فصل ~~چهارم~~ ۲

حد و پیوستگی توابع

هدف‌های آموزشی

با مطالعه و فراگیری این فصل انتظار می‌رود به توانائی‌های زیر دست بیابید :

۱. همسایگی یک نقطه با شعاع معین را تعریف و آن را به صورت مجموعه نوشته و روی یک خط نشان دهید.

۲. همسایگی محذوف یک نقطه به شعاع معین را تعریف و آن را به صورت مجموعه نوشته و روی یک خط نشان دهید.

۳. حدتابع را تعریف کنید.

۴. با توجه به تعریف حد، حد توابع را به دست آورید.

۵. قضایای حد توابع را بیان و ثابت کنید.

۶. حد توابع داده شده را با استفاده از قضایای حد محاسبه کنید.

۷. حدود یک طرفه (حد راست و حد چپ) یک تابع را در یک نقطه معین تعریف کنید.

۸ . حدود نامتناهی را تعریف کنید و مسائل مربوط به آن را حل کنید.

۹. حدود بی نهایت را تعریف کنید و با در اختیار داشن توابع معین حد آنها را وقتی متغیر به $+\infty$ و $-\infty$ میل می‌کند محاسبه کنید.

۱۰. مفهوم پیوستگی را با ذکر چند مثال بیان کنید و آن را تعریف کنید.

۱۱. پیوستگی راست و چپ را تعریف کنید.

۱۲. قضایای پیوستگی را بیان کنید و پیوستگی یک تابع داده شده را در یک نقطه

بررسی نمایید.

۱۳. پیوستگی یک تابع را در فاصله‌های (a,b) و $[a,b]$ و $(a,b]$ و $[a,b)$ تعریف کنید.

۱۴. فراگرفته‌های خود را با خودآزمایی آخر فصل مورد ارزیابی قرار دهید.

۴. حد و پیوستگی توابع

پایه و اساس مفاهیم پیوستگی، مشتق و انتگرال‌گیری توابع بر مفهوم پر اهمیت حد استوار است، بنابراین این مفهوم در قلب درس حساب دیفرانسیل و انتگرال واقع است و اهمیت ویژه‌ای دارد.

قبل از اینکه به تعریف دقیق حد بپردازیم به معرفی علامت $\sum$ (حرف اول معادل یونانی کلمه مجموع که سیگما و یا زیگما خوانده می‌شود) بیان استقرای ریاضی و تعریف همسایگی می‌پردازیم.

۱.۴ علامت $\sum$

۱.۱.۴ علامت $\sum$ برای نمایش مجموع جمله‌ها به کار می‌آید. چند مثال از این علامت در زیر آمده است:

الف) $\sum_{n=1}^{5} n = 1+2+3+4+5$

ب) $\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$

پ) $\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+3^3+\dots n^3$

به طور کلی اگر $m \le n$ ، آنگاه :

$$\sum_{i=m}^{n} F(i) = f(m)+f(m+1)+\dots+F(n-1)+F(n)$$

عدد m حد پایینی مجموع و n حد بالایی آن نامیده می‌شود. روابط زیر با استفاده از تعریف به سادگی اثبات می‌شوند:

۱. $\sum_{i=1}^{n} c = nc$ (c عددی ثابت است)

۲. $\sum_{i=۱}^{n} ca_i = c\sum_{i=۱}^{n} a_i$

۳. $\sum_{i=۱}^{n} (a_i+b_i) = \sum_{i=۱}^{n} a_i + \sum_{i=۱}^{n} b_i$

۴. $\sum_{i=۱}^{n} a_i = \sum_{i=۱}^{k} a_i + \sum_{i=k+۱}^{n} a_i \ , \ ۱\le k\le n$

۲.۴ استقرای ریاضی

۱.۲.۴ فرض کنیم $p(n)$ خاصیتی وابسته به عدد طبیعی n باشد ، مثلاً برابری $۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{n}$ خاصیتی از عدد طبیعی n را بیان می‌کند. مسئله این است که چگونه می‌توان صحت این رابطه را اثبات کرد. روشن است که نمی‌توان برای تک تک اعداد طبیعی این رابطه را به اثبات رساند زیرا اعداد طبیعی بی پایان هستند در این مورد استقرای ریاضی وسیله‌ای برای اثبات این گونه خواص در اختیار ما قرار می‌دهد. روش استقراء شامل دو مرحله است :

مرحله ۱. ثابت می‌کنیم که $p(۱)$ صحیح است.

مرحله ۲. ثابت می‌کنیم که برای هر عدد طبیعی دلخواه m اگر $p(m)$ صحیح باشد، آنگاه $p(m+۱)$ نیز صحیح است. مرحله ۱ را «پایه استقراء» و مرحله ۲ را «گام استقراء» می‌نامیم.

واضح است که هرگاه مراحل پایه و گام استقراء برای خاصیت p به اثبات رسید. آنگاه خاصیت p برای هر عدد طبیعی n صحیح است. زیرا در پایه استقراء ثابت می‌شود که $p(۱)$ صحیح است بنابراین از مرحله ۲ نتیجه می‌گیریم که $p(۱+۱)$ یعنی $p(۲)$ صحیح است از این مطلب و مرحله ۲ نتیجه می‌شود $p(۲+۱)$ یعنی $p(۳)$ صحیح است. به همین ترتیب با استفاده مکرر از گام استقراء نتیجه می‌گیریم که خاصیت p برای هر عدد طبیعی n صحیح است

۲.۲.۴ مثال. با استفاده از روش استقراء ریاضی نشان دهید که به ازای هر عدد طبیعی n ، رابطه زیر برقرار است:

$$p(n):۱+۲+۳+...+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

پایه استقراء .

$$p(1): 1=\frac{1\times(1+1)}{2}=1$$

بنابراین خاصیت P برای عدد ۱ برقراراست.

گام استقـرا . فرض کنیم $P(m)$ درست باشد ، یعنی برای هـر عـــدد طبیعـی m داشته باشیم:

$$p(m)=1+2+\ldots+m=\frac{m(m+1)}{2}$$

ثابت می‌کنیم $P(m+1)$ نیـز درست است. به دو طرف این برابـری $(m+1)$ را اضـافه می‌کنیم بـه دسـت مـی‌آوریـم $1+2+\ldots+m+(m+1)=\frac{m(m+1)}{2}+(m+1)$ سـمت راست برابر $\frac{(m+1)(m+1+1)}{2}$ است پس : $1+2+\ldots+m+m+1=\frac{(m+1)(m+2)}{2}$

یعنی $P(m+1)$ درست است. با تکمیل دو مرحله پایه وگـام اسـتقراء در مـورد $P(n)$ صحت خاصیت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n به اثبات رسید.

با توجه به۱.۲.۴ ثابت کردیم که $\sum_{i=1}^{n} i=1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

توجه. دو طرف این برابری را در ۲ ضرب کنید به دست می‌آورید:

$$2+4+6+\ldots+2n=n(n+1)$$

۳.۲.۴ مثال. برابری‌های زیـر ـ کـه با استفـاده از اصل استقـراء اثبـات مـی‌شونـــد– در قسمت‌های بعدی کتاب به کار می‌آیند:

۱. $\sum_{i=1}^{n} i^2=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

۲. $\sum_{i=1}^{n} i^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$

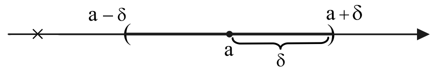
۳. $\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

۴. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1)=1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$

۳.۴ همسایگی

۱.۳.۴ تعریف. اعداد حقیقی a و $\delta>0$ را در نظر می‌گیریم. مجموعه اعدادی ماننـد x را کـه در نابرابری $|x-a|<\delta$ صدق می‌کنند یک همسایگی بـه مرکـز a و شعاع δ

می‌نامیم (شکل ۱.۴).



شکل ۱.۴

این همسایگی را با نماد $N(a,\delta)$ نشان می‌دهیم پس داریم :

$$N(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

۲.۳.۴ تمرین. همسایگی‌های زیر را بـه صورت مجموعه بنویسید. سـپس آنهـا را روی یک خط نشان دهید.

۱. $N(1,3)$ ۲. $N(-2,1)$

۳.۳.۴ مثال. مجموعه‌ی $A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, |3x+7|<5\}$ یک همسایگی به مرکز a و شعاع δ است a و δ را بیابید.

حـل. دو طـرف نامساوی را بر ۳ تقسیم می‌کنیم داریـم $|x+\frac{7}{3}|<\frac{5}{3}$ ، اگـر آن را بـا $|x-a|<\delta$ مقایسه کنیم به دست می‌آوریم: $a=-\frac{7}{3}$ و $\delta=\frac{5}{3}$.

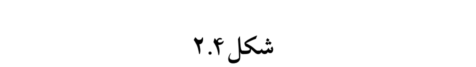
۴.۳.۴ مثال. مجموعه‌ی $A=\{x \mid x\in\mathbb{R}, |3x-1|<|x+1|\}$ یک همسایگی به مرکز a و شعاع δ است زوج مرتب (a,δ) را به دست آورید.

$$|3x-1|<|x+1| \quad , \quad |3x-1|^2<|x+1|^2 \quad . \quad |3x-1|^2-|x+1|^2<0$$

$$(3x-1-x-1)(3x-1+x+1)<0 \quad , \quad (2x-2)(4x)<0 \quad , \quad 0<x<1$$

$$a=\frac{1+0}{2}=\frac{1}{2} \quad , \quad \delta=\frac{1-0}{2}=\frac{1}{2} \qquad (a,\delta)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$$

۵.۳.۴ تعریف. اگر از مجموعه $N(a,\delta)$ نقطه a را برداریم مجموعه‌ی حاصل را یک همسایگی محذوف a به شعاع δ می‌نامیم (شکل ۲.۴).



شکل ۲.۴

این همسایگی را با نماد $N'(a,\delta)$ نشان می‌دهیم، پس داریم:

$$N'(a,\delta)=N(a,\delta)-\{a\}=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta)$$

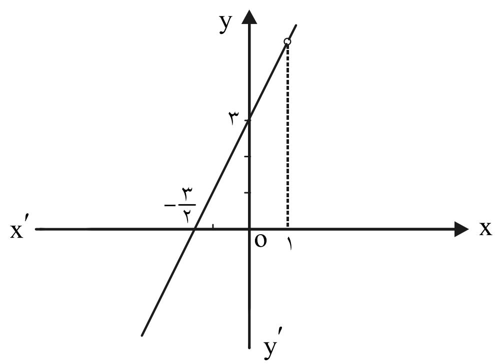
۶.۳.۴ تمرین. همسایگی‌های محذوف زیر را به صورت مجموعه بنویسید و آنها را روی یک خط نشان دهید

۱. $N'(1,3)$　　　۲. $N'(0,2)$

۴.۴ مفهوم حد

۱.۴.۴ تابع $f(x)=\dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$ را در نظر می‌گیریم. قلمرو این تابع مجموعه $\mathbb{R}-\{1\}$ است. یعنی $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ ، $f(x)=\dfrac{(2x+3)(x-1)}{x-1}$.

چون $1\notin D_f$ بنابراین $x\neq 1$ پس تابع فوق به صورت $x\neq 1$ و $f(x)=2x+3$ نوشته خواهد شد، نمودار این تابع در شکل ۳.۴ نشان داده شده است. در این نمودار نقطه ۱ را ، که در قلمور تابع نیست، با یک دایره کوچک مشخص کرده‌ایم :



شکل ۳.۴

حال مقادیر $f(x)$ را به ازای مقادیر مختلف x نزدیک ۱ (بجز ۱) مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در دو جدول زیر وقتی که x با اعداد کوچکتر از یک و بزرگتر از یک به یک میل می‌کند مقدار $f(x)$ نشان داده شده است.

x	۰	۰/۲۵	۰/۷۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	۰/۹۹۹۹۹
$f(x)=2x+3$, $x\neq 1$	۳	۳/۵	۴/۵	۴/۸	۴/۹۸	۴/۹۹۸	۴/۹۹۹۸	۴/۹۹۹۹۸

x	۲	۱/۷۵	۱/۵	۱/۲۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	۱/۰۰۰۰۱
$f(x)=2x+3$, $x\neq 1$	۷	۶/۵	۶	۵/۵	۵/۲	۵/۰۲	۵/۰۰۲	۵/۰۰۰۲	۵/۰۰۰۰۲

این دو جدول نشان می‌دهند که هر قدر x به ۱ نزدیک شود، $f(x)$ به ۵ نزدیکتر می‌شود. ملاحظه کنید که وقتی $x=0/9$ آنگاه $f(x)=4/8$ یعنی وقتی x از عدد ۱ به اندازه ۰/۱ کمتر است $f(x)$ از ۵ به اندازه ۰/۲ کمتر خواهد بود و نیز وقتی $x=1/1$ آنگاه $f(x)=5/2$ یعنی وقتی x از عدد ۱ به اندازه ۰/۱ بیشتر است $f(x)$ از ۵ به اندازه ۰/۲ بیشتر خواهد بود. به علاوه از دو جدول بالا معلوم می‌شود که اگر x به اندازه $\pm 0/001$ از یک اختلاف داشته باشد $f(x)$ به اندازه $\pm 0/002$ از ۵ اختلاف دارد. ازآنچه گذشت چنین استنباط می‌شود که هر قدر بخواهیم می‌توانیم مقادیر $f(x)$ را به ۵ نزدیکتر کنیم به شرط آن که x را به اندازه کافی به ۱ نزدیک نماییم به عبارت ریاضی $|f(x)-5|$ را می‌توان به طور دلخواه کوچک کرد به شرطی که $|x-1|$ به اندازه کافی کوچک انتخاب شود.

راه دقیقتر بیان این مطلب استفاده از دو علامت ε (اپسیلن) و δ (دلتا) است. گوییم $|f(x)-5|$ از عدد مثبت مفروض ε کوچکتر می شود به شرطی که $|x-1|$ از عدد مثبت δ کوچکتر شود و $0<|x-1|$ (زیرا $x\neq 1$).

به بیان دیگر برای هر $\varepsilon>0$ ، عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که :

$$(1)\quad 0<|x-1|<\delta \rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$$

بر طبق آنچه در تعریف همسایگی دیدیم، (۱) معادل است با

$$(2)\quad x\in N'(1,\delta) \rightarrow f(x)\in N(5,\varepsilon)$$

آنچه را که در (۱) و (۲) گفتیم به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=5$$

و می خوانیم حد $f(x)$ وقتی x به ۱ میل کند برابر ۵ است.

۲.۴.۴ تعریف. فرض کنیم تابع f در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد، برای هر عدد $\varepsilon>0$ ، عدد مثبتی مانند δ (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که:

$$0<|x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

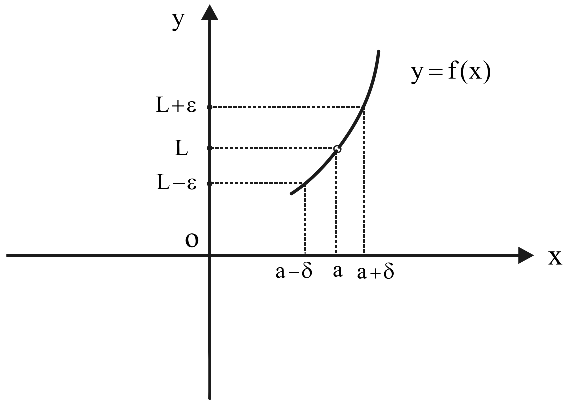
در این صورت می‌نویسیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و می‌خوانیم حد $f(x)$ وقتی x به سمت a میل کند برابر L است.

۳.۴.۴ مثال. با توجه به آنچه در تعریف همسایگی گفتیم تعریف ۲.۴.۴ به صورت زیر بیان می‌شود :

L را حد تابع f در نقطه a می نامیم اگر به ازای هر x از همسایگی محذوف a به شعاع δ ، $f(x)$ در همسایگی L به شعاع ε باشد ، یعنی

$$x\in N'(a,\delta) \rightarrow f(x)\in N(L,\varepsilon)$$

۴.۴.۴ تعریف حد برای تابع f در شکل ۴.۴ تعبیر هندسی شده است.



شکل۴.۴

وقتی x بر خط افقی بین $a-\delta$ و $a+\delta$ واقع است، $f(x)$ بر محور قائم بین $L-\varepsilon$ و $L+\varepsilon$ واقع است.

۵.۴.۴ چند نکته. وقتی (۱) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ باشد نکات زیر را مورد توجه قرار می‌دهیم:

الف) این تعریف چیزی در مورد مقدار تابع در $x=a$ نمی‌گوید. یعنی، برای وجود $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ لازم نیست تابع در $x=a$ تعریف شده باشد.

ب) برای اثبات (۱) باید $\varepsilon>0$ را به دلخواه انتخاب کنیم و یک $\delta>0$ به دست آوریم که در تعریف حد صدق کند.

پ) عدد $\delta>0$ منحصر به فرد نیست.

ت) L منحصر به فرد است

تمرین (۲۲.۵.۴) را ببینید.

۶.۴.۴ مثال. فرض کنیم
$$f(x)=\begin{cases} ۴x+۵ & x\neq ۱ \\ ۳ & x=۱ \end{cases}$$

با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که : $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=۹$.

طبق تعریف حد باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>0$ ، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که :

$$0<|x-1|<\delta \rightarrow |f(x)-9|<\varepsilon$$

بنابراین فرض می‌کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد. چون $x\rightarrow 1$ لذا $x\neq 1$ پس $f(x)=4x+5$ در نتیجه

$$|f(x)-9|=|4x+5-9|=|4x-4|=4|x-1|<4\delta$$

قرار می دهیم $4\delta=\varepsilon$ در نتیجه $\delta=\frac{\varepsilon}{4}$.

۷.۴.۴ مثال. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید : $\lim\limits_{x\rightarrow 4} x^2=16$

باید ثابت کنیم، برای هر $\varepsilon>0$، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که :

$$0<|x-4|<\delta \rightarrow |x^2-16|<\varepsilon$$

بنابراین فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد داریم :

$$|x^2-16|=|(x-4)(x+4)|=|x-4||x+4|$$

چون $x\rightarrow 4$ می‌توان فرض کرد $3<x<5$ (معادل است با $|x-4|<1$) در نتیجه $7<x+4<9$ پس

$$|x^2-16|=|x+4||x-4|<9|x-4|<\varepsilon$$

از اینجا $|x-4|<\frac{\varepsilon}{9}$. با توجه به $|x-4|<1$ می‌توان δ را به صورت $\delta=\min\{1,\frac{\varepsilon}{9}\}$ انتخاب کرد.

۸.۴.۴ مثال. با استفاده از تعریف حد نشان دهید که :

$$\lim_{x\rightarrow 0} x\sin\frac{1}{x}=0$$

باید ثابت کنیم به ازای هر $\varepsilon>0$ ، عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که :

$$0<|x-0|<\delta\rightarrow |x\sin\frac{1}{x}-0|<\varepsilon$$

فرض کنیم $\varepsilon>0$ داده شده باشد، برای محاسبه δ داریم :

$|f(x)-0|=|x\sin\frac{1}{x}|=|x||\sin\frac{1}{x}|\leq|x|<\varepsilon$ ، پس : $\delta=\varepsilon$.

۹.۴.۴ مثال. می‌خواهیم نشان دهیم که تابع $f(x)=\begin{cases} x^{3}+1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ x^{3}-1 & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ حد ندارد، فرض کنیم حد تابع f در نقطه ۰ برابر L باشد (فرض خلف). طبق تعریف حد برای هر $\varepsilon>0$ ازجمله $\varepsilon=\frac{1}{2}$ عددی مانند $\delta>0$ وجود دارد به طوری که

$$x\in N'(0,\delta)\rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon=\frac{1}{2} \qquad (1)$$

اما $N'(0,\delta)=(-\delta,0)\cup(0,\delta)$

حال اگر $x\in(-\delta,0)$ آنگاه $f(x)=x^{3}-1$ ، در نتیجه بنابر(۱) داریم:

$$|f(x)-L|=|x^{3}-1-L|<\frac{1}{2} \qquad (2)$$

و اگر $x\in(0,\delta)$ آنگاه $f(x)=x^{3}+1$ ، درنتیجه بنابر(۱) داریم :

$$|f(x)-L|=|x^{3}+1-L|<\frac{1}{2} \qquad (3)$$

بنابر (۱) و (۲) و (۳) داریم:

$$\begin{aligned} 2&=|1+1|=|1+1+(x^{3}+L)-(x^{3}+L)| \\ &=|(x^{3}+1-L)+(-x^{3}+1+L)|\le|x^{3}+1-L|+|x^{3}-1-L|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}<1 \end{aligned}$$

$2<1$ و این یک تناقض است پس فرض خلف باطل و f در $x=0$ حد ندارد.

۱۰.۴.۴ تمرین. با استفاده از تعریف حد، ثابت کنید که :

۱. $\lim\limits_{x\to 0}\sin x=0$ (راهنمایی : از نامساوی $|\sin x|<x$ استفاده کنید)

۲. $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$

۳. $\lim\limits_{x\to 3} 3x+2=11$

۵.۴ قضایائی درباره حد توابع

محاسبه حد یک تابع با استفاده از (δ,ε) به اشکالات زیادی در محاسبات منجر می‌شود. قضایایی که در زیر می‌آیند به ما امکان می‌دهد تا حد یک تابع را بدون توسل به تکنیک ε و δ محاسبه کنیم.

۱.۵.۴ قضیه. هرگاه a ، m و b سه عدد دلخواه باشند، داریم :

$$\lim_{x\to a}(mx+b)=ma+b$$

اثبات. باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که :

$$\circ<|x-a|<\delta \to |(mx+b)-(ma+b)|<\varepsilon$$

فرض کنیم $\varepsilon>\circ$ داده شده باشد ، برای محاسبه δ داریم :

$$|(mx+b)-(ma+b)| = |m(x-a)| = |m||(x-a)| < |m|\delta$$

اگر $m=\circ$ آنگاه

$$|(mx+b)-(ma+b)| = |\circ(x-a)| = \circ < \varepsilon$$

درنتیجه δ هر عدد مثبتی می‌تواند باشد اگر $m\neq\circ$ قرار دهید $|m|\delta=\varepsilon$ پس $\delta=\frac{\varepsilon}{|m|}$.

۲.۵.۴ مثال. بنا بر قضیه ۱.۵.۴ داریم :

$$\lim_{x\to ۲}(۵x+۴)=۵(۲)+۴=۱۴$$

و در قضیه ۱.۵.۴ قرار دهید $m=\circ$ نتیجه می‌شود $\lim_{x\to a} b=b$ بنابراین

$$\lim_{x\to ۲} ۵=۵ \;,\; \lim_{x\to \circ} ۳=۳$$

۳.۵.۴ نتیجه. در قضیه ۱.۵.۴ قرار دهید $m=۱$ و $b=\circ$ نتیجه می‌شود $\lim_{x\to a} x=a$، بنابراین $\lim_{x\to -۴} x=-۴$.

۴.۵.۴ قضیه حد مجموع. هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=M$، آنگاه

$$\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)]=L+M$$

یعنی حد مجموع دو تابع برابر مجموع حدهای آنهاست مشروط بر اینکه آن حدها وجود داشته باشند.

*** اثبات.** باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>\circ$ عددمثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که :

$$\circ<|x-a|<\delta \to |[f(x)+g(x)-(L+M)]|<\varepsilon$$

فرض کنیم $\varepsilon>\circ$ داده شده باشد از $\lim_{x\to a} f(x)=L$ نتیجه می‌شود به ازای $\frac{\varepsilon}{۲}>\circ$ عدد مثبتی مانند $\delta_۱$ وجود دارد به طوری که :

$$(۱) \qquad \circ<|x-a|<\delta_۱ \to |f(x)-L|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

و از $\lim_{x\to a} g(x)=M$ نتیجه می‌شود که به ازای $\frac{\varepsilon}{۲}>\circ$، عددمثبتی مانند $\delta_۲$ وجود دارد به طوری که

$$(۲) \qquad \circ<|x-a|<\delta_۲ \to |g(x)-M|<\frac{\varepsilon}{۲}$$

فرض کنیم $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$ در این صورت اگر $0<|x-a|<\delta$ آنگاه (۱) و (۲) با هم برقرارند و داریم :

$$|[f(x)+g(x)]-(L+M)| =$$

$$|[f(x)-L]+[g(x)-M]| \le |f(x)-L|+|g(x)-M| \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

۵.۵.۴ تعمیم قضیه حد مجموع. قضیه حد مجموع را می‌توان به هر تعداد متناهی تابع تعمیم داد.

۶.۵.۴ قضیه حد حاصلضرب. هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$، آنگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=L.M$$

این قضیه می‌گوید که حد حاصلضرب دو تابع برابر حاصلضرب حدهای آنهاست، مشروط بر اینکه آن حدها وجود داشته باشند

قضیه حد حاصلضرب را می‌توان به کمک استقرای ریاضی به هر تعداد متناهی تابع تعمیم داد.

۷.۵.۴ قضیه. هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)=L_1$، $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)=L_2$، ... و $\lim\limits_{x\to a} f_n(x)=L_n$ آنگاه

$$\lim_{x\to a} [f_1(x).f_2(x)...f_n(x)]=L_1L_2...L_n$$

در قضیه۷.۵.۴ قرار می‌دهیم $f_1(x)=f_2(x)=...=f_n(x)=f(x)$ و $L_1=L_2=...=L_n=L$. نتیجه می‌شود برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم $\lim\limits_{x\to a} [f(x)]^n=L^n$.

۸.۵.۴ نتیجه. بنابر۷.۵.۴ از $\lim\limits_{x\to a} x=a$ نتیجه می‌شود، برای هر عدد صحیح و مثبت n داریم : $\lim\limits_{x\to a} x^n=a^n$

۹.۵.۴ قضیه. هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و c عدد ثابتی باشد، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=cL$.

۱۰.۵.۴ اثبات. در۶.۵.۴ قرار می‌دهیم $g(x)=c$ نتیجه می‌شود

$$\lim_{x\to a} cf(x)=\lim_{x\to a} c.\lim_{x\to a} f(x)=cL$$

۱۱.۵.۴ نتیجه. اگر $f(x)=c_0x^n+c_1x^{n-1}+...+c_n$ یک چند جمله‌ای درجه nام از x باشد آنگاه بنا بر قضایای حد مجموع و حد حاصل ضرب داریم

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} (c_0x^n+c_1x^{n-1}+...+c_n)=$$

$$\lim_{x\to a} c_0 x^n + \lim_{x\to a} c_1 x^{n-1} + \ldots + \lim_{x\to a} c_n = c_0 a^n + c_1 a^{n-1} + \ldots + c_n = f(a)$$

یعنی حد یک چند جمله‌ای در $x=a$ برابر مقدار آن چند جمله‌ای در $x=a$ است.

۱۲.۵.۴ تمرین. ثابت کنید هرگاه $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=M$؛ آنگاه

$$\lim_{x\to a}[f(x)-f(x)]=L-M$$

۱۳.۵.۴ قضیه حد خارج قسمت. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=M\neq 0$، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{L}{M}$$

این قضیه را اثبات نمی‌کنیم، در زیر دو نتیجه مهم این قضیه را می‌آوریم :

۱۴.۵.۴ نتیجه. در ۱۳.۵.۴ قرار دهید:

الف) $f(x)=1$ ، به دست می‌آید $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{M}$

ب) $f(x)=b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots + b_m$ و $g(x)=c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n \neq 0$ ،

از این و ۱۱.۵.۴ نتیجه می‌شود: $(g(a)\neq 0)$, $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$

دو قضیه زیر را که درمحاسبه حد توابع کاربرد زیادی دارد بدون اثبات می‌آوریم:

۱۵.۵.۴ قضیه. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ، آنگاه برای هر عدد صحیح ومثبت n داریم:

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

دراین رابطه اگر n زوج باشد، L را نامنفی فرض می‌کنیم.

۱۶.۵.۴ قضیه. اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ ، آنگاه : $\lim_{x\to a}|f(x)|=|\lim_{x\to a} f(x)|=|L|$.

مثالهای زیر کاربرد قضایای ۵.۴ را توضیح می‌دهند.

۱۷.۵.۴ مثال. می‌خواهیم $\lim_{x\to 2}(x^2+4x-9)$ را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to 2}(x^2+4x-9)=\lim_{x\to 2} x^2+\lim_{x\to 2} 4x-\lim_{x\to 2} 9=(2)^2+4(2)-9=3$$

۱۸.۵.۴ مثال. می‌خواهیم $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x+6}{x^2-3x}$ را محاسبه کنیم: صورت و مخرج در $x=1$ حد دارند و $\lim_{x\to 1}(x^2-3x)=-2\neq 0$. پس بنا بر قضیه ۱۳.۵.۴ داریم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x+6}{x^2-3x}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^3+2x+6)}{\lim_{x\to 1}(x^2-3x)}=\frac{1+2+6}{1-3}=\frac{-9}{2}$$

۱۹.۵.۴ مثال. می‌خواهیم $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}$ را محاسبه کنیم. چون $\lim_{x\to 2}(x-2)=0$ لذا نمی‌توان قضیه ۱۳.۵.۴ را به کار برد، اما چون $x\to 2$ لذا $x\neq 2$ ، پس می‌توان صورت و مخرج کسر را بر $x-2$ تقسیم کرد. بنابراین

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)$$

$$=\lim_{x\to 2}x^2+\lim_{x\to 2}2x+\lim_{x\to 2}4=4+4+4=12$$

۲۰.۵.۴ مثال. می‌خواهیم $\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^4+3x^2+5x+9}{x^2+1}}$ را محاسبه کنیم:

ابتدا قضیه ۱۵.۵.۴ را به کار می بریم، سپس مانند مثال۱۸.۵.۴ عمل می‌کنیم وداریم :

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^4+3x^2+5x+9}{x^2+1}}=\sqrt{\lim_{x\to 1}\frac{x^4+3x^2+5x+9}{x^2+1}}=$$

$$\sqrt{\frac{\lim_{x\to 1}(x^4+3x^2+5x+9)}{\lim_{x\to 1}(x^2+1)}}=\sqrt{\frac{1+3+5+9}{1+1}}=\sqrt{9}=3$$

۲۱.۵.۴ تمرین. حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد، محاسبه کنید.

۱. $\lim_{x\to 0}(x+1)^{1387}$

۲. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{x^2-1}$

۳. $\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$

۴. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}$

۵. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}-\frac{4}{x^2-4}\right)$

۶. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\left(3\sin x-\cos x+\cot g\frac{x}{2}\right)$

***۲۲.۵.۴ تمرین.** ثابت کنید حد تابع f در یک نقطه در صورت وجود منحصر بفرد است. به عبارت دیگر اگر $\lim_{x\to a}f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to a}f(x)=L_2$ ، آنگاه $L_1=L_2$.

۲۳.۵.۴ قضیه. اگر $\lim_{x\to a}f(x)$ موجود و مثبت باشد، آنگاه در یک همسایگی محذوف a

داریم $f(x) > 0$.

اثبات. فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0$ ، پس برای $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که : $0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - L| < \frac{L}{2}$.

به عبارت دیگر : $x \in N'(a,\delta) \to -\frac{L}{2} + L < f(x) < \frac{L}{2} + L$ ،

پس درهمسایگی محذوف $N'(a,\delta)$ داریم : $f(x) > \frac{L}{2} > 0$.

۲۴.۵.۴ قضیه. اگر در یک همسایگی محذوف $f(x) \geq 0, a$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ آنگاه $L \geq 0$

از $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ بنا به تعریف حد نتیجه می‌شود برای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $\delta > 0$ وجود دارد به طوری که : $x \in N'(a,\delta) \to |f(x) - L| < \varepsilon$ (۱)

فرض کنیم L منفی باشد پس $-L \geq 0$ با انتخاب $\varepsilon = -\frac{L}{2} > 0$ از نابرابری (۱) خواهیم داشت : $f(x) < L + \varepsilon = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} < 0$ و این خلاف فرض است.

۲۵.۵.۴ نتیجه. فرض کنیم f و g در a حد داشته باشند و برای همه مقادیر x داشته باشیم : $f(x) \leq g(x)$ در این صورت $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leq \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

اثبات. از فرض قضیه داریم : $g(x) - f(x) \geq 0$ بنابر قضیه ۲۴.۵.۴ داریم :

$\lim\limits_{x\to a} [g(x) - f(x)] \geq 0$ و یا $\lim\limits_{x\to a} g(x) - \lim\limits_{x\to a} f(x) \geq 0$.در نتیجه $\lim\limits_{x\to a} g(x) \geq \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

۲۶.۵.۴ قضیه فشار. فرض کنیم توابع g ،f و h در نابرابری‌های زیر صدق کنند.

(به ازای همه مقادیر x) $\quad h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

اگر $\lim\limits_{x\to a} h(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ ،آنگاه تابع f در a حد دارد و $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

*** اثبات.** بنابر فرض قضیه، برای هر $\varepsilon > 0$، اعداد مثبتی مانند δ_1 و δ_2 وجود دارند به طوری که :

$$0 < |x-a| < \delta_1 \to |g(x) - L| < \varepsilon \quad \text{یا} \quad -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \qquad (1)$$

$$0 < |x-a| < \delta_2 \to |h(x) - L| < \varepsilon \quad \text{یا} \quad -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon \qquad (2)$$

فرض کنیم $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ دراین صورت اگر $0 < |x-a| < \delta$ آنگاه نابرابری‌های (۱) و(۲) با هم برقرارند و داریم :

$$-\varepsilon < h(x) - L \leq f(x) - L \leq g(x) - L < \varepsilon$$

در نتیجه $0 < |x-a| < \delta \to -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$

یا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$.

۲۷.۵.۴ مثال. $\lim\limits_{x\to ۳}(x-۳)^{۲}\sin\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۳}}$ را با استفاده از قضیه فشار به دست آورید.

می‌دانیم همیشه، $-۱\le \sin a\le ۱$ بنابراین $-(x-۳)^{۲}\le (x-۳)^{۲}\sin\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۳}}\le (x-۳)^{۲}$

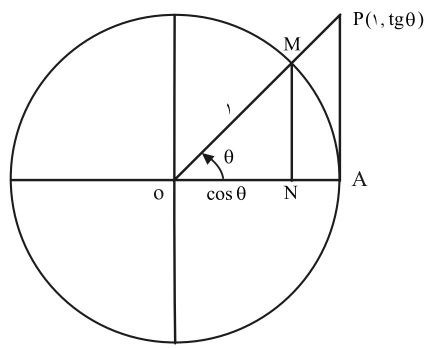
از $\lim\limits_{x\to ۳}(x-۳)^{۲}=\lim\limits_{x\to ۳}[-(x-۳)^{۲}]=۰$ و قضیه فشار نتیجه می‌شود:

$$\lim_{x\to ۳}(x-۳)^{۲}\sin\frac{۱}{\sqrt[۳]{x-۳}}=۰$$

۲۸.۵.۴ محاسبه $\lim\limits_{\theta\to ۰}\frac{\sin\theta}{\theta}$.

قبل از محاسبه این حد دو نابرابری مهم را ثابت می‌کنیم :

* فرض کنیم $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}$، مطابق شکل (۵.۴) داریم:



شکل ۵.۴

مساحت مثلث AOP > مساحت قطاع AOM > مساحت مثلث OMN

بنابراین $\frac{۱}{۲}\sin\theta<\frac{۱}{۲}\theta<\frac{۱}{۲}tg\,\theta$ ویا $\sin\theta<\theta<tg\,\theta$.

اگر سه جمله این نابرابری‌ها را بر $\sin\theta$ تقسیم کنیم خواهیم داشت :

$$۰<\theta<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۱<\frac{\theta}{\sin\theta}<\frac{۱}{\cos\theta}$$

این نابرابری‌ها را معکوس کرده و جهت نابرابری‌ها را عوض می‌کنیم، بـه دسـت می‌آوریم : $۰<\theta<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۱>\frac{\sin\theta}{\theta}>\frac{\cos\theta}{۱}$. (۱)

می‌دانیم $\sin(-\theta)=-\sin\theta$ و $\cos(-\theta)=-\cos\theta$ پس از (۱) نتیجه می‌شود

$۰<-\theta<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۱>\frac{\sin(-\theta)}{-\theta}>\cos(-\theta)$ و یا $۰<-\theta<\frac{\pi}{۲}\Rightarrow ۱>\frac{\sin\theta}{\theta}>\cos\theta$

پس همیشه $\cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < 1 \Rightarrow 0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}$. (۲)

چون $\lim\limits_{\theta\to 0} 1 = 1$ و $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos\theta = 1$ از(۲) و قضیه فشار نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$.

۲۹.۵.۴ نتیجه. وقتی $x \to 0$ آنگاه $ax \to 0$ بنابراین $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$.

۳۰.۵.۴ تمرین. حدهای زیر را با استفاده از قضایای حد، محاسبه کنید.

۱. $b \neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{bx}$ ۲. $b \neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{bx}$

۳. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ ۴. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cot ax}{\operatorname{cotg} bx}$

۵. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos 2x}$ ۶. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x}$

۳۱.۵.۴ مثال. بنا بر (۲۹.۵.۴) و (۳۰.۵.۴) داریم:

الف) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2} = 1$ ب) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\operatorname{tg} bx} = \frac{a}{b}$

پ) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2}{\sin^2 \frac{x}{3}} = 9$ ت) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{(x-1)\sin(x+2)}{x^2+x-2} = 1$

ث) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3} = 6$ ج) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin(x-a)}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}$

دو قضیه زیر کاربردهای زیادی در حل مسائل دارند.

۳۲.۵.۴ قضیه. اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

*** اثبات.** چون f در یک همسایگی محذوف a کراندار است، پس اعداد مثبتی مانند M و δ_1 وجود دارند به طوری‌که : $0 < |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)| \leq M$. (۱)

به علاوه برای عدد $\frac{\varepsilon}{M} > 0$ عدد مثبتی مانند δ_2 وجود دارد به طوری که :

$$0 < |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - 0| < \frac{\varepsilon}{M} \qquad (۲)$$

قرار می‌دهیم $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ در این صورت اگر $0 < |x-a| < \delta$ ، آنگاه نابرابری‌های (۱) و(۲) با هم برقرارند و داریم:

$$|f(x)g(x)| = |f(x)||g(x)| < M.\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$. یعنی $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

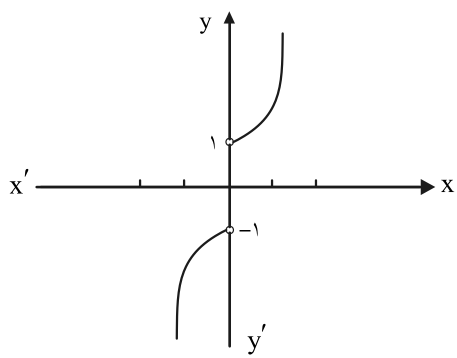
۳۳.۵.۴ مثال. برای محاسبه $\lim\limits_{x\to \circ} x\cos\frac{\text{۱}}{x}$ ملاحظه کنید که $-\text{۱}\le\cos\frac{\text{۱}}{x}\le \text{۱}$ و $\lim\limits_{x\to\circ} x=\circ$ پس طبق ۳۲.۵.۴ داریم: $\lim\limits_{x\to\circ} x\cos\frac{\text{۱}}{x}=\circ$.

۶.۴ حدود یک طرفه (حد راست وحد چپ)

۱.۶.۴ تابع زیر را در نظر می‌گیریم

$$f(x)=\begin{cases} x^{\text{۳}}+\text{۱} & x>\circ \\ \circ & x=\circ \\ x^{\text{۳}}-\text{۱} & x<\circ \end{cases}$$

نمودار تابع f در شکل(۶.۴) رسم شده است. در(۹.۴.۴) نشان دادیم که این تابع در $x=\circ$ حد ندارد. همانگونه که از شکل پیدا است وقتی x از سمت راست به صفر نزدیک شود $f(x)$ به ۱ نزدیک می‌شود و وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک شود $f(x)$ به ۱- نزدیک می‌شود. در این صورت می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه ∘ برابر ۱ و حد چپ تابع f در نقطه ∘ برابر ۱- است.



شکل ۶.۴

اکنون به تعریف دقیق حد راست و حد چپ یک تابع می‌پردازیم:

۲.۶.۴ تعریف حد راست. فرض کنیم f روی (a,c) تعریف شده باشد. اگر برای هر عدد $\varepsilon>\circ$ ، عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که :

$$\circ<x-a<\delta\Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon \qquad (\text{۱})$$

آنگاه L را حد راست تابع f، در نقطه $x=a$ می‌نامیم و می‌نویسیم: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L$.

علامت $x \to a^+$ نمایش $x \to a$ و $x > a$ است. توجه کنید که در (۱) علامت قدر مطلق در اطراف $x-a$ وجود ندارد زیرا $x > a$، در نتیجه $|x-a| = x-a$.

۳.۶.۴ تعریف حد چپ. فرض کنیم f روی (c,a) تعریف شده باشد. اگر برای هر عدد $\varepsilon > \circ$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که :

$$-\delta < x-a < \circ \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

آنگاه L را حد چپ تابع f، در نقطه $x=a$ می‌نامیم و می‌نویسیم: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

علامت $x \to a^-$ نمایش $x \to a$ و $x < a$ است.

۴.۶.۴ قضایای حد که ۵.۴ ذکر شد با تعویض $x \to a$ با $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ برقرار می‌مانند.

۵.۶.۴ مثال. تابع f به صورت زیر تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} ۵x+۳ & x < ۱ \\ ۴x-۷ & x \geq ۱ \end{cases}$$

می‌خواهیم حد چپ و حد راست تابع f را در $x=۱$ (در صورت وجود) معین کنیم.

برای محاسبه حد چپ f در $x=۱$ یعنی $\lim_{x \to ۱^-} f(x)$ گوییم چون $x \to ۱^-$ لذا $x \to ۱$ و $x < ۱$ در این حالت $f(x) = ۵x+۳$ ، پس: $\lim_{x \to ۱^-} f(x) = \lim_{x \to ۱^-} (۵x+۳) = ۵\times۱+۳ = ۸$.

برای محاسبه حد راست f در $x=۱$ ، یعنی $\lim_{x \to ۱^+} f(x)$ ، گوییم چون $x \to ۱^+$ لذا $x \to ۱$ و $x > ۱$ در این حالت $f(x) = ۴x-۷$، پس $\lim_{x \to ۱^+} f(x) = \lim_{x \to ۱^+} (۴x-۷) = -۳$.

۶.۶.۴ قضیه. $\lim_{x \to a} f(x)$ وجود دارد، اگر و فقط اگر $\lim_{x \to a^+} f(x)$ و $\lim_{x \to a^-} f(x)$ موجود و با هم برابر باشند. به بیان دیگر شرط لازم و کافی برای آنکه تابعی در یک نقطه حد داشته باشد آن است که حد راست و حد چپ در آن نقطه موجود و باهم برابر باشند.

***اثبات.** فرض کنیم $\lim_{x \to a} f(x) = L$ ، پس برای هر $\varepsilon > \circ$، عد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که : $\circ < |x-a| < \delta \Leftarrow |f(x)-L| < \varepsilon$.

اما نابرابری $\circ < |x-a| < \delta$ از دو نابرابری $-\delta < x-a < \circ$ و $\circ < x-a < \delta$ تشکیل شده است.

$$-\delta < x-a < \circ \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \qquad (۱)$$

$$(۲) \qquad 0 < x-a < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

رابطه (۱) نشان می‌دهد که $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ و رابطه (۲) نشان می‌دهد که $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$.

پس $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$.

حال فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$ و $\varepsilon > 0$ داده شده باشد بنابراین اعداد مثبتی مانند δ_1 و δ_2 وجود دارند به طوری که :

$$(۳) \qquad -\delta_1 < x-a < 0 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

$$(۴) \qquad 0 < x-a < \delta_2 \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$

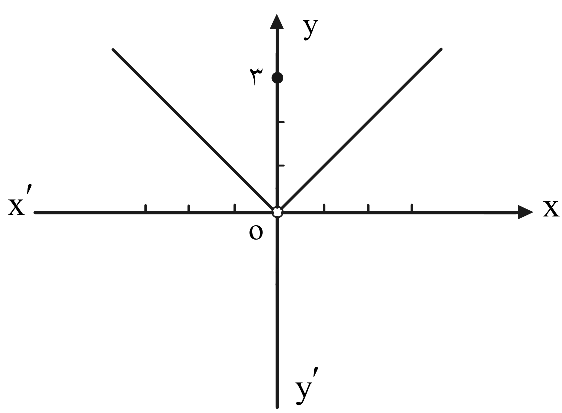
قرار می‌دهیم $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ در این صورت روابط (۳) و(۴) با هم برقرارند یعنی: $-\delta < x-a < \delta, x \neq a, \rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$ و این به معنی $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ است.

۷.۶.۴ نتیجه. الف) اگر حد چپ یا حد راست تابعی در یک نقطه وجود نداشته باشد تابع در آن نقطه حد ندارد

ب) اگر حد چپ و حد راست تابعی در یک نقطه برابر نباشند، تابع در آن نقطه حد ندارد.

۸.۶.۴ مثال. فرض کنیم : $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0 \\ ۳ & x = 0 \end{cases}$.

می‌خواهیم $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ را در صورت وجود به دست آوریم، نمودار تابع در شکل (۷.۴) رسم شده است:



شکل ۷.۴

داریم: $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(-x)=0$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$. لذا طبق قضیه (۶.۶.۴)، $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ موجود و برابر ۰ است. یادآوری می‌کنیم که $f(0)=3$ در محاسبه $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ نقشی ندارد.

۹.۶.۴ تمرین. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.

۱. $\lim\limits_{x\to a^+}\sqrt{a-x}$ ۲. $\lim\limits_{x\to a^-}\sqrt{a-x}$ ۳. $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{6x|x-a|}{a(x-a)}$

۱۰.۶.۴ تمرین. اگر $f(x)=\begin{cases} x^3+x & x\ge 1 \\ kx+5 & x<1 \end{cases}$ باشد مقدار k را طوری بیابید که $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ باشد.

۱۱.۶.۴ مثال. حد راست و حد چپ تابع $f(x)=[x]$ را در $x=2$ حساب می‌کنیم، داریم : $\lim\limits_{x\to 2^-}[x]=[2^-]=1$ و $\lim\limits_{x\to 2^+}[x]=[2^+]=2$.

چون $1\neq 2$ پس بنابر (۶.۶.۴) $\lim\limits_{x\to 2}[x]$ موجود نیست. در حالت کلی اگر n عددی صحیح باشد داریم $\lim\limits_{x\to n^-}[x]=n-1$ و $\lim\limits_{x\to n^+}[x]=n$.

نتیجه : تابع جزء صحیح در نقاط صحیح حد ندارد.

بنابراین مطلب هیچ یک از حدهای زیر موجود نیست :

$$\lim_{x\to 3}[\frac{1}{3}x+1] \text{ و } \lim_{x\to 4}[3x-2]$$

۱۲.۶.۴ مثال. تابع $f(x)=[\frac{x}{2}]+a[-\frac{x}{4}]+x$ در $x=8$ حد دارد a را بیابید.

$$\lim_{x\to 8^+}[\frac{8^+}{2}]+a[\frac{-(8)^+}{4}]+8=[4^+]+a[-(2)^+]+8=4+a(-3)+8=12-3a$$

$$\lim_{x\to 8^-}[\frac{8^-}{2}]+a[\frac{-(8)^-}{4}]+8=3+a(-2)+8=11-2a$$

$$12-3a=11-2a \quad , \quad a=1$$

۱۳.۶.۴ مثال. ثابت کنید $\lim\limits_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$.

بنا به تعریف همیشه $a-1<[a]\le a$ بنابراین $\frac{1}{x}-1<[\frac{1}{x}]\le\frac{1}{x}$ از ضرب طرفین در x بر حسب اینکه x مثبت باشد یا منفی به دست می‌آوریم $1-x<x[\frac{1}{x}]\le 1$ یا

$1 \le x[\frac{1}{x}] < 1-x$ چون $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)=\lim\limits_{x\to 0}1=1$، پس بنا بر قضیه فشار داریم

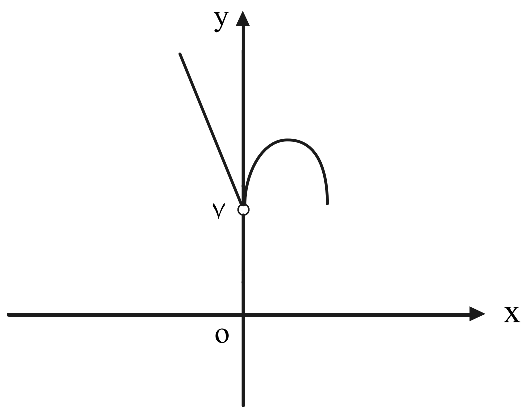
$$\lim_{x\to 0} x[\frac{1}{x}]=1$$

بنابراین همه موارد زیر درست است :

$$\lim_{x\to 0}\sin x[\frac{1}{x}]=1 \qquad \lim_{x\to 3^+}(2x-6)[\frac{1}{x-3}]=2$$

$$\lim_{x\to 0} 5x[\frac{1}{3x}]=\frac{5}{3} \qquad \lim_{x\to -4^+}(x^2-16)[\frac{1}{x+4}]=-8$$

۱۴.۶.۴ مثال. قسمتی از نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2+x+b & x>0\\ \dfrac{-4x^2+ax-49}{2x-7} & x<0\end{cases}$ در زیر رسم شده است مقدار $\frac{a}{b}$ کدام است؟



نمودار $f(x)$ در سمت چپ صفر یک خط راست است پس صورت را بر مخرج تقسیم می کنیم تا معادله خط راست به دست آید :

$$\frac{-4x^2+ax-49}{2x-7}=-2x+\frac{a-14}{2}$$

از سوی دیگر $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\frac{-49}{-7}=7$ ، پس $\frac{a-14}{2}=7 \to a=28$ و نیز $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=b$ پس $b=7$ در نتیجه $\frac{a}{b}=4$.

۱۵.۶.۴ مثال. برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x \to 2^+} \frac{x^2-[x^2]}{x-[x]}$ و نظایر آن نخست عبارت را از جزء صحیح خلاص می‌کنیم سپس حد را محاسبه می‌کنیم.

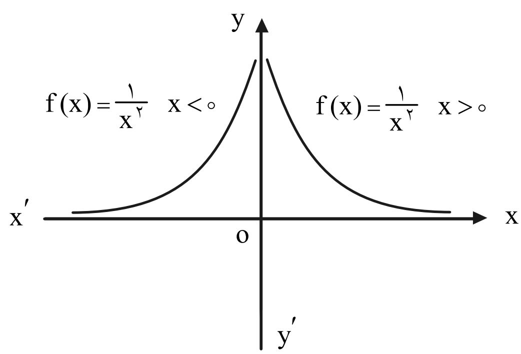
$$x \to 2^+ \to x > 2 \to [x^2]=4 \ , \ [x]=2$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-[x^2]}{x-[x]} = \lim_{x \to 2^+} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \to 2^+} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = 4$$

۱۶.۶.۴ مثال. $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{|x|-[x]}{2|x|+[x]}$. باتوجه به اینکه وقتی $x \to 0^-$ داریم $|x|=-x$ و $[x]=-1$، برابر است با $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{-x-(-1)}{2(-x)-1} = -1$.

۷.۴ حدود نامتناهی (توابعی که دارای حد ∞+ یا ∞- هستند)

۱.۷.۴ تابع $f(x)=\frac{1}{x^2}$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع در شکل (۸.۴) رسم شده است :



شکل ۸.۴

مقادیر $f(x)$ را وقتی x نزدیک به صفر است بررسی می‌کنیم. به جدول زیر توجه کنید.

x	۱	۰/۵	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱
$f(x)=\frac{1}{x^2}$	۱	۴	۱۰۰	۱۰/۰۰۰	۱۰۰۰/۰۰۰	۱۰۰/۰۰۰/۰۰۰

این جدول نشان می‌دهد که هر قدر x از سمت راست به ۰ نزدیک تر شود $f(x)$ بزرگتر می‌شود به این ترتیب می‌توان $f(x)$ را بی اندازه بزرگ کرد، مشروط بر

اینکه x بی اندازه از سمت راست به ۰ نزدیک شود. این خاصیت را با عبارت زیر نشان می‌دهیم : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

حال مقادیر f(x) را وقتی x از سمت چپ به صفر نزدیک می‌شود مطالعه می‌کنیم به جدول زیر توجه کنید:

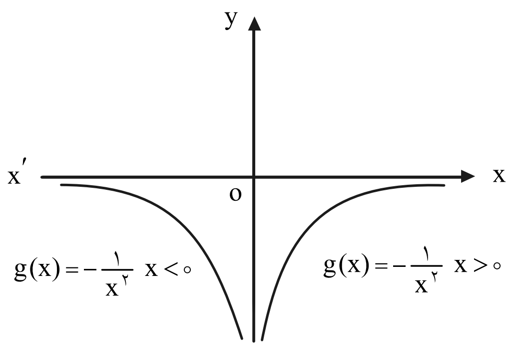
x	−۱	−۰/۵	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	۱	۴	۱۰۰	۱۰/۰۰۰	۱۰۰۰/۰۰۰	۱۰۰/۰۰۰/۰۰۰

این جدول نشان می‌دهد که هر قدر x از سمت چپ به ۰ نزدیک تر شود f(x) بزرگتر می‌شود. این خاصیت را با عبارت زیر نشان می‌دهیم : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

۲.۷.۴ تعریف. اگر برای هر عدد $N > 0$، عددی مانند $\delta > 0$ وجود داشته باشد، به طوری که : $0 < |x - a| < \delta \to f(x) > N$.

آنگاه، حد تابع f را وقتی که x به سمت a میل کند، بی نهایت مثبت می‌نامیم و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

۳.۷.۴ به روش مشابه (۱.۷.۴) می‌توان رفتار تابع $g(x) = \frac{-1}{x^2}$ را در نزدیکی صفر نشان داد. تابع g قرینه تابع f مذکور در (۱.۷.۴) است. نمودار g در شکل ۹.۴ رسم شده است :



شکل ۹.۴

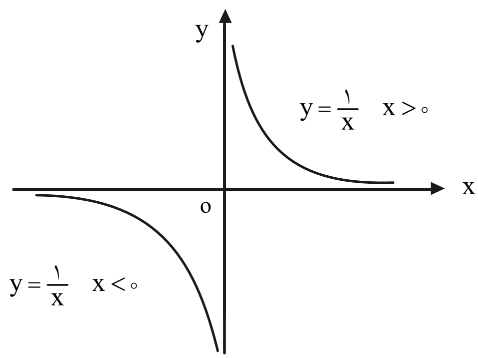
در اینجا وقتی x به ۰ نزدیک می‌شود g(x) بی‌اندازه کوچک می‌شود. این خاصیت را با رابطه زیر نشان می‌دهیم : $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$.

۴.۷.۴ تعریف. اگر برای هر عدد $N<0$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد، به طوری که : $0<|x-a|<\delta \to f(x)<N$.

آنگاه، حد تابع f را وقتی که x به سمت a میل کند، بی نهایت منفی می‌نامیم و می‌نویسیم : $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$.

۵.۷.۴ وقتی $\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$ خواهیم گفت f در a حد ندارد، زیر $+\infty$ و $-\infty$ اعداد حقیقی نیستند.

۶.۷.۴ تابع $h(x)=\frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم. نمودار این تابع در شکل ۱۰.۴ رسم شده است. با توجه به این نمودار، تفاوت رفتار تابع h باتوابع f و g مذکور در (۱.۷.۴) و (۳.۷.۴) به خوبی روشن می‌شود.



شکل ۱۰.۴

وقتی x از طریق مقادیر کمتر از ۰ به ۰ نزدیک شود، مقادیر تابع کوچکتر می‌شوند و وقتی x از طریق مقادیر بیشتر از ۰ به صفر نزدیک شود، مقادیر تابع بزرگتر می‌شوند، به عبارت دیگر $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}=-\infty$.

۷.۷.۴ مثال. با استفاده از تعریف ثابت کنید به ازای هر عدد صحیح و مثبت n، $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^n}=+\infty$. باید نشان دهیم به ازای هر $N>0$ عدد مثبتی مانند δ وجود دارد به طوری که : $0<x<\delta \Rightarrow \frac{1}{x^n}>N$. نابرابری $\frac{1}{x^n}>N$ معادل با نابرابری $x<\frac{1}{\sqrt[n]{N}}$ است، پس می‌توان قرار داد $\delta=\frac{1}{\sqrt[n]{N}}$. به همین نحو، معلوم می‌شود که

اگر N فرد باشد $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ و اگر N زوج باشد $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$.

۸.۴ حدود در بی نهایت (حد تابع وقتی که متغیر به $+\infty$ و $-\infty$ میل می‌کند)

۱.۸.۴ در این قسمت رفتار تابعی مانند $f(x)$ را وقتی x به اندازه کافی بزرگ می‌شود، بررسی می‌کنیم. وقتی می‌گوییم x مقادیر بزرگ را به طور دلخواه انتخاب می‌کند مقصود این است که x از هر مقدار مثبت دلخواه مانند N بزرگتر است در این صورت می‌نویسیم : $x \to +\infty$.

اگر x هر مقدار دلخواه کوچکتر از هر عدد منفی مانند $-N$ را قبول کند گوییم x به بی نهایت منفی میل می‌کند و می‌نویسیم : $x \to -\infty$.

۲.۸.۴ تعریف. اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد مثبتی مانند N (معمولاً وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که : $x > N \to |f(x) - L| < \varepsilon$.

آنگاه، L را حد تابع f ، وقتی که x به سمت بی نهایت مثبت میل کند، می‌نامیم و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

۳.۸.۴ تعریف. اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $N < 0$ (وابسته به ε) وجود داشته باشد به طوری که : $x < N \to |f(x) - L| < \varepsilon$.

آنگاه، L را حد تابع f ، وقتی که x به سمت بی نهایت منفی میل کند، می‌نامیم و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$.

۴.۸.۴ با توجه به آن که در حدود متناهی و حدود در بی نهایت ذکر شد می‌توان روابطی مانند :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

را تعریف کرد. مثلاً $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ بدین معنی است که :

به ازای هر عدد $N > 0$، عددی مانند $M > 0$ وجود دارد به طوری که:

$$x > M \to f(x) > N$$

تعریف دو مورد دیگر در تمرین ۵.۸.۴ آمده است

۵.۸.۴ تمرین. با استفاده از نابرابری حد، دو حکم زیر را فرمول بندی کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$　　　ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

۶.۸.۴ تمرین. با استفاده از تعریف حد ثابت کنید که :

الف) $x\neq ۰$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲x+۵}{x}=۲$

ب) $x\neq ۰$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۳x+۲}{x}=۳$

پ) $x\neq ۰$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+۱}{x}=۱$

۷.۸.۴ اینک آن دسته از قضایایی را که در محاسبه حدود نامتناهی و حدود در بی‌نهایت به کار می‌آیند ذکر می‌کنیم :

الف) اگر در روابط (۶.۵.۴) تا (۱۶.۵.۴) به جای عدد a یکی از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ را قرار می‌دهیم این روابط به شرط وجود حدهای مربوط به آنها برقرار می‌مانند.

ب) فرض کنیم $c\neq ۰$ عددی ثابت و a یک حقیقی و یا یکی از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ باشد، در این صورت :

۱. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a} f(x)\,g(x)=\begin{cases}+\infty & \text{اگر } c>۰\\ -\infty & \text{اگر } c<۰\end{cases}$$

۲. اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=c$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a} f(x)\times g(x)=\begin{cases}-\infty & \text{اگر } c>۰\\ +\infty & \text{اگر } c<۰\end{cases}$$

پ) اگر در روابط (ب)، $+\infty$ را جایگزین $c>۰$ و $-\infty$ را جایگزین $c<۰$ کنیم قضیه همچنان برقرار می‌ماند.

ت) فرض کنیم a یک عدد حقیقی و یا یکی از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$. در این صورت :

۱. اگر $f(x)$، در حالی که همواره مثبت است، به سمت صفر میل کند، آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=+\infty$$

۲. اگر $f(x)$ در حالی که همواره منفی است، به سمت صفر میل کند آنگاه

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{f(x)}=-\infty$$

ث) فرض کنیم a یک عـدد حقیقی و یا یکی از نمادهای $+\infty$ و $-\infty$ باشـد، در این صورت اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و یا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$ آنگاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$.

ج) هرگاه $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$ و تابع g کراندار پائین باشد آنگاه

$$\lim_{x\to +\infty}[f(x)+g(x)]=+\infty$$

چ) هرگاه $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ و g کراندار باشد آنگاه $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)g(x)=0$.

در این قسمت به حل چند مسئله نمونه می‌پردازیم :

۸.۸.۴ مثال. با استفاده از تعریف حد نشان دهید که : $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^2}{x+1}=+\infty$.

باید ثابت کنیم به ازای هر $N>0$ عددی مانند $M>0$ وجود دارد به طوری که :

$$x>M\to f(x)>N$$

فـرض کنیم $N>0$ داده شـده باشـد برای محـاسبـه M داریم :

$x>2N$ و $\frac{x^2}{x+1}>\frac{x^2}{x+x}=\frac{x}{2}>N$ قرار می‌دهیم $M=2N$.

۹.۸.۴ مثال. توابع $\sin x$ و $\cos x$ وقتی x بـه بینهایت مثبـت و یا بینهایت منفـی میـل می‌کنـد حد ندارند، ثابت می‌کنیم که $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$ موجـود نیست سایر موارد بـه همـین نحو اثبات می‌شوند.

فرض می‌کنیم $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x=L$ (فرض خلف)، مطابق تعریف حد برای هر $\varepsilon>0$ از جمله $\varepsilon=\frac{1}{2}$ عددی مانند $M>0$ وجود دارد به طوری که :

$$x>M\to|\sin x-L|<\frac{1}{2}$$

در فاصـله $(M,+\infty)$ دو عــدد $x_1=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $x_2=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathbb{Z})$ را در نظر می‌گیریم داریم : $\sin x_1=1$ و $\sin x_2=-1$. بنـابراین $|\sin x_1-L|=|1-L|<\frac{1}{2}$ ، $|\sin x_2-L|=|-1-L|=|1+L|<\frac{1}{2}$. در نتیجه

$$2=|1+1|=|1-L+L+1|\le|1-L|+|L+1|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$$

و این تناقض است. پس فرض خلف باطل و $\lim\limits_{x\to +\infty}\sin x$ موجود نیست.

۱۰.۸.۴ مثال. فرض کنیم $f(x)=2x+3\cos x$ می‌خواهیم $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ را بررسی کنیم.

می‌دانیم $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ و $-۱\le \cos x$ از اینجا بنا بر قسمت ج از(۷.۸.۴) خواهیم داشت : $\lim\limits_{x\to+\infty}(۲x+۳\cos x)=+\infty$. توجه کنید که $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ موجود نیست.

۱۱.۸.۴ مثال. می‌خواهیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}$ را به دست آوریم.

می‌دانیم که $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$ و $-۱\le \cos x\le ۱$ پس بنا بر قسمت چ از(۷.۸.۴) خواهیم داشت : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=۰$.

۱۲.۸.۴ مثال. می‌خواهیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۵x+۲}{۳x-۸}$ را پیدا کنیم، صورت و مخرج را بر بزرگترین توان x که در صورت و مخرج آمده است تقسیم می‌کنیم، داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۵x+۲}{۳x-۸}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۵+\frac{۲}{x}}{۳-\frac{۸}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(۵+\frac{۲}{x})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(۳-\frac{۸}{x})}=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}۵+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}۳-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۸}{x}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}۵+\lim\limits_{x\to+\infty}۲\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}}{\lim\limits_{x\to+\infty}۳-\lim\limits_{x\to+\infty}۸\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}}=\frac{۵+۲\times۰}{۳-۸\times۰}=\frac{۵}{۳}$$

۱۳.۸.۴ مثال. برای محاسبه $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۵x^{۲}+۳x+۱}{۷x^{۳}-۱}$ صورت و مخرج را بر بزرگترین توان x که در صورت و مخرج آمده است، یعنی بر $x^{۳}$ ، تقسیم می‌کنیم داریم :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۵x^{۲}+۳x+۱}{۷x^{۳}-۱}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۵}{x}+\frac{۳}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۳}}}{۷-\frac{۱}{x^{۳}}}=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{۵}{x}+\frac{۳}{x^{۲}}+\frac{۱}{x^{۳}})}{\lim\limits_{x\to-\infty}(۷-\frac{۱}{x^{۳}})}=\frac{۰+۰+۰}{۷-۰}=۰$$

۱۴.۸.۴ مثال. برای محاسبه $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۴x-۷x^{۲}}{۳x+۸}$ صورت و مخرج را بر $x^{۲}$ تقسیم می‌کنیم به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x-۷x^{۲}}{۳x+۸}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۴}{x}-۷}{\frac{۳}{x}+\frac{۸}{x^{۲}}}$$

حال حد صورت و مخرج را جداگانه در نظر می‌گیریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{۴}{x}-۷\right)=۴\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}-\lim_{x\to+\infty}۷=۰-۷=-۷$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{۳}{x}+\frac{۸}{x^{۲}}\right)=۳\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}+۸\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^{۲}}=۰+۰=۰$$

حد صورت عددی منفی و مخرج در حالی که مثبت است به صفر میل می‌کند لذا بنابر بر قسمت ت از (۷.۸.۴) خواهیم داشت : $\lim_{x\to+\infty}\frac{۴x-۷x^{۲}}{۳x+۸}=-\infty$

۱۵.۸.۴ مثال. فرض کنیم $f(x)=\frac{a_۰x^{n}+a_۱x^{n-۱}+a_۲x^{n-۲}+...+a_n}{b_۰x^{m}+b_۱x^{m-۱}+b_۲x^{m-۲}+...+b_n}$

بنابر آنچه در سه مثال قبل ذکر شد به دست می‌آید :

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\begin{cases}\frac{a_۰}{b_۰} & (n=m)\\ ۰ & (n<m)\\ \infty & (n>m)\end{cases}$$

در حالت اول و دوم صورت و مخرج را بر x^{n} و در حالت سوم صورت و مخرج را بر x^{m} تقسیم کنید.

۱۶.۸.۴ مثال. برای محاسبه $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}(۱+\frac{۱}{x^{۲}})}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\sqrt{۱+\frac{۱}{x^{۲}}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^{۲}}}}=۱$$

(زیرا از $x\to+\infty$ داریم $x>۰$ ، در نتیجه $\sqrt{x^{۲}}=|x|=x$)

۱۷.۸.۴ مثال. برای محاسبه $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}-x)$ قبلاً ملاحظه کنید که :

$$\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}-x=\frac{(\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}-x)(\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}+x)}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}+x}$$

$$\frac{x^{۲}+۲x+۵-x^{۲}}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}+x}=\frac{۲x+۵}{\sqrt{x^{۲}+۲x+۵}+x}=\frac{x(۲+\frac{۵}{x})}{\sqrt{x^{۲}(۱+\frac{۲}{x}+\frac{۵}{x^{۲}})}+x}$$

چون $x\to+\infty$ لذا $x>۰$ پس $\sqrt{x^{۲}}=|x|=x$ بنابراین کسر فوق برابر می‌شود با

$$\frac{x(\text{۲}+\frac{\text{۵}}{x})}{x(\sqrt{\text{۱}+\frac{\text{۲}}{x}+\frac{\text{۵}}{x^{\text{۲}}}}+\text{۱})}=\frac{\text{۲}+\frac{\text{۵}}{x}}{\sqrt{\text{۱}+\frac{\text{۲}}{x}+\frac{\text{۵}}{x^{\text{۲}}}}+\text{۱}}$$

در نتیجه داریم

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{\text{۲}}+\text{۲}x+\text{۵}}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\text{۲}+\frac{\text{۵}}{x}}{\sqrt{\text{۱}+\frac{\text{۲}}{x}+\frac{\text{۵}}{x^{\text{۲}}}}+\text{۱}}=\frac{\text{۲}}{\text{۲}}=\text{۱}$$

۱۸.۸.۴ تمرین. حدهای زیر را به دست آورید.

۱. $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^{\text{۲}}+\text{۴}}-x)$

۲. $\lim_{x\to\text{۳}^+}\frac{\sqrt{x^{\text{۲}}-\text{۹}}}{x-\text{۳}}$

۳. $\lim_{x\to\text{۲}^+}\frac{\text{۳}x+\text{۵}}{x-\text{۲}}$

۴. $\lim_{x\to\text{۲}^-}\frac{\text{۳}x+\text{۵}}{x-\text{۲}}$

۵. $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\text{۲}}-\text{۲}x+\text{۵}}{\text{۴}x^{\text{۳}}+x+\text{۱}}$

۶. $\lim_{x\to+\infty}(\frac{\text{۱}}{n^{\text{۲}}}+\frac{\text{۲}}{n^{\text{۲}}}+\ldots+\frac{n-\text{۱}}{n^{\text{۲}}})$

۹.۴ پیوستگی تابع

۱.۹.۴ تابع f را در $x=a$ پیوسته می‌نامیم هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد :

۱. f در a تعریف شده باشد، یعنی $f(a)$ وجود داشته باشد،

۲. f در a حد داشته باشد، یعنی $\lim_{x\to a}f(x)$ وجود داشته باشد،

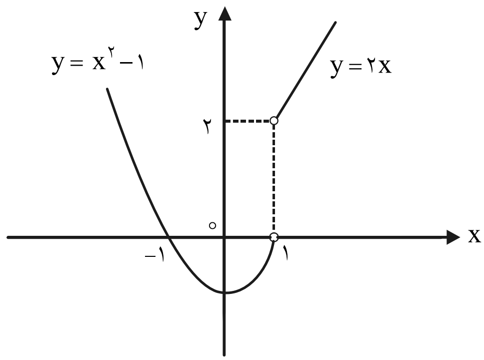
۳. حد تابع برابر مقدار تابع دراین نقطه باشد، یعنی $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.

اگر یکی از شرایط بالا، در $x=a$ برقرار نباشد، f را در a ناپیوسته می‌نامیم. اگر f در a پیوسته نباشد، a را یک نقطه ناپیوستگی f می‌نامیم.

۲.۹.۴ مثال. تابع $f(x)=\frac{x^{\text{۲}}-\text{۹}}{x-\text{۳}}$ در نقطه $x=\text{۳}$ ناپیوسته است، زیرا عدد ۳ در قلمرو تابع نیست، به عبارت دیگر $f(\text{۳})$ وجود ندارد یعنی شرط (۱) پیوستگی برقرار نیست. اگر چه این تابع در نقطه ۳ دارای حد است.

۳.۹.۴ مثال. تابع $f(x)=\begin{cases}x^{\text{۲}}-\text{۱} & x<\text{۱}\\ \text{۲}x & x>\text{۱}\end{cases}$ در نقطه $x=\text{۱}$ پیوسته نیست، زیرا $f(\text{۱})$ وجود ندارد یعنی شرط (۱) پیوستگی برقرار نیست نمودار f در شکل ۱۱.۴ رسم شده

است.



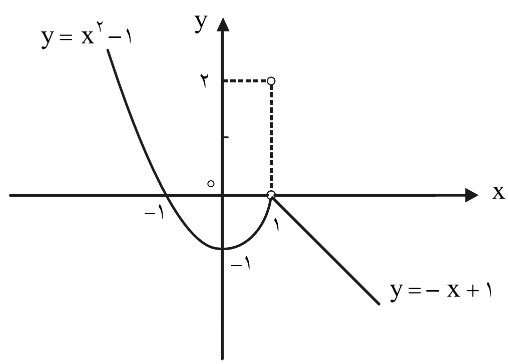
شکل ۱۱.۴

۴.۹.۴ مثال. تابع $f(x)=\begin{cases} ۴x+۱ & x>۳ \\ ۲x-۵ & x\le ۳ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم، می‌خواهیم پیوستگی f را در $x=۳$ بررسی کنیم. $f(۳)=۱$ بنابراین شرط (۱) برقرار است.

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(۴x+۱)=۱۳ \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(۲x-۵)=۱$$

چون $\lim_{x\to ۳^-} f(x)\neq \lim_{x\to ۳^+} f(x)$ ، نتیجه می‌شود $\lim_{x\to ۳} f(x)$ وجود ندارد، بنابراین شرط (۲) برقرار نیست، لذا f در ۳ ناپیوسته است.

۵.۹.۴ مثال. تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x<۱ \\ ۲ & x=۱ \\ -x+۱ & x>۱ \end{cases}$ را که نمودار آن در شکل ۱۲.۴ رسم شده است در نظر می‌گیریم :

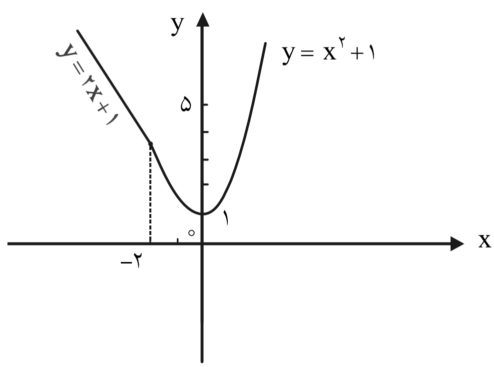


شکل ۱۲.۴

$f(1)=2$ یعنی شرط (۱) برقرار است. از $\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x)=0$ نتیجه می‌شود $\lim_{x\to 1} f(x)=0$ یعنی شرط (۲) برقرار است اما از $\lim_{x\to 1} f(x)\neq f(1)$ نتیجه می‌شود شرط (۳) برقرار نیست لذا f در $x=1$ ناپیوسته است.

۶.۹.۴ مثال. تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x>-2 \\ -2x+1 & x\leq -2 \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم. سه شرط پیوستگی را در مورد تابع f بررسی می کنیم .

$f(-2)=5$ بنابراین شرط (۱) برقرار است. از $\lim_{x\to -2^+} f(x)=5$ و $\lim_{x\to -2^-} f(x)=5$ نتیجه می‌شود $\lim_{x\to -2} f(x)=5$ بنابراین شرط(۲) برقرار است و چون $\lim_{x\to -2} f(x)=5=f(-2)$ بنابراین شرط (۳) برقراراست. لذا f در $x=-2$ پیوسته است. نمودار تابع در شکل۱۳.۴ رسم شده است.



شکل ۱۳.۴

۷.۹.۴ تعریف.

۱. تابع f در a پیوستگی چپ دارد هرگاه $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$.

۲. تابع f در a پیوستگی راست دارد هرگاه $\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$.

۸.۹.۴ مثال. الف) تابع مثال (۳.۹.۴) در ۱ نه پیوستگی راست دارد نه چپ.

ب) تابع مثال (۴.۹.۴) در ۳ پیوستگی چپ دارد.

پ) تابع مثال (۶.۹.۴) در ۲− هم پیوستگی راست دارد هم پیوستگی چپ.

۹.۹.۴ تعریف پیوستگی یک تابع را ـ باتوجه به آنچه در تعریف حد دیدیم ـ با استفاده از نمادهای ε و δ به صورت زیر بیان می‌کنیم:

f رادر a پیوسته می‌نامیم، هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ عدد مثبتی مانند δ وجود داشته باشد به طوری که : $|x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

۱۰.۹.۴ قضیه. اگر توابع f و g در $x=a$ پیوسته باشند، آنگاه :

۱. $f(x)\pm g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

۲. $cf(x)$ در $x=a$ پیوسته است (c عددی است ثابت).

۳. $f(x)\,g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

۴. $\frac{f(x)}{g(x)}$ در $x=a$ پیوسته است ($g(x)\neq 0$).

۵. $|f(x)|$ در $x=a$ پیوسته است.

اثبات. این قضیه با استفاده از قضایای حد اثبات می‌شود. دراینجا فقط قسمت (۱) را ثابت می‌کنیم قسمت‌های دیگر با روش مشابهی ثابت می‌شوند.

چون f و g در $x=a$ پیوسته‌اند از تعریف پیوستگی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{x\to a} g(x)=g(a)$$

از اینجا بنابر قضایای حد داریم

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm \lim_{x\to a} g(x)=f(a)\pm g(a)$$

یعنی $f(x)\pm g(x)$ در $x=a$ پیوسته است.

۱۱.۹.۴ قضیه. در (۱۱.۵.۴) دیدیم که هر تابع چند جمله‌ای در هر نقطه دارای حد بوده و حدش برابر مقدار تابع درهمان نقطه است، لذا هر تابع چند جمله‌ای $p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$ در هر نقطه پیوسته است.

۱۲.۹.۴ نتیجه. اگر $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ تابعی گویا باشد، آنگاه f در همه نقاط قلمروش پیوسته است زیرا فرض کنیم $a\in D_f=\{x\,|\,q(x)\neq 0\}$ داریم :

$$\lim_{x\to a} f(x)=\frac{\lim_{x\to a} p(x)}{\lim_{x\to a} q(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}=f(a)$$

۱۳.۹.۴ مثال. نشان دهید که تابع $f(x)=\frac{x^3+4}{x^2-25}$ در همه نقاط قلمروش پیوسته است.

قلمرو f مجموعه همه اعداد حقیقی است جزء آنهایی که مخرج در آنها صفر می‌شود، یعنی $D_f=\mathbb{R}-\{-5,+5\}$، فرض کنیم $a\in D_f$ داریم:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{x^۳+۴}{x^۲-۲۵} = \frac{\lim_{x\to a}(x^۳+۴)}{\lim_{x\to a}(x^۲-۲۵)} = \frac{a^۳+۴}{a^۲-۲۵} = f(a)$$

بنابراین f درهر نقطه از قلمروش پیوسته است.

قضیه زیر را بدون اثبات می‌پذیریم :

۱۴.۹.۴ قضیه. اگر تابع f در $x=b$ پیوسته و $\lim_{x\to a} g(x) = b$ باشد، آنگاه

$$\lim_{x\to a} (f o g)(x) = f(b)$$

به عبارت دیگر $\lim_{x\to a} (f o g)(x) = f(\lim_{x\to a} g(x))$.

۱۵.۹.۴ قضیه. اگر تابع g در a وتابع f در $g(a)$ پیوسته باشد، آنگاه $f o g$ در a پیوسته خواهد بود.

طبق قضیه (۱۴.۹.۴) داریم:

$$\lim_{x\to a} (f o g)(x) = \lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(g(a)) = (f o g)(a)$$

و این به معنی پیوستگی تابع $f o g$ در a است.

۱۶.۹.۴ مثال. تابع $h(x) = (x^۴+۵x^۳+۷)^۶$ را در نظر می‌گیریم می‌خواهیم نشان دهیم این تابع در همه نقاط قلمروش پیوسته است. فرض کنیم $f(x) = x^۶$ و $g(x) = x^۴+۵x^۳+۷$ در این صورت داریم:

$$(f o g)(x) = f(x^۴+۵x^۳+۷) = (x^۴+۵x^۳+۷)^۶ = h(x)$$

دو تابع f و g در همه نقاط قلمرو خود ـ یعنی $\mathbb{R}$ـ پیوسته‌اند بنابراین و بنابر قضیه ۱۵.۹.۴ تابع h ، که از ترکیب دو تابع f و g به دست آمده است در $\mathbb{R}$ پیوسته است

۱۷.۹.۴ تمرین. اگر f در a پیوسته باشد آنگاه $\sqrt[n]{f(x)}$ برای همه اعداد صحیح و مثبت n در $x=a$ پیوسته است. روشن است که برای مقادیر زوج n ، باید $f(a) \geq ۰$.

۱۸.۹.۴ قضیه. تابع f در $x=a$ پیوسته است اگر و تنها اگر $\lim_{h\to ۰} f(a+h) = f(a)$.

اثبات. فرض کنیم $g(h) = (a+h)$، چون $\lim_{h\to ۰} g(h) = a$ و f در $x=a$ پیوسته است لذا تابع مرکب $f o g$ در $x=a$ پیوسته خواهد بود از اینجا $\lim_{h\to ۰} f(g(h)) = f(a)$ یعنی

$$\lim_{h\to ۰} f(a+h) = f(a)$$

برعکس اگر رابطه اخیر برقرار باشد از تعریف حد برای هر $\varepsilon>\circ$ عددی مانند $\delta>\circ$ وجوددارد به طوری که $\circ<|h-\circ|<\delta \rightarrow |f(a+h)-f(a)|<\varepsilon$ (۱)

قرار می‌دهیم $a+h=x$ از اینجا $h=x-a$ ، در نتیجه (۱) به صورت زیر در می‌آید $\circ<|x-a|<\delta \rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$ ، یا $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$ یعنی f در a پیوسته است.

به عنوان کاربردی از قضیه ۱۸.۹.۴ ثابت می‌کنیم که :

۱۹.۹.۴ مثال. تابع $\sin x$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

چون $\sin a$ و $\cos a$ وقتی $h\rightarrow\circ$ مقادیر ثابتی هستند، لذا داریم :

$$\lim_{h\to\circ}\sin(a+h)=\sin a\lim_{h\to\circ}\cos h+\cos a\lim_{h\to\circ}\sin h=(\sin a)(۱)+(\cos a)(\circ)=\sin a$$

۲۰.۹.۴ تعریف. تابع f را در فاصله باز (a,b) پیوسته می‌نامیم، هرگاه f در همه نقاط این فاصله پیوسته باشد. اگر f حداقل در یک نقطه از فاصله (a,b) پیوسته نباشد f را روی (a,b) ناپیوسته می‌نامیم.

۲۱.۹.۴ مثال. تابع $f(x)=\dfrac{x}{x-۴}$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در هر نقطه $\mathbb{R}$ جز ۴ پیوسته است. لذا طبق تعریف (۲۰.۹.۴) در هر فاصله بازی که شامل ۴ نباشد پیوسته است.

۲۲.۹.۴ تعریف. تابع f را روی فاصله بسته $[a,b]$ پیوسته می‌نامیم، هرگاه سه شرط زیر برقرار باشد:

۱. f روی بازه (a,b) پیوسته باشد

۲. $\lim\limits_{h\to a^+} f(x)=f(a)$

۳. $\lim\limits_{h\to b^-} f(x)=f(b)$

اگر یکی از شرایط بالا برقرار نباشد، f را روی $[a,b]$ ناپیوسته می‌نامیم.

۲۳.۹.۴ در تعریف (۲۲.۹.۴) شرط ۲ پیوستگی راست f را در a وشرط ۳ پیوستگی چپ f را در b تعریف می‌کند.

۲۴.۹.۴ مثال. پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۳ & -۲\le x<\circ \\ x+۳ & \circ\le x\le ۱\end{cases}$ را در فاصله بسته $[-۲,۱]$ بررسی کنید.

اولاً از $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=۳=f(۰)$ نتیجه می‌شود که f در ۰ پیوسته است بنابراین f در (۲,۱–) پیوسته است.

ثانیاً $\lim\limits_{x\to -۲^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -۲^+}(۲x+۳)=-۱=f(-۲)$.

ثالثاً $\lim\limits_{x\to ۱^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۱^-}(x+۳)=۴=f(۱)$.

پس بنابر (۲۲.۹.۴) f در [۲,۱–] پیوسته است.

۲۵.۹.۴ تمرین.

۱. پیوستگی تابع f را روی فاصله‌های $[a,b)$ ، $(a,b]$ ، $[a,b)$ ، (a,∞) و $(-\infty,a]$ تعریف کنید.

۲. ثابت کنید تابع $\cos x$ روی $\mathbb{R}$ پیوسته است

۳. ثابت کنید تابع $f(x)=\dfrac{۲+\sin x}{۳+\cos x}$ در همه نقاط قلمروش پیوسته است.

۴. برای چه مقداری از a تابع زیر روی $\mathbb{R}$ پیوسته است ؟ $f(x)=\begin{cases} ax-۱ & x<۲ \\ ax^۲ & x\ge ۲\end{cases}$

۵. تابع $f(x)=\dfrac{۱}{x^۲-۴}$ روی چه فواصلی پیوسته است ؟

۶. نشان دهید تابع $f(x)=\sqrt{۹-x^۲}$ روی فاصله [۳,۳–] پیوسته است.

۷. پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x<-۱ \\ ۵x+۲ & -۱\le x\le ۴ \\ x^۲ & x>۴\end{cases}$ را در فاصله‌های (۴,۱–] ، (۴,∞–)، (∞+,۱–) و (∞+,۴] بررسی کنید.

۸. با استفاده از پیوستگی ترکیب توابع حد زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\sin\left(\cos\frac{x+۱}{x^۲+۲}\pi\right)$$

در این قسمت به سه مثال زیر توجه کنید :

۲۶.۹.۴ مثال. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} ۳ax+b\sqrt{x} & x>۱ \\ ۲x+۱ & x=۱ \\ \dfrac{۳a\sqrt{x^۲-۲x+۱}}{x^۲-۱} & x<۱\end{cases}$ در نقطه‌ی $x=۱$ پیوسته باشد مقادیر a و b را بیابید.

$$f(1)=2(1)+1=3 \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x)=3(a)+b(1)=3a+b$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{3a|x-1|}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{-3a(x-1)}{(x-1)(x+1)}=\frac{-3a}{2}$$

$$\begin{cases} 3a+b=3 \\ \frac{-3a}{2}=3 \end{cases} \rightarrow \quad a=-2 \quad , \quad b=9$$

۲۷.۹.۴ مثال. پیوستگی راست، پیوستگی چپ و پیوستگی تابع

$$f(x)=\left[\frac{x+5}{10}\right]+\left[\frac{x-5}{10}\right]$$

را در $x=5$ بررسی کنید.

$$f(5)=1+0=1$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\left[\frac{10^+}{10}\right]+\left[\frac{0^+}{10}\right]=1+0=1 \ , \ \lim_{x\to 5^-} f(x)=\left[\frac{10^-}{10}\right]+\left[\frac{0^-}{10}\right]=0-1=-1$$

چون $-1\neq 1$ پس f در $x=5$ پیوسته نیست و چون $\lim_{x\to 5^+} f(x)=f(5)$ پس f در $x=5$ پیوستگی راست دارد.

۲۸.۹.۴ مثال. تابع $f(x)=[x^3]$ در بازه‌ی $(0,5)$ در چند نقطه ناپیوسته است ؟

تابع جزء صحیح در نقاطی که عبارت داخل جزء صحیح را به عدد صحیح تبدیل می‌کنند ناپیوسته است.

$$0<x<5 \ \rightarrow \ 0<x^3<125 \ \Rightarrow \ x^3=1,2,\ldots,124 \qquad x=\sqrt[3]{1},\sqrt[3]{2},\ldots,\sqrt[3]{124}$$

پس f در ۱۲۴ نقطه ناپیوسته است.

۲۹.۹.۴ نکته. بنا بر(۱۲.۶.۴) تابع $f(x)=[x]$ در نقاط $x\in\mathbb{Z}$ پیوستگی راست دارد و در نقاط $x\in\mathbb{R}-\mathbb{Z}$ پیوسته است.

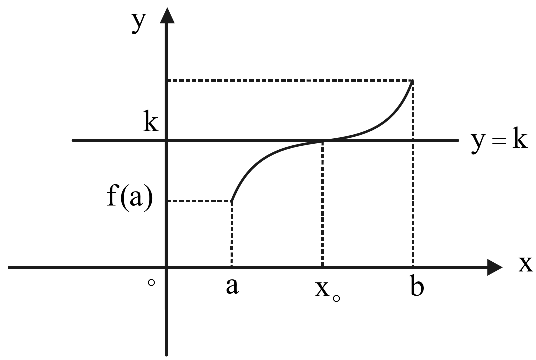
۱۰.۴ توابع پیوسته دربازه‌های بسته

توابع پیوسته دربازه‌های بسته ویژگی‌هایی دارند که دراین قسمت یکی از این ویژگی‌ها را بدون اثبات می‌آوریم :

۱.۱۰.۴ قضیه مقدار میانی. اگر تابع f در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد و k عددی بین

$f(a)$ و $f(b)$ باشد آنگاه حداقل یک عدد حقیقی مانند $x_\circ$ در فاصله (a,b) وجود دارد به طوری که $f(x_\circ)=k$.

تعبیر هندسی قضیه مقدار میانی – که در شکل ۱۴.۴ نشان داده شده است – بدین صورت است که خط $y=k$ نمودار تابع f را حداقل در یک نقطه قطع می‌کند.

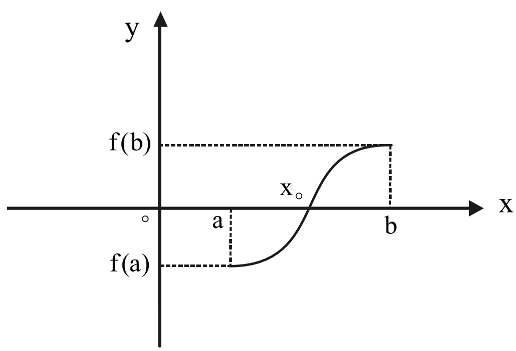


شکل ۱۴.۴

۲.۱۰.۴ نتیجه و کاربرد. در قضیه مقدار میانی قرار می دهیم $k=\circ$ بنابراین داریم :

$$f(b)<\circ<f(a) \quad \text{یا} \quad f(a)<\circ<f(b)$$

در هر دو حالت $f(a)f(b)<\circ$، پس اگر f در $[a,b]$ پیوسته و $f(a)f(b)<\circ$ آنگاه حداقل یک عدد حقیقی مانند $x_\circ$ در فاصله (a,b) وجود دارد به طوری که $f(x_\circ)=\circ$ یعنی معادله‌ی $f(x)=\circ$ حداقل یک جواب در فاصله (a,b) دارد و به معنی دیگر تابع f محور xها را حداقل در یک نقطه در فاصله‌ی (a,b) قطع می‌کند، به شکل ۱۵.۴ توجه کنید :



شکل ۱۵.۴

۳.۱۰.۴ مثال. می‌خواهیم ثابت کنیم معادله $x^4 - x - 7 = 0$ در فاصله $[0,2]$ حداقل یک ریشه دارد. قرار می‌دهیم $f(x) = x^4 - x - 7$ ، تابع f چند جمله‌ای است لذا بر $[0,2]$ پیوسته است و نیز داریم : $f(2) = 7 > 0$ و $f(0) = -7 < 0$.

از این دو به دست می‌آوریم $f(0)f(2) < 0$. پس بنا بر قضیه‌ی مقدار میانی حداقل عددی مانند x_0 وجود دارد به طوری که $f(x_0) = 0$ یعنی x_0 جواب معادله است.

توجه کنید که قضیه مقدار میانی وجود حداقل یک ریشه را تضمین می‌کند. ممکن است معادله جواب‌های دیگری نیز داشته باشد و نیز این قضیه در مورد مقدار واقعی ریشه یا ریشه‌های معادله اطلاعی به دست نمی‌دهد.

***۴.۱۰.۴ مثال.** ثابت کنید هر معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $a + c = 0$ همواره یک ریشه در فاصله $[-1,1]$ دارد. فرض کنیم $f(x) = ax^2 + bx + c$ داریم :

$$f(-1) + f(1) = a - b + c + a + b + c = 2(a+b) = 2 \times 0 = 0$$

ازاینجا $f(-1) = -f(1)$. پس : $f(-1)f(1) = -f(1)f(1) = -[f(1)]^2 < 0$.

در نتیجه بنا بر قضیه مقدار میانی معادله‌ی $f(x) = 0$ یک ریشه در فاصله $[-1,1]$ دارد.

۵.۱۰.۴ مثال. اگر معادله $x^3 + ax + 2 = 0$ در بازه $[-1,2]$ حداقل دارای یک ریشه باشد حدود a را تعیین کنید.

فرض کنیم $f(x) = x^3 + ax + 2$، این تابع چند جمله‌ای است و در بازه $[-1,2]$ پیوسته است داریم: $f(2) = 8 + 2a + 2 = 2a + 10$ و $f(-1) = -1 - a + 2 = 1 - a$ بنابر قضیه مقدار میانی باید داشته باشیم : $(1-a)(2a+10) < 0$ $f(-1)f(2) < 0$.

ریشه‌های سمت چپ این نابرابری عبارت‌اند از $a = 1$ و $a = -5$ ، علامت دوجمله‌ای در جدول زیر آمده است:

a	$-\infty$		-5		1		$+\infty$
$(1-a)(2a+10)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
		جواب				جواب	

بنابراین $a \in (-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$

۱۱.۴ خود آزمایی

۱. مجموعه‌ی $A=\{x|1<2x-1<3\}$ یک همسایگی متقارن به مرکز a و شعاع δ است زوج مرتب (a,δ) کدام است ؟

الف) $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$ ب) $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$

پ) $(2,1)$ ت) $(\frac{1}{2},1)$

۲. نامعادله $|2x-2|<x$ یک همسایگی متقارن به مرکز....... و شعاع .... است.

الف) $\frac{4}{3},\frac{2}{3}$ ب) $\frac{1}{3},\frac{2}{3}$

ج) $2-,1$ د) $1-,2$

۳. مجموعه‌ی $(2a-3,a+b)\cup(1,a-b)$ یک همسایگی متقارن محذوف است. $a+b$ کدام است ؟

الف) ۲ ب) ۳

پ) ۴ ت) ۵

۴. اجتماع دو بازه $(-1,3)$ و $(2,5)$ را به صورت یک همسایگی متقارن نوشته‌ایم شعاع این همسایگی کدام است ؟

الف) ۲ ب) ۳

پ) ۱ ت) ۵

۵. در تابع $f(x)=\frac{x^2-9}{x-3}$ اگر تعریف حد برای $\lim\limits_{x\to 3}f(x)=6$ را بنویسیم با فرض $\varepsilon=\frac{1}{100}$ بیشترین مقدار δ کدام است ؟

الف) $\frac{1}{50}$ ب) $\frac{1}{100}$

پ) $\frac{1}{150}$ ت) $\frac{1}{200}$

۶. برای هر عدد مثبت N داریم : $(0<|x-3|<\delta\rightarrow\frac{1}{(x-3)^3}>N)$

هرگاه داشته باشیم :

الف) $\delta=N^2$ ب) $\delta=\frac{1}{N^2}$

پ) $\delta=\sqrt{N}$ ت) $\delta=\frac{1}{\sqrt{N}}$

۷. با استفاده از عبارت $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,(0<|x-2|<\delta\Rightarrow|f(x)-4|<\varepsilon)$ کدام حد مورد مطالعه است؟

الف) حد راست $f(x)$ در $x=2$ ب) حد چپ $f(x)$ در $x=2$

پ) حد $f(x)$ در $x=2$ ت) حد $f(x)$ در $x=4$

۸. تابع $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ وقتی $x\to+\infty$ در فاصله‌ی $\frac{3}{100}$ کمتر از حدش قرار می‌گیرد هرگاه :

الف) $x>96$ ب) $x>97$

ج) $x>98$ د) $x>99$

۹. تابع f با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و $|f(x)|\leq 1$ در هیچ نقطه حد ندارد. تابع $(x^2-1)f(x)$ در چند نقطه حد دارد؟

الف) ۱ ب) ۲

پ) ۳ ت) ۰

۱۰. در تابع $f(x)=[3x]+2[x]-[x^2]$ اگر $x\to 2$، حد راست از حد چپ چقدر بیشتر است ؟

الف) ۰ ب) ۱

پ) ۲ ت) ۴

۱۱. $\lim\limits_{x\to 0} tg4x^2\sin(\frac{1}{x^2})$ کدام است ؟

الف) ۴ ب) صفر

پ) ۱ ت) ∞

۱۲. $\lim\limits_{x\to 0} 3x\left[\frac{1}{\sin 2x}\right]$ کدام است ؟

الف) $\frac{3}{2}$ ب) ۳

پ) صفر ت) $\frac{2}{3}$

*۱۳. $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}}{\sqrt[4]{x}}$ کدام است ؟

الف) ∞ ب) صفر

پ) ۱ ت) $\frac{1}{4}$

۱۴. $\lim\limits_{x \to 0^+} [-x^2]^{[x]}$ کدام است ؟

الف) -1 　 ب) صفر

پ) ∞ 　 ت) 1

۱۵. $\lim\limits_{x \to 1^-} \operatorname{Arccos}\left(\frac{1}{x+2}\right)$

الف) برابر یک است 　 ب) برابر -1 است

پ) برابر صفر است 　 ت) وجود ندارد

۱۶. فرض کنیم $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\pi} \operatorname{Arcsin} \frac{x}{2} & x > 1 \\ \frac{bx - b}{x^2 - 1} & x < 1 \end{cases}$ اگر $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ موجود باشد $\frac{a}{b}$ را بیابید.

۱۷. در تابع $f(x) = \begin{cases} x^3 + 2x & [x] \text{ زوج} \\ 5x + 7 & [x] \text{ فرد} \end{cases}$ ، حاصل $\lim\limits_{x \to (-1)^-} f(x) + \lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ را به دست آورید.

۱۸. حد عبارت $\frac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$ در $x = 0$ با توجه به اتحاد

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

کدام است ؟

الف) $2(a^2 - b^2)$ 　 ب) $2(b^2 - a^2)$

پ) $\frac{1}{2}(a^2 - b^2)$ 　 ت) $\frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

۱۹. کدامیک از حدهای زیر موجود است ؟

الف) $\lim\limits_{x \to 1^+} \operatorname{Arccos}\sqrt{x}$ 　 ب) $\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{Arcsin} \frac{x+1}{x-1}$

پ) $\lim\limits_{x \to 1^-} \operatorname{Arccos}\sqrt{x}$ 　 ت) $\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{Arcsin}(x+1)$

۲۰. حد کدامیک از تابع‌های زیر برابر یک نیست ؟

الف) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{(-1)^{[x]}}{3 - 4x}$ 　 ب) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{(-1)^{[x]}}{3x - 2}$

پ) $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x|x-1|}{x-1}$ 　 ت) $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{x^2|x-1|}{x-1}$

۲۱. حاصل $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x\sqrt{\frac{x+2}{x-1}} - x\right)$ کدام است ؟

الف) $\frac{۲}{۳}$ ب) $-\frac{۲}{۳}$

پ) $\frac{۳}{۲}$ ت) $-\frac{۳}{۲}$

۲۲. $\lim_{x \to ۰} \frac{۴x + ۳\sin ۲x}{۲x - ۴\sin ۳x}$ کدام است ؟

الف) ۱ ب) ۱-

پ) صفر ت) وجود ندارد

۲۳. نشان دهید که $\lim_{x \to ۱} \frac{۱ - \sqrt{x}}{۱ - \sqrt[۳]{x}} = \frac{۳}{۲}$ (راهنمایی قرار دهید $x = z^۶$).

۲۴. $\lim_{x \to \infty} x(\sqrt{x^۲ + ۱} - x)$ کدام است ؟

الف) صفر ب) ۱

پ) $\frac{۱}{۲}$ ت) ۲

۲۵. تابع f به صورت زیر تعریف شده است :

$$f(x) = \begin{cases} x + ۶ & x < -۲ \\ \sqrt{۴ - x^۲} & -۲ \le x \le ۲ \\ ۶ - x & ۲ < x \end{cases}$$

هر یک از حدود زیر را در صورت وجود بیابید.

$$\lim_{x \to -۲^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to -۲^+} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to ۲^-} f(x) \quad , \quad \lim_{x \to ۲^+} f(x)$$

۲۶. فرض کنیم $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{۲ + x^۲}}{x} = a$ و $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{\sqrt{۲ + x^۲}} = b$. کدامیک از موارد زیر درست است ؟

الف) $a > b$ ب) $a < b$

پ) $a = b$ ت) $a = ۲b$

۲۷. فرض کنیم $f(x) = \frac{x^۲ + ۳x}{۲x^۲ - ۳}$ و $g(x) = \frac{۲x - ۱}{۴x}$ و $f(x) \le h(x) \le g(x)$, $\lim_{x \to +\infty} h(x)$ چیست.

۲۸. کدامیک از توابع زیر در همه نقاط قلمروش دارای حد است ؟

الف) $f(x) = \begin{cases} ۱ - x & x > ۲ \\ x^۲ - ۵ & x \le ۲ \end{cases}$ ب) $g(x) = \begin{cases} x^۲ + ۴x & x \ge ۰ \\ x + ۱ & x < ۰ \end{cases}$

۲۹. اگر $\lim_{x\to 0} f(x) = -2$ باشد آنگاه $\lim_{x\to 0} [f(x)+2]\sin\frac{\pi}{x^2}$.

الف) برابر ۲ است　　ب) برابر ۲- است

پ) برابر صفر است　　ت) وجود ندارد

۳۰. ثابت کنید $\lim_{x\to +\infty} x\sin\frac{1}{x} = 1$.

۳۱. از ۴ مورد زیر چند مورد درست است ؟

۱. $\lim_{x\to 1}\frac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1} = -2$　　۲. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{1-\cos\frac{x}{2}} = 4$

۳. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\pi}{2}-x}{\cos x} = 1$　　۴. $\lim_{x\to \pi}\frac{\sin x}{1-\frac{x^2}{\pi^2}} = \frac{\pi}{2}$

الف) ۴　　ب) ۳

پ) ۲　　ت) ۱

۳۲. اگر $f(x) = \sin^{-1}\frac{1-x}{1+x}$ آنگاه $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

الف) وجود ندارد.　　ب) برابر $-\frac{\pi}{4}$ است.

پ) برابر $+\frac{\pi}{4}$ است.　　ت) برابر $-\frac{\pi}{2}$ است.

۳۳. $\lim_{x\to +\infty} \operatorname{Arccos}(\sqrt{x^2+x}-x)$ برابر است با:

الف) $\frac{\pi}{3}$　　ب) $\frac{\pi}{4}$

پ) $\frac{\pi}{2}$　　ت) $\frac{\pi}{6}$

۳۴. اگر به ازای هر x در بازه $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ رابطه‌ی $4-\cos^2 x \le f(x) \le 3+x^2$ برقرار باشد آنگاه $\lim_{x\to 0}\frac{1}{f(x)}$ کدام است .

۳۵. با استفاده از قضیه فشار چند مورد ازچهار مورد زیر درست است ؟

۱. اگر به ازای هر x در بازه $(-\pi,\pi)$ داشته باشیم $3-\sin x \le f(x) \le 4-2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2}$ آنگاه $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = 2$.

۲. اگر به ازای هر x داشته باشیم $|f(x)-4| < 3(x-1)^2$ ، آنگاه $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$.

۳. اگر به ازای هر x در بازه $(-\pi,0)$ داشته باشیم $2-\sin x \le f(x) \le 4+\sin x$ آنگاه $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \sqrt{f(x)}=\sqrt{3}$.

۴. اگر به ازی هر x ، $\sqrt{1+x^2} \le f(x)+2 \le 1+|x|$ آنگاه $\lim_{x\to 0} f(x)=-1$.

الف) ۱ ب) ۲

پ) ۳ ت) ۴

۳۶. $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ کدام است، $(p,q>0)$.

الف) $\dfrac{p}{q}$ ب) $\dfrac{q}{p}$

پ) p ت) q

۳۷. فرض کنیم $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$ و $g(x)=ax+b$، مقادیر ثابت a و b را طوری بیابید که داشته باشیم : $\lim_{x\to +\infty} [f(x)-g(x)]=0$.

۳۸. هرگاه $f(x)=\begin{cases} -x & x<0 \\ 1 & x\ge 0 \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} 1 & x<0 \\ x & x\ge 0 \end{cases}$ ، ثابت کنید f و g در صفر ناپیوسته اند ولی حاصلضرب fg در 0 پیوسته است.

۳۹. تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x\ne 1 \\ 2 & x=1 \end{cases}$ مفروض است، این تابع در $x=1$

الف) پیوسته است. ب) فقط پیوستگی چپ دارد.

پ) فقط پیوستگی راست دارد. ت) نه پیوستگی راست دارد نه چپ.

۴۰. نقاط ناپیوستگی توابع زیر را تعیین کنید.

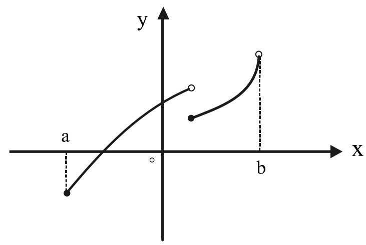
الف) $f(x)=\dfrac{3x}{(x-1)(x+5)}$ ب) $f(x)=\begin{cases} 3x & 1<x<2 \\ x^2+1 & 2\le x<3 \end{cases}$

پ) $f(x)=\begin{cases} 2\sin x+3\cos x & x\ne 0 \\ 2 & x=0 \end{cases}$

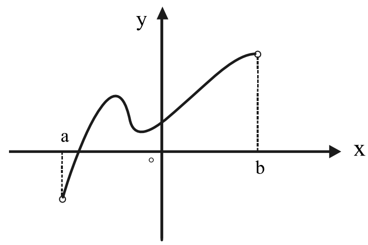
۴۱. اعداد حقیقی a و b را طوری تعیین کنید که تابع f روی $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} ۳x+۱ & x\le ۰ \\ ax+b & ۰<x<۱ \\ ۳x^{۲}-۱ & x\ge ۱ \end{cases}$$

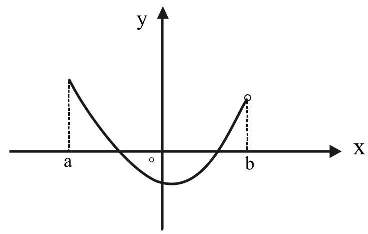
۴۲. کدام نمودار نشان می‌دهد که تابع رسم شده در فاصله $[a,b)$ پیوسته است ؟



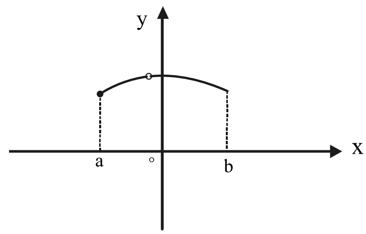
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۴۳. تابع $f(x)=[x]-[\frac{x}{۲}]$ در $x=۲$

الف) از راست پیوسته و از چپ ناپیوسته است.

ب) از راست ناپیوسته و از چپ پیوسته است.

پ) هم از راست پیوسته است و هم از چپ.

ت) نه از راست پیوسته است نه از چپ.

۴۴. اگر تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{[x](۲-x)}{\sin\frac{\pi}{۲}x} & x\ne ۲ \\ \dfrac{a}{x} & x=۲ \end{cases}$ در نقطه $x=۲$ پیوستگی چپ داشته باشد

مقدار a کدام است ؟

الف) $\frac{۱}{\pi}$ ب) $\frac{۲}{\pi}$

پ) $\frac{۴}{\pi}$ ت) $\frac{۸}{\pi}$

۴۵. تابع $f(x)=[\frac{x}{2}]-[\frac{x+1}{3}]$ در $x=2$:

الف) پیوستگی راست دارد. ب) پیوستگی چپ دارد.

پ) پیوسته است. ت) پیوسته نیست.

۴۶. تابع $f(x)=x^2([\frac{x+3}{2}]+[\frac{x-3}{2}])$ ، در $x=3$

الف) پیوستگی راست دارد. ب) پیوستگی چپ دارد

پ) نه پیوستگی راست دارد نه چپ. ت) پیوسته است

۴۷. تابع $f(x)=\begin{cases}[x]+m & x>2\\ 3x-2 & x=2\\ [2x-1]+nx & x<2\end{cases}$ در $x=2$ پیوستگی راست دارد و حد چپ آن در $x=2$ برابر ۶ است مقادیر m و n را بیابید.

۴۸. اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ باشد تابع $(fog)(x)$ روی کدامیک از فواصل زیر پیوسته است ؟

الف) $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ ب) $(-\infty,+\infty)$

پ) $(1,+\infty)$ ت) $[-1,1]$

۴۹. تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ در چند نقطه ناپیوسته است ؟

الف) صفر ب) ۱

پ) ۲ ت) ۴

۵۰. اگر تابع $f(x)=\begin{cases}a\cos(x^2+x) & x>0\\ 3x-b & x=0\\ \mathrm{Arc}\cot g\frac{1}{x} & x<0\end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد $a+b$ کدام است؟

الف) صفر ب) 2π

پ) -2π ت) ۱

۵۱. اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{2a}{\pi}\mathrm{Arcsin}(\frac{x}{x+1}) & x>1\\ bx-2 & x=1\\ \cos(x^2-1) & x<1\end{cases}$ پیوسته باشد $\frac{a}{b}$ کدام است ؟

الف) ۲ ب) -1

پ) ۱ ت) صفر

۵۲. تابع $f(x)=\begin{cases} x^{۲}-۳x & x\in\mathbb{Q} \\ x-۳ & x\in\mathbb{R}-\mathbb{Q} \end{cases}$ در چند نقطه پیوسته است ؟

الف) صفر ب) ۲

پ) ۳ ت) بیشمار

۵۳. تابع $f(x)=[x^{۲}]$ در فاصله ی $(۱,۲]$ در چند نقطه ناپیوسته است ؟

الف) ۰ ب) ۱

پ) ۲ د) ۳

۵۴. معادله $x^{۲}-(a-۱)x-a=۰$ یک ریشه در فاصله $(۰,۱)$ دارد حدود a را تعیین کنید

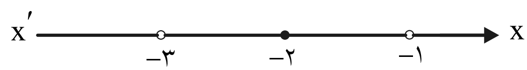
۵۵. نشان دهید خط $y=۳$ نمودار تابع $f(x)=(x-۲)(x-۴)+x$ را قطع می‌کند. پاسخ خود را با (۶.۱۰.۴) مقایسه کنید.

۱۲.۴ پاسخ به سؤالات متن

(۲.۳.۴)

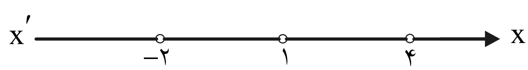
۱. $N(۱,۳)=\{x \mid |x-۱|<۳\}=(-۲,۴)$

۲. $N(-۲,۱)=\{x \mid |x+۲|<۱\}=(-۳,-۱)$

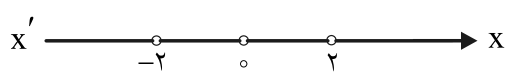


(۶.۳.۴)

۱. $N'(۱,۳)=\{x \mid ۰<|x-۱|<۳\}=(-۲,۱)\cup(۱,۴)$



۲. $N'(۰,۲)=(-۲,۰)\cup(۰,۲)$



(۱۰.۴.۴)

۱. از نامساوی $|\sin x| \le ۱$ استفاده کنید و $\delta = \varepsilon$.

۲. از نامساوی $|\cos x - ۱| \le |x|$ استفاده کنید و $\delta = \varepsilon$.

۳. $\delta = \frac{\varepsilon}{۳}$.

(۱۲.۵.۴) راهنمایی در (۹.۵.۴) قرار دهید $c = -۱$ و از(۴.۵.۴) استفاده کنید.

(۲۱.۵.۴)

۱. ۱

۲. ۴

۳. $\frac{۱}{۸}$

۴. $\frac{۳}{۲}$

۵. $\frac{۱}{۴}$

۶. ۴

(۲۲.۵.۴) فرض کنیم $L_۱ \ne L_۲$ ، چون $\lim_{x \to a} f(x) = L_۱$. پس برای $\varepsilon = \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲} > \circ$ عددی مانند $\delta_۱ > \circ$ وجود دارد به طوری که :

$$\text{(۱)} \quad \circ < |x-a| < \delta_۱ \Rightarrow |f(x) - L_۱| < \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲} ،$$

از طرفی چون $\lim_{x \to a} f(x) = L_۲$ ، پس برای $\varepsilon = \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲}$ عددی مانند $\delta_۲ > \circ$ وجود دارد به طوری که

$$\text{(۲)} \quad \circ < |x-a| < \delta_۲ \Rightarrow |f(x) - L_۲| < \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲}$$

حال فرض می کنیم $\delta = \min\{\delta_۱, \delta_۲\}$ در این صورت اگر $\circ < |x-a| < \delta$ آنگاه نابرابری‌های (۱) و (۲) با هم برقرارند و داریم :

$$|L_۱ - L_۲| = |L_۱ - f(x) + f(x) - L_۲| \le |L_۱ - f(x)| + |f(x) - L_۲| =$$

$$|f(x) - L_۱| + |f(x) - L_۲| < \frac{|L_۱ - L_۲|}{۲} + \frac{|L_۱ + L_۲|}{۲} = |L_۱ - L_۲|$$

و این یک تناقض است پس فرض $L_۱ \ne L_۲$ غلط است، یعنی باید داشته باشیم $L_۱ = L_۲$.

(۳۰.۵.۴)

۱. $\frac{a}{b}$

۲. $\frac{a}{b}$

۳. $\frac{a}{b}$

۴. $\frac{b}{a}$

۵. صورت و مخرج را در مزدوج مخرج ضرب کنید جواب $\frac{۱}{۲}$ است.

۶. قرار دهید $\frac{\pi}{۲}-x=t$ و مانند مسئله ۵ عمل کنید، جواب صفر است.

(۹.۶.۴)

۱. وجود ندارد　　　　۲. صفر

۳. ۶ـ

(۱۰.۶.۴) $k=-۳$

(۵.۸.۴)

۱. الف) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ بدین معنی است که : به ازای هر عدد $M<۰$، عددی مانند $N<۰$ وجود دارد به طوری که $x<N \to f(x)<M$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ بدین معنی است که: به ازای هر عدد $M<۰$ عددی مانند $N>۰$ وجود دارد به طوری که : $x>N \to f(x)<M$.

(۶.۸.۴)

الف) باید ثابت کنیم به ازای هر $\varepsilon>۰$ ، عددی مانند $N>۰$ وجود دارد به طوری که :

$$x>M \to \left|\frac{۲x+۵}{x}-۲\right|<\varepsilon$$

فرض کنیم $\varepsilon>۰$ داده شده باشد برای محاسبه $N>۰$ داریم :

$$\left|\frac{۲x+۵}{x}-۲\right| = \left|\frac{۲x+۵-۲x}{x}\right| = \left|\frac{۵}{x}\right| = \frac{۵}{x}<\varepsilon \to \frac{x}{۵}>\frac{۱}{\varepsilon}$$

قرار می‌دهیم $N=\frac{۵}{\varepsilon}$. توجه کنید که از $x\to+\infty$ داریم $|x|=x$.

ب) $N=\frac{-۲}{\varepsilon}<۰$ (زیرا $|x|=-x$ $x\to-\infty$).

پ) $N=\frac{۱}{\varepsilon}$

(۱۸.۸.۴)

۱. راهنمایی : در مزدوج عبارت ضرب و تقسیم کنید جواب صفر است.

۲. چون $x\to ۳^+$ پس $\sqrt{(x-۳)^۲}=(x-۳)$ جواب $+\infty$ است.

۳. $+\infty$

۴. $-\infty$

۵. صفر

۶. از (۲.۲.۴) استفاده کنید.

(۱۷.۹.۴) تابع $\sqrt[n]{f(x)}$ از ترکیب دو تابع $h(x)=\sqrt[n]{x}$ و $f(x)$ بــه دست آمــده اســت بنابراین طبق قضیه (۱۵.۹.۴) در همه نقاط قلمروش پیوسته است.

(۲۵.۹.۴)

۱. تابع f را روی فاصله نیم باز $[a,b)$ پیوسته می‌نامیم هرگاه

الف) f روی (a,b) پیوسته باشد. ب) $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

تابع f را روی $(a,b]$ پیوسته می‌نامیم هرگاه

الف) f روی (a,b) پیوسته باشد. ب) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

تابع f را روی $(a,+\infty)$ پیوسته می‌نامیم هرگاه f در همه نقــاط $x>a$ پیوســته باشد.

تابع f را روی $(-\infty,a]$ پیوسته می‌نامیم هرگاه f در همه نقاط $x<a$ پیوسته و $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$ باشد.

۲. روش اول : $\cos(a+h)=\cos a\cosh-\sin a\sinh$. چون $\sin a$ و $\cos a$ وقتــی کــه $h\to ۰$ مقادیر ثابتی هستند، خواهیم داشت :

$$\lim_{h\to ۰}\cos(a+h)=\cos a\lim_{h\to ۰}\cosh-\sin a\lim_{h\to ۰}\sinh=\cos a$$

بنابراین از (۱۸.۹.۴) ، تابع $\cos x$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است.

روش دوم: در۱۹.۹.۴ ثابت کردیم که تابع $\sin x$ در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته است. حال می‌نویسیم.

$$\cos x=\sqrt{۱-\sin^۲ x}\quad,\quad \lim_{x\to a}\cos x=\lim_{x\to a}\sqrt{۱-\sin^۲ x}=$$
$$\sqrt{\lim_{x\to a}(۱-\sin^۲ x)}=\sqrt{۱-\sin^۲ a}=\cos a$$

۳. چون $۳+\cos x\neq ۰$ لذا $\operatorname{dom} f=\mathbb{R}$، فرض کنیم $a\in\operatorname{dom} f$ داریم :

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{۲+\sin x}{۳+\cos x}=\frac{\lim\limits_{x\to a}(۲+\sin x)}{\lim\limits_{x\to a}(۳+\cos x)}=\frac{۲+\sin a}{۳+\cos a}=f(a)$$

یعنی f در هر نقطه از قلمروش پیوسته است.

۴. تابع f در فاصله‌های $(-\infty,۲)$ و $(۲,+\infty)$ به ازای هــر a پیوسته است بنــابراین a را باید طوری تعیین کنیم که f در $x=۲$ پیوسته باشد یعنی باید داشته باشیم :

$$\lim_{x\to ۲^-} f(x) = \lim_{x\to ۲^+} f(x) = f(۲) = ۴a \quad , \quad ۲a-۱ = ۴a \quad , \quad a = -\frac{۱}{۲}$$

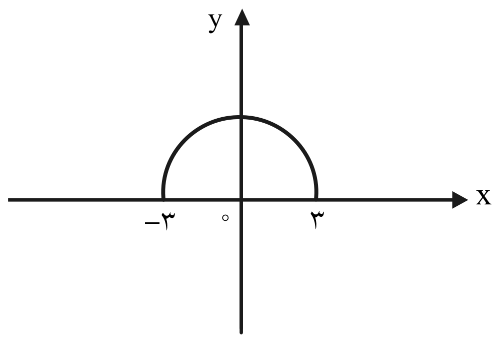
۵. تابع f به ازای ریشه‌های مخرج تعریف نشده است و داریم $\operatorname{dom} f = \mathbb{R} - \{-۲,۲\}$

فرض کنیم $a \in \operatorname{dom} f$ در این صورت : $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{۱}{x^۲-۴} = \frac{۱}{a^۲-۴} = f(a)$.

یعنی f در همه نقاط قلمروش پیوسته است پس فواصل پیوستگی عبارت‌اند از:

$$(-\infty,-۲) \ , \ (-۲,۲) \ , \ (۲,+\infty)$$

۶. نمودار تابع $f(x) = \sqrt{۹-x^۲}$ در شکل زیر رسم شده است.



f بر $(-۳,۳)$ پیوسته است و $\lim_{x\to -۳^+} \sqrt{۹-x^۲} = ۰ = f(-۳)$ ، $\lim_{x\to ۳^-} \sqrt{۹-x^۲} = ۰ = f(۳)$

لذا، طبق تعریف(۲۲.۹.۴) f برابر $[-۳,۳]$ پیوسته است.

۷. f روی $[-۱,۴)$ پیوسته است زیرا f روی $(-۱,۴)$ پیوسته است و

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x) = f(-۱) = -۳$$

f روی $(-\infty,۴)$ پیوسته است زیرا در همه نقاط $(-\infty,۴)$ پیوسته است توجه کنید که f در $-۱ \in (-\infty,۴)$ پیوسته است، زیرا : $\lim_{x\to -۱} f(x) = -۳ = f(-۱)$. f روی $(-۱,+\infty)$ ناپیوسته است زیرا در $x = ۴$ ناپیوسته است و $۴ \in (-۱,-\infty)$. f روی $[۴,+\infty)$ ناپیوسته است زیرا $\lim_{x\to ۴^+} f(x) = ۱۶$ و $f(۴) = ۲۲$ پس $\lim_{x\to ۴^+} f(x) \neq f(۴)$.

۸. چون توابع $\sin x$ و $\cos x$ و $\frac{x+۱}{x^۲+۲}$ توابعی پیوسته بر $\mathbb{R}$ هستند لذا ترکیب آنها یعنی تابع $\sin(\cos \frac{x+۱}{x^۲+۲}\pi)$ نیز روی $\mathbb{R}$ پیوسته خواهد بود و می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to ۰} \sin(\cos \frac{x+۱}{x^۲+۲}\pi) = \sin(\cos \lim_{x\to ۰} \frac{x+۱}{x^۲+۲}\pi) = \sin(\cos \frac{\pi}{۲}) = \sin ۰ = ۰$$

۱۳.۴ پاسخ خود آزمایی

۱. (ب) ۲. (الف) طرفین را به توان ۲ برسانید. ۳. (ب) ۴. (ب)

۵. (ب) ۶. (ت) ۷. (پ) ۸ . (پ)

۹. (ب)در نقاط $x=\pm ۱$ ۱۰. (پ) ۱۱. (ب) ۱۲. (الف)

۱۳. (پ) به جای هر چندجمله‌ای از x کوچکتر توان x را در نظر بگیرید.

۱۴. (ت) ۱۵. (ت) ۱۶. $\frac{a}{b}=۳$ ۱۷. $۱۷-۳=۴$

۱۸. (ت) ۱۹. (پ) ۲۰. (ت) ۲۱. (پ)

۲۲. (ب) ۲۳. $x=z^{۶}$ ۲۴. (پ)

۲۵. از سمت راست به ترتیب عبارت‌اند از ۴ ، صفر ، صفر ، ۴ .

۲۶. (پ) ۲۷. $\frac{۱}{۲}$ ۲۸. (الف) ۲۹. (پ)

۳۰. قرار دهید $y=\frac{۱}{x}$ جواب برابر یک است .

۳۱. (الف) ۳۲. (ت) ۳۳. (الف) ۳۴. $\frac{۱}{۳}$

۳۵. (ت) ۳۶. (ب) ۳۷. $a=۱$ و $b=-۱$

۳۸. حد چپ و راست تابع f در $x=۰$ نابرابرند لذا f در $x=۰$ ناپیوسته است همینطور g در صفر ناپیوسته است و $f(x).g(x)=\begin{cases}-x & x<۰\\ x & x\geq ۰\end{cases}$ در صفر پیوسته است

۳۹. (الف)

۴۰. الف) : f در $x=۱$ و $x=-۵$ تعریف نشده است پس نقاط ناپیوستگی f عبارت‌اند از۱ و ۵- .

ب) f در $x=۲$ حد ندارد پس f در $x=۲$ پیوسته نیست.

پ) f در $x=۰$ حد ندارد. پس f در $x=۰$ ناپیوسته است .

۴۱. $a=b=۱$

۴۲. (پ) ۴۳. (پ) ۴۴. (پ) ۴۵. (پ)

۴۶. (الف) ۴۷. $m=n=۲$ ۴۸.(پ) ۴۹. (الف)

۵۰. (الف) ۵۱. (پ) ۵۲. (ب) ۵۳. (ت)

۵۴. $۰<a<۱$

۵۵. معادله $g(x)=(x-۲)(x-۴)+x-۳$ یک جواب در فاصله $[۲,۴]$ دارد.