin x}{3}(2 + \cos^2 x)$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \sin x - \tfrac{2}{3}\sin^3 x + \tfrac{1}{5}\sin^5 x$$

$$\int x\sin x\,dx = \sin x - x\cos x$$

$$\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x$$

$$\int x^2\sin x\,dx = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$$

$$\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x$$

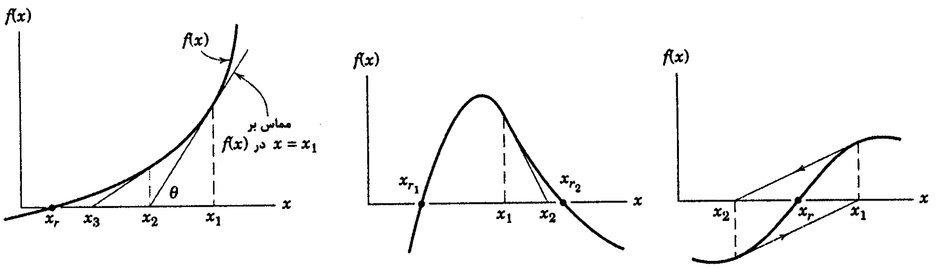
شعاع انحناء

$$\begin{cases} \rho_{xy} = \dfrac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}} \\[2ex] \rho_{r\theta} = \dfrac{\left[r^2 + \left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2\right]^{3/2}}{r^2 + 2\left(\dfrac{dr}{d\theta}\right)^2 - r\dfrac{d^2r}{d\theta^2}} \end{cases}$$

C-۱۱ روش نیوتن برای حل معادلات پیچیده

بکارگیری اصول اساسی مکانیک، اغلب منجر به معادلات جبری یا غیر کلاسیک می‌گردد که راه حل مشخصی ندارند (یا راه حل آن ساده نیست). در چنین مواردی، روشی به نام روش نیوتن وجود دارد که ابزار پر قدرتی برای بدست آوردن تقریبی خوب از ریشه‌های معادله می‌باشد.

فرض کنید که معادله‌ای که می‌خواهیم حل نماییم را به صورت $f(x) = 0$ در بیاوریم. قسمت a شکل تابع دلخواه $f(x)$ را مقادیر x که در مجاورت ریشه مورد نظر x_r نشان می‌دهد. توجه کنید x_r فقط مقدار x می‌باشد که به ازای آن، تابع مزبور محور x را قطع می‌نماید. فرض کنید که مقدار تقریبی x_1 این ریشه را (احتمالاً نموداری که با دست رسم شده باشد)، بدست آورده‌ایم. در صورتیکه x_1 مربوط به مقدار حداکثر و حداقل تابع $f(x)$ نباشد، می‌توانیم برای ریشه x_r به کمک رسم مماس بر $f(x)$ در x_1 که محور x را در x_2 قطع می‌نماید، تقریب بهتری را بدست آوریم. از هندسه شکل می‌توانیم، بنویسیم.



(a) (b) (c)

$$\tan\theta = f'(x_1) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}$$

که در آن $f'(x_1)$ مشتق $f(x)$ نسبت به x به ازای $x = x_1$ می‌باشد. با حل معادله فوق برای x_2 نتیجه می‌شود:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

جمله $-\dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ عبارتی است که تخمین اولیه ریشه x_1 را تصحیح می‌کند. وقتی x_2 محاسبه شد، می‌توانیم عملیات را برای بدست آوردن x_3 تکرار کنیم و الی آخر.

بنابراین، می‌توانیم معادله فوق را به صورت کلی زیر بنویسیم:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

که در آن:

$x_{k+1} = (k+1)$امین تخمین ریشه مورد نظر x_r

$x_k = k$امین تخمین ریشه مورد نظر x_r

$f(x_k) =$ مقدار تابع $f(x)$ در $x = x_k$

$f'(x_k) =$ مقدار مشتق تابع $f(x)$ در $x = x_k$

این معادله به تکرار بکار برده می‌شود تا $f(x_{k+1})$ به اندازه کافی به صفر نزدیک شود و $x_{k+1} \cong x_k$ شود. دانشجو باید بررسی نماید که این معادله به ازای همه علامت‌های ممکن ممکن است x_k و $f(x_k)$ و $f'(x_k)$ معتبر است.

چند نکته قابل توجه به ترتیب زیر وجود دارند:

۱. آشکار است که نباید $f'(x_k)$ صفر یا نزدیک صفر باشد. همانطور که قبلاً گفته شد، این به آن معناست که x_k نزدیک به نقطه حداکثر یا حداقل تابع $f(x)$ است. اگر شیب $f'(x_k)$ صفر باشد، در این صورت خط شیب هرگز محور x را قطع نمی‌کند. اگر شیب $f'(x_k)$ کوچک باشد، تصحیح x_k به اندازه‌ای بزرگ می‌شود که ریشه x_{k+1} تخمین نامناسبی نسبت به x_k می‌گردد. به این دلیل، مهندسین با تجربه معمولاً برای جمله تصحیح، محدوده‌ای قائل می‌شوند. به این صورت که اگر مقدار مطلق $f(x_k) / f'(x_k)$ از یک مقدار حداکثر که قبلاً پیش‌بینی کرده‌اند، بیشتر شد؛ مقدار حداکثر را بکار می‌برند.

۲. اگر چند ریشه برای معادله $f(x) = 0$ وجود داشته باشد، باید به ترتیب در مجاورت ریشه مورد نظر x_r باشیم تا محاسبات عددی به سمت ریشه واقعی نزدیک شود. قسمت b شکل شرایطی را نشان می‌دهد که با تخمین اولیه x_1 به جای اینکه نتیجه به x_{r_1} نزدیک شود، به x_{r_2} نزدیک می‌گردد.

۳. موقعی که نوسان از یک طرف به طرف دیگر آن اتفاق می‌افتد که برای مثال، تابع نسبت به ریشه‌ای که نقطه عطف است، نامتقارن باشد. استفاده از یک دوم تصحیح معمولاً از رخ دادن چنین اتفاقی جلوگیری می‌کند. که این موضوع در قسمت c از شکل نشان داده شده است.

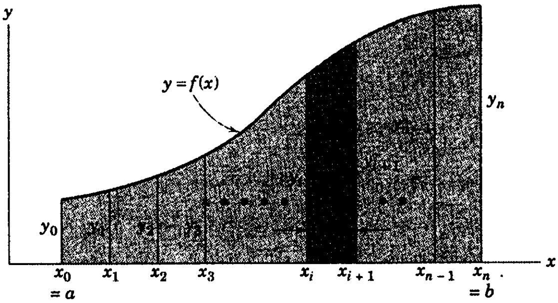
مثال: با تخمین اولیه $x_1=5$ شروع کرده و ریشه معادله $e^x - 10\cos x - 100 = 0$ را تخمین بزنید.

جدول زیر کاربرد روش نیوتن برای معادله داده شده را خلاصه می‌نماید. موقعی عملیات متوقف می‌گردد که مقدار مطلق تصحیح $-f(x_k) / f'(x_k)$ کمتر از 10^{-6} باشد.

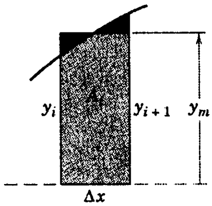
k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1} - x_k = -\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
۱	۵/۰۰۰۰۰۰۰	۴۵/۵۷۶۵۳۷	۱۳۸/۸۲۳۹۱۶	−۰/۳۲۸۳۰۵
۲	۴/۶۷۱۶۹۵	۷/۲۸۵۶۱۰	۹۶/۸۸۷۰۰۶۵	−۰/۰۷۵۱۹۷
۳	۴/۵۹۶۴۹۸	۰/۲۹۲۸۸۶	۸۹/۲۰۳۶۵۰	−۰/۰۰۳۲۸۳
۴	۴/۵۹۳۲۱۵	۰/۰۰۰۵۲۷	۸۸/۸۸۲۵۳۶	−۰/۰۰۰۰۰۶
۵	۴/۵۹۳۲۰۹	$-۲(۱۰^{-۸})$	۸۸/۸۸۱۹۵۶	$۲/۲۵(۱۰^{-۱۰})$

C-۱۲ روش‌های برگزیده برای انتگرال گیری عددی

۱. **تعیین سطح:** مطابق قسمت a از شکل نشان داده شده، می‌خواهیم سطح زیر منحنی $y = f(x_k)$ را از $x = a$ تا $x = b$ بدست آورده و فرض می‌کنیم که حل از روش انتگرال گیری تحلیلی غیر قابل حصول است. ممکن است تابع از جدول اندازه گیری‌های تجربی یا تحلیلی مشخص شده باشد. تابع بین $a < x < b$ پیوسته است. سطح را به n باریکه تقسیم می‌کنیم که پهنای هر کدام $\Delta x = (b-a)/n$ است و سپس سطوح باریکه‌ها را جمع کرده تا $A = \int y\,dx$ بدست آید. در شکل یک باریکه به سطح A_i تیره‌تر نشان داده شده است. سه روش مفید تخمین ذیلاً ذکر شده است. در هر مورد، هر چه تعداد باریکه‌ها بیشتر باشد، تخمین هندسی را افزایش می‌دهد. به عنوان یک قاعده کلی، ابتدا می‌توان با تعداد باریکه‌های نسبتاً کم شروع کرده و سپس تعداد را افزایش داد تا جایی که با افزایش تعداد، دقت اندازه گیری سطح تغییر نکند.



(a)



(b)

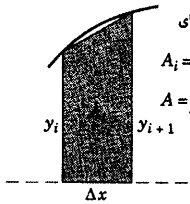
مستطیلی

$A_i = y_m \Delta x$

$A = \int y\,dx \cong \Sigma y_m \Delta x$

۱. *مستطیل* [شکل (b)] سطوح باریکه‌ها را می‌توان به صورت مستطیل در نظر گرفت و مطابق شکل ارتفاع آنرا y_m انتخاب کرد. بنابراین، مجموع Σy_m ارتفاع‌های موثر را مشخص کرده و در مقدار Δx ضرب می‌کنیم. برای یک تابع معین از روش تحلیلی، مقدار y_m برابر است با مقدار تابع به ازای نقطه میانی $x_i + \Delta x/2$ که می‌توان آنرا محاسبه و در مجموع از آن استفاده نمود.

۲. *ذوزنقه* [شکل (c)] سطوح باریکه‌ها مطابق شکل توسط ذوزنقه‌ها بدست می‌آید. سطح A_i برابر است با ارتفاع متوسط $(y_i + y_{i+1})/2$ ضربدر Δx است. مطابق جدول، با جمع سطوح می‌توان سطح کل را تخمین زد برای مثال در منحنی نشان داده شده، تخمین به وضوح کمتر از واقعیت خواهد بود. چنانچه منحنی بر عکس می‌بود، تخمین از واقعیت بیشتر می‌گردید.

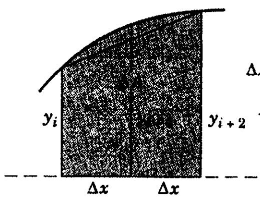


(c)

ذوزنقه‌ای

$$A_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}\Delta x$$

$$A = \int y\,dx \cong \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)\Delta x$$



(d)

سهموی

$$\Delta A = \frac{1}{3}(y_i + 4y_{i+1} + y_{i+2})\Delta x$$

$$A = \int y\,dx \cong \frac{1}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)\Delta x$$

۳. سهمی [شکل (d)] سطح بین وتر و منحنی (که در حل ذوزنقه صرفنظر شد) نیز توسط تخمین تابع بوسیله سهمی حساب می‌شود که از نقاط تعریف شده به کمک سه مقدار متوالی y عبور می‌کند. این سطح می‌تواند از هندسه سهمی محاسبه شده و به سطح ذوزنقه حساب شده برای هر زوج از باریکه‌ها اضافه کرد تا مساحت ΔA زوج مزبور حاصل گردد. با اضافه کردن کلیه ΔAها جدول نشان داده شده، بدست می‌آید که به قاعده سیمپسون معروف است. برای استفاده از قاعده سیمپسون باید تعداد n زوج باشد.

مثال: سطح زیر منحنی $y = x\sqrt{1+x^2}$ را از ۰ = x تا ۲ = x تعیین کنید (در این مثال، یک تابع قابل انتگرال گیری انتخاب شده که بتوان آن را با سه روش تخمینی ذکر شده مقایسه کرد که برابر است با:

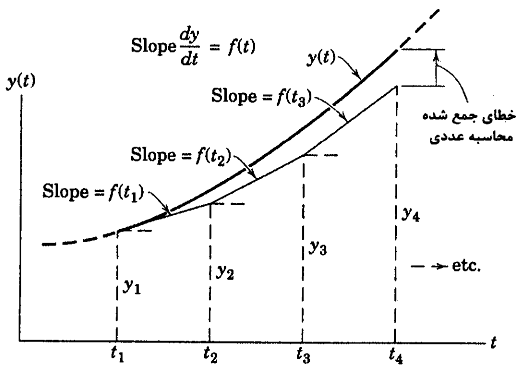
$$A = \int_0^2 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}\left(1+x^2\right)^{3/2}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\left(5\sqrt{5}-1\right) = 3.3934470$$

تخمین‌های سطح			
سهمی	ذوزنقه	مستطیل	تعداد گام‌ها
۳/۳۹۲۲۱٤	۳/٤٥٦۷۳۱	۳/۳٦۱۷۰٤	٤
۳/۳۹۳٤۲۰	۳/٤۰۳٥۳٦	۳/۳۸۸۳۹۹	۱۰
۳/۳۹۳٤٤۷	۳/۳۹۳۸٥۰	۳/۳۹۳۲٤٥	٥۰
۳/۳۹۳٤٤۷	۳/۳۹۳٥٤۷	۳/۳۹۳۳۹٦	۱۰۰
۳/۳۹۳٤٤۷	۳/۳۹۳٤٤۸	۳/۳۹۳٤٤٦	۱۰۰۰
۳/۳۹۳٤٤۷	۳/۳۹۳٤٤۷	۳/۳۹۳٤٤۷	۲٥۰۰

توجه کنید که میزان خطا در بدترین تخمین، حتی برای ٤ باریکه، کمتر از ۲ درصد است.

۲. انتگرال گیری از معادلات دیفرانسیل معمولی مرتبه اول

استفاده از اصول اساسی مکانیک اغلب منجر به روابط دیفرانسیلی می‌گردد. حال به دیفرانسیل مرتبه اول $\frac{dy}{dt} = f(t)$ که در آن تابع $f(t)$ به سادگی قابل انتگرال گیری نبوده و یا تنها به صورت جدولی از اعداد مشخص شده است، توجه کنید. می‌خواهیم با روش ساده رسم شیب، که به انتگرال گیری اویلر معروف است، مطابق شکل نشان داده شده به صورت عددی انتگرال بگیریم.



از t_1 که در آن مقدار y_1 مشخص است، شروع کرده و شیب منحنی را روی گام یا فاصله زمانی افقی ($t_2 - t_1$) تصویر کرده و مشاهده می‌کنیم که $y_2 = y_1 + f(t_1)(t_2 - t_1)$. همین عمل را می‌توان در t_2 برای y_2 تکرار کرده و بر همین منوال تا مقدار t مورد نظر جلو رفت. بنابراین، رابطه کلی به صورت زیر است:

$$y_{k+1} = y_k + f(t_k)(t_{k+1} - t_k)$$

اگر y بر حسب t به صورت خطی باشد، برای مثال اگر $f(t)$ ثابت باشد، روش دقیق بوده و دیگر نیازی به روش عددی در این حالت نیست. تغییرات شیب در فواصل زمانی منجر به خطا می‌شود. برای حالت نشان داده شده در شکل، تخمین y_2 از مقدار واقعی تابع $y(t)$ در t_2 کمتر است. روش انتگرال گیری بسیار دقیقی (بنام روش رانگ ـ کوتا) وجود دارد که تغییرات شیب را در فاصله‌های زمانی بحساب آورده و نتایج بهتری را می‌دهد.

موقعی که با توابع تحلیلی سرو کار داریم، مطابق روش‌های تعیین سطح، تجربه به انتخاب فاصله زمانی یا اندازه گام، کمک می‌نماید. به عنوان یک قاعده اجمالی، با اندازه گام نسبتاً بزرگ شروع کرده و با کم کردن اندازه گام به تدریج تا جایی ادامه دهیم که تغییرات مربوط به نتیجه انتگرال گیری خیلی کوچکتر از دقت مورد نظر گردد. بهرحال اندازه گام‌های کوچک می‌تواند خطای ناشی از محاسبات طولانی و زیاد کامپیوتر را افزایش دهد. این خطا به طور کلی به «خطای گِرد کردن round-off error» معروف است. خطای حاصل از انتخاب گام بزرگ، به خطای الگوریتم موسوم است.

مثال: برای معادله دیفرانسیل $dy/dt = 5t$ با شرط اولیه $y = ۲$ در $t = ۰$، مقدار y را در $t = ۴$ تعیین کنید.

استفاده از روش انتگرال گیری اویلر نتایج زیر را به همراه دارد.

درصد خطا	مقدار y در $t=۴$	اندازه گام	تعداد گام‌ها
۹/۵	۳۸	۰/۴	۱۰
۰/۹۵	۴۱/۶	۰/۰۴	۱۰۰
۰/۱۹	۴۱/۹۲	۰/۰۰۸	۵۰۰
۰/۱۰	۴۱/۹۶	۰/۰۰۴	۱۰۰۰

این مثال ساده را می‌توان به روش تحلیلی انتگرال گیری نمود. نتیجه (دقیق) $y = ۴۲$ می‌باشد.

پیوست D

جداول مفید

فهرست مطالب پیوست

جدول D-۱ خواص فیزیکی

چگالی (kg/m^3) *و وزن مخصوص* (lb/ft^3)

	kg/m^3	lb/ft^3		kg/m^3	lb/ft^3
هوا*	۱/۲۰۶۲	۰/۰۷۵۳۰	سرب	۱۱۳۷۰	۷۱۰
آلومینیوم	۲۶۹۰	۱۶۸	جیوه	۱۳۵۷۰	۸۴۷
بتن (متوسط)	۲۴۰۰	۱۵۰	روغن (متوسط)	۹۰۰	۵۶
مس	۸۹۱۰	۵۵۶	فولاد	۷۸۳۰	۴۸۹
خاک (مرطوب، متوسط)	۱۷۶۰	۱۱۰	تیتانیوم	۳۰۸۰	۱۹۲
خاک (خشک، متوسط)	۱۲۸۰	۸۰	آب (شیرین)	۱۰۰۰	۶۲/۴
شیشه	۲۵۹۰	۱۶۲	آب (شور)	۱۰۳۰	۶۴
طلا	۱۹۳۰۰	۱۲۰۵	چوب (کاج نرم)	۴۸۰	۳۰
یخ	۹۰۰	۵۶	چوب (بلوط سخت)	۸۰۰	۵۰
آهن (چدن)	۷۲۱۰	۴۵۰			

* در $۲۰^\circ C$ ($۶۸^\circ F$) و فشار اتمسفر

ضرایب اصطکاک

(ضرایب اصطکاک جدول زیر، نشان دهنده مقادیر متداول تحت شرایط عادی کار می‌باشد. ضرایب واقعی در هر موقعیت وابسته به ماهیت دقیق سطوح تماس است. در کاربرد واقعی، این مقادیر ۲۵ تا ۱۰۰ درصد یا بیشتر نسبت به مقادیر داده شده بسته به شرایط کاربرد از قبیل تمیزی، صافی سطح، فشار، روغنکاری و سرعت، تغییر می‌کنند.)

سطح تماس	مقادیر متداول ضریب اصطکاک	
	استاتیکی، μ_s	سینتیکی، μ_k
فولاد بر فولاد (خشک)	۰/۶	۰/۴
فولاد بر فولاد (گریس)	۰/۱	۰/۰۵
تفلون بر فولاد	۰/۰۴	۰/۰۴
فولاد بر بابیت (خشک)	۰/۴	۰/۳
فولاد بر بابیت (گریس)	۰/۱	۰/۰۷
برنج بر فولاد (خشک)	۰/۵	۰/۴
لنت ترمز بر چدن	۰/۴	۰/۳
تایر لاستیکی بر سطح صاف خیابان (خشک)	۰/۹	۰/۸
سیم مفتولی بر قرقره آهنی (خشک)	۰/۲	۰/۱۵
طناب کنفی بر فلز	۰/۳	۰/۲
فلز بر یخ		۰/۰۲

جدول D_۲ ثابت‌های منظومه شمسی

ثابت جاذبه جهانی: $G = 6/673(10^{-11})\ \mathrm{m^3/(kg.s^2)}$

$= 3/439(10^{-8})\ \mathrm{ft^4/(lbf\text{-}s^4)}$

جرم زمین: $m_e = 5/976(10^{24})\ \mathrm{kg}$

$= 5/095(10^{23})\ \mathrm{lbf\text{-}s^2/ft}$

پریود دوران زمین (یک روز نجومی): $\tau = 23\ \mathrm{h}\ 56\ \mathrm{min}\ 4\ \mathrm{s}$

$= 23/9344\ \mathrm{h}$

سرعت زاویه‌ای زمین: $\omega = 0/7292(10^{-4})\ \mathrm{rad/s}$

سرعت زاویه‌ای متوسط خط واصل بین زمین ـ خورشید: $\omega' = 0/1991(10^{-6})\ \mathrm{rad/s}$

سرعت متوسط مرکز زمین به دور خورشید: $= 107200\ \mathrm{km/h}$

$= 66610\ \mathrm{mi/h}$

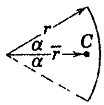
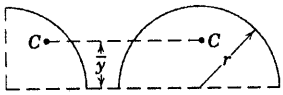
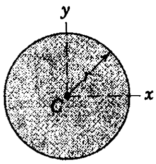
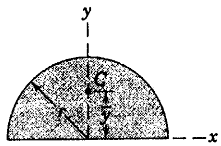
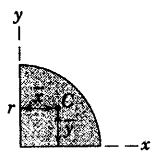
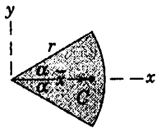
جسم	فاصله متوسط تاخورشید km (mi)	خروج از مرکز مدار e	پریود مدار (روز خورشیدی)	قطر متوسط km (mi)	جرم نسبت به زمین	شتاب جاذبه در سطح m/s^2 (ft/s^2)	سرعت فرار km/h (mi/s)
خورشید	—	—	—	۱۳۹۲۰۰۰ (۸۶۵۰۰۰)	۳۳۳۰۰۰	۲۷۴ (۸۹۸)	۶۱۶ (۳۸۳)
ماه	۳۸۴۳۹۸ * (۲۳۸۸۵۴)*	۰/۰۵۵	۲۷/۳۲	۳۴۷۶ (۲۱۶۰)	۰/۰۱۲۳	۱/۶۲ (۵/۳۲)	۲/۳۷ (۱/۴۷)
تیر (عطارد)	۵۷/۳×۱۰^{6} (۳۵/۶×۱۰^{6})	۰/۲۰۶	۸۷/۹۷	۵۰۰۰ (۳۱۰۰)	۰/۰۵۴	۳/۴۷ (۱۱/۴)	۴/۱۷ (۲/۵۹)
زهره (ونوس)	۱۰۸×۱۰^{6} (۶۷/۲×۱۰^{6})	۰/۰۰۶۸	۲۲۴/۷۰	۱۲۴۰۰ (۷۷۰۰)	۰/۸۱۵	۸/۴۴ (۲۷/۷)	۱۰/۲۴ (۶/۳۶)
زمین	۱۴۹/۶×۱۰^{6} (۹۲/۹۶×۱۰^{6})	۰/۰۱۶۷	۳۶۵/۲۶	۱۲۷۴۲+ (۷۹۱۸)+	۱/۰۰۰	۹/۸۲۱++ (۳۲/۲۲)++	۱۱/۱۸ (۶/۹۵)
بهرام (مریخ)	۲۲۷/۹×۱۰^{6} (۱۴۱/۶×۱۰^{6})	۰/۰۹۳	۶۸۶/۹۸	۶۷۸۸ (۴۲۱۸)	۰/۱۰۷	۳/۷۳ (۱۲/۳)	۵/۰۳ (۳/۱۳)

* متوسط فاصله تا زمین (مرکز تا مرکز)

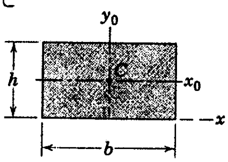
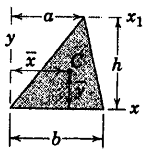
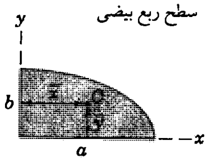
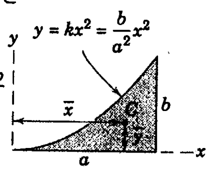
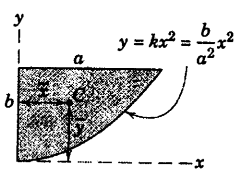
+ قطر کره‌ای با حجم معادل، بر اساس زمین کروی با قطر قطبی ۱۲۷۱۴ km (۷۹۰۰ mi) و قطر استوایی ۱۲۷۵۶ km (۷۹۲۶ mi) می‌باشد.

++ برای زمین کروی غیر دوار برابر با مقدار مطلق در سطح دریا و عرض جغرافیایی $37/5^{\circ}$ است.

جدول ۳ـD خواص اشکال مسطح

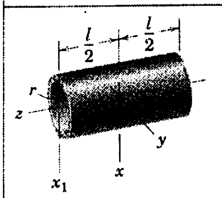
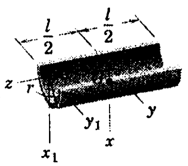
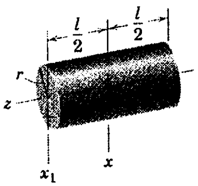
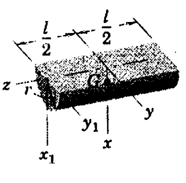
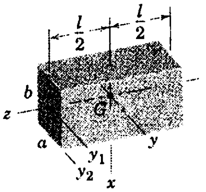
ممان اینرسی سطح	مرکز سطح	شکل
—	$\bar{r} = \dfrac{r\sin\alpha}{\alpha}$	قطعه‌ای از قوس 
—	$\bar{y} = \dfrac{2r}{\pi}$	ربع قوس و نیم قوس 
$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{4}$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{2}$	—	سطح دایره 
$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{8}$ $\bar{I}_x = \left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{8}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{4}$	$\bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	سطح نیم‌دایره 
$I_x = I_y = \dfrac{\pi r^4}{16}$ $\bar{I}_x = \bar{I}_y = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right) r^4$ $I_z = \dfrac{\pi r^4}{8}$	$\bar{x} = \bar{y} = \dfrac{4r}{3\pi}$	سطح ربع دایره 
$I_x = \dfrac{r^4}{4}\left(\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ $I_y = \dfrac{r^4}{4}\left(\alpha + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$ $I_z = \tfrac{1}{2} r^4 \alpha$	$\bar{x} = \dfrac{2}{3}\,\dfrac{r\sin\alpha}{\alpha}$	سطح قطاع دایره 

جدول ۳ـD خواص اشکال مسطح (ادامه)

ممان اینرسی سطح	مرکز سطح	شکـل
$I_x = \dfrac{bh^3}{3}$ $\bar{I}_x = \dfrac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_z = \dfrac{bh}{12}(b^2+h^2)$	—	سطح مستطیل 
$I_x = \dfrac{bh^3}{12}$ $\bar{I}_x = \dfrac{bh^3}{36}$ $I_{x_1} = \dfrac{bh^3}{4}$	$\bar{x} = \dfrac{a+b}{3}$ $\bar{y} = \dfrac{h}{3}$	سطح مثلث 
$I_x = \dfrac{\pi ab^3}{16}$, $\bar{I}_x = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right)ab^3$ $I_y = \dfrac{\pi a^3 b}{16}$, $\bar{I}_y = \left(\dfrac{\pi}{16} - \dfrac{4}{9\pi}\right)a^3 b$ $I_z = \dfrac{\pi ab}{16}(a^2+b^2)$	$\bar{x} = \dfrac{4a}{3\pi}$ $\bar{y} = \dfrac{4b}{3\pi}$	سطح ربع بیضی 
$I_x = \dfrac{ab^3}{21}$ $I_y = \dfrac{a^3 b}{5}$ $I_z = ab\left(\dfrac{a^3}{5} + \dfrac{b^2}{21}\right)$	$\bar{x} = \dfrac{3a}{4}$ $\bar{y} = \dfrac{3b}{10}$	سطح زیر سهمی مساحت $A = \dfrac{ab}{3}$ 
$I_x = \dfrac{2ab^3}{7}$ $I_y = \dfrac{2a^3 b}{15}$ $I_z = 2ab\left(\dfrac{a^2}{15} + \dfrac{b^2}{7}\right)$	$\bar{x} = \dfrac{3a}{8}$ $\bar{y} = \dfrac{3b}{5}$	سطح سهمی مساحت $A = \dfrac{2ab}{3}$ 

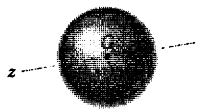
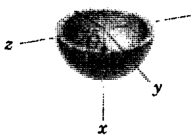
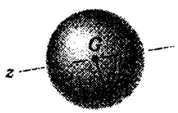
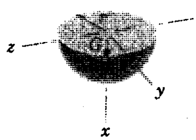
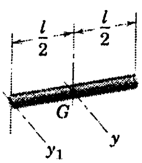
جدول D-۴ خواص اجسام همگن

(m = جرم جسم نشان داده شده)

ممان اینرسی جرم	مرکز جرم	جسم
$I_{xx} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$	—	 پوسته استوانه‌ای مدور
$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{2}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(1 - \frac{4}{\pi^2}\right) mr^2$	$\bar{x} = \frac{2r}{\pi}$	 پوسته نیم استوانه‌ای
$I_{xx} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$	—	 استوانه مدور
$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) mr^2$	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$	 نیم استوانه
$I_{xx} = \frac{1}{12}m(a^2 + l^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{12}m(b^2 + l^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{12}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$ $I_{y_2y_2} = \frac{1}{3}m(b^2 + l^2)$	—	 مکعب مستطیل

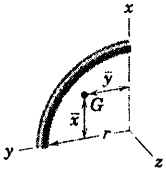
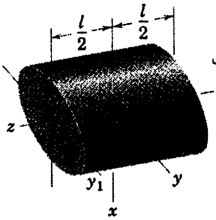
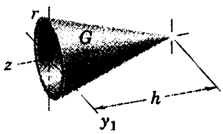
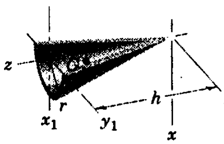
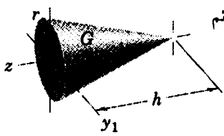
جدول ۴ــD خواص اجسام همگن (ادامه)

(m = جرم جسم نشان داده شده)

جسم	مرکز جرم	ممان اینرسی جرم
پوسته کروی 	—	$I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$
پوسته نیم کروی 	$\bar{x} = \frac{r}{2}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{3}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{5}{12}mr^2$
کُره 	—	$I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$
نیم کُره 	$\bar{x} = \frac{3r}{8}$	$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz} = \frac{2}{5}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \bar{I}_{zz} = \frac{83}{320}mr^2$
میله باریک یکنواخت 	—	$I_{yy} = \frac{1}{12}ml^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{3}ml^2$

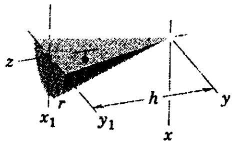
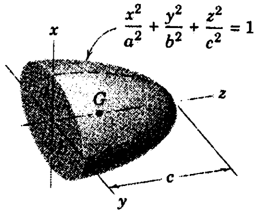
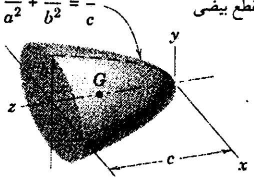
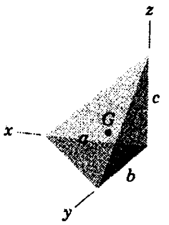
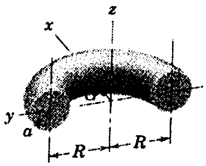
جدول ۴ـD خواص اجسام همگن (ادامه)

(m = جرم جسم نشان داده شده)

جسم	مرکز جرم	ممان اینرسی جرم
میله ربع دایره 	$\bar{x} = \bar{y} = \frac{2r}{\pi}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mr^2$ $I_{zz} = mr^2$
استرانه با مقطع بیضی 	—	$I_{xx} = \frac{1}{4}ma^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{yy} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{12}ml^2$ $I_{zz} = \frac{1}{4}m(a^2 + b^2)$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mb^2 + \frac{1}{3}ml^2$
پوسته مخروطی 	$\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{18}mh^2$
پوسته مخروطی 	$\bar{x} = \frac{4r}{3\pi}$ $\bar{z} = \frac{2h}{3}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{2}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1} = \frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{6}mh^2$ $I_{zz} = \frac{1}{2}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) mr^2$
مخروط مدور قائم 	$\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{y_1y_1} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{80}mh^2$

جدول ۴ـD خواص اجسام همگن (ادامه)

(m = جرم جسم نشان داده شده)

جسم	مرکز جرم	ممان اینرسی جرم
نیم مخروط 	$\bar{x} = \frac{r}{\pi}$ $\bar{z} = \frac{3h}{4}$	$I_{xx} = I_{yy}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{3}{5}mh^2$ $I_{x_1x_1} = I_{y_1y_1}$ $= \frac{3}{20}mr^2 + \frac{1}{10}mh^2$ $I_{zz} = \frac{3}{10}mr^2$ $\bar{I}_{zz} = \left(\frac{3}{10} - \frac{1}{\pi^2}\right) mr^2$
نیم بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 	$\bar{z} = \frac{3c}{8}$	$I_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{5}m(b^2 + \frac{19}{64}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{5}m(a^2 + \frac{19}{64}c^2)$
سهمی‌گون با مقطع بیضی $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ 	$\bar{z} = \frac{2c}{3}$	$I_{xx} = \frac{1}{6}mb^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{yy} = \frac{1}{6}ma^2 + \frac{1}{2}mc^2$ $I_{zz} = \frac{1}{6}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{1}{6}m(b^2 + \frac{1}{3}c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{1}{6}m(a^2 + \frac{1}{3}c^2)$
هرم قائم 	$\bar{x} = \frac{a}{4}$ $\bar{y} = \frac{b}{4}$ $\bar{z} = \frac{c}{4}$	$I_{xx} = \frac{1}{10}m(b^2 + c^2)$ $I_{yy} = \frac{1}{10}m(a^2 + c^2)$ $I_{zz} = \frac{1}{10}m(a^2 + b^2)$ $\bar{I}_{xx} = \frac{3}{80}m(b^2 + c^2)$ $\bar{I}_{yy} = \frac{3}{80}m(a^2 + c^2)$ $\bar{I}_{zz} = \frac{3}{80}m(a^2 + b^2)$
نیم تیوپ 	$\bar{x} = \frac{a^2 + 4R^2}{2\pi R}$	$I_{xx} = I_{yy} = \frac{1}{2}mR^2 + \frac{5}{8}ma^2$ $I_{zz} = mR^2 + \frac{3}{4}ma^2$

واژه‌نامه(انگلیسی به فارسی)

A	
Absolute motion	حرکت مطلق
Acceleration	شتاب
Accelerometer	شتاب سنج
Action and reaction	عمل و عکس العمل
Active force diagram	ترسیمه نیروهای فعال (موثر)
Amplitude of vibration	دامنه ارتعاش
Angular Acceleration	شتاب زاویه‌ای
Angular displacement	جابجایی زاویه‌ای
Angular impulse	ضربه زاویه‌ای
Angular mometum	مومنتم زاویه‌ای
Angular motion	حرکت زاویه‌ای
Angular velocity	سرعت زاویه‌ای
Apogee velocity	سرعت در نقطه اوج
Area moments of inertia	ممان‌های اینرسی سطح
B	
Body	جسم
Body centrode	سنترود جسمی
Body cone	مخروط جسمی
C	
Center of curvature	مرکز انحنا
Center of mass	مرکز جرم
Center of percussion	مرکز ضربه
Centrifugal force	نیروی گریز از مرکز
Circular frequency	فرکانس دورانی
Circular motion	حرکت دورانی
Coefficient of friction	ضریب اصطکاک
Coefficient of restitution	ضریب بازگشت
Coefficient of viscous damping	ضریب میرایی ویسکوز (لزج)
Conservation of energy	بقای انرژی
Conservation of momentum	بقای مومنتم
Conservative force	نیروی کنسرواتیو
Constrained motion	حرکت مقید
Coordinates	مختصات
Coordinates cartesian	مختصات کارتزین
Coordinates cylindrical	مختصات استوانه‌ای
Coordinates normal and tangentical	مختصات عمودی و مماسی
Coordinates polar	مختصات قطبی
Coordinates spherical	مختصات کروی
Coriolis acceleration	شتاب کوریولیس
Couple	کوپل ـ زوج نیرو
Critical damping	میرایی بحرانی
Cross or vector product	ضرب خارجی یا برداری
Curvilinear motion	حرکت منحنی الخط
D	
Degress of freedom	درجات آزادی
Density	چگالی ـ جرم مخصوص
Diagram	ترسیمه
Direction cosines	کسینوس‌های هادی
Displacement	جابجایی
Distance	فاصله ـ مسافت
Dot or scaler product	ضرب داخلی یا اسکالر
Dynamic equilibrium	تعادل دینامیکی
E	
Elastic impact	برخورد الاستیک
Equations of costraint	معادلات قیود
Equation of motion	معادلات حرکت
F	
Force-displacement diagram	ترسیمه نیرو ـ جابجایی
Force vibration	ارتعاش اجباری
Free-body diagram	ترسیمه آزاد جسم
Free vibration	ارتعاش آزاد
Frequency	فرکانس
Friction	اصطکاک
G	
Gravitation force	نیروی جاذبه
Gravity	جاذبه
Gyroscope	ژیروسکوپ

H	
Harmonic motion	حرکت هارمونیک
I	
Impact	برخورد
Impulse	ضربه
Impulse-momentum equation	معادله ضربه ـ مومنتم
Instantaneous center of zero velocity	مرکز آنی دوران (بدون سرعت)
K	
Kinematics	سینماتیک
Kinetic energy	انرژی جنبشی (سینتیکی)
Kinetic friction	اصطکاک سینتیکی (جنبشی)
Kinetic	سینتیک
L	
Linear displacement	جابجایی خطی
Linear impulse	ضربه خطی
M	
Magnification factor	ضریب بزرگنمایی
Mass	جرم
Mass center	مرکز جرم
Mass moments inertia	ممان‌های اینرسی جرم
Matrix	ماتریس
Moment center	مرکز گشتاورگیری
Moment of linear momentum	گشتاور مومنتم خطی
Moment of inertia of area	ممان اینرسی سطح
Momentum	مومنتم ـ اندازه حرکت
Motion	حرکت
N	
Natural frequency	فرکانس طبیعی
Newton's laws	قوانین نیوتن
Nutation	ناوش
O	
Orbit	مدار
Overdamping	فرامیرایی
P	
Parallel-axis theorems	قضیه محورهای موازی
Particles	ذرات
Perigee velocity	سرعت حضیض
Period	پریود
Plane motion	حرکت صفحه‌ای
Potential energy	انرژی پتانسیل
Potential function	تابع پتانسیل
Power	توان
Precession	پیشروش
Principal axes of inertia	محورهای اصلی اینرسی
Product of inertia	حاصلضرب اینرسی
Projectile motion	حرکت پرتابی
Propulsion	نیروی رانش
R	
Radius of curvature	شعاع انحنا
Radius of gyration	شعاع ژیراسیون
Rectilinear motion	حرکت مستقیم الخط
Rectilinear translation	انتقال مستقیم الخط
Relative acceleration	شتاب نسبی
Relative motion	حرکت نسبی
Relative velocity	سرعت نسبی
Resonance	تشدید (رزونانس)
Right-hand rule	قاعده دست راست
Rigid body	جسم صلب
Rotating axes	محورهای دوار (در حال دوران)
S	
Satellite	ماهواره
Simple harmonic motion	حرکت هارمونیک ساده
Space centrode	سنترود فضایی
Space cone	مخروط فضایی
Space motion	حرکت فضایی
Speed	سرعت (مقدار)
Spin axis	محور چرخش

Spin velocity	سرعت چرخشی
Spring	فنر
Static friction	اصطکاک استاتیکی
Steady state vibration	ارتعاش پایا
Stiffness of spring	سختی فنر
System	سیستم ـ مجموعه
T	
Theory of relativity	تئوری نسبیت
Thrust	نیروی جلوبرنده ـ رانش
Transfer of axes	انتقال محورها
Translating axes	محورهای انتقالی
U	
Underdaming	فرو میرایی
Units	آحاد ـ واحدها
Unit vectors	بردارهای یکه
V	
Variable mass	جرم متغیر
Vector	بردار
Velocity	سرعت (برداری)
Velocity displacement diagram	ترسیمه سرعت ـ جابجایی
Vibration	ارتعاش
Virtual displacement	جابجایی مجازی
Virtual work	کار مجازی
W	
Watt	وات
Weight	وزن
Work	کار
Work-energy equation	رابطه کار ـ انرژی

واژه‌نامه (فارسی به انگلیسی)

	الف
Units	آحاد
Vibration	ارتعاش
Free vibration	ارتعاش آزاد
Force vibration	ارتعاش اجباری
Steady state vibration	ارتعاش پایا
Friction	اصطکاک
Static friction	اصطکاک استاتیکی
Kinetic friction	اصطکاک سینتیکی (جنبشی)
Transfer of axes	انتقال محورها
Rectilinear translation	انتقال مستقیم الخط
Potential energy	انرژی پتانسیل
Kinetic energy	انرژی جنبشی (سینتیکی)
	ب
Impact	برخورد
Elastic impact	برخورد الاستیک
Vector	بردار
Unit vectors	بردارهای یکه
Conservation of energy	بقای انرژی
Conservation of momentum	بقای مومنتم
	پ
Period	پریود
Precession	پیشروش
	ت
Potential function	تابع پتانسیل
Theory of relativity	تئوری نسبیت
Diagram	ترسیمه
Free-body diagram	ترسیمه آزاد جسم
Velocity - displacement diagram	ترسیمه سرعت ـ جابجایی
Force-displacement diagram	ترسیمه نیرو ـ جابجایی
Active force diagram	ترسیمه نیروهای فعال (موثر)
Resonance	تشدید (رزونانس)
Dynamic equilibrium	تعادل دینامیکی
Power	توان
	ج
Displacement	جابجایی

Linear displacement	جابجایی خطی
Angular displacement	جابجایی زاویه‌ای
Virtual displacement	جابجایی مجازی
Gravity	جاذبه
Mass	جرم
Variable mass	جرم متغیر
Body	جسم
Rigid body	جسم صلب
	چ
Density	چگالی ـ جرم مخصوص
	ح
Product of inertia	حاصلضرب اینرسی
Motion	حرکت
Projection motion	حرکت پرتابی
Circular motion	حرکت دورانی
Angular motion	حرکت زاویه‌ای
Plane motion	حرکت صفحه‌ای
Space motion	حرکت فضایی
Rectilinear motion	حرکت مستقیم الخط
Absolute motion	حرکت مطلق
Constrained motion	حرکت مقید
Curvilinear motion	حرکت منحنی آلخط
Relative motion	حرکت نسبی
Harmonic motion	حرکت هارمونیک
Simple harmonic motion	حرکت هارمونیک ساده
	د
Amplitude of vibration	دامنه ارتعاش
Degress of freedom	درجات آزادی
	ذ
Particles	ذرات
	ر
Work-energy equation	رابطه کار ـ انرژی
	ژ
Gyroscope	ژیروسکوپ
	س
Stiffness of spring	سختی فنر
Velocity	سرعت (بردار)
Speed	سرعت (مقدار)
Spin velocity	سرعت چرخشی
Perigee velocity	سرعت حضیض
Apogee velocity	سرعت در نقطه اوج
Angular velocity	سرعت زاویه‌ای
Relation velocity	سرعت نسبی
Body centrode	سنترود جسمی
Space centrode	سنترود فضایی
System	سیستم ـ مجموعه
Kinetic	سینتیک
Kinematics	سینماتیک
	ش
Acceleration	شتاب
Angular acceleration	شتاب زاویه‌ای
Accelerometer	شتاب سنج
Coriolis acceleration	شتاب کریولیس
Relative acceleration	شتاب نسبی
Radius of curvature	شعاع انحنا
Radius of gyration	شعاع ژیراسیون
	ض
Cross or vector product	ضرب خارجی یا برداری
Dot or scaler product	ضرب داخلی یا اسکالر
Impulse	ضربه
Linear impulse	ضربه خطی
Angular impulse	ضربه زاویه‌ای
Coefficient of friction	ضریب اصطکاک
Coefficient of restitution	ضریب بازگشت
Magnification factor	ضریب بزرگنمایی

ضریب میرایی ویسکوز (لزج)	Coefficient of viscous damping
ع	
عمل و عکس العمل	Action and reaction
ف	
فاصله ـ مسافت	Distance
فرامیرایی	Overdamping
فرکانس	Frequency
فرکانس دورانی	Circular frequency
فرکانس طبیعی	Natural frequency
فرو میرایی	Underdamping
فنر	Spring
ق	
قاعده دست راست	Right-hand rule
قضیه محورهای موازی	Parallel-axis theorems
قوانین نیوتن	Newton's laws
ک	
کار	Work
کار مجازی	Virtual work
کسینوس‌های هادی	Direction cosines
کوپل ـ زوج نیرو	Couple
گ	
گشتاور مومنتم خطی	Moment of linear momentum
م	
ماتریس	Matrix
ماهواره	Satellite
محور چرخش	Spin axis
محورهای اصلی اینرسی	Principal axes of inertia
محورهای انتقالی	Translating axes
محورهای دوار (در حال دوران)	Rotating axes
مختصات	Coordinates
مختصات استوانه‌ای	Coordinates cylindrical
مختصات عمودی و مماسی	Coordinates normal and tangential
مختصات قطبی	Coordinates polar
مختصات کارتزین	Coordinates cartesian
مختصات کروی	Coordinates spherical
مخروط جسمی	Body cone
مخروط فضایی	Space cone
مدار	Orbite
مرکز آنی دوران (بدون سرعت)	Instananeous center of zero velocity
مرکز انحنا	Center of curvature
مرکز جرم	Center of mass
مرکز ضربه	Center of percussion
مرکز گشتاورگیری	Moment center
معادلات حرکت	Equation of motion
معادلات قیود	Equation of constraint
معادله ضربه ـ مومنتم	Impulse-momentum equation
ممان‌های اینرسی سطح	Area moments of inertia
ممان‌های اینرسی جرم	Mass moments of inertia
ممان اینرسی سطح	Moment of inertia of Area
مومنتم ـ اندازه حرکت	Momentum
مومنتم زاویه‌ای	Angular momentum
میرایی بحرانی	Critical damping
ن	
ناوش	Nutation
نیروی جاذبه	Gravitation force
نیروی جلوبرنده ـ رانش	Thrust
نیروی رانش	Propulsion
نیروی کنسرواتیو	Conservative force
نیروی گریز از مرکز	Centrifugal force
و	
وات	Watt
وزن	Weight

ضرایب تبدیل آحاد متداول آمریکایی به آحاد SI

تبدیل از	به	ضرب کنید در
(شتاب)		
مجذور ثانیه/ فوت (ft/sec^2)	مجذور ثانیه/ متر (m/s^2)	۳/۰۴۸×۱۰$^{-۱}$ *
مجذور ثانیه/ اینچ (in/sec^2)	مجذور ثانیه/ متر (m/s^2)	۲/۵۴×۱۰$^{-۲}$ *
(سطح)		
فوت مربع (ft^2)	متر مربع (m^2)	۹/۲۹۰۳×۱۰$^{-۲}$
اینچ مربع (in^2)	متر مربع (m^2)	۶/۴۵۱۶×۱۰$^{-۴}$ *
(چگالی)		
اینچ مکعب/ پوند جرم (lbm/in^3)	متر مکعب/ کیلوگرم (kg/m^3)	۲/۷۶۸۰×۱۰^{۴}
اینچ مکعب/ پوند جرم (lbm/ft^3)	متر مکعب/ کیلوگرم (kg/m^3)	۱/۶۰۱۸×۱۰
(نیرو)		
کیپ (۱۰۰۰ lb)	نیوتن (N)	۴/۴۴۸۲×۱۰^{۳}
پوندنیرو (lb)	نیوتن (N)	۴/۴۴۸۲
(طول)		
فوت (ft)	متر (m)	۳/۰۴۸×۱۰$^{-۱}$ *
اینچ (in)	متر (m)	۲/۵۴×۱۰$^{-۲}$ *
(مایل زمینی) (mi)	متر (m)	۱/۶۰۹۳×۱۰^{۳}
(مایل دریایی) (mi)	متر (m)	۱/۸۵۲×۱۰^{۳} *
(جرم)		
پوندجرم (lbm)	کیلوگرم (kg)	۴/۵۳۵۹×۱۰$^{-۱}$
اسلاگ ($lb\text{-}sec^2/ft$)	کیلوگرم (kg)	۱/۴۵۹۴×۱۰
تن (۲۰۰۰ lbm)	کیلوگرم (kg)	۹/۰۷۱۸×۱۰$^{-۲}$
(گشتاور نیرو)		
پوند ـ فوت (lb-ft)	نیوتن - متر (N-m)	۱/۳۵۵۸
پوند ـ اینچ (lb-in)	نیوتن - متر (N-m)	۰/۱۱۲۹۸
(ممان اینرسی سطح)		
اینچ به توان چهار	متر به توان چهار (in^4)	۴۱/۶۲۳×۱۰$^{-۸}$

* مقدار دقیق

ادامه

تبدیل از	به	ضرب کنید در
(ممان اینرسی جرم)		
پوند ـ فوت ـ مجذور ثانیه ($lb\text{-}ft\text{-}sec^2$)	کیلوگرم ـ مترمربع ($kg\text{-}m^2$)	۳/۳۵۵۸
(مومنتم خطی)		
پوند ـ ثانیه (lb-sec)	ثانیه/ کیلوگرم ـ متر (kg.m/s)	۴/۴۴۸۲
(مومنتم زاویه‌ای)		
پوند ـ فوت ـ ثانیه (lb-ft-sec)	ثانیه/ کیلوگرم ـ مترمربع ($kg\text{-}m^2/s$)	۱/۳۵۵۸
(توان)		
دقیقه/ فوت ـ پوند (ft-lb/min)	وات (W)	$۲/۲۵۹۷\times۱۰^{-۲}$
اسب بخار (۵۵۰ ft-lb/sec)	وات (W)	$۷/۴۵۷۰\times۱۰^{۲}$
(فشار، تنش)		
اتمسفر (استاندارد) ($۱۴/۷\ lb/in^2$)	پاسکال یا مترمربع/ نیوتن (N/m^2 یا Pa)	$۱/۰۱۳۳\times۱۰^{۵}$
فوت مربع/ پوند (lb/ft^2)	پاسکال یا مترمربع/ نیوتن (N/m^2 یا Pa)	۴/۷۸۸۰×۱۰
اینچ مربع/ پوند (lb/in^2 یا Psi)	پاسکال یا مترمربع/ نیوتن (N/m^2 یا Pa)	$۶/۸۹۴۸\times۱۰^{۳}$
(ثابت فنر)		
اینچ/ پوند (lb/in)	متر/ نیوتن (N/m)	$۱/۷۵۱۳\times۱۰^{۲}$
(سرعت)		
ثانیه/ فوت (ft/sec)	ثانیه/ متر (m/s)	$۳/۰۴۸\times۱۰^{-۱}$ *
گره دریایی (mi/hr دریایی)	ثانیه/ متر (m/s)	$۵/۱۴۴۴\times۱۰^{-۱}$
ساعت/ مایل (mi/hr)	ثانیه/ متر (m/s)	$۴/۴۷۰۴\times۱۰^{-۱}$ *
ساعت / مایل (mi/hr)	ساعت/ کیلومتر (km/hr)	۱/۶۰۹۳
(حجم)		
فوت مکعب (ft^3)	مترمکعب (m^3)	$۲/۸۳۱۷\times۱۰^{-۲}$
اینچ مکعب (in^3)	مترمکعب (m^3)	$۱/۶۳۸۷\times۱۰^{-۵}$
(کار ـ انرژی)		
واحد گرمایی انگلیسی (BTU)	ژول (J)	$۱/۰۵۵۱\times۱۰^{۳}$
فوت ـ پوند (ft-lb)	ژول (J)	۱/۳۵۵۸
کیلووات ـ ساعت (kW-h)	ژول (J)	$۳/۶۰\times۱۰^{۶}$ *

* مقدار دقیق

آحاد SI در مکانیک

کمیت	واحد	نماد SI
آحاد مبناء		
طول	متر*	m
جرم	کیلوگرم	kg
زمان	ثانیه	s
آحاد مشتق شده		
شتاب خطی	مجذور ثانیه/ متر	m/s^2
شتاب زاویه‌ای	مجذور ثانیه/ رادیان	rad/s^2
سطح	متر مربع	m^2
چگالی	متر مکعب/ کیلوگرم	kg/m^3
نیرو	نیوتن	N $(= kg.m/s^2)$
فرکانس	هرتز	Hz (= 1/s)
ضربه خطی	نیوتن ـ ثانیه	N.s
ضربه زاویه‌ای	نیوتن ـ متر ـ ثانیه	N.m.s
گشتاور نیرو	نیوتن متر	N.m
ممان اینرسی سطح	متر به توان چهار	m^4
ممان اینرسی جرم	کیلوگرم ـ متربع	$kg.m^2$
مومنتم خطی	ثانیه/ کیلوگرم ـ متر	kg.m/s (=N.s)
مومنتم زاویه‌ای	ثانیه/ کیلوگرم ـ مترمربع	$kg.m^2/s$ (=N.m/s)
توان	وات	W (= J/s =N.m/s)
فشار، تنش	پاسکال	Pa $(=N/m^2)$
حاصلضرب اینرسی سطح	متر به توان چهار	m^4
حاصلضرب اینرسی جرم	کیلوگرم ـ مترمربع	$kg.m^2$
ثابت فنر	متر/ نیوتن	N/m
سرعت خطی	ثانیه/ متر	m/s
سرعت زاویه‌ای	ثانیه/ رادیان	rad/s
حجم	مترمکعب	m^3
کار، انرژی	ژول	J (=N.m)
آحاد دیگر قابل قبول و تکمیلی		
مسافت (دریایی)	مایل دریایی	(=۱/۸۵۲ km)
جرم	تن (متری)	t (=۱۰۰۰ kg)
زاویه صفحه‌ای	درجه (اعشاری)	°
زاویه صفحه‌ای	رادیان	—
سرعت	گره	(۱/۸۵۲ km/h)
زمان	روز	d
زمان	ساعت	h
زمان	دقیقه	min

پیشوند آحاد SI

نماد	پیشوند	فاکتور ضرب
T	ترا	$۱۰^{۱۲}$= ۱۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰
G	گیگا	$۱۰^{۹}$= ۱۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰
M	مگا	$۱۰^{۶}$= ۱۰۰۰ ۰۰۰
k	کیلو	$۱۰^{۳}$= ۱۰۰۰
h	هکتو	$۱۰^{۲}$= ۱۰۰
da	دکا	۱۰
d	دسی	$۱۰^{-۱}$= ۰/۱
c	سانتی	$۱۰^{-۲}$= ۰/۰۱
m	میلی	$۱۰^{-۳}$= ۰/۰۰۱
μ	میکرو	$۱۰^{-۶}$= ۰/۰۰۰ ۰۰۱
n	نانو	$۱۰^{-۹}$= ۰/۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۱
p	پیکو	$۱۰^{-۱۲}$= ۰/۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۰ ۰۰۱

قواعد برگزیده برای نوشتن کمیت‌های متریک

۱. (a) با استفاده از پیشوند آحاد، مقادیر عددی را معمولاً بین ۰/۱ و ۱۰۰۰ نگه دارید.

(b) از استفاده از پیشوندهای هکتو، دکا، دسی و سانتی معمولاً باید پرهیز شود. به غیر از مواردی برای سطوح و حجم‌ها که در غیر اینصورت بیان مقدار آنها دشوار است.

(c) پیشوندها را تنها برای تعدادی از ترکیب‌های آحاد بکار ببرید. تنها مورد استثناء واحد کیلوگرم است (مثال: بنویسید kN/m و نه N/mm ؛ J/kg و نه mJ/g).

(d) از بکار بردن دو پیشوند پشت سر هم خودداری کنید (مثال: بنویسید GN و نه kMN)

۲. انتصاب آحاد

(a) از نقطه برای نشان دادن ضرب آحاد استفاده کنید (مثال: بنویسید N.m و نه Nm).

(b) از بکار بردن دو کسر خودداری کنید (مثال: بنویسید N/m^2 و نه N/m/m).

(c) نما (توان) مربوط به کل واحد می‌باشد (مثال: mm^2 به معنی $(mm)^2$ است).

۳. گروه‌بندی اعداد

برای جداسازی اعداد بهتر است از یک فضای خالی در گروه‌های سه‌تایی به جای ویرگول استفاده گردد و از نقطه (ممیز)، جهت جداسازی اعداد اعشاری از صحیح استفاده شود (مثال: ٤ ٦٠٧ ٣٢١/٠٤٨٧٢ ؛ 4 607 321.04872). معمولاً برای اعداد چهار رقمی فضای خالی حذف می‌شود (مثال: ٤٢٩٦ یا ٠/٠٤٧٦ ؛ 0.0476)