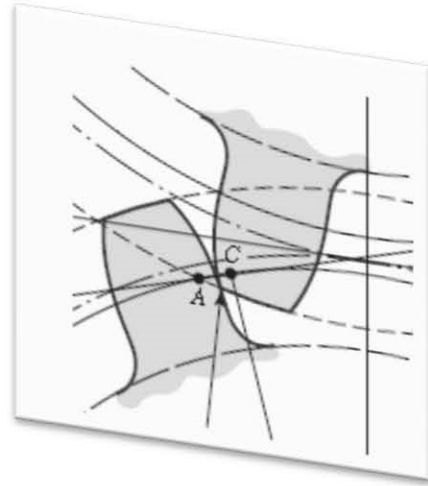
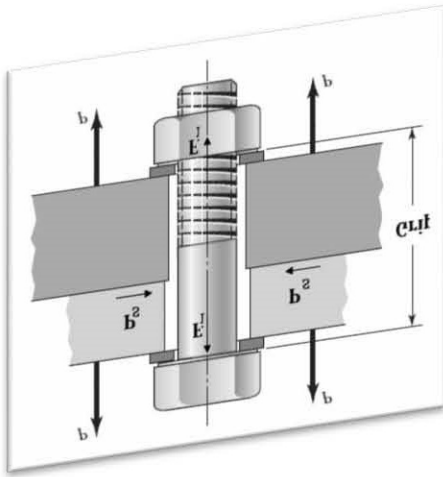
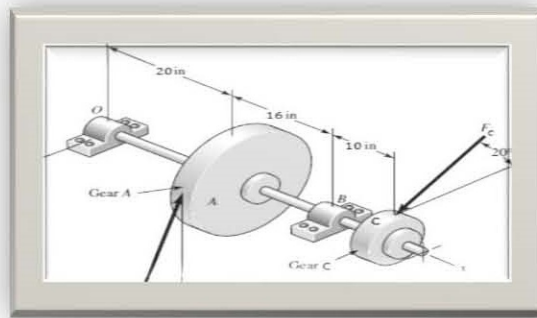


اجزاء ماشین

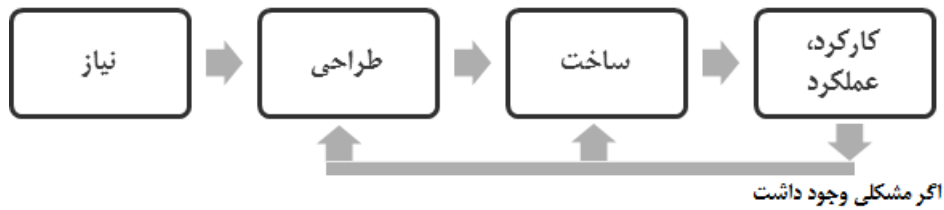


مدرس : محمدپور

مقدمه ای بر اصول طراحی
و
مقاومت مصالح

۱. مقدمه ای بر اصول طراحی

اولین قدم در طراحی، نیاز است. پس از طراحی نوبت به مرحله ساختن می رسد، پس از آن عملکرد را می سنجیم. اگر مشکلی وجود داشت باید به مرحله طراحی یا ساخت بازگردیم.



ملاحظات طراحی (Design Consideration):

۱. استحکام (Strength)

۲. قابلیت اعتماد (Reliability)

➤ معمولا قطعاتی که تولید می شوند، قابلیت اعتمادی بین ۰ و ۱ دارند. $0 < R < 1$

۳. مسائل حرارتی (Thermal Problems)

۴. سایش (Wear)

۵. خوردگی (Corrosion)

۶. اصطکاک (Friction)

➤ برای کاهش اصطکاک دو راه وجود دارد. ۱- کاهش سطح تماس ۲- روغن کاری (بهبتر از روغنکاری، استفاده از هوا به جای روغن است)

۷. فرآیند ساخت (Processing)

۸. قیمت تمام شده (Cost)

۹. ایمنی (Safety) $n = \frac{R}{\sigma_{all}} \geq 1$

۱۰. وزن (weight)

➤ مهمترین پارامتر در قطعاتی است که مربوط به مسائل هوا فضا می باشد و یا در جایی که ماده گران قیمت است مثل طلا.

۱۱. سر و صدا (Noise)

۱۲. شکل ظاهری (Styling)

۱۳. قابلیت جذب مشتری

۱۴. اندازه (Size)

۱۵. انعطاف پذیری (Flexibility)

➤ مثل اتومبیلی که هم با بنزین هم با گاز کار می کند یا کارخانه پتروشیمی که وقتی کشور به بنزین نیاز داشت، تولید محصولات پتروشیمی را کنار گذاشت و بنزین تولید کرد.

۱۶. دقت و کنترل (Accuracy & Control)

➤ اگر ماشین از حالت عادی خارج شد، بتوان آن را کنترل یا خاموش کرد. برای مثال اگر بار از روی توربین برداشته شود اصطلاحا Over speed می شود و باید بتوان آن را کنترل کرد.

۱۷. دوام و استحکام

➤ مثل لنت های ترمز اتومبیل

۱۸. ماشین کاری و پرداخت سطح (Polishing)

➤ قطعه ای که پولیش می شود، هیچگونه تمرکز تنشی نداشته و در مقابل خستگی مقاوم است.

۱۹. سرویس و روغنکاری (Lubrication)

➤ باعث کاهش اصطکاک برای خنک کاری می شود. همچنین باید سیستم روغنکاری قابل کنترل باشد

۲۰. تعمیر و نگهداری (Maintenance)

➤ طراح باید این را تعیین کند که کدام قسمت‌های دستگاه بعد از هر چند مدت نیاز به بازدید دارد تا مشکلی ایجاد نشود. طراح

باید حتی الامکان دستگاه را طوری طراحی نماید که نیاز به تعمیر نداشته باشد.

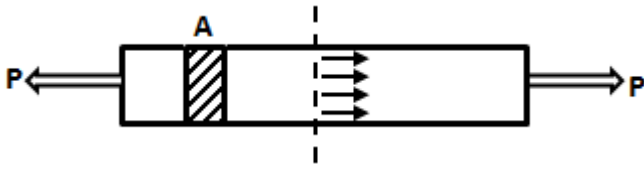
۲۱. حجم (Volume)

➤ محصول تولید شده باید در حجم های مختلف و ابعاد معقول باشد

۲۲. قابلیت حمل و بسته بندی

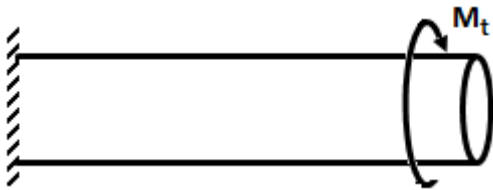
۲. مقدمه ای بر مقاومت مصالح:

انواع تنش ها:



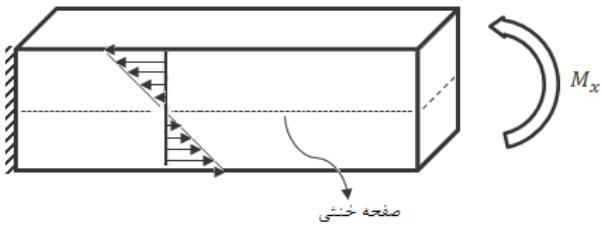
$$\sigma = \frac{P}{A}$$

تنش کششی (فشاری)



$$\tau = \frac{M_t}{I_p} \cdot \rho$$

تنش برشی (پیچشی)



$$\sigma = \frac{M_b}{I_a} \cdot \overbrace{y(x)}^{\text{فاصله از تار ختنی}}, I_a = \int y^2 dA$$

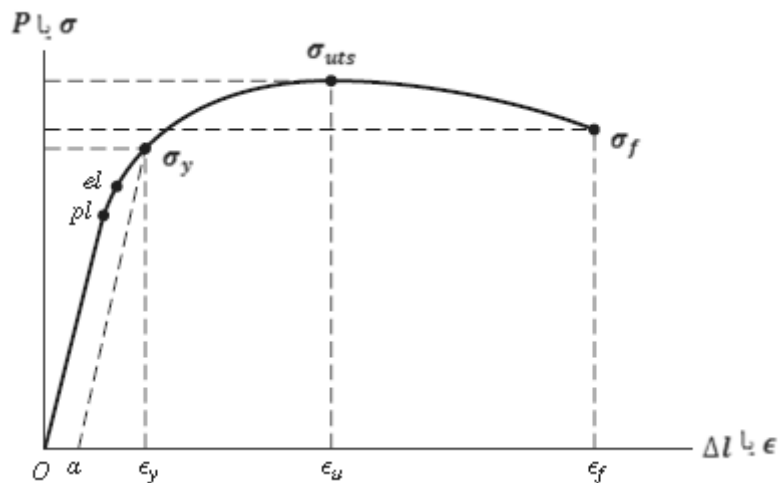
تنش خمشی



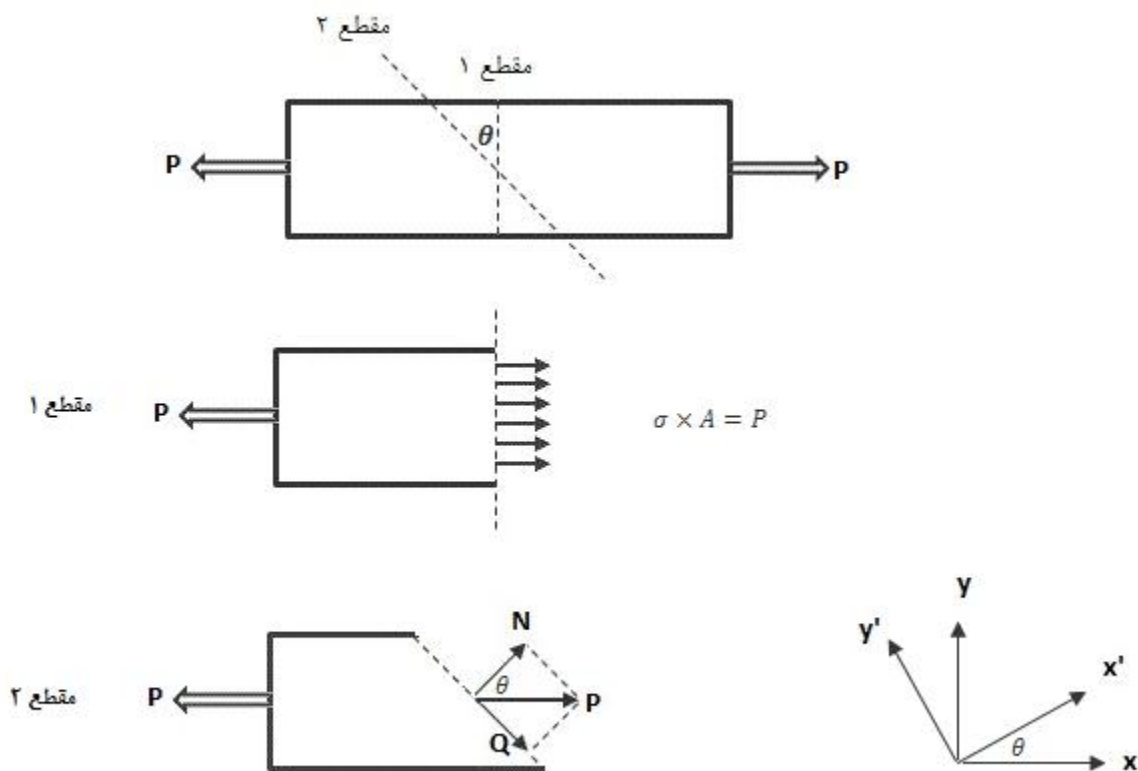
$$\tau = \frac{P}{A}$$

تنش برشی

در طراحی با استفاده از مقاومت، قطعه را تحلیل کرده و با σ_y مقایسه می کنیم. یعنی تنش های ناشی از تک تک نیروهای وارده بر قطعه را محاسبه کرده و سپس تنش برآیند را با σ_y قطعه مقایسه می کنیم..



۳. تبدیل تنش صفحه ای - حالت خاص (نیروی محوری):



$$\sigma_{x'} = \frac{N}{A'} = \frac{P \cos \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \cos^2 \theta = \sigma_x \cos^2 \theta$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{Q}{A'} = \frac{P \sin \theta}{A / \cos \theta} = \frac{P}{A} \sin \theta \cos \theta = \sigma_x \frac{\sin 2\theta}{2}$$

تنش کششی یا نرمال ($\sigma_{x'}$) زمانی بیشینه است که داشته باشیم:

$$\theta = 0 \rightarrow \sigma_{x'} = \sigma_x = \frac{P}{A}$$

تنش برشی ($\tau_{x'y'}$) زمانی بیشینه است که داشته باشیم:

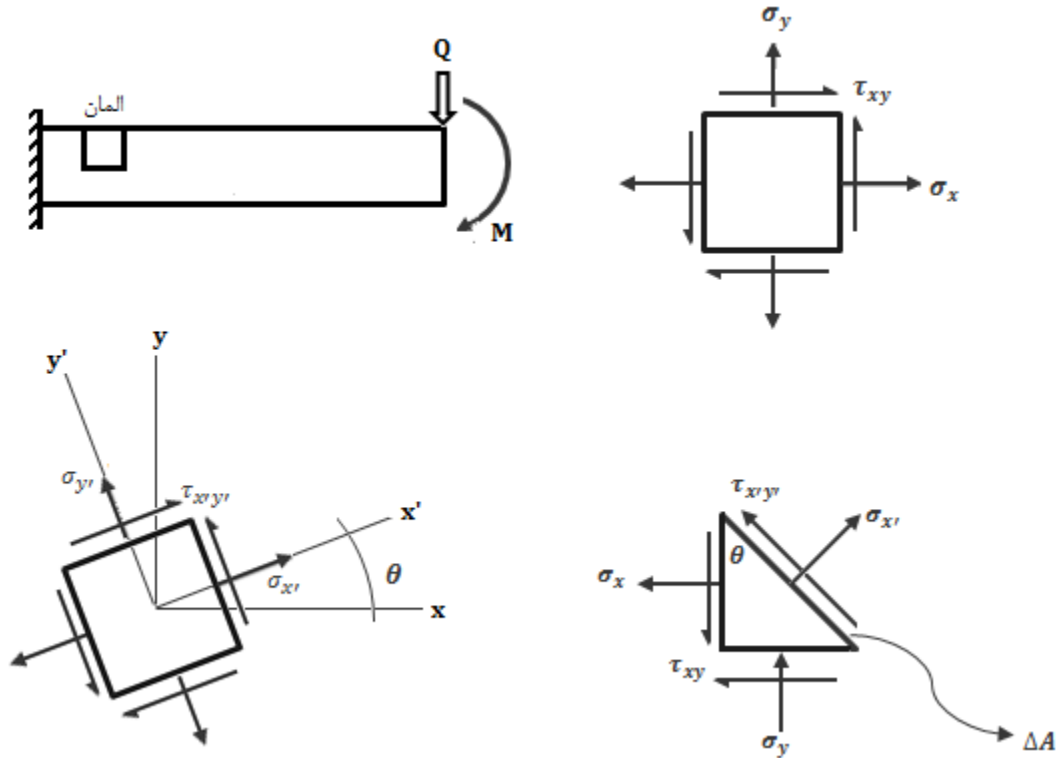
$$\theta = \frac{\pi}{4} \rightarrow \tau_{x'y'} = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{P}{2A}$$

عامل شکست در قطعات نرم، تنش برشی می باشد

عامل شکست در قطعات ترد، تنش نرمال می باشد

خستگی با پیروی تفاوت دارد. در خستگی، قطعه بر اثر کار دینامیکی ترک بر می دارد و می شکند ولی در پیروی، در اثر گذشت زمان، قطعه خواص خود را از دست می دهد. مثلاً قطعه نرم در اثر گذشت زمان ترد می شود.

۴. تبدیل تنش صفحه ای - حالت کلی:



در اینجا هدف این است که صفحه ای را به دست آوریم که حساس است و تنش های کششی یا برشی در آن بیشینه است.

برای این کار، المان را به اندازه θ دوران می دهیم و معادلات تعادل را برای المان می نویسیم:

$$\sum F_{x'} = 0 \rightarrow \sigma_{x'} \cdot \Delta A = \sigma_x (\Delta A \cos \theta) \cos \theta + \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta + \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \sin \theta + \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta$$

$$\sum F_{y'} = 0 \rightarrow \tau_{x'y'} \cdot \Delta A = -\sigma_x (\Delta A \cos \theta) \sin \theta + \tau_{xy} (\Delta A \cos \theta) \sin \theta + \sigma_y (\Delta A \sin \theta) \cos \theta - \tau_{xy} (\Delta A \sin \theta) \cos \theta$$

با ساده سازی معادلات تعادل بالا خواهیم داشت:

$$\sigma_{x'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta$$

برای به دست آوردن $\sigma_{y'}$ و $\tau_{y'x'}$ در فرمول های بالا، به جای θ مقدار $\theta + \frac{\pi}{2}$ را قرار می دهیم:

$$\sigma_{y'} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta$$

$$\tau_{y'x'} = \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta$$

۵. تنش های اصلی (Principal Stresses):

برای پیدا کردن صفحه اصلی (صفحه ای که تنش های اصلی در آن است) از $\sigma_{x'}$ نسبت به θ مشتق می گیریم. (تذکر: به مقادیر ماکزیمم و مینیمم تنش، تنش اصلی گفته می شود)

$$\frac{d\sigma_{x'}}{d\theta} = 0 \rightarrow \tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} \rightarrow \begin{cases} \theta_{p1} \\ \theta_{p2} \end{cases}$$

با جایگذاری θ_{p1} و θ_{p2} در معادله $\sigma_{x'}$ ، تنش های محوری اصلی نیز بدست می آیند.

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \sigma_{\min} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

برای پیدا کردن صفحه ای که در آن تنش برشی ماکزیمم است، از $\tau_{x'y'}$ نسبت به θ مشتق می گیریم:

$$\frac{d\tau_{x'y'}}{d\theta} = 0 \rightarrow \tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}}$$

نکته: $\tan 2\theta_s$ معکوس و قرینه $\tan 2\theta_p$ است. یعنی بر هم عمود هستند. پس θ_s و θ_p با هم $\frac{\pi}{4} \text{rad}$ اختلاف دارند.

برای به دست آوردن مقدار بیشینه تنش برشی، مقدار θ_s را در فرمول $\tau_{x'y'}$ جایگذاری می کنیم.

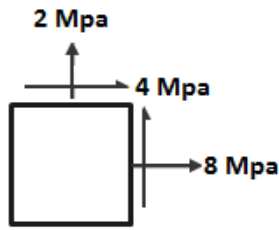
$$\tau_{x'y'}_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

توجه: به فرمول های $\sigma_{x'}$ و $\tau_{x'y'}$ فرمول های مثلثاتی تبدیل تنش گفته می شود

✓ مثال: فرض کنید المانی تحت تنش های زیر داده شده باشد. مطلوبست محاسبه تنش های اصلی و جهات آن.

$$\tau_{xy} = 4 \text{ Mpa}; \quad \sigma_y = 2 \text{ Mpa}; \quad \sigma_x = 8 \text{ Mpa};$$

حل:



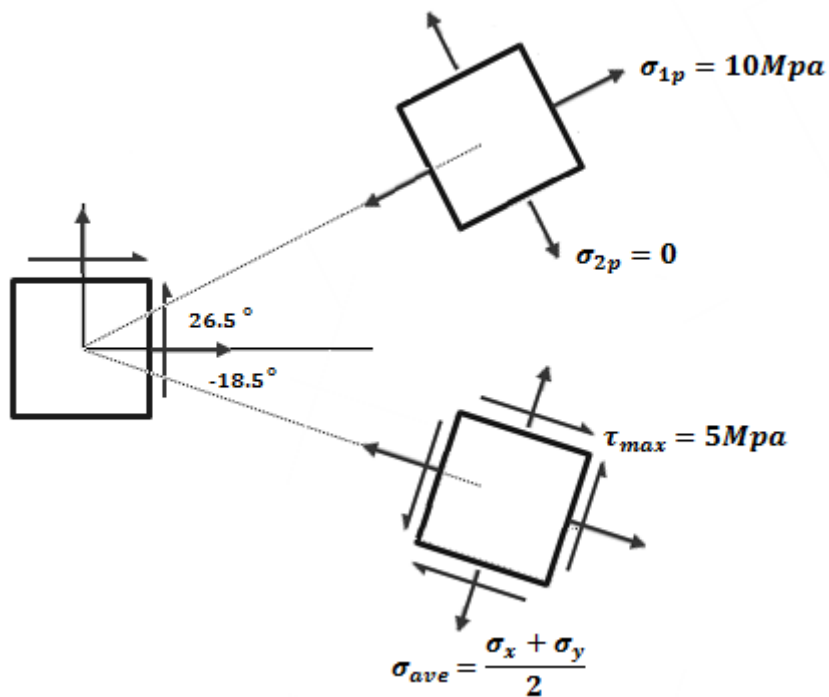
$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{8 + 2}{2} \pm \sqrt{3^2 + 4^2} \rightarrow \sigma_1 = 10 \text{ Mpa}, \quad \sigma_2 = 0$$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 \text{ Mpa}$$

$$\tan 2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \times 4}{8 - 2} = \frac{4}{3} \rightarrow \theta_{p1} = 26.5^\circ, \theta_{p2} = 116.5^\circ$$

$$\tan 2\theta_s = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2\tau_{xy}} = -\frac{2 - 8}{2 \times 4} = -\frac{3}{4} \rightarrow \theta_{s1} = -18.5^\circ, \theta_{s2} = 71.5^\circ$$



۶. تعیین علامت تنش‌ها برای استفاده در فرمول مثلثاتی تنش:

- تعیین علامت تنش‌های محوری (Normal Stresses):
تنش‌های کششی را مثبت (+) و تنش‌های فشاری را منفی (-) در نظر می‌گیریم.
- تعیین علامت تنش‌های برشی (shear Stresses):
صفحه‌ای از المان را که بردار یکه ی آن در جهت مثبت یکی از محورها باشد، صفحه مثبت گوییم و صفحه‌ای از المان را که بردار یکه ی آن در جهت منفی یکی از محورها باشد، صفحه منفی گوییم.
جهت تنش برشی را در صورتی که در جهت مثبت یکی از محورها باشد، مثبت در نظر می‌گیریم و در صورتی که جهت آن در راستای منفی یکی از محورها باشد، علامت آن را منفی در نظر می‌گیریم. با استفاده از جدول زیر علامت تنش برشی را تعیین می‌کنیم.

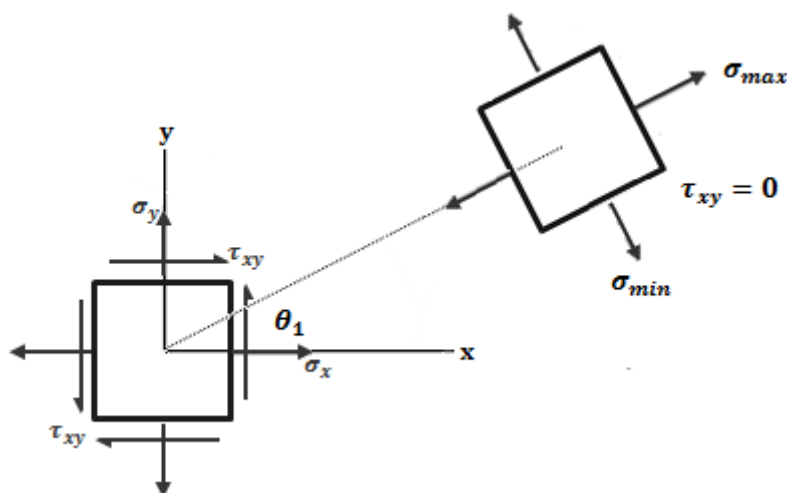
علامت تنش برشی	→ علامت جهت تنش برشی	علامت صفحه‌ای که تنش برشی روی آن است
+	+	+
-	-	+
-	+	-
+	-	-

تذکر: توجه شود که در یک المان، جهت تنش‌های برشی در یک گوشه یا نزدیک شونده است یا دور شونده.

۷. رسم دایره‌ی تنش مور:

در عمل، دایره تنش مور به طور وسیعی برای تبدیل تنش‌ها بکار می‌رود. این روش وقتی با ارزش است که ساده و سریع باشد. به عنوان کمک در هنگام استفاده از این تکنیک، روش پیشنهادی به صورت گام به گام در زیر ذکر می‌شود.

➤ گام ۱- یک طرح از جزء سطحی (المانی) که تنش‌های قائم و برشی برای آن معلوم است و این تنشها در جهت صحیحشان بر روی المان نشان داده شده اند، رسم کنید.

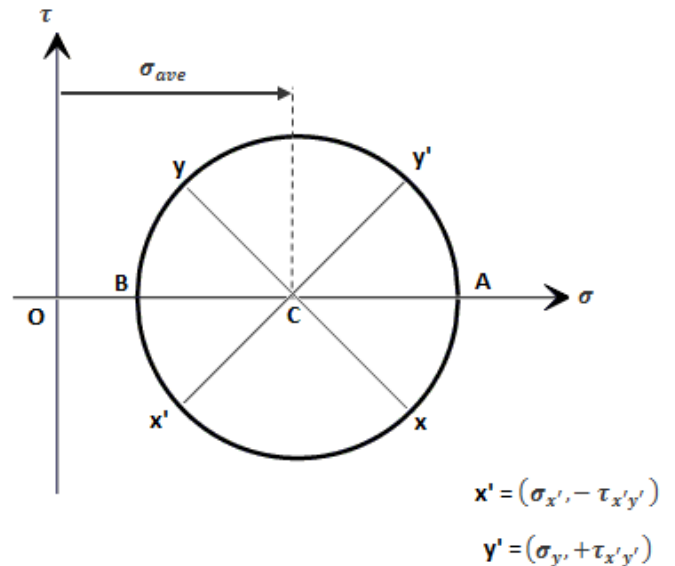
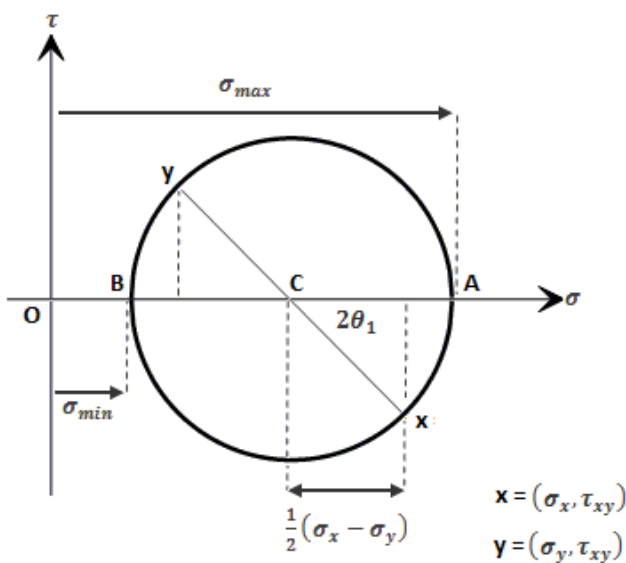


- گام ۲- یک دستگاه مختصات متعامد که محور افقی آن نشان دهنده تنش قائم و محور قائم آن نشان دهنده ی تنش برشی می باشد رسم کنید. جهت مثبت محورها معمولا به طرف راست و بالا در نظر گرفته می شوند.
- گام ۳- مرکز دایره را مشخص کنید. مرکز دایره روی محور افقی و به فاصله ی $\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$ از مبدا مختصات قرار دارد. تنش های کششی، مثبت و تنش های فشاری، منفی در نظر گرفته می شوند.

$$OC = \sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

- گام ۴- نقطه X به مختصات (σ_x, τ_{xy}) و نقطه Y به مختصات (σ_y, τ_{xy}) را روی دستگاه مختصات مشخص کنید. علامت σ_x و σ_y وقتی مثبت است که تنش های مزبور کششی، و در صورتی منفی است که فشاری باشند. علامت τ_{xy} مثبت است اگر المان را در جهت ساعتگرد بچرخاند و منفی است اگر المان را در جهت پادساعتگرد بچرخاند.
- گام ۵- اگر نقطه X را به نقطه Y وصل کنیم، محل تقاطع آن با محور σ باید منطبق بر مرکز دایره باشد. دایره ای به مرکز C و شعاع CX رسم می کنیم که همان دایره مور است. طول شعاع CX که به عنوان مبدا اندازه گیری های زاویه در نظر گرفته می شود، از رابطه زیر بدست می آید.

$$cX = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



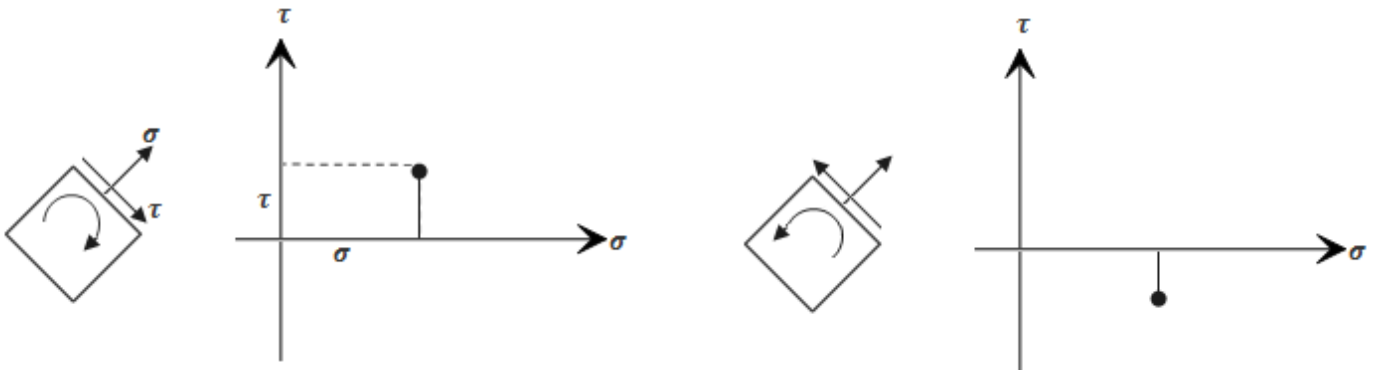
- گام ۶- دایره تنش در دو نقطه A و B ، محور افقی را قطع می کند که فاصله OA نشان دهنده تنش حداکثر و فاصله OB نشان دهنده تنش حداقل می باشد.

$$\sigma_{max} = \sigma_{ave} + R, \quad \sigma_{min} = \sigma_{ave} - R$$

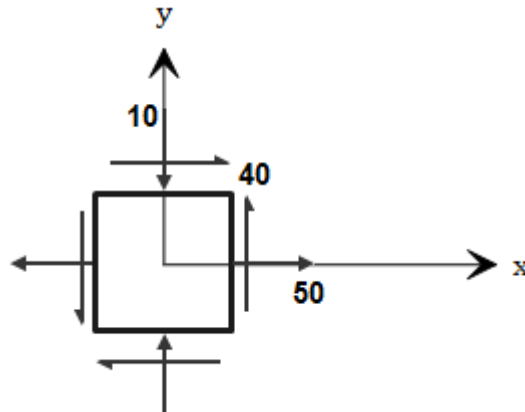
۸. قرارداد علامت تنش برشی در دایره تنش مور:

وقتی که تنش برشی موثر بر یک وجه معلوم تمایل به دوران المان در جهت عقربه های ساعت را داراست، نقطه ی مربوط به این وجه بر روی دایره مور در بالای محور افقی σ قرار دارد. در مقابل، وقتی که تنش برشی موثر بر یک وجه معلوم، تمایل به دوران المان در جهت خلاف عقربه های ساعت را داراست، نقطه ی مربوط به این وجه در پایین محور افقی قرار می گیرد. قانون فوق را با حفظ کردن جمله زیر می توان در خاطر سپرد:

" ساعت همیشه در بالای دیوار قرار دارد "



✓ مثال: برای حالت تنش نشان داده شده در شکل زیر:



الف) دایره مور را رسم کنید ب) تنش های اصلی را پیدا کنید پ) تنش برشی حداکثر و تنش قائم مربوط به آن را به دست آورید

الف: رسم دایره ی مور

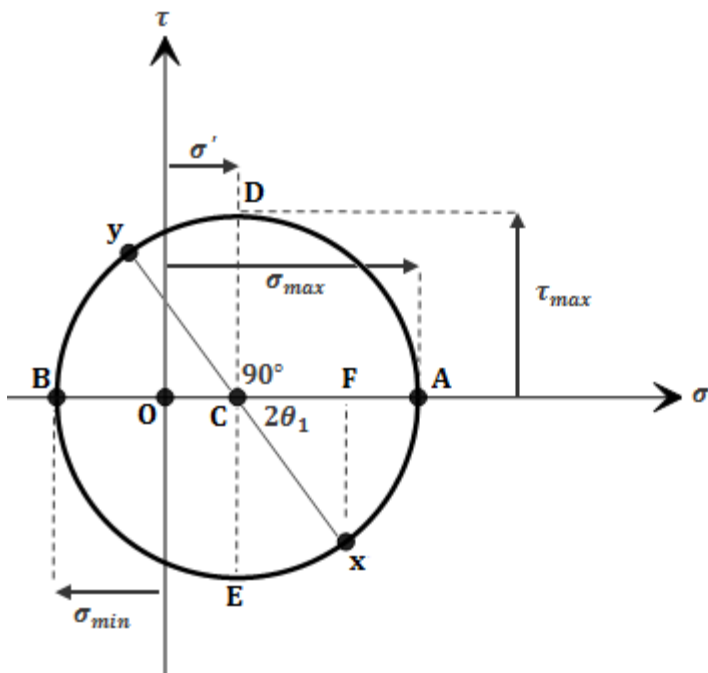
با توجه به شکل، دیده می شود که تنش قائم موثر بر وجه سمت راست المان که در امتداد محور x ها می باشد، کششی است (مثبت) و تنش برشی موثر بر همان سطح، المان را در جهت خلاف گردش عقربه های ساعت می چرخاند (منفی)، در نتیجه نقطه های $X(\sigma_x, \tau_{xy})$ و $Y(\sigma_y, \tau_{xy})$ به صورت $X(50, -40)$ و $Y(-10, 40)$ در می آیند. با رسم خط XY مرکز دایره مور (c) بدست می آید. طول آن مساوی است با:

$$\sigma_{ave} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{50 + (-10)}{2} = 20 \text{ N/mm}^2$$

$$cF = 50 - 20 = 30 \text{ N/mm}^2, \quad Fx = 40 \text{ N/mm}^2$$

در نتیجه شعاع دایره مور برابر است با:

$$R = cx = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50 \text{ N/mm}^2$$



$$\sigma_{max} = 70$$

$$\sigma_{min} = -30$$

$$\tau_{max} = 50$$

$$R = 50$$

$$x(50, -40) \quad y(-10, 40)$$

$$2\theta_1 = 53.1^\circ$$

ب: صفحات اصلی و تنش های اصلی:

$$\sigma_{max} = oA = oc + cA = 20 + 50 = 70 \text{ N/mm}^2$$

$$\sigma_{min} = oB = oc + Bc = 20 - 50 = -30 \text{ N/mm}^2$$

زاویه Acx نشان دهنده ی $2\theta_1$ است:

$$\tan 2\theta_1 = \frac{Fx}{CF} = \frac{40}{30} \rightarrow 2\theta_1 = 53.1^\circ \rightarrow \theta_1 = 26.6^\circ$$

پ: تنش برشی حداکثر

$$\tau_{max} = R = 50 \text{ N/mm}^2, \sigma' = \sigma_{ave} = 20 \text{ N/mm}^2$$

➤ قطعات را بر اساس : ۱- استاتیکی یا دینامیکی بودن ۲- بر اساس نرم یا ترد بودن ماده ی به کار رفته در قطعه طراحی می کنیم.

۱. تئوری تخریب قطعات:

ملاک های تسلیم برای مواد شکل پذیر :

۱. تئوری تنش قائم ماکزیمم (Max Normal Stress Theory) MNS
۲. تئوری تنش برشی ماکزیمم (Max Shear Stress Theory) MSS
۳. تئوری انرژی تغییر شکل (Distortion Energy Theory) DE
۴. تئوری کولن - مور شکل پذیر DCM

ملاک های تسلیم برای مواد شکننده یا ترد :

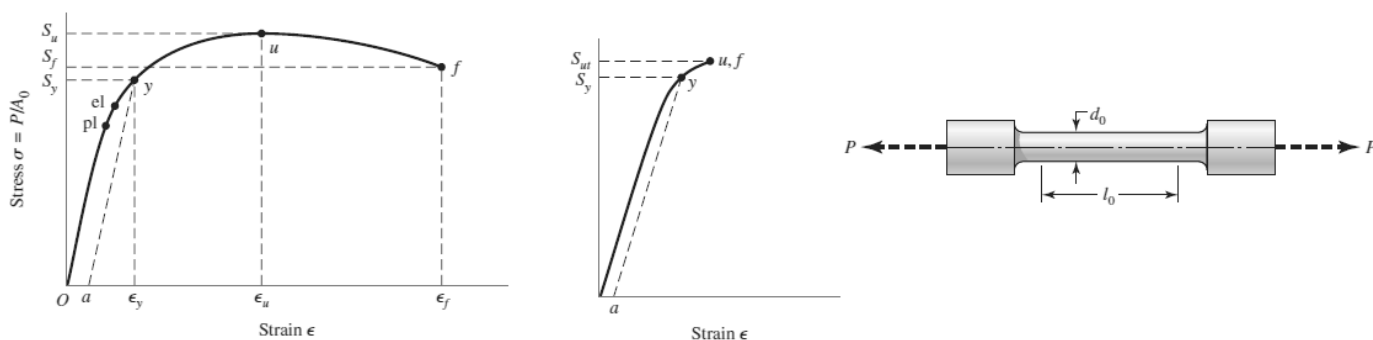
۱. تئوری تنش قائم ماکزیمم (Max Normal Stress Theory) MNS
۲. تئوری کولن مور (BCM)

۲. نظریه ی تنش عمودی بیشینه (MNS):

فرضیه ی تنش قائم حداکثر یا به زبان ساده فرضیه ی تنش حداکثر ، ادعا می کند که شکست مصالح وقتی رخ می دهد که تنش قائم حداکثر در یک نقطه ، بدون توجه به سایر تنش ها ، به یک مقدار بحرانی برسد. برای استفاده از این معیار فقط تعیین بزرگترین تنش اصلی لازم می باشد.

مقدار بحرانی تنش σ_{ult} ، معمولا از یک آزمایش کشش ساده به دست می آید که در آن گسیختگی یک نمونه هم می تواند به صورت تغییر طول زیاد و هم می تواند شکست مصالح در نظر گرفته شود.

➤ بنابراین طبق این نظریه هرگاه یکی از تنش ها به تنش تسلیم (سیلان σ_y) برسد، قطعه از بین خواهد رفت.

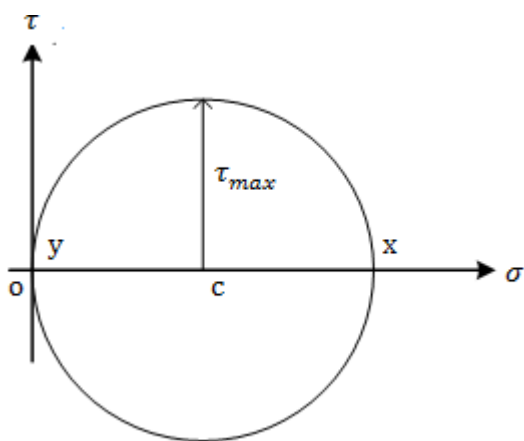
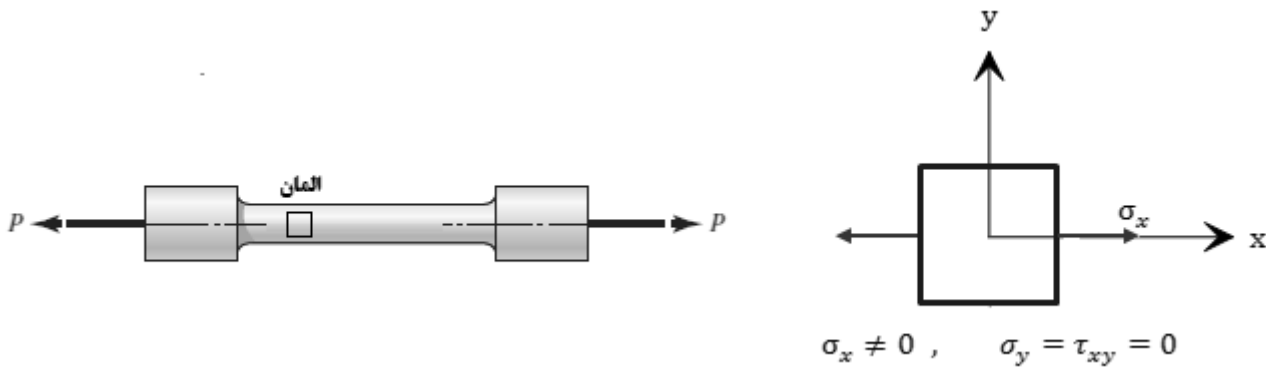


مشاهدات تجربی نشان می دهند که این فرضیه به خوبی در مورد مصالح شکننده در تمام حالاتی که تنش های اصلی کششی می باشند، قابل اجراست. اما وقتی نیروها پیچشی باشند این نظریه نقض می شود.

یادآوری : در مواد نرم خواص کششی و فشاری با هم برابرند ولی در مواد ترد این گونه نیست.

➤ در مواد نرم عامل تغییر شکل تنش برشی است

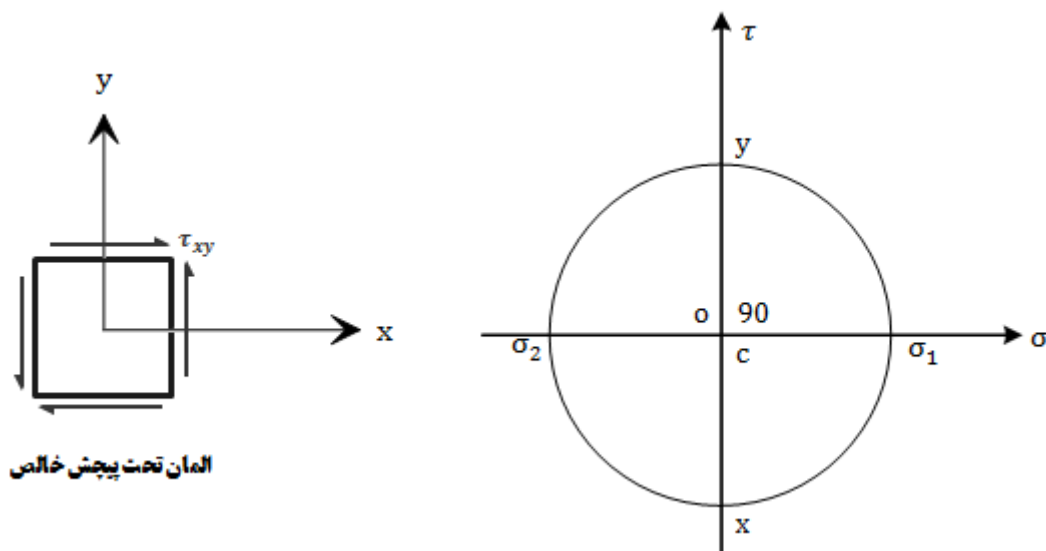
➤ اگر یک المان در روی قطعه ی آزمایش کشش در نظر بگیریم؛ چون این المان تحت کشش خالص است دایره ی مور تنش آن به صورت زیر خواهد بود:



$$\sigma_1 = \sigma_x = s_y \quad \sigma_2 = 0$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1}{2} = R = \frac{\sigma_x}{2} = \frac{s_y}{2} = s_{sy}$$

همان طور که گفته شد عامل تغییر شکل در مواد نرم تنش برشی می باشد. حال این امر را بر روی دایره ی مور بررسی می کنیم؛



چون بین صفحه ی تنش های اصلی و صفحه ی تنش برشی ماکزیمم در دایره ی مور 90° اختلاف زاویه وجود دارد بنابراین صفحه ی تنش برشی ماکزیمم در المان در صفحه ای با زاویه ی 45° قرار دارد:

$$\sigma_1 = s_{yt} = \sigma_y$$

$$\sigma_2 = s_{yc} = -\sigma_y$$

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_y - (-\sigma_y)}{2} = \sigma_y$$

➤ اشکال نظریه ی تنش قائم حداکثر MNS :

در عمل می دانیم که τ_{max} هیچ وقت به σ_y نمی رسد پس این تئوری، مبنای مناسبی برای قطعاتی که تحت پیچش هستند نمی باشد. (با آزمایش می دانیم که وقتی $\sigma_1 = \sigma_y$ شد $\tau_{max} = \frac{\sigma_y}{2}$ می شود. پس اگر $\tau_{max} > \frac{\sigma_y}{2}$ شود قطعه از بین می رود).

۳. نظریه ی تنش برشی بیشینه (ترسکا) :

فرضیه ی تنش برشی حداکثر، یا به زبان ساده تر، فرضیه ی برش حداکثر، از مشاهده ی این موضوع که در مصالح شکل پذیر لغزش بین کریستال های جسم در اثنای تسلیم در امتداد سطوح مایل بحرانی رخ می دهد، نتیجه شده است. این فرضیه پیشنهاد می کند که تنش برشی حداکثر نقش کلیدی را بازی می کند و این طور فرض می شود که تسلیم مصالح فقط بستگی به تنش برشی حداکثر دارد که در یک المان به وجود می آید. بنابراین وقتی که تنش برشی به مقدار بحرانی مشخصی (τ_{cr}) رسید، تسلیم المان شروع می شود. مقدار تنش برشی بحرانی معمولاً مساوی تنش برشی در لحظه ی تسلیم در آزمایش کشش یا فشار ساده در نظر گرفته می شود.

بنابراین: اگر $\sigma_x = \pm \sigma_1 \neq 0$ و $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$ باشد، داریم:

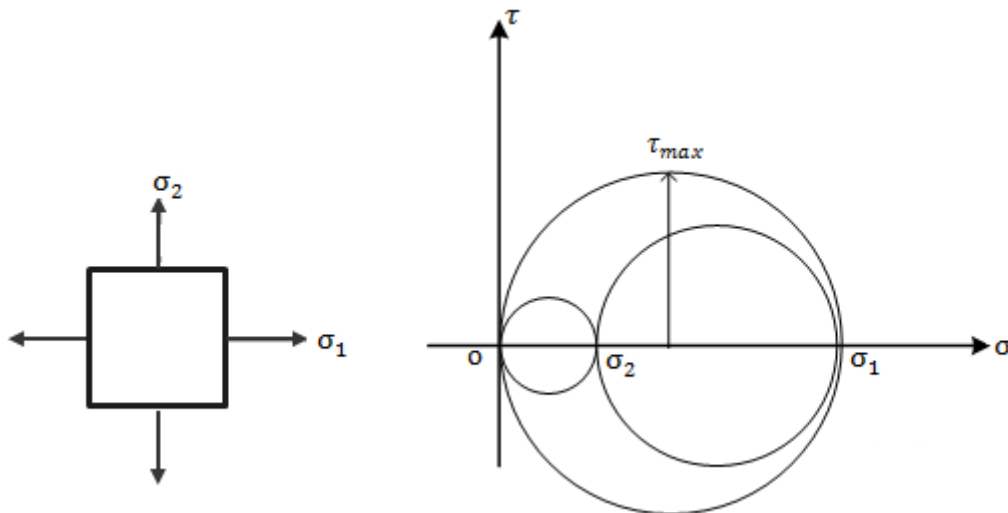
$$\tau_{max,min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad , \quad \tau_{max} = \tau_{cr} = \left|\pm \frac{\sigma_1}{2}\right| = \frac{\sigma_y}{2}$$

رابطه ی فوق بدین معنی است که اگر σ_y تنش مربوط به نقطه ی تسلیم در یک آزمایش کشش یا فشار ساده باشد، حداکثر تنش برشی در لحظه ی تسلیم، نصف آن است.

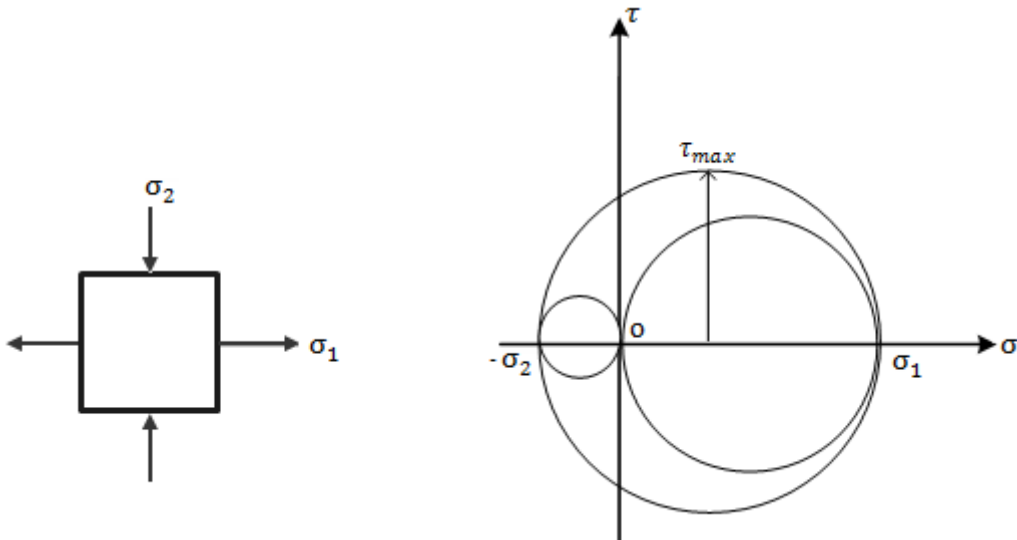
در هنگام استفاده از فرضیه ی تنش برشی حداکثر برای تنش های دو بعدی، ابتدا باید با استفاده از روابط تبدیل تنش و یا دایره ی مور، تنش برشی حداکثر (τ_{max}) را محاسبه کرده و سپس آن را با تنش برشی بحرانی ($\tau_{cr} = \frac{\sigma_y}{2}$) مقایسه نماییم.

به منظور ایجاد سهولت در طراحی، معیار فرضیه ی تنش برشی حداکثر را بر حسب تنش های اصلی به دست می آوریم :

$$\text{الف) } \sigma_2 < \sigma_1 < 0 \quad \text{یا} \quad \sigma_1 > \sigma_2 > 0$$



$$\tau_{max} = |\sigma_2| + |\sigma_1|/2 \geq s_y/2 \text{ باشد: } \sigma_2 \text{ فشاری و } \sigma_1 \text{ کششی}$$



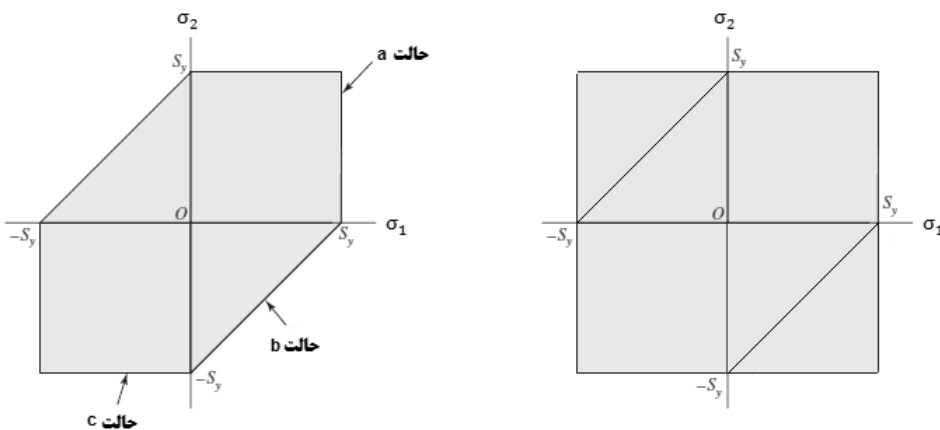
➤ خلاصه ی مباحث این بخش را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$a: \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq 0 \rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_y}{2} \rightarrow \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_y \xrightarrow{\sigma_3=0} \sigma_1 \geq \sigma_y \rightarrow \sigma_1 = \frac{\sigma_y}{n}$$

$$b: \sigma_1 \geq 0 \geq \sigma_2 \rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \frac{\sigma_y}{2} \rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 \geq \sigma_y \rightarrow \sigma_1 - \sigma_2 = \frac{\sigma_y}{n}$$

$$c: 0 \geq \sigma_1 \geq \sigma_2 \rightarrow \tau_{max} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \frac{\sigma_y}{2} \xrightarrow{\sigma_3=0} -\frac{\sigma_1}{2} = \frac{\sigma_y}{2} \rightarrow -\sigma_1 \geq \sigma_y \rightarrow \sigma_1 = -\frac{\sigma_y}{n}$$

حال اگر این سه معادله ی بدست آمده را بر حسب σ_1 و σ_2 رسم کنیم خواهیم داشت:



و اگر این نمودار را با شکل مربوط به تئوری تنش قائم حداکثر مقایسه کنیم به اشکال آن نظریه پی خواهیم برد.

۴. نظریه ی انرژی واپیچش (فون مایسز):

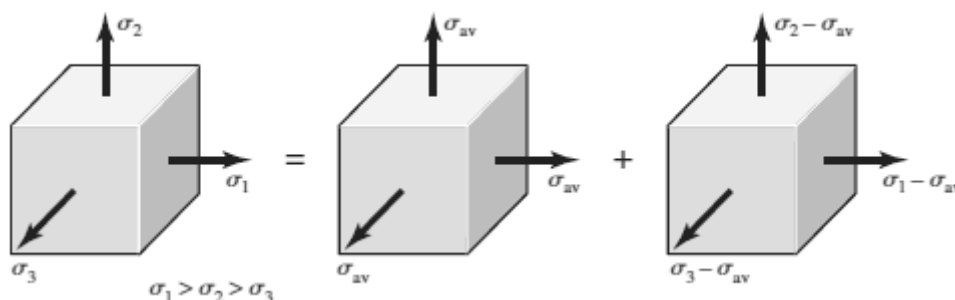
بر مبنای مفاهیم انرژی معیار تسلیم بسیار مقبول دیگری برای مصالح ایزوتروپیک و شکل پذیر تعریف می شود. در این روش انرژی کل ارتجاعی به دو قسمت تقسیم می شود. قسمتی که مربوط به تغییرات حجمی مصالح است و قسمتی که باعث تغییر شکل برشی می شود. با مساوی قرار دادن انرژی تغییر شکل برشی نقطه ی تسلیم در کشش ساده با انرژی تغییر شکل برشی تحت تنش مرکب، معیار تسلیم برای تنش های مرکب به دست می آید.

به منظور تعیین رابطه ای برای نشان دادن شرایط تسلیم تحت تنش های مرکب، از اصل روی هم گذاری تنش استفاده می کنیم. برای مثال می توان این طور در نظر گرفت که تانسور تنش سه تنش اصلی σ_1 و σ_2 و σ_3 از ترکیب دو تا تانسور تشکیل شده است. عناصر یک تانسور به صورت تنش متوسط تعریف می شوند.

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

عناصر تانسور دیگر به ترتیب $(\sigma_1 - \bar{\sigma})$ و $(\sigma_2 - \bar{\sigma})$ و $(\sigma_3 - \bar{\sigma})$ می باشند. با نوشتن بیان فوق به صورت نمایش ماتریسی، داریم:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\sigma} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_1 - \bar{\sigma} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \bar{\sigma} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \bar{\sigma} \end{bmatrix}$$



در حالت تنش سه بعدی، دایره ی مور برای مولفه های تانسور وسط تبدیل به نقطه ای به طول $\bar{\sigma}$ در روی محور σ می شود. بنابراین تنش های مربوط به این تانسور در هر امتداد دلخواه یکسان می باشند. چون عامل تغییر شکل در مواد نرم تنش برشی است، تغییر شکل هم در این تانسور نخواهیم داشت و فقط تغییر حجم خواهیم داشت.

$$U_{\text{total}} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2}{18K} + \frac{1}{6G} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3)$$

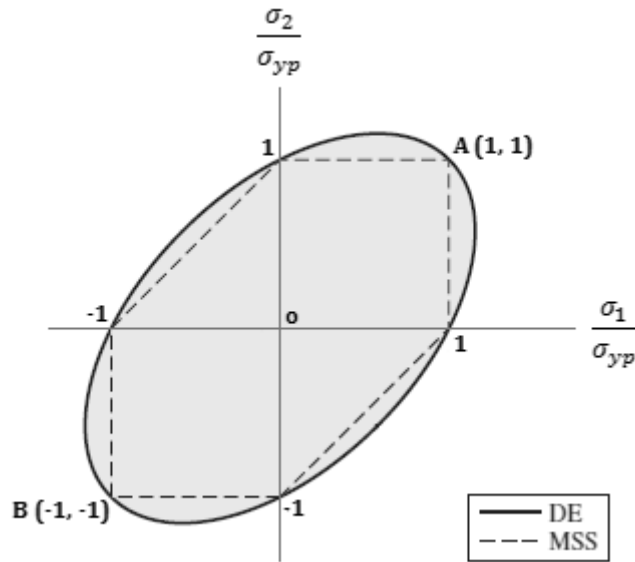
$$U_d = \frac{1}{6G} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3)$$

U_d برای تست کشش ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) عبارت است از:

$$U_d = \frac{1}{6G} (\sigma_1)^2 = \frac{s_y^2}{6G} \xrightarrow{\text{معیار فون مایسز}} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_1\sigma_3 - \sigma_2\sigma_3) \geq s_y^2$$

$$\xrightarrow{\text{برای حالت سه بعدی}} (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 \geq 2s_y^2$$

$$\xrightarrow{\text{برای حالت دو بعدی}} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2) \geq s_y^2 \rightarrow \left(\frac{\sigma_1}{s_y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_2}{s_y}\right)^2 - \frac{\sigma_1\sigma_2}{s_y^2} = 1$$



برای استفاده از فرمول های فوق باید ابتدا σ_1 و σ_2 و σ_3 را با استفاده از روابط تبدیل تنش یا دایره ی مور به دست آوریم برای سهولت بیش تر از فرمول های زیر می توان استفاده کرد:

$$\sigma' = 1/\sqrt{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{\frac{1}{2}}$$

و برای تنش صفحه ای داریم:

$$\sigma' = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}$$

➤ تئوری کولن- مور برای مواد شکل پذیر

استحکام همه ی مواد در حالت های کششی و فشاری یکسان نیست. برای مثال استحکام تسلیم آلیاژ های منیزیم در حالت فشاری 50% آن در حالت کششی است.

در مورد تنش صفحه ای، موقعی که دو تنش اصلی غیر صفر به صورت $\sigma_A \geq \sigma_B$ است، با وضعیتی مشابه سه حالت داده شده برای تئوری تنش برشی ماکزیمم MSS روبه رو هستیم؛ این حالت ها عبارتند از:

حالت ۱: $\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$ و $\sigma_1 = \sigma_A$ و $\sigma_3 = 0$ است:

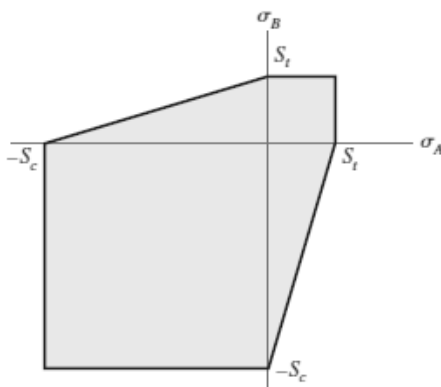
$$\sigma_A \geq S_t$$

حالت ۲: $\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$ و $\sigma_1 = \sigma_A$ و $\sigma_3 = \sigma_B$ است:

$$\frac{\sigma_A}{S_t} - \frac{\sigma_B}{S_c} \geq 1$$

حالت ۳: $0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$ و $\sigma_1 = 0$ و $\sigma_3 = \sigma_B$ است:

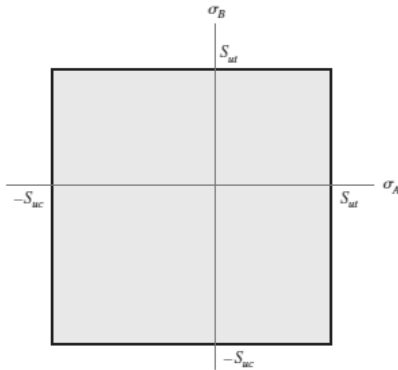
$$\sigma_B \geq -S_c$$



در شکل روبرو نمودار این حالت همراه با حالت های معمولاً بلا استفاده متناظر با $\sigma_B \geq \sigma_A$ نشان داده شده است:

۵. معیار طراحی برای مواد ترد:

- ✓ در مواد ترد معیار σ_y نمی باشد بلکه σ_{uts} معیار می باشد.
- ✓ در مواد ترد عامل تغییر شکل تنش برشی نیست بلکه تنش های اصلی است. بنابراین فرضیه ی تنش قائم بیشینه MNS برای مواد ترد مناسب تر است، و به این صورت بیان می شود که اگر تنش عمودی ماکزیمم (σ_1) به تنش نهایی (σ_{uts}) برسد قطعه گسیخته می شود یا دچار شکست می شود.
- ✓ چون در مواد ترد استحکام کششی و فشاری برابر نیست و معمولا مواد ترد در مقابل فشار مقاوم تر اند نمودار معیار طراحی آن ها دیگر مربع نیست بلکه به صورت یک مستطیل است.



$$\sigma_{yt} \leq \sigma_{yc}$$

$$\sigma_{ut} \leq \sigma_{uc}$$

۶. معیار شکست برای مواد ترد:

معمولا مواد ترد دچار تغییر شکل نمی شوند و موقعی که تنش به تنش نهایی برسد سازه می شکند و مقدار تنش قائمی که موجب گسیختگی آن می شود برابر استحکام نهایی σ_{uts} است. (در آزمایش کشش ساده)

ولی موقعی که یک سازه تحت تنش صفحه ای قرار می گیرد از ملاک های زیر استفاده می کنیم:

۱. معیار تنش عمودی ماکزیمم: اگر تنش اصلی σ_1 به σ_u برسد سازه گسیخته می شود.

بنابراین تا زمانی که مقادیر مطلق هر دو تنش اصلی σ_A و σ_B کمتر از σ_u باشد. سازه به صورت سالم و قابل اطمینان کار می کند. در این معیار استحکام کششی و فشاری یکسان در نظر گرفته شده است ولی در عمل استحکام فشاری خیلی بیشتر از استحکام کششی (برای مواد ترد) می باشد. زیرا مواد دارای عیوب کریستالی مانند ترک ها و حفره های میکروسکوپی هستند و این عیوب مقاومت سازه را در مقابل کشش ضعیف می نمایند ولی در مقابل فشار اثری ندارد و برای چنین قطعاتی بهتر است از معیار های مکانیک شکست استفاده شود.

۲. تئوری کولن - مور برای مواد شکننده:

$$\sigma_A = \frac{S_{ut}}{n}$$

$$\sigma_A \geq \sigma_B \geq 0$$

$$\frac{\sigma_A}{S_{ut}} - \frac{\sigma_B}{S_{uc}} = \frac{1}{n}$$

$$\sigma_A \geq 0 \geq \sigma_B$$

$$\sigma_B = -\frac{S_{uc}}{n}$$

$$0 \geq \sigma_A \geq \sigma_B$$

۷. تمرکز تنش:

تمرکز تنش به پدیده‌ی افزایش مقدار تنش محلی از مقدار متوسط خود در نزدیکی نواحی ناپیوستگی در مواد گفته می‌شود. شعاع نوک ترک تاثیر زیادی بر میزان تمرکز تنش در نزدیکی آن دارد. نواحی ناپیوستگی مانند حفرات یا شکاف‌ها و ترک‌ها به علت ایجاد تمرکز تنش، شرایط شکست ترد را در مواد چکش خوار (نرم) پدید می‌آورند.

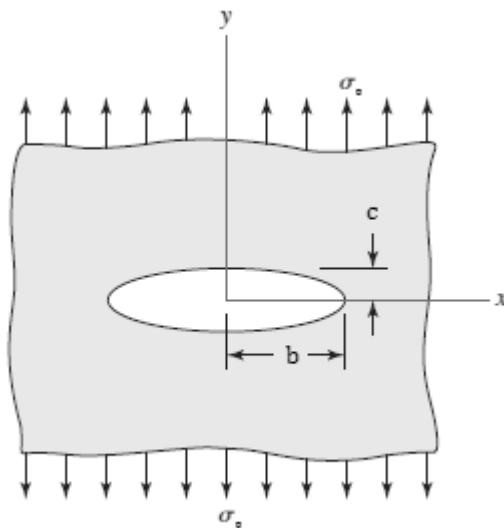
تمرکز تنش معمولا سه علت اصلی دارد: ۱- تغییر در خواص از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر (که معمولا از روش‌های ریخته‌گری حاصل می‌شود).
۲- نقاط اعمال نیرو، فشار، بار ۳- تغییرات هندسی ناگهانی.

امروزه در مهندسی مکانیک معمولا Stress Concentration را با Fluid Flow شبیه‌سازی می‌کنند چون دانشمندان معتقدند شار تغییرات تنش مشابه جریان سیالات است.

➤ ضریب تمرکز تنش:

ضریب تمرکز تنش یا K_t به صورت نسبت تنش ماکزیمم بر تنش اسمی بر حسب سطح مقطع خالص تعریف می‌شود.

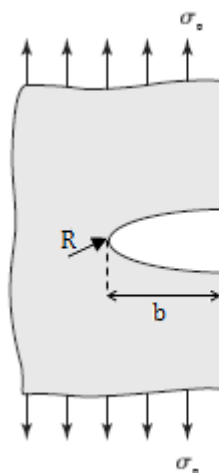
$$K_t = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{normal}} \quad or \quad K_{ts} = \frac{\tau_{max}}{\tau_{normal}}$$



$$\sigma_{max} = \sigma_0 \left(1 + 2\frac{b}{c}\right)$$

دایره: $(b = c) \rightarrow \sigma_{max} = 3\sigma_0$

$c \rightarrow 0$ آنگاه $\sigma_{max} \rightarrow \infty$



$$\sigma_{max} = \sigma_0 \left(1 + \frac{2b}{R}\right)$$

$R \rightarrow 0$ آنگاه $\sigma_{max} \rightarrow \infty$

✓ لذا از گوشه‌های تیز پرهیز می‌کنیم.

با توجه به رابطه ی زیر:

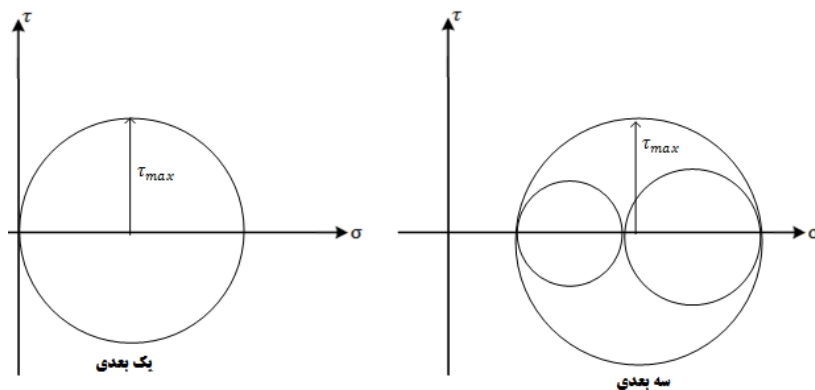
$$E \propto \sigma_y \varepsilon \propto k_{t\sigma} \sigma_y k_{t\varepsilon} \varepsilon$$

می توان فهمید که: در مواد نرم تغییر شکل باعث می شود تمرکز تنش ثابت بماند ولی در مواد ترد چون تغییر شکل نداریم ($\varepsilon = cte$) تمرکز تنش افزایش پیدا کرده و قطعه می شکند.

برای به دست آوردن ضرایب تمرکز تنش از نمودارهای شکل A-۱۵ کتاب طراحی اجزا شیگیلی استفاده می کنیم.

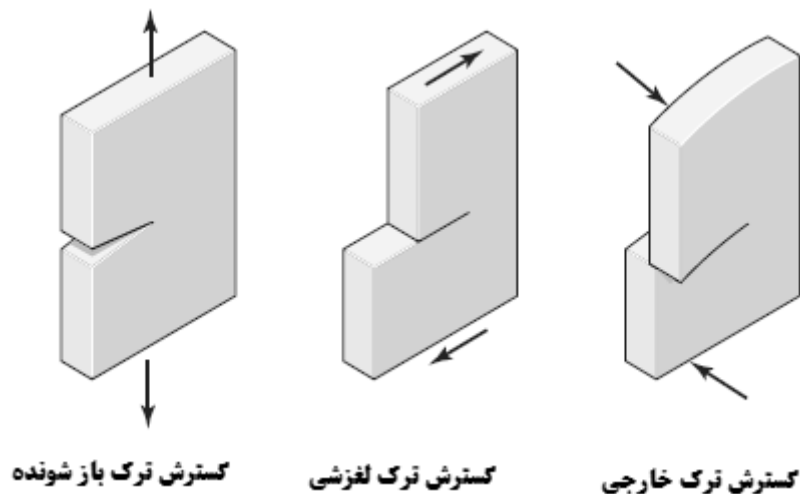
۸. مقدمه ای بر مکانیک شکست:

وقتی در قطعه ترک ایجاد می شود تنش ها دیگر یک بعدی نیستند بلکه سه بعدی می شوند.

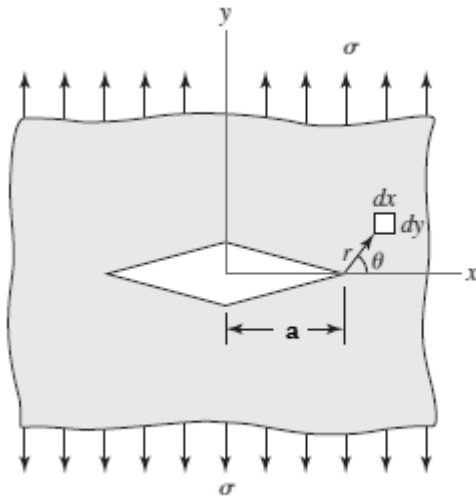


در نتیجه τ_{max} کمتر می شود و قطعه دیگر نمی تواند تغییر شکل بدهد و می شکند.

در حالت کلی سه نوع ترک وجود دارد: برای هر یک از این حالات ضریب k_c بی تعریف می شود که وقتی این ضریب از یک حدی گذشت قطعه شکسته می شود.



هشدار: این ضریب را با k_t و k_{ts} (ضریب تمرکز تنش) اشتباه نگیرید.



تنش اعمال شده در قطعه در نقطه ای دور از ترک

طول ترک $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}$ → ضریب شدت تنش ترک باز شونده

از شکل هندسی، اندازه و نوع بارگذاری و ترک $K_I = \beta\sigma\sqrt{\pi a}$

ضریب اصلاح شدت تنش

شکل های ۳۵-۶ تا ۴۰-۶

میدان تنش در جزء کوچکی از ماده به ابعاد $dx dy$ که در همسایگی نوک ترک قرار دارد به شکل زیر است:

$$\sigma_x = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

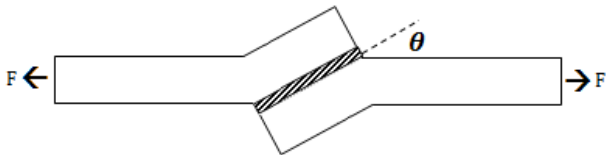
$$\sigma_y = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}$$

۱. قطعه ی شکل زیر را در نظر بگیرید که تحت نیروی کششی F قرار دارد. بین دو قطعه نوعی چسب وجود دارد که دارای سطح تماس A با هریک از قطعات می باشد، S_{su} مقاومت برش نهایی است. کدام یک از روابط زیر صحیح تر است؟

$$S_{su} = \frac{F}{A} \left(1 + \frac{1}{4} \tan^2 \theta\right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta$$

$$S_{su} = \frac{F}{A} \cos \theta$$



$$\sigma_y = \frac{F}{A} \sin \theta$$

$$\tau_{xy} = \frac{F}{A} \cos \theta$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \sqrt{\frac{F^2}{4A^2} \sin^2 \theta + \frac{F^2}{A^2} \cos^2 \theta}$$

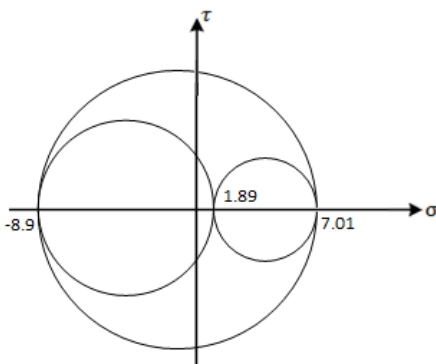
$$\tau_{max} = \frac{F}{A} \cos \theta \sqrt{1 + \frac{1}{4} \tan^2 \theta}$$

۲. حالت سه بعدی تنش با مقادیر $\sigma_x = -2$ ، $\sigma_y = 6$ ، $\sigma_z = -4$ ، $\tau_{xy} = 3$ ، $\tau_{yz} = 2$ و $\tau_{zx} = -5$ می باشد، دایره مور را رسم کنید. تنش های اصلی را بدست آورید و بیشترین تنش برشی را محاسبه نمایید.

حل: در حالت سه بعدی تنش برای بدست آوردن تنش های اصلی σ_1 و σ_2 و σ_3 باید معادله ی درجه ی ۳ بی که از بسط دترمینان زیر حاصل میشود را حل کرد.

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \lambda & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \lambda & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 3 & -5 \\ 3 & 6 - \lambda & 2 \\ -5 & 2 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3 - 66\lambda + 118 = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 = 7.01 \\ \lambda_2 = 1.89 \\ \lambda_3 = -8.9 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \sigma_1 = 7.01 \\ \sigma_2 = 1.89 \\ \sigma_3 = -8.9 \end{vmatrix}$$



$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = 2.56$$

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 7.96$$

$$\tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} = 5.39$$

۳. در یک نقطه ی بحرانی از یک ماده ی شکل پذیر وضعیت تنش به قرار زیر است:

$$\sigma_x = 120 \text{ Mpa}, \sigma_y = 80 \text{ Mpa}, \sigma_z = 20 \text{ Mpa}, \tau_{xy} = 10\sqrt{5} \text{ Mpa}$$

سایر مولفه های تنش صفرند. اگر استحکام تسلیم این ماده $S_y = 100 \text{ Mpa}$ باشد، بر پایه ی معیارهای ترسکا و فون مایسز، کدام عبارت درست است؟ (مکانیک - ۸۸)

(۱) نقطه ی مورد بررسی طبق هر دو معیار از کار می افتد.

(۲) نقطه ی مورد بررسی طبق معیار ترسکا ایمن است ولی طبق معیار فون مایسز از کار می افتد.

(۳) نقطه ی مورد بررسی طبق معیار ترسکا از کار می افتد ولی طبق معیار فون مایسز ایمن است.

(۴) نقطه ی مورد بررسی طبق هر دو معیار ایمن است.

حل: توجه داشته باشید که گزینه ی ۲ هیچ وقت نمی تواند صحیح باشد، زیرا نمودار معیار ترسکا زیرمجموعه ی نمودار معیار فون مایسز است و اگر قطعه ای طبق معیار ترسکا ایمن باشد، طبق معیار فون مایسز هم حتما ایمن است. حال به بررسی سایر گزینه ها می پردازیم:
طبق معیار ترسکا:

$$\begin{vmatrix} 120 - \lambda & 10\sqrt{5} & 0 \\ 10\sqrt{5} & 80 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 20 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (120 - \lambda)(80 - \lambda)(20 - \lambda) - 10\sqrt{5}(10\sqrt{5})(20 - \lambda) = 0$$

$$\rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 020 \\ \lambda_2 = 130 \\ \lambda_3 = 070 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = 130 \text{ Mpa} \\ \sigma_2 = 70 \text{ Mpa} \\ \sigma_3 = 20 \text{ Mpa} \end{cases}, \quad \tau_{max} = \frac{130 - 20}{2} = 55 \text{ Mpa}$$

$$S_{sy} = \frac{S_y}{2} = 50 \text{ Mpa} \text{ از طرفی}$$

چون $\tau_{max} > S_{sy}$ طبق معیار ترسکا از کار می افتد.

طبق معیار فون مایسز:

$$\sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]^{\frac{1}{2}} = 95.39 \text{ Mpa}$$

چون $S_y < \sigma'$ پس طبق معیار فون مایسز ایمن است. بنابراین گزینه ی ۳ صحیح است.

۴. حداقل تنش تسلیم میلگرد نورد گرم از جنس فولاد شکل پذیر در تحت بارهای فشاری و کششی برابر 50 kpsi است. با استفاده از تئوری های انرژی واپیچش (DE) و تنش برشی ماکزیمم (MSS) ضریب اطمینان هر کدام از حالت های تنش صفحه ای زیر را بدست آورید.

ب:

$$\sigma_x = 12 \text{ kpsi}, \tau_{xy} = -8 \text{ kpsi}$$

الف:

$$\sigma_y = 6 \text{ kpsi}, \sigma_x = 12 \text{ kpsi}$$

د:

$$\sigma_y = 4 \text{ kpsi}, \sigma_x = 12 \text{ kpsi}, \tau_{xy} = 1 \text{ kpsi}$$

ج:

$$\sigma_y = -10 \text{ kpsi}, \sigma_x = -6 \text{ kpsi}, \tau_{xy} = -5 \text{ kpsi}$$

حل: بر اساس معیار تنش برشی ماکزیمم (MSS) می توان نوشت:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{S_y}{n} \rightarrow n = \frac{S_y}{\sigma_1 - \sigma_3}$$

با توجه به ملاک انرژی واپیچش (DE) داریم:

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} , \quad \sigma' = (\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}}$$

(الف)

$$MSS: \quad \sigma_1 = 12 \text{ kpsi}, \quad \sigma_2 = 6 \text{ kpsi}, \quad \sigma_3 = 0 \rightarrow n = \frac{50}{12} = 4.17$$

$$DE: \quad \sigma' = (12^2 - 6(12) + 6^2)^{\frac{1}{2}} = 10.39 \text{ kpsi} \rightarrow n = \frac{50}{10.39} = 4.81$$

(ب)

$$MSS: \quad \sigma_{1,2} = \frac{12}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12}{2}\right)^2 + (-8)^2} = 16, -4 \text{ kpsi}$$

$$\rightarrow \sigma_1 = 16 \text{ kpsi}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -4 \text{ kpsi}; \quad n = \frac{50}{16 - (-4)} = 2.5$$

$$DE: \quad \sigma' = (12^2 + 3(-8)^2)^{\frac{1}{2}} = 18.33 \text{ kpsi} \rightarrow n = \frac{50}{18.33} = 2.73$$

(ج)

$$MSS: \quad \sigma_{1,2} = \frac{-6 - 10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6 + 10}{2}\right)^2 + (-5)^2} = -2.615, -13.385 \text{ kpsi}$$

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -2.615 \text{ kpsi}, \quad \sigma_3 = -13.385 \text{ kpsi}, \quad n = \frac{50}{0 - 13.385} = 3.74$$

$$DE: \sigma' = [(-6)^2 - (-6)(-10) + (-10)^2 + 3(-5)^2]^{\frac{1}{2}} = 12.29 \text{ kpsi} \rightarrow n = \frac{50}{12.29} = 4.07$$

(د)

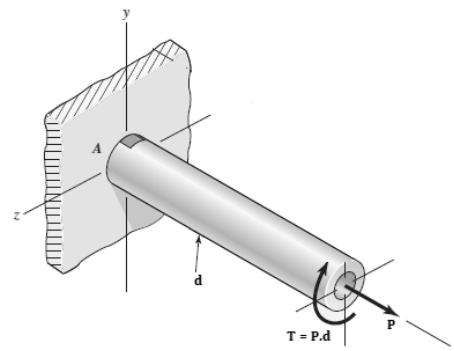
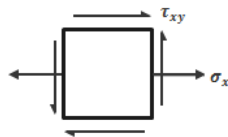
$$MSS: \sigma_{1,2} = \frac{12 + 4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{12 - 4}{2}\right)^2 + 1^2} = 12.123 \text{ و } 3.877 \text{ kpsi}$$

$$\sigma_1 = 12.123 \text{ kpsi} , \sigma_2 = 3.877 \text{ kpsi} , \sigma_3 = 0 , \quad n = \frac{50}{12.123 - 0} = 4.12$$

$$DE: \sigma' = (12^2 - 12(4) + (4)^2 + 3(1)^2)^{\frac{1}{2}} = 10.72 ; n = \frac{50}{10.72} = 4.66$$

۵. میله ی زیر، با بار محوری P و کوپل پیچشی $T = P \cdot d$ را تحمل می کند. مقدار مجاز P را بر اساس معیار تسلیم ترسکا (*Tresca*) و ضریب اطمینان ۲ بدست آورید. (تنش تسلیم جنس میله Y می باشد). (مکانیک - ۹۰)

د	ج	ب	الف
$\frac{\pi d^2 Y}{4\sqrt{20}}$	$\frac{\pi d^2 Y}{4\sqrt{65}}$	$\frac{\pi d^2 Y}{8\sqrt{20}}$	$\frac{\pi d^2 Y}{4\sqrt{260}}$



حل:

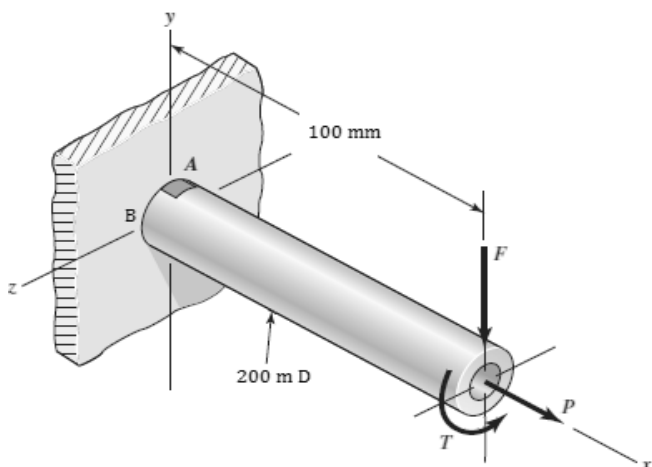
یک المان به صورت نشان داده شده در نظر میگیریم:

$$\sigma_x = \frac{F}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}, \tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16P}{\pi d^2}$$

$$\tau_{max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \frac{P\sqrt{260}}{\pi d^2}$$

$$Tresca: \tau_{max} = \frac{S_y}{2n} \rightarrow \frac{P\sqrt{260}}{\pi d^2} = \frac{Y}{4} \rightarrow P = \frac{\pi d^2 Y}{4\sqrt{260}}$$

۶. این مساله نشان می دهد ضریب اطمینان یک قطعه ماشین بستگی به نقطه مورد تحلیل دارد. در اینجا از شما خواسته شده ضریب اطمینان میله را در محل اجزاء کوچک A و B بر اساس تئوری DE محاسبه کنید. این میله از فولاد نورد سرد - کشیده $AISI 1006$ ساخته شده و تحت بارهای $P=8kn$ ، $F=0.55kn$ و $T=30N.m$ قرار دارد.



حل: با استفاده از جدول $A-20$ کتاب داریم: $S_y = 280 Mpa$

نقطه A:

نیروهای موثر در این نقطه عبارتند از F (خمشی)، P (کششی) و T (پیچشی). تنش ها را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

$$\sigma_x = \frac{32Fl}{\pi d^3} + \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{32(0.55)(10^3)(0.1)}{\pi(0.02^3)} + \frac{4(8)(10^3)}{\pi(0.02^2)} = 95.49 Mpa$$

$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16(30)}{\pi(0.02^3)} = 19.10 Mpa$$

$$\sigma' = (\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} = (95.49^2 + 3 \times 19.1^2)^{\frac{1}{2}} = 101.1 Mpa$$

$$n = \frac{S_y}{\sigma'} = \frac{280}{101.1} = 2.77$$

نقطه B:

نیروهای موثر بر این نقطه عبارتند از: F (برشی)، P (کششی) و T (پیچشی). تنش ها را به صورت زیر محاسبه می کنیم.

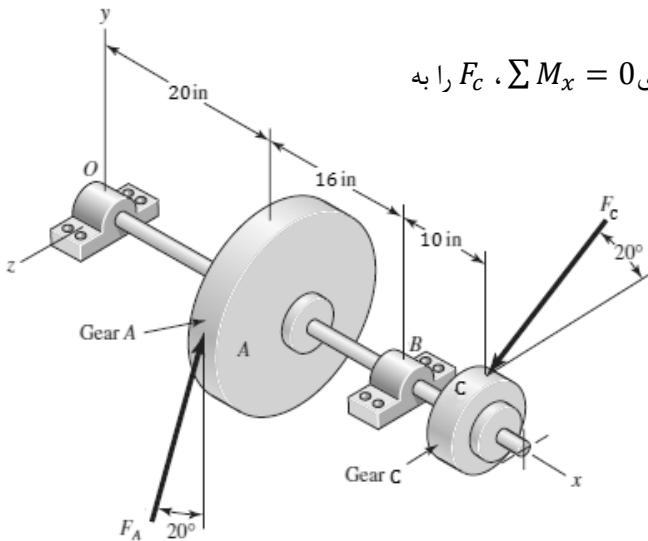
$$\sigma_x = \frac{4P}{\pi d^2} = \frac{4 \times 8 \times 10^3}{\pi \times 0.02^2} = 25.47 Mpa$$

$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} + \frac{4V}{3A} = \frac{16 \times 30}{\pi \times 0.02^3} + \frac{4}{3} \left(\frac{0.55 \times 10^3}{\left(\frac{\pi}{4}\right) \times 0.02^2} \right) = 21.43 Mpa$$

$$\sigma' = (25.47^2 + 3 \times 21.43^2)^{\frac{1}{2}} = 45.02 Mpa; n = \frac{280}{45.02} = 6.22$$

بنابراین نقطه A بحرانی تر از مقده B است و برای محاسبه ضریب اطمینان مجموعه باید نقطه A در نظر بگیریم.

۷. نیروهای چرخ دنده ای نشان داده شده در صفحات موازی با صفحه yz وارد می شود. نیروی وارد بر چرخ دنده A برابر با 300 lbf است. یا تاقتان های واقع در نقاط O و B را به عنوان تکیه گاه های ساده فرض کنید. بارهای وارده را استاتیکی و ضریب اطمینان را 3.5 در نظر بگیرید. با استفاده از معیار انرژی واپیچش (DE) حداقل قطر مطمئن شفت را به دست آورید. فرض کنید استحکام تسلیم ماده ی شفت برابر با 60 ksi باشد. قطر چرخ دنده A برابر با 24 in و قطر چرخ دنده C برابر با 10 in است.



حل: چون بارها به صورت استاتیکی وارد می شوند با استفاده از معادله $\sum M_x = 0$ ، F_C را به دست می آوریم.

$$(F_A)_t = 300 \cos 20 = 281.9 \text{ lbf}, \quad (F_A)_r = 300 \sin 20 = 102.6 \text{ lbf}$$

$$T = 281.9 \text{ lbf} (12) \text{ in} = 3383 \text{ lbf} \cdot \text{in}, \quad \sum M_x = 0 \rightarrow (F_C)_t = \frac{3383}{5} = 676.6 \text{ lbf}$$

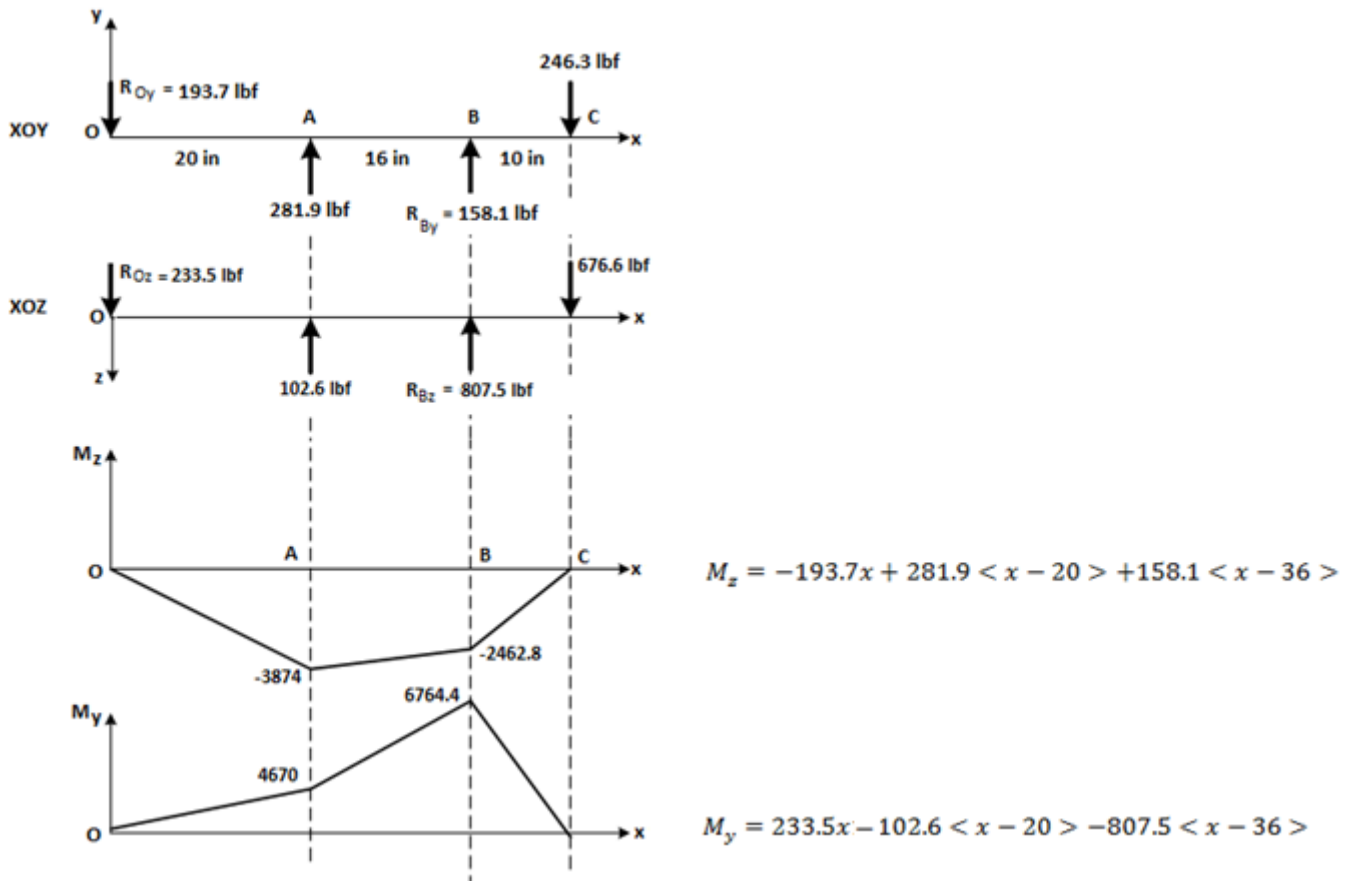
$$(F_C)_r = 676.6 \tan 20 = 246.3 \text{ lbf}$$

حال با استفاده از تعادل استاتیکی کل مجموعه، نیروهای تکیه گاه ها را بدست می آوریم

$$R_{Oy} = 193.7 \text{ lbf}, \quad R_{Oz} = 233.5 \text{ lbf}$$

$$R_{By} = 158.1 \text{ lbf}, \quad R_{Bz} = 807.5 \text{ lbf}$$

برای یافتن نقطه بحرانی یک بار نیروها را در صفحه XOY و یک بار هم در صفحه XOZ بررسی می کنیم و نمودار گشتاور خمشی آن ها را رسم می کنیم.



چون برای یافتن نقطه بحرانی، بین A و B مشکوک هستیم، گشتاور برآیند را در هر دو حساب می کنیم.

$$M_A = \sqrt{(-3874)^2 + (4670)^2} = 6068 \text{ lbf.in}$$

$$M_B = \sqrt{(-2462.8)^2 + (6764.4)^2} = 7200 \text{ lbf.in}$$

بنابراین نقطه B بحرانی است. تنش ها را در نقطه B حساب می کنیم.

$$\sigma_x = \frac{32M_B}{\pi d^3} = \frac{32 \times 7200}{\pi d^3} = \frac{73340}{d^3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 3383}{\pi d^3} = \frac{17230}{d^3}$$

حال باید تنش موثر فون مایسز را برای تنش های فوق حساب کنیم.

$$\sigma' = (\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{S_y}{n} \rightarrow \left[\left(\frac{73340}{d^3} \right)^2 + 3 \left(\frac{17230}{d^3} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{60000}{3.5}$$

$$\rightarrow \frac{79180}{d^3} = \frac{60000}{3.5} \rightarrow d = 1.665 \text{ in}$$

بنابراین از قطر استاندارد 1.75 in استفاده می کنیم.