فصل اول

رابطه و تابع

هدف‌های آموزشی

پس از مطالعه و فراگیری این بخش باید بتوانید :

۱. زوج مرتب و رابطه را تعریف کنید.

۲. تابع را تعریف کنید و از میان رابطه‌های داده شده توابع را مشخص کنید.

۳. قلمرو یا دامنه توابع داده شده را به دست آورید.

۴. برابری دو تابع را تعریف کنید.

۵ . با در اختیار داشتن دو تابع توابع جدیدی از مجموع، تفاضل، حاصلضرب، خارج قسمت و ترکیب آنها بسازید و دامنه آنها را مشخص کنید.

۶ . تابع حقیقی، تابع ثابت، تابع همانی، تابع خطی، تابع فاکتوریل، تابع قدر مطلق وتابع جزء صحیح را تعریف کنید.

۷ . تابع فرد و تابع زوج را تعریف کنید و برای هر یک مثالی بیاورید.

۸ . تابع نمایی را تعریف کنید.

۹ . لگاریتم یک عدد مثبت را تعریف کنید و از شش قضیه لگاریتم در حل مسایل استفاده نمایید.

۱۰. لگاریتم نپری را بیان کنید و رابطه‌ی آن را با لگاریتم اعشاری بنویسید.

۱۱. تابع مثلثاتی را تعریف کنید و اتحادهای مثلثاتی را بازخوانی نمایید و نمودار توابع مثلثاتی $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x , y = \cot x$ را در یک دوره تناوب رسم کنید.

۱۲. توابع یک بـه یک، توابع پوشـا، توابع صـعودی، توابـع نزولـی و توابـع کرانـدار را تعریف کنید و برای هر یک مثالی بیاورید.
۱۳. با در اختیـار داشتن توابع با ضابطه‌های معیـن، یک بـه یک و پوشـا بـودن آنهـا را مشخص کنید.
۱۴. وارون توابع داده شده را درصورت وجود به دست آورید.
۱۵. وارون توابع مثلثاتی را تعیین کنید و قلمرو و برد آنها را مشخص نماییـد و نمـودار آنها را رسم کنید.

۱. رابطه وتابع

۱.۱ مفهوم زوج مرتب

۱.۱.۱ مجموعه $\{a,b\}$را در نظر می‌گیریم. چون در تعریف برابری مجموعه‌ها، ترتیـب عنصرها اهمیت ندارد، این مجموعه برابر مجموعـه $\{b,a\}$ اسـت. امـا گـاهی نیـز لازم است مجموعه‌هایی با دو عنصر در نظر بگیریم که در آنها ترتیب اهمیـت داشـته باشـد. مثلاً، در هندسه تحلیلی، مختصات (x,y) یک نقطـه، نمایـشگر زوج مرتبـی از عـددها است. نقطه $(۱,۳)$ غیر از نقطه $(۳,۱)$ است

۲.۱.۱ تعریف. دسته‌ای از اشیاء دوتایی با ترتیـب معیـن را زوج مرتب می‌گـوییم. در زوج مرتب (x,y)، x را مخـتص اول (مؤلفـه اول) و y را مخـتص دوم (مؤلفـــه دوم) می‌نامیم.

۳.۱.۱ تعریف. دو زوج مرتب (a,b) و (c,d) را برابر می‌گوییم اگر و تنهـا اگـر $a=c$ و $b=d$.

۴.۱.۱ مجموعه $A=\{(۲,۲),(۲,۵),(۳,۷)\}$ را در نظر بگیـریـد هـر یک از زوج‌های مرتـب $(۲,۲)$ و $(۲,۵)$ و $(۳,۷)$ عضو ایـن مجموعـه اســت، یعنـــی $(۳,۷)\in A$ و $(۲,۵)\in A$ و $(۲,۲)\in A$، اما بنـابر تعـریف برابـری زوج‌های مرتـب، هیـــچ یـک از زوج‌های مرتب $(۵,۲)$ و $(۷,۳)$ عضو A نیست یعنی $(۵,۲)\notin A$ ، $(۷,۳)\notin A$.

۲.۱ مفهوم رابطه

۱.۲.۱ در ریاضیات مکرر به عبارت‌هایی نظیر عبارت‌های زیر بر می‌خوریم :

$$x^۲ + y^۲ = ۴ \quad \text{و} \quad xy = ۵ \quad \text{و} \quad x < ۲y$$

که هر یک از آنها مجموعه‌ی مشخصی از زوج‌های مرتب عددهای حقیقی را معین می‌کند، یعنی مجموعه همه زوج‌های مرتبی مانند (x,y) که در آن عبارت صدق می‌نمایند. سه زوج مرتب متعلق به $x^۲ + y^۲ = ۴$ عبارت‌اند از $(۲,۰)$ ، $(\sqrt{۲},\sqrt{۲})$ و $(۱,\sqrt{۳})$. مجموعه‌هایی که اعضا آنها زوج‌های مرتب هستند اهمیت خاصی دارند.

۲.۲.۱ تعریف. هر مجموعه از زوج‌های مرتب را یک رابطه دوتایی یا یک رابطه می‌نامیم. اگر R یک رابطه باشد و $(x,y)\in R$ ، آنگاه می‌نویسیم xRy و می‌خوانیم x رابطه R به y دارد یا بین x و y رابطه R برقرار است و یا x,R را به y نسبت می‌دهد.

۳.۲.۱ مثال.(الف) مجموعه $R = \{$(آنکارا و ترکیه) و(پاریس وفرانسه) و(تهران و ایران)$\}$ یک رابطه است و هر یک از زوج‌های مرتب داخل آکولاد یک عضو آن می‌باشد ، مثلاً $\in R$ (پاریس و فرانسه) و یا پاریس R فرانسه، همچنین ایران رابطه R به تهران دارد و R ترکیه را به آنکارا نسبت می دهد

(ب) هر یک از مجموعه‌های زیر یک رابطه است :

۱. $R = \{(a,b),(۳,۴)\}$ ، ۲. $f = \{(x,y) \mid x,y\in R, y = ۳x + ۱\}$ ،

۳. $g = \{(x,y) \mid x,y\in R, x^۲ + y^۲ = ۹\}$

۴.۲.۱ چون هر رابطه یک مجموعه است، می‌توان مفاهیم و احکام مربوط به مجموعه‌ها را در مورد رابطه به کار برد.

۵.۲.۱ به هر رابطه سه مجموعه مهم وابسته است که در زیر تعریف می‌کنیم:

فرض کنیم R یک رابطه باشد

(الف) مجموعه همه مختصات اول عناصر R را حوزه تعریف، قلمرو یا دامنه R گفته و آن را با domR نشان می‌دهیم.

(ب) مجموعه همه مختصات دوم عناصر R را حوزه مقادیر یا برد R گفته و آن را با RangR نشان می‌دهیم.

(پ) مجموعه همه مختصات اول ودوم عناصر R را میدان R گفته و آن را با fldR نشان می‌دهیم.

۶.۲.۱ مثال. فرض کنیم $R = \{(۵,۴),(۳,۱),(۴,۷)\}$ داریم :

$$domR = \{۵,۳,۴\} \qquad RangR = \{۴,۱,۷\} \qquad fldR = \{۳,۴,۵,۷,۱\}$$

۳.۱ تابع

۱.۳.۱ در این قسمت یک دسته خاص از رابطه‌ها را که تابع نامیده می‌شوند معرفی می‌کنیم. قبل از تعریف دقیق تابع مثالی می‌آوریم. در رابطه $R=\{(۲,۵),(۲,۶),(۶,۷)\}$، زوج‌های مرتب $(۲,۵)\in R$ و $(۲,۶)\in R$ دارای مختص اول یکسانند ولی مختصات دومشان متفاوت است اما رابطه $F=\{(۲,۵),(۴,۱),(۲^۲,۱),(۰,۵)\}$ دارای این خاصیت است که هر دو عضو آن که مختصات اولشان با هم برابرند مختصات دومشان نیز با هم برابرند به عبارت دیگر، اگر $(x,y)\in f$ و $(x,z)\in f$، آنگاه $y=z$. چنین رابطه‌ای را تابع گویند.

۲.۳.۱ تعریف. فرض کنیم قلمرو رابطه f مجموعه A و برد آن مجموعه B باشد، رابطه f را یک تابع از A به B می‌گوییم اگر :

الف) برای هر عنصر $x\in A$ عنصری (منحصر به فرد) مانند $y\in B$ وجود داشته باشد به طوری که $(x,y)\in f$ ، به عبارت دیگر f باید هر یک از عناصر A را به عنصری (منحصر به فرد) از B نسبت دهد.

ب) اگر $(x,y)\in f$ و $(x,z)\in f$آنگاه $y=z$. یعنی f هر یک از عناصر A را تنها به یک عنصر از B نسبت دهد. (قسمت ب نتیجه‌ای از واژه منحصر به فردی در الف است)

۳.۳.۱ قلمرو تابع f را با نماد D_f و برد آن را با نماد R_f نشان می‌دهیم در ۲.۳.۱ داریم:

$$D_f = A\ ,\ R_f = B$$

۴.۳.۱ از تعریف تابع معلوم می‌شود که به ازای هر x از قلمرو f ، تنها یک عنصر مانند y هست که $(x,y)\in f$. معمولاً y را مقدار f در x می‌نامیم و به جای $(x,y)\in f$ می‌نویسیم : $y=f(x)$. x را متغیر و $f(x)$ را تصویر x توسط f می‌نامیم.

۵.۳.۱ یک تابع به وسیله رابطه f و قلمرو و برد آن مشخص می‌شود، معمولاً روش کلی مشخص کردن یک تابع این است که اولاً قلمرو تابع را مشخص می‌کنند، ثانیاً ضابطه‌ای برای تعیین مقدار تابع به ازای هر عضو قلمرو به دست می‌دهند. تابع $f=\{(x,۲x-۱)\mid x\in R\}=\{(x,y)\mid x\in R, y=۲x-۱\}$ را که قلمرو برد آن اعداد حقیقی است به صورت زیر نشان می‌دهیم: $f(x)=۲x-۱\ ,\ x\in R$.

تابع $f=\{(۱,۱)(۲,۴)(۳,۹),\dots,(n,n^۲)\}$ را که قلمرو و برد آن اعداد طبیعی

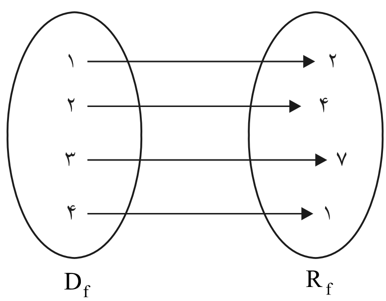
است می‌توان به صورت زیر نشان داد: $f(x)=x^{۲}$, $f:N \to N$.

۶.۳.۱ مثال. فرض کنیم متغیر x طول‌هایی برابر ۱، ۲، ۳، ۴ و۵ را اختیار کند و y مساحت مربع‌هایی به ضلع x باشد در این صورت ضابطه تابع برابر است با : $y=f(x)=x^{۲}$ و داریم : $f=\{(۱,۱),(۲,۴),(۳,۹),(۴,۱۶),(۵,۲۵)\}$.

۷.۳.۱ مثال. رابطه $f=\{(۱,۲),(۲,۴),(۳,۷),(۴,۱)\}$ را در نظر می‌گیریم روشن است که: $D_f=\{۱,۲,۳,۴\}$ و $R_f=\{۲,۴,۷,۱\}$.

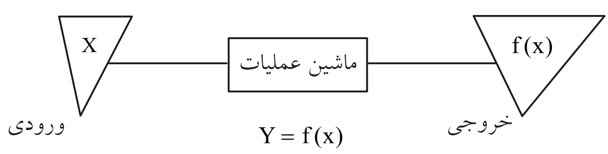
هر عنصر از مجموعه D_f فقط به یک عنصر از مجموعه R_f توسط f نسبت داده شده است، پس f یک تابع است. در این مثال، تابع بودن رابطه f با بررسی زوج‌های مرتب انجام گرفت. اما وقتی یک رابطه با ضابطه‌ای تعریف شده باشد، برای تشخیص اینکه آن رابطه تابع هست یا نه، به تعریف تابع متوسل می‌شویم: رابطه $f=\{(x,y) \mid x,y\in R ,۵x+۴y=۷\}$ را در نظر می‌گیریم. اولاً f در شرط الف تعریف تابع صدق می‌کند. ثانیاً فرض کنیم $(x,y)\in f$, $(x,z)\in f$ داریم: $۵x+۴y=۷$ و $۵x+۴z=۷$ یا $۵x+۴z=۵x+۴y$. پس $y=z$ در نتیجه f در شرط ب تعریف تابع نیز صدق می‌کند یعنی f یک تابع است.

به نموار پیکانی این رابطه که در زیر رسم شده است توجه کنید :



شکل ۱.۱

۸.۳.۱ گفتیم که هر تابع باید به هر عنصر از قلمرو عنصر یکتایی از برد را نسبت دهد لذا هر تابع را می‌توان به عنوان یک ماشین در نظر گرفت به طوری که ورودی این ماشین عناصر قلمرو تابع و خروجی آن اعضای برد تابع هستند.



۹.۳.۱ تمرین. کدامیک از روابط زیر یک تابع است ؟ دلیل آن را بیان کنید.

۱. $f=\{(1,2),(\frac{\sqrt{2}}{2},3),(\frac{1}{\sqrt{2}},4)\}$ ۲. $g=\{(x,y)\mid x,y\in N, x<2y\}$

۳. $h=\{(x,y)\mid x,y\in R, y^2-x^2=9\}$ ۴. $k=\{(x,y)\mid x,y\in R, y=\frac{3}{x^2+4}\}$

۱۰.۳.۱ گاهی پیش می آیـد کـه در تابع $y=f(x)$ نقش x را بـه متغیـر دیگری محـول کنیم، مثلاً وقتی می‌گوییم $f(5x)$ یعنی $5x$ در نقش x است و وقتی عبـارت $f(x,y)$ را به صورت $f(a,y)$ می‌نویسیم یعنی نقش x را به a محول کرده‌ایم.

۱۱.۳.۱ مثال. فرض کنیم $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ ، می‌خواهیم مقادیر $f(-x), f(0)$ و $f(x+1)$ را تعیین کنیم

$$f(x+1)=\frac{1-(x+1)}{1+(x+1)}=\frac{-x}{x+2}\ ,\ f(0)=\frac{1-0}{1+0}=1\ ,\ f(-x)=\frac{1-(-x)}{1+(-x)}=\frac{1+x}{1-x}$$

۱۲.۳.۱ تمرین

۱. اگر $f(x)=x^2$ عبارت $\frac{f(x+2)-f(2)}{2}$ را حساب کنید.

۲. اگر $f(x)=x^3-1$ ، نشان دهید $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=b^2+ab+a^2$.

۳. اگر $f(x)=\sqrt{x-4}$ مطلوبست محاسبه : $f(4)$, $f(x+4)$, $f(x^2+4)$ و $f(f(20))$.

۴.۱ برابری دوتابع

۱.۴.۱ دو تابع f و g را برابر می‌گوییم اگر :

۱. قلمرو آنها برابر باشد، یعنی $D_f=D_g$.

۲. به ازای هر x از قلمرو مشترک آنها مقدار دو تابع برابر باشند یعنی $f(x)=g(x)$.

۲.۴.۱ مثال. توابع $f(x)=\frac{x^2-2x}{x}$ و $g(x)=x+2$ برابر نیستند زیـرا $D_f=R-\{0\}$ و $D_g=R$ یکی نیستند. اما توابـع $f(x)=\frac{x^4-1}{2(x^2+1)}$ و $g(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)$ برابرنـد زیـرا $D_f=D_g=R$ به علاوه به ازای هر x از R، $f(x)=g(x)=\frac{1}{2}(x^2-1)$.

۳.۴.۱ تمرین. در هر یک از تمرین‌های زیر دو تابع داده شده است. تعیین کنید آیا ایـن توابع مساوی هستندیا نه ؟

۱. $f(x)=1$, $g(x)=\frac{x-2}{x-2}$.

۲. $x\in(۴,۷)$ $f(x)=\frac{۱}{۲x-۱}$, $x\in(۴,۷)$ $g(x)=\frac{۲x+۱}{۴x^۲-۱}$

۵.۱ جبر توابع و انواع توابع

۱.۵.۱ تعریف. فرض کنیم f و g توابعی با قلمروهای D_f و D_g باشند توابع جدید $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را به ترتیب مجموع، تفاضل، حاصل ضرب و خارج قسمت f و g می نامیم و آنها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x) \quad , \quad x\in D_f\bigcap D_g$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x) \quad , \quad x\in D_f\bigcap D_g$$
$$(f.g)(x)=f(x).g(x) \quad , \quad x\in D_f\bigcap D_g$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \quad , \quad x\in D_f\bigcap D_g\ ,\ g(x)\neq ۰$$

۲.۵.۱ مثال. فرض کنیم $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\sqrt{۲-x}$

$$D_f=\{x\,|\,x-۱\geq ۰\}=[۱,+\infty) \text{ ، } D_g=\{x\,|\,۲-x\geq ۰\}=(-\infty,۲]$$

بنابراین قلمرو توابع $f+g$ و $f-g$ و $f.g$ عبارت است از :

$D_f\bigcap D_g=[۱,+\infty)\bigcap(-\infty,۲]=[۱,۲]$ و قلمرو تابع $\frac{f}{g}$ برابر است با $[۱,۲)$ داریم:

$$(f\pm g)(x)=\sqrt{x-۱}\pm\sqrt{۲-x} \quad x\in[۱,۲]$$
$$(f.g)(x)=\sqrt{(x-۱)(۲-x)} \quad x\in[۱,۲]$$
$$(\frac{f}{g})(x)=\sqrt{\frac{x-۱}{۲-x}} \quad x\in[۱,۲)$$

۳.۵.۱ تعریف. برای دو تابع f و g ، تابع مرکب، که با fog نمایش داده می شود، به وسیله $(fog)(x)=f(g(x))$ تعریف می‌شود و قلمرو آن عبارت است از :

$$D_{fog}=\{x\in D_g\,|\,g(x)\in D_f\}$$

۴.۵.۱ مثال. توابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x^۲-۱$ را در نظر بگیرید. توابع مرکب زیر همچنین قلمرو آنها را به دست آورید.

الف) fog ب) gof

پ) fof ت) gog

قلمرو f عبارت است از $[\circ+\infty)$ و قلمرو g برابر ست با $R=(-\infty,+\infty)$.

الف) $(fog)(x)=f(g(x))=f(x^{۲}-۱)=\sqrt{x^{۲}-۱}$. قلمرو fog عبارت است از

$$(-\infty,-۱]\cup[۱,+\infty)$$

ب) $(gof)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^{۲}-۱=x-۱$. قلمرو gof عبارت است از $[\circ+\infty)$ توجه کنید که قلمرو gof مجموعه تمام اعداد x در قلمرو f است که f(x) در قلمرو g باشد.

پ) $(fof)(x)=f(f(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{\sqrt{x}})=\sqrt[۴]{x}$. قلمرو fof عبارت است از

$$[\circ+\infty)$$

ت) $(gog)(x)=g(g(x))=g(x^{۲}-۱)=(x^{۲}-۱)^{۲}-۱=x^{۴}-۲x^{۲}$. قلمرو gog عبارت است از $R=(-\infty,+\infty)$.

۵.۵.۱ تمرین. توابع f و g در مسائل زیر داده شده‌اند، توابع مرکب fog و gof را تعیین کرده و قلمرو آنها را به دست آورید.

۱. $g(x)=\sqrt{x}\ ,\ f(x)=\sqrt{x-۱}$.

۲. $g(x)=\frac{۲x+۲}{x}\ ,\ f(x)=\sqrt{x-۳}$.

۶.۵.۱ تعریف. اگر قلمرو و برد تابع f اعداد حقیقی باشند، آنگاه f را یک تابع حقیقی می‌نامیم.

۷.۵.۱ تعریف. اگر برد تابع g مجموعه‌ای یکانی باشد g را تابع ثابت می‌نامیم. تابع $g(x)=۷$ یک تابع ثابت است و داریم : $g(-۳)=۷, g(\circ)=۷, g(-\frac{۱}{۴})=۷, g(۵)=۷$.

۸.۵.۱ تعریف. اگر به ازای هر x در R داشته باشیم: $f(x)=x$ تابع f را تابع همانی می‌نامیم، روشن است که $f(\frac{۵}{۸})=\frac{۵}{۸}\ ,\ f(-۴)=-۴\ ,\ f(\circ)=\circ$.

۹.۵.۱ تعریف. تابع $f(x)=ax+b$ را که در آن a و b اعداد حقیقی ثابت هستند یک تابع خطی می‌نامیم.

۱۰.۵.۱ تعریف. تابع فاکتوریل تابعی است که قلمرو آن اعداد صحیح نامنفی و برد آن اعداد طبیعی است و با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$f(n)=n!=\begin{cases} ۱ & (n=\circ,۱) \\ ۱\times۲\times...\times n & (n>۱) \end{cases}$$

به عنوان مثال:

$$۰!=۱ \quad ۱!=۱ \quad ۳!=۱\times۲\times۳=۶ \quad ۵!=۱\times۲\times۳\times۴\times۵=۱۲۰$$

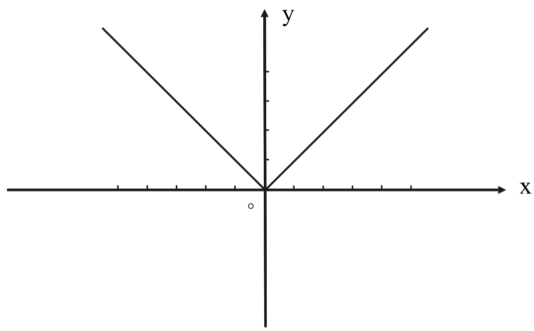
۱۱.۵.۱ تعریف. تابع قـدر مطلق که آن را بـا "| |" نـشان مـی‌دهـیم تـابعی اسـت بـا قلمرو R و برد $[۰,+\infty)$ که با ضابطه زیر تعریف می‌شود:

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq ۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$$

از این تعریف معلوم می‌شود که برای هر عدد حقیقی x داریم : $|x|\geq ۰$ و نیز

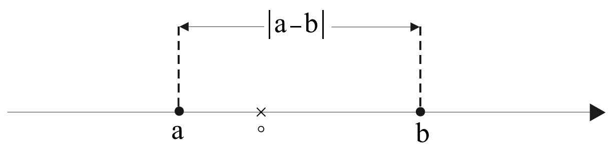
$$|۷|=۷ \ , \ |-۳|=-(-۳)=۳ \ , \ |۰|=۰$$

نمودار تابع $y=|x|$ در شکل ۲.۱ رسم شده است :



شکل ۲.۱

از نظر هندسی، قدر مطلق عـدد x مساوی فاصله اش تا مبـدا o است بدون توجه بـه جهت آن. به طور کلی $|a-b|$ فاصله بین a و b است (شکل ۳.۱).



شکل ۳.۱

قضایای زیر در مورد قدر مطلق برقرارند.

۱۲.۵.۱ اگر $x,y\in R$ آنگاه داریم:

الف) $|x|=|-x|$.

ب) $-|x|\leq x\leq |x|$.

پ) $|x|<a$ اگر و تنها اگر $-a<x<a$ ، $a>۰$.

ت) $|x+y|\leq |x|+|y|$.

ث) $|x|-|y|\leq |x-y|$.

ج) $|xy| = |x||y|$.

چ) $y\neq ۰$ ، $|\frac{x}{y}|=\frac{|x|}{|y|}$.

۱۳.۵.۱ تابع جزء صحیح : بنابر ویژگی‌های اعداد حقیقی، برای هر عدد حقیقی x عدد صحیح و یکتایی مانند n وجود دارد به قسمی که $n \le x < n+۱$. عدد صحیح n را جزءصحیح عدد x می‌نامیم و آن را با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم.

پس $[x]$ بزرگترین عدد صحیح کوچکتر یا مساوی x است.

بنابراین تعریف، جزء صحیح هر عدد اعشاری مثبت برابر با قسمت صحیح آن است و جزء صحیح هر عدد اعشاری منفی یک واحد کوچکتر از قسمت صحیح آن عدد است. به عنوان مثال داریم:

$$[۳/۷]=۳ \quad , \quad [۴]=۴ \quad , \quad [۰]=۰ \quad , \quad [\sqrt{۲}]=۱$$

$$[\frac{۱}{۳}]=۰ \ , \ [-۳/۸]=-۴ \ , \ [-\sqrt{۳}]=-۲ \ , \ [-۰/۲]=-۱$$

و سه ویژگی مهم تابع جزء صحیح عبارت‌انداز :

الف) $[x] \le x < [x]+۱$.

ب) برای هر عدد صحیح a ؛ $[x+a]=[x]+a$

پ) $[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x \in z \\ ۱ & x \notin z \end{cases}$.

۱۴.۵.۱ تعریف تابع. $f(x)=a_۰x^n+a_۱x^{n-۱}+...+a_n$ را که در آن n عددی صحیح و نامنفی بوده و $a_۰,...,a_n$ اعدادی حقیقی و $a_۰ \neq ۰$ است، یک تابع چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم. تابع $g(x)=۴x^۲+۵x-۱$ یک تابع درجه دوم وتابع $h(x)=۲x^۳+x+۳$ یک تابع درجه سوم است.

۱۵.۵.۱ تعریف. اگر یک تابع را به توان به صورت خارج قسمت دوتابع چند جمله‌ای نوشت، آن را یک تابع گویا می‌نامیم.

۱۶.۵.۱ تعریف.تابع جبری تابعی است که از تعدادی متناهی عمل جبری (جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، به توان رساندن و ریشه گرفتن) بر تابع همانی و تابع ثابت حاصل شده باشد. مثلاً تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x^۲+۹}}{(۳x^۲+۴x+۸)^۵}$ یک تابع جبری است.

۱۷.۵.۱ فرض کنیم x و $-x$ در قلمرو f باشند.

تعریف (الف) تابع f را زوج می‌گوییم اگر به ازای هر x در قلمرو f، $f(-x)=f(x)$.

(ب) تابع f را فرد می‌گوییم اگر به ازای هر x در قلمرو f، $f(-x)=-f(x)$.

۱۸.۵.۱ مثال. الف) تابع $f(x)=۵x^۴+۶x^۲-۳$ را در نظر می‌گیریم داریم :
$f(-x)=۵(-x)^۴+۵(-x)^۲-۳=۵x^۴+۶x^۲-۳=f(x)$. پس، f یک تابع زوج است.
ب) تابع $g(x)=۳x^۵+۷x^۳-۲x$ را در نظر می‌گیریم، داریم

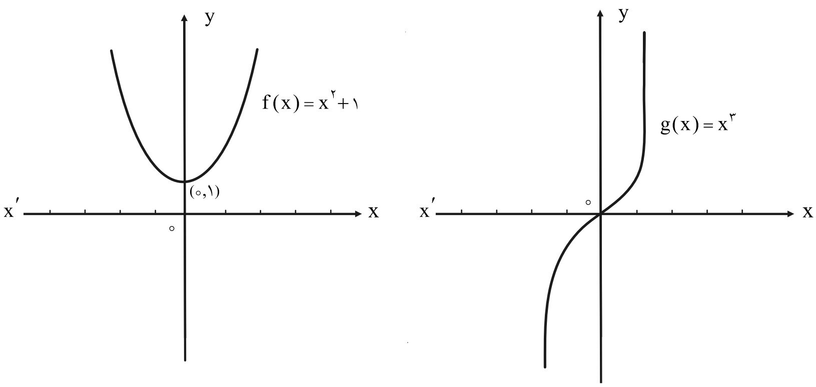
$$g(-x)=۳(-x)^۵+۷(-x)^۳-۲(-x)=-۳x^۵-۷x^۳+۲x=-(۳x^۵+۷x^۳-۲x)=-g(x)$$

پس، g یک تابع فرد است
پ) تابع $h(x)=۴x^۴+x^۳-۵x^۲+۶$ را در نظر می‌گیریم. داریم :

$$h(-x)=۴(-x)^۴+(-x)^۳-۵(-x)^۲+۶=۴x^۴-x^۳-۵x^۲+۶$$

پس، تابع h نه زوج است نه فرد.

۱۹.۵.۱ از تعریف **۱۷.۵.۱** معلوم می‌شود که نمودار یک تابع زوج نسبت به محور yها، متقارن ونمودار یک تابع فرد نسبت بـه مبـداً مختصات متقارن است. در شـکل (۴.۱) f زوج و g فرد است:



شکل ۴.۱

۲۰.۵.۱ در تمرین‌های زیر، معین کنید که تابع داده شده زوج، فرد، یا هیچکدام است.

۱. $f(x)=ax^۳+bx$ ۲. $g(x)=ax^۴+bx^۲+c$

۳. $h(x)=\frac{۳|x|}{x^۲+۱}$ ۴. $k(x)=x^۲ \; , \; ۰\le x\le ۲$

علاوه بـر توابع، جبـری، توابع متعالی نیـز در ریاضیات مطرح می‌شوند، ازجمله توابع متعالی عبارت‌اند از توابع نمائی، توابع لگاریتمی و توابع مثلثاتی، کـه در زیـر بـه تعریف آنها می‌پردازیم:

۲۱.۵.۱ تعریف. تابع $f(x)=a^x$ را که در آن a عددی مثبت ومخالف ۱ فرض می‌شود تابع نمائی می‌نامیم. از این تعریف معلوم می‌شود که همواره $a^x>۰$ و روابط زیر برقرار

است :

الف) $a^x \times a^y = a^{x+y}$ ب) $a^{-x} = \frac{۱}{a^x}$

پ) $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ ت) $(a^x)^y = a^{xy}$

۲۲.۵.۱ تعریف. فرض کنیم a عددی مثبت ومخالف ۱ باشد منظور از لگاریتم عدد مثبت N در مبنای a عددی است مانند x به طوری که $a^x = N$. لگاریتم N در مبنای a را به صورت $\log_a^N$ می‌نویسیم. بنابراین داریم :

$$(۱)\ \log_a^N = x \leftrightarrow a^x = N$$

۲۳.۵.۱ مثال. بنابر (۱) داریم :

الف) $\log_۵^{۱۲۵} = ۳ \leftrightarrow ۵^۳ = ۱۲۵$ ب) $\log_۳^{\frac{۱}{۸۱}} = -۴ \leftrightarrow ۳^{-۴} = \frac{۱}{۸۱}$

پ) $\log_a^a = ۱$ ت) $\log_a^۱ = ۰$

۲۴.۵.۱ تعریف. لگاریتم اعشاری و لگاریتم طبیعی (نپری)

۱. اگر مبنای لگاریتم را عدد ۱۰ اختیار کنیم $(a = ۱۰)$ آنگاه لگاریتم را لگاریتم اعشاری می‌گوییم. در لگاریتم اعشاری عدد مبنا را نمی‌نویسیم پس $\log N$ همان $\log_{۱۰}^N$ است.

۲. در ریاضیات عالی مبنای لگاریتم را عدد اصم e می‌گیرند.[۱] $(a = e)$ این نوع لگاریتم را لگاریتم طبیعی می‌نامیم. $\log_e^N$ را به صورت LN می‌نویسیم.

۲۵.۵.۱ قضیه. فرض کنیم x، y و a اعداد مثبت و $a \neq ۱$ باشند، در این صورت روابط زیر برقرارند

الف) $\log_a^{x.y} = \log_a^x + \log_a^y$ ب) $\log_a^{\frac{x}{y}} = \log_a^x - \log_a^y$

پ) $\log_a^{x^n} = n\log_a^x$ ث) $\log_b^a \times \log_a^b = ۱$ ج) $a^{\log_a^x} = x$

۲۶.۵.۱ تمرین. اگر $\log ۲ = a$ باشد $\log\sqrt[۴]{\frac{۲۵}{۸}}$ را بر حسب a به دست آورید.

۲۷.۵.۱ هر تابع را که به خطوط مثلثاتی قوس x بستگی داشته باشد تابع مثلثاتی می‌گوییم. جدول آتیه، مقادیر سینوس، کسینوس، تانژانت و کتانژانت زوایایی را که مکرر به کار می‌آیند به دست می‌دهد.

---

۱. حرف e به خاطر اویلر ریاضیدان سوئیسی انتخاب شده است. مقدار تقریبی e تا نه رقم اعشار۲/ ۷۱۸۲۸۱۸۲۸ است.

جدول مقادیر عددی تابع‌های مثلثاتی بعضی از کمان‌ها

تابع مثلثاتی / کمان	sin	cos	tg	cotg
۰	۰	۱	۰	تعریف نشده یا ∞
$\frac{\pi}{۱۲}$	$\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$	$۲-\sqrt{۳}$	$۲+\sqrt{۳}$
$\frac{\pi}{۸}$	$\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$	$\sqrt{۲}-۱$	$\sqrt{۲}+۱$
$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	$\sqrt{۳}$
$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$	۱	۱
$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$\sqrt{۳}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
$\frac{۳\pi}{۸}$	$\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$	$\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲}}}{۲}$	$\sqrt{۲}+۱$	$\sqrt{۲}-۱$
$\frac{۵\pi}{۱۲}$	$\frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$	$\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$	$۲+\sqrt{۳}$	$۲-\sqrt{۳}$
$\frac{\pi}{۲}$	۱	۰	∞	۰
π	۰	-۱	۰	∞
$\frac{۳\pi}{۲}$	-۱	۰	∞	۰
۲π	۰	۱	۰	∞

۲۸.۵.۱ جهت تسهیل در مراجعه، اتحادهای زیر را که در دوره دبیرستان با آنها آشنا شده‌اید، می‌آوریم:

$$\begin{cases}\operatorname{tg}(k\pi+\theta)=\operatorname{tg}\theta\\ \operatorname{cotg}(k\pi+\theta)=\operatorname{cotg}\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(۲k\pi+\theta)=\sin\theta\\ \cos(۲k\pi+\theta)=\cos\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\cos\theta\\ \cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cos\theta\\ \cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\sin\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(-\theta)=-\sin\theta\\ \cos(-\theta)=\cos\theta\end{cases}\qquad \begin{cases}\sin(\pi-\theta)=\sin\theta\\ \cos(\pi-\theta)=-\cos\theta\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta\\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta\end{cases}\qquad \begin{cases}\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}\\ \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{2\,\mathrm{tg}\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta=1-2\sin^2\theta=2\cos^2\theta-1=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\theta}{1+\mathrm{tg}^2\theta}\\ \sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta\quad \cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta\quad \mathrm{tg}\,3\theta=\dfrac{3\,\mathrm{tg}\theta-\mathrm{tg}^3\theta}{1-3\,\mathrm{tg}^2\theta}\end{cases}$$

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,x\pm\mathrm{tg}\,y=\frac{\sin(x\pm y)}{\cos x\cos y}$$

$$\sin x\sin y=\frac{1}{2}[\cos(x-y)-\cos(x+y)]$$

$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$$

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$$

$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$$

$$\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y=\frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

دو نابرابری مهم زیر درحل مسائل به کار می‌آیند :

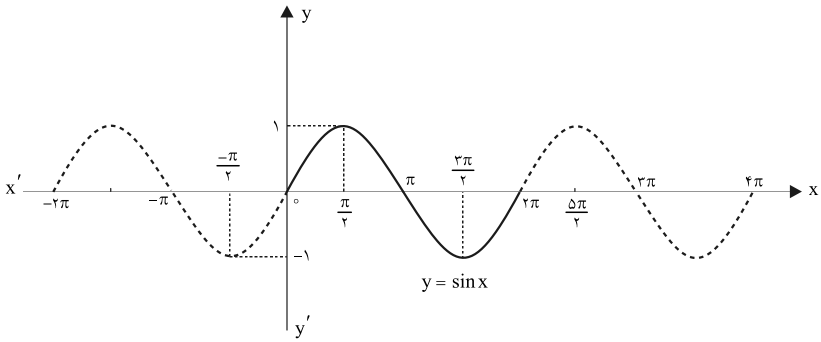
$$|\sin\theta|<|\theta|$$

$$|1-\cos\theta|<|\theta|$$

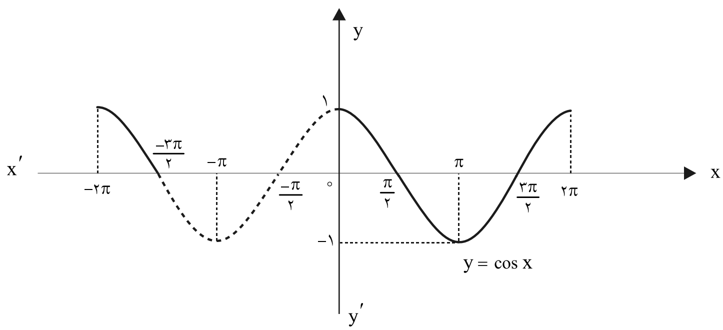
۲۹.۵.۱ تعریف. فرض کنیم x و $x+t$ در قلمرو f باشند. گوییم تابع f متناوب با دوره تناوب $t\neq 0$ است هرگاه t کوچکترین عدد مثبتی باشد کـه $f(x+t)=f(x)$. از ایـن تعریف و دستورهای ۲۸.۵.۱ معلوم می‌شود کـه توابـع سـینوس و کـسینوس متنـاوب بوده و دوره تناوب آنها 2π است.

۳۰.۵.۱ تمرین. دوره تناوب توابـع $f(x)=\sin ax$ ، $g(x)=\cos ax$ ، $h(x)=\mathrm{tg}ax$ و $k(x)=\cot g\,ax$ را به دست آورید.

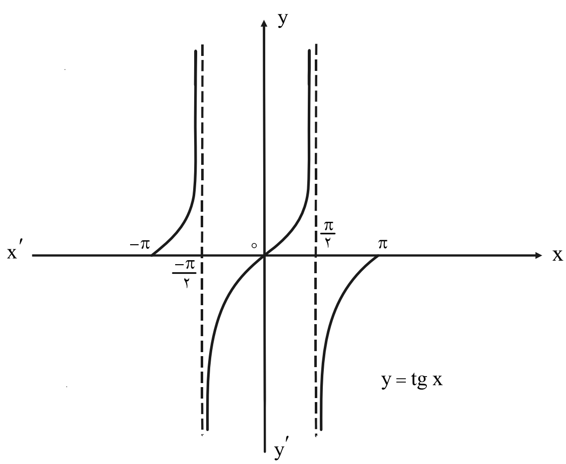
۳۱.۵.۱ برای رسم منحنی یک تابع متناوب با دوره تناوب t منحنی را در یک دوره تناوب مثلاً $[0,t]$ رسم می‌کنیم، سپس منحنی حاصل را انتقال می‌دهیم در زیر نمودار سه تابع مثلثاتی ساده $\sin x$ و $\cos x$ و tgx رسم شده است.



شکل ۵.۱



شکل ۶.۱



شکل ۷.۱

۶.۱ توابع خاص

۱.۶.۱تعریف. تابع $f: A \to B$ را یک به یک گوییم هرگاه به ازای هر $x_۱, x_۲ \in A$ داشته باشیم : $f(x_۱) = f(x_۲) \to x_۱ = x_۲$.

۲.۶.۱ مثال. تابع f از R به R با ضابطه $f(x) = x^۳ - ۱$ یک به یک است زیرا به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ از R داریم:

$$f(x_۱) = f(x_۲) \to x_۱^۳ - ۱ = x_۲^۳ - ۱ \to x_۱^۳ = x_۲^۳ \to x_۱ = x_۲$$

۳.۶.۱ تعریف. ۱.۶.۱ را می‌شود به صورت زیر بیان کرد:

تابع $f: A \to B$ را یک به یک گوییم هرگاه به ازای هر $x_۱, x_۲ \in A$ داشته باشیم :

$$x_۱ \neq x_۲ \to f(x_۱) \neq f(x_۲)$$

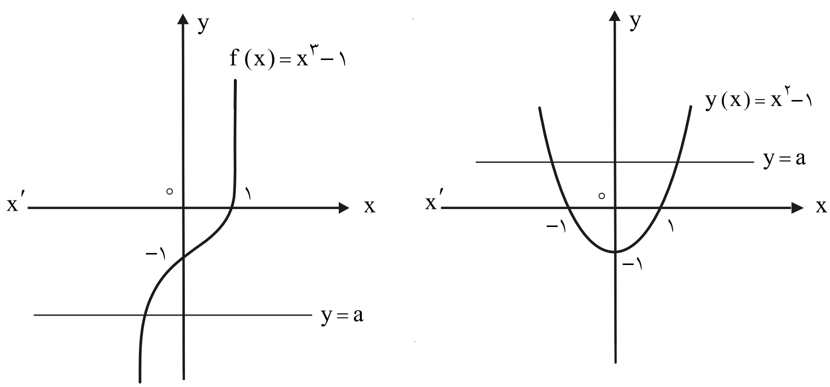
۴.۶.۱ مثال. تابع $\begin{cases} g: R \to R \\ g(x) = x^۲ - ۱ \end{cases}$ یک به یک نیست زیرا $۵ \neq -۵$ در حالی که

$$f(۵) = f(-۵)$$

۵.۶.۱ از روی نمودار تابع می‌توان یک به یک بودن آن را بررسی کرد :

اگر خط افقی $y = a$ نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند تابع یک به یک است در غیر این صورت یک به یک نیست.

در شکل ۸.۱ تابع f یک به یک است و تابع g یک به یک نیست.



شکل ۸.۱

۶.۶.۱ تمرین. کدامیک از توابع زیر یک به یک است :

۱. $f(x) = |x| + ۴$

۲. $f(x) = x^۴ + ۲ \quad ۰ \le x \le ۳$

۳. $f(x)=\begin{cases} ۵ & x\le ۲ \\ ۳x+۴ & x>۲ \end{cases}$ ۴. $f(x)=\sin x \quad -\frac{\pi}{۲}\le x\le \frac{\pi}{۲}$

۵. $f(x)=\cos x \quad ۰\le x\le ۲\pi$

۷.۶.۱ تعریف. تابع $f:A\to B$ را پوشا می‌نامیم هرگاه $R_f=B$. به عبارت دیگر به ازای هر $y\in B$ عضوی مانند $x\in A$ وجود داشته باشد به طوری که: $y=f(x)$.

۸.۶.۱ مثال. تابع f از R به R با ضابطه‌ی $f(x)=x^۳+۱$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم y عضو دلخواهی از برد f باشد از $y=x^۳+۱$ نتیجه می‌گیریم $x=\sqrt[۳]{y-۱}$ و نیز $f(x)=(\sqrt[۳]{y-۱})^۳+۱=y-۱+۱=y$ یعنی برای هر عضو از برد f یک عضو از قلمرو f به دست آمد، پس f پوشا است.

۹.۶.۱ مثال. تابع $g:R\to R$ با ضابطه $g(x)=x^۲-۱$ را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم y عضو دلخواهی از برد g باشد. از $y=x^۲-۱$ نتیجه می‌گیریم $x=\pm\sqrt{y+۱}$ ، از اینجا مثلاً به ازای $y=-۳$ جوابی برای x به دست نمی‌آید، پس g پوشا نیست به عبارت ریاضی گوییم: g پوشا نیست زیرا ۳- عضوی از برد g است که تصویر هیچ عضو از قلمرو g نیست.

۱۰.۶.۱ تمرین. کدامیک از توابع زیر پوشا است ؟

۱. $f(x):\begin{cases} ۳\sqrt{x} & x\ge ۰ \\ -۵x & x<۰ \end{cases}$ ۲. $g(x):\begin{cases} x^۲+۱۳۸۷ & x\ge ۰ \\ x^۴+۱۳۸۷ & x<۰ \end{cases}$

۳. $h(x):\begin{cases} \frac{-۷}{|x|} & x\ne ۰ \\ ۱۳۸۷ & x=۰ \end{cases}$ ۴. $k(x):\begin{cases} \sqrt{x} & x\ge ۰ \\ x^۵ & x<۰ \end{cases}$

۱۱.۶.۱ تعریف. تابع $f:A\to B$ را در نظر می‌گیریم :

الف) f را صعودی می‌نامیم، هرگاه برای هر $x_۱,x_۲\in A$ داشته باشیم:

$$x_۱<x_۲\to f(x_۱)<f(x_۲)$$

ب) f را نزولی می نامیم، هرگاه برای هر $x_۱,x_۲\in A$ داشته باشیم :

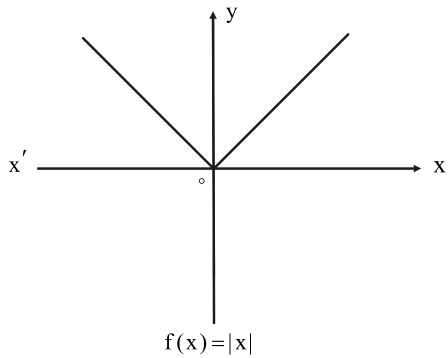
$$x_۱<x_۲\to f(x_۱)>f(x_۲)$$

۱۲.۶.۱مثال. تابع $f:R\to R$ با ضابطه $f(x)=x^۳+۱$ را در نظر می‌گیریم از $x_۱<x_۲$ نتیجه می‌شود $x_۱^۳<x_۲^۳$ در نتیجه $x_۱^۳+۱<x_۲^۳+۱$ یعنی $f(x_۱)<f(x_۲)$ پس f تابعی

صعودی است.

۱۳.۶.۱ مثال. تابع $f(x)=|x|$ که نمودار آن در شکل (۹.۱) رسم شده است نه صعودی است نه نزولی زیرا داریم :

$$-۱<۲ \ , \ |-۱|<|۲|$$



شکل ۹.۱

یعنی $-۱<۲, f(-۱)<f(-۲)$ پس f نزولی نیست. از طرفی $-۲<-۱ \rightarrow |-۱|<|-۲|$
یعنی اگر $-۲<-۱$ آنگاه $f(-۲)>f(-۱)$ پس f صعودی نیست.

۱۴.۶.۱ تمرین.

۱. اگر $x>۰$ و $f(x)=\frac{۱}{۱+x^۲}$ ، آنگاه تابع f

الف) صعودی است. ب) نزولی است.

پ) گاهی صعودی است گاهی نزولی است. ت) نه صعودی است نه نزولی است.

۲. آیا تابع ثابت $f(x)=c$ صعودی است؟

۱۵.۶.۱ قضیه. اگر تابع f صعودی یا نزولی باشد، آنگاه f یک به یک خواهد بود.

❋ **اثبات.** فرض کنیم $f(x_۱)=f(x_۲)$ ولی $x_۱\neq x_۲$ پس بایـد داشته باشیم $x_۱>x_۲$ یـا $x_۱<x_۲$. فرض کنید $x_۱>x_۲$ و f صعودی باشد، در این صورت :

$$x_۱>x_۲=f(x_۱)>f(x_۲)$$

فرض کنیم $x_۱>x_۲$ و f نزولی باشد، در این صورت : $f(x_۱)<f(x_۲)$.

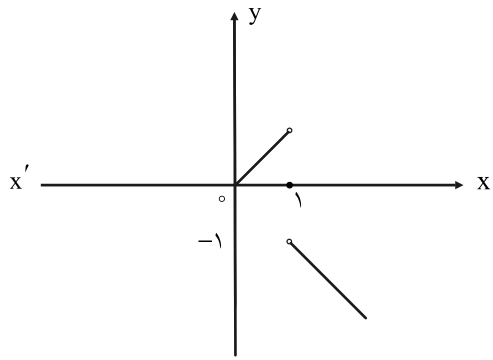
پس در هر حال $f(x_۱)\neq f(x_۲)$ و این خلاف فرض است.

حالت $x_۱<x_۲$ به همین نحو اثبات می‌شود.

۱۶.۶.۱ اگر تابعی یک به یک باشد لزومی ندارد که صعودی یا نزولی باشد تابع

$$f(x)=\begin{cases}+x & 0\le x<1\\ 0 & x=1\\ -x & x>1\end{cases}$$

(که نمودار آن در شکل (۱۰.۱) رسم شده است) یک به یک است ولی نه صعودی است و نه نزولی.



شکل ۱۰.۱

۱۷.۶.۱ تعریف. الف) اگر عددی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ ، داشته باشیم ، $f(x)\le M$ آنگاه f را از بالا کراندار می‌نامیم.

ب) اگر عددی مانند M وجودداشته باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ ، داشته باشیم $f(x)\ge M$ ، انگاه f را از پائین کراندار می‌نامیم.

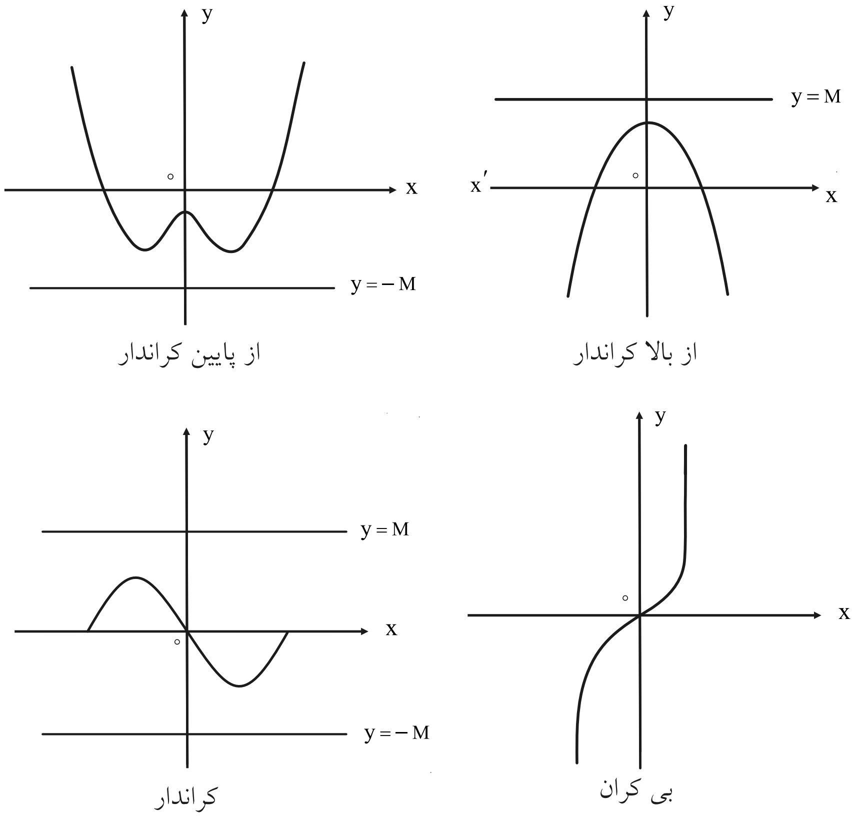
پ) اگر عددی مانند M وجود داشته باشد به طوری که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $-M\le f(x)\le M$ ، آنگاه f را کراندار می‌نامیم.

پس f کراندار است هرگاه برای هر x از دامنه f عدد مثبتی مانند k وجود داشته باشد به طوری که $|f(x)|\le k$.

ت) اگر f کراندار نباشد آن را بی‌کران می‌نامیم.

۱۸.۶.۱ از تعریف ۱۷.۶.۱ معلوم می‌شود که اگر f از بالا کراندار باشد نمودار f در زیر خط $y=M$ واقع می‌شود. اگر f از پائین کراندار باشد نمودار f دربالای خط $y=M$ واقع می‌شود و اگر f کراندار باشد نمودار f بین دو خط $y=M$ و $y=-M$ واقع می‌شود. در شکل (۱۱.۱) چهار حالت مذکور در تعریف ۱۷.۶.۱ نشان داده شده

است.



شکل ۱۱.۱

۱۹.۶.۱ مثال. الف) تابع $f(x)=\sin x$ کراندار است زیرا همواره $-۱\le \sin x\le ۱$.

ب) تابع $f(x)=x^۲+۴$ از پائین کراندار است زیرا همواره $x^۲+۴>۰$.

پ) تابع $f(x)=۴-x^۲$ از بالا کراندار است زیرا همواره $۴-x^۲\le ۴$.

ت) تابع $f(x)=x^۳$ نه کران بالا دارد نه کران پائین پس کراندار نیست. توجه کنید که اگر هر دو خط افقی $y=\pm M$ را در نظر بگیریم نقطه‌ای روی نمودار f وجوددارد که در خارج نوار دو خط $y=\pm M$ واقع می شود. نقطه $(M+۱, \sqrt[۳]{M+۱})$ را امتحان کنید!

۲۰.۶.۱ تمرین. کدامیک از توابع زیر از بالا کراندار، از پائین کراندار و یا کراندار است؟

۱. $f(x)=x^۳+۱۳۸۷\ ,\ ۰\le x\le ۲$

۲. $g(x)=۳\cos x-۱$

۳. $h(x)=\begin{cases} ۴x-۱ & x<۵ \\ ۲ & x\geq ۵ \end{cases}$

۴. $k(x)=\begin{cases} -۱۳۸۷ & x<-۴ \\ ۳x & -۴\leq x\leq ۴ \\ ۱۳۸۷ & ۴\leq x \end{cases}$

۵. $\operatorname{sign}x=\begin{cases} -۱ & x<۰ \\ ۰ & x=۰ \\ ۱ & x>۰ \end{cases}$ ($\operatorname{sign}x$ خوانده می‌شود : علامت x)

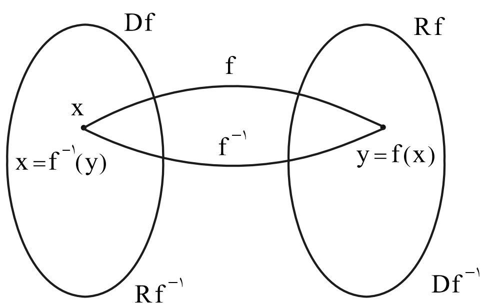
۲۱.۶.۱ فرض کنیم $f:A\to B$ تابعی یک به یک و پوشا باشد دیدیم که :

الف) به ازای هر $x\in A$ یک وتنها یک $y\in B$ وجود دارد به طوری که $(x,y)\in f$.

ب) به ازای هر $y\in B$ یک و تنها یک $x\in A$ وجود دارد به طوری که $(x,y)\in f$.

حال رابطه $g=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$ را در نظر می‌گیریم بنابر (ب) g یک تابع است. قلمرو g برابر B و برد g برابر A است.

۲۲.۶.۱ تعریف. برای تابع یک به یک و پوشای $f:A\to B$ تابع $g:B\to A$ را وارون f گفته و آن را با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم، پس : $f^{-۱}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$ توجه کنید که قلمرو $f^{-۱}$ برد f و برد $f^{-۱}$ قلمرو f است. در شکل (۱۲.۱) وارون تابع f نشان داده شده است.



$y=f(x)\Leftrightarrow x=f^{-۱}(y)$

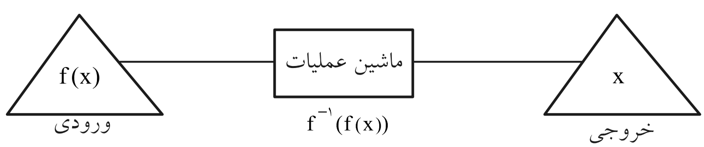
شکل ۱۲.۱

۲۳.۶.۱ توجه کنید که :

الف) اگر f^{-1} وارون f باشد f هم وارون f^{-1} است.
ب) وارون تابعی که یک به یک و پوشا نباشد تعریف نشده است.
پ) ترکیب دو تابع f و f^{-1} یک تابع همانی است یعنی

$$(f^{-1}of)(x) = (fof^{-1})(x) = x$$

زیرا اگر x عضو دلخواهی از قلمرو f باشد داریم $(x,f(x))\in f$ از اینجا $(f(x),x)\in f^{-1}$ و این به معنی $f^{-1}(f(x)) = x$ است، به همین نحو در حالت دیگر.
ت) اگر $(x,y)\in f$ آنگاه $(y,x)\in f^{-1}$، اما دو نقطه (x,y) و (y,x) نسبت به خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) قرینه یکدیگرند، پس اگر قرینه نمودار $y = f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ به دست آوریم شکل حاصل نمودار $f^{-1}(x)$ است
ث) اگر $g_1 : B \to A$ و $g_2 : B \to A$ ، هر دو وارون $f : A \to B$ باشند، آنگاه $g_1 = g_2$ یعنی وارون یک تابع در صورت وجود منحصر بفرد است. زیرا اگر $(x,y)\in f$ آنگاه $(y,x)\in g_1$ و $(y,x)\in g_2$ یعنی $g_1(y) = g_2(y) = x$.
ج) برای محاسبه $f^{-1}(x)$ از معادله $y = f(x)$، مقدار x را برحسب y تعیین میکنیم تا $x = f^{-1}(y)$ معلوم گردد، در این تابع جای x و y را عوض می کنیم تا $y = f^{-1}(x)$ به دست آید.
چ) f^{-1} را معکوس f نیز می‌گویند. در این کتاب هر دو مورد «معکوس» و «وارون» را به کار خواهیم برد.
ح) اگر f^{-1} را در حکم یک ماشین تابع در نظر بگیریم . ورودی تابع f^{-1} ، $f(x)$ها هستند و خروجی f^{-1}، xها هستند.

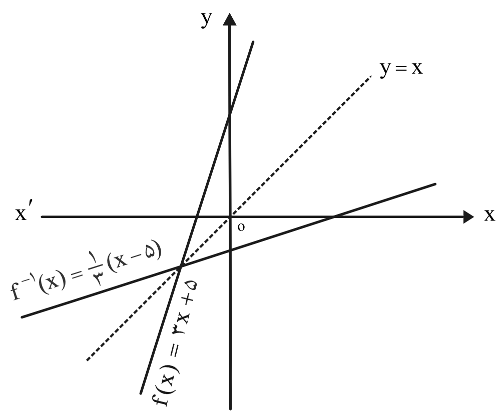


۲۴.۶.۱ مثال. تابع $f(x) = ۳x + ۵$ را در نظر می‌گیریم. تابع f صعودی است پس بنا بر قضیه ۱۵.۶.۱ یک به یک است از طرف دیگر اگر y عضو دلخواهی از R باشد از $y = ۳x + ۵$ نتیجه می‌شود $x = \frac{۱}{۳}(y - ۵)$ و $f(x) = f[\frac{۱}{۳}(y-۵)] = ۳\times\frac{۱}{۳}(y-۵)+۵ = y$.
یعنی f پوشا نیز هست در نتیجه f وارون دارد و برای محاسبه وارون آن معادله

$y=3x+5$ را نسبت به x حل و جای x و y را عوض می کنیم، داریم:

$$x=\frac{1}{3}(y-5)\rightarrow y=\frac{1}{3}(x-5)\quad f^{-1}(x)=\frac{1}{3}(x-5)$$

شکل ۱۳.۱ نشان می‌دهد که دو تابع f و f^{-1} نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند :



شکل ۱۳.۱

۲۵.۶.۱ تمرین. کدامیک از توابع زیر وارون دارند؟ وارون آنها را در صورت وجود به دست آورید

۱. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\quad f(x)=2x^4+1$

۲. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\quad f(x)=5x^3-14$

۳. $f:\mathbb{R}-\{1\}\rightarrow\mathbb{R}-\{2\}\quad f(x)=\frac{2x+3}{x-1}$

۴. $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\quad f(x)=(1-4x)^3$

۲۶.۶.۱ وارون تابع نمایی

تابع $f(x)=a^x$ را که در آن a عددی مثبت و مخالف ۱ است در نظر می‌گیریم. قلمرو این تابع $\mathbb{R}$ و برد آن $(0,+\infty)$ است :

الف) f یک به یک است زیرا از $a^{x_1}=a^{x_2}$ نتیجه می‌شود $x_1=x_2$.

ب) f پوشا است زیرا اگر a^x عضو دلخواهی از برد f باشد از $y=a^x$ بنابر آنچه در ۲۲.۵.۴ گفتیم نتیجه می‌شود $x=\log_a^y$ و نیز

$$f(x)=a^{\log_a^y}=y$$

بنابر الف و ب تابع f وارون دارد. برای محاسبه وارون f از معادله $y=a^x$ مقدار x را برحسب y تعیین کرده سپس جای x و y را عوض می‌کنیم، داریم :

$$y=a^x \to x=\log_a^y \ , \ y=\log_a^x \ , \ f^{-1}(x)=\log_a^x$$

تابع نمایی $y=a^x$ و تابع لگاریتمی $y=\log_a^x$ وارون یکدیگرند.

۲۷.۶.۱ در این قسمت توابع مثلثاتی معکوس را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

نمودار توابع سینوس و کسینوس، که در ۳۱.۵.۱ رسم شده‌اند، نشان می‌دهند که این توابع یک به یک نیستند، لذا تابع سینوس و کسینوس وارون ندارند، حال ببینیم چه شرایطی لازم است تا توابع $\sin x$ و $\cos x$ دارای وارون باشند.

۲۸.۶.۱ معادله $x=\sin y$ را در نظر می‌گیریم، واضح است که $-۱\le x\le ۱$ این معادله با شرط فوق دارای جواب‌های بی‌شمار برای y است،

مثلاً اگر $x=\frac{۱}{۲}$ ، معادله $\sin y=\frac{۱}{۲}$ دارای جوابهای $y=\frac{\pi}{۶}$ و $y=\frac{۵\pi}{۶}$ است. اما هر مضرب صحیحی از ۲π را می‌توان به آنها افزود و یا از آنها کاست بی آنکه در سینوس زاویه تغییری حاصل شود یعنی جواب‌های معادله $\sin y=\frac{۱}{۲}$ عبارت‌اند از :

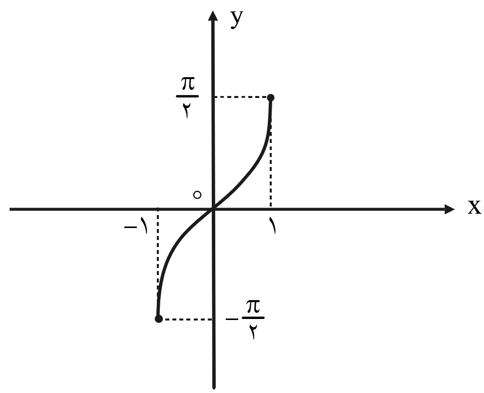
$$y=\begin{cases} ۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \quad k\in z$$

حال شرایطی را اعمال می‌کنیم که به ازای هر x که $-۱\le x\le ۱$ فقط یک مقدار برای y از معادله $\sin y=\frac{۱}{۲}$ به دست آید، کافی است y را در بازه $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ بگیریم، با در نظر گرفتن شرایط اخیر تابع y را چنین تعریف می‌کنیم:

$$y=\text{Arc}\sin x \quad -\frac{\pi}{۲}\le y\le \frac{\pi}{۲}$$

وآن را وارون تابع $\sin x$ می‌نامیم. این تابع ، تابع سینوس معکوس نام دارد قلمرو آن $[-۱,۱]$ و برد آن $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ است.

گاهی وارون $\sin x$ را با $\sin^{-۱}x$ نشان می‌دهند، ما در این کتاب از هر دو علامت $\sin^{-۱}x$ و $\text{Arc}\sin x$ استفاده خواهیم کرد. در شکل ۱۴.۱ نمودار $\sin^{-۱}x$ رسم شده است (این نمودار قرینه نمودار $\begin{cases} y=\sin x \\ -\frac{\pi}{۲}\le x\le\frac{\pi}{۲} \end{cases}$ نسبت به خط $y=x$ است).

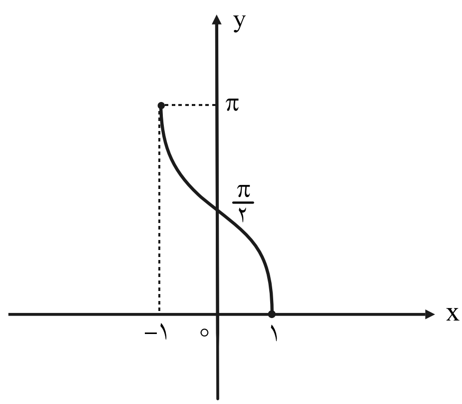


شکل ۱۴.۱

۲۹.۶.۱ از تعریف ۲۸.۶.۱ بنـابر آنچه در قسمت پ ۲۳.۶.۱ گفتیم نتیجه می‌شود بـرای هر x از $[-۱,۱]$ داریم : $\sin(\sin^{-۱}x) = x$ و برای هر y از $[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}]$ داریم :

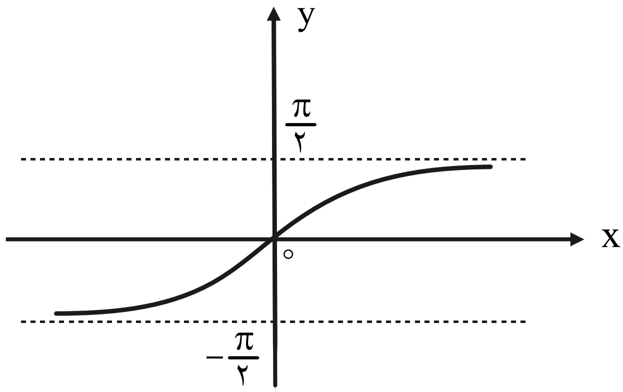
$$\sin^{-۱}(\sin y) = y$$

۳۰.۶.۱ با روش مشابه آنچه در ۲۸.۶.۱ ذکر شد از معادله $x = \cos y$ تابع $y = \text{Arc}\cos x$ را که قلمرو آن $[-۱,۱]$ و بـرد آن $[\circ,\pi]$ است تعریف می‌کنیم. در شکل ۱۵.۱ نمودار تابع کسینوس معکوس ($y = \text{Arc}\cos x$ یا $y = \cos^{-۱} x$) رسم شده است :



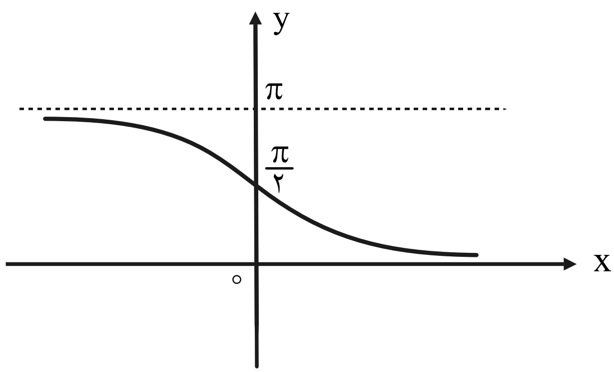
شکل ۱۵.۱

۳۱.۶.۱ از معادله $x = \text{tg}\, y$ وارون تابع $y = \text{tg}\, x$ را ، که با $\text{Arc}\,\text{tg}\, x$ یـا $\text{tg}^{-۱} x$ نـشان داده می‌شود، تعریف می‌کنیم که قلمرو آن $\mathbb{R}$ و برد آن $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ است، در شکل ۱۶.۱ نمودار $y = \text{Arc}\,\text{tg}\, x$ رسم شده است.



شکل ۱۶.۱

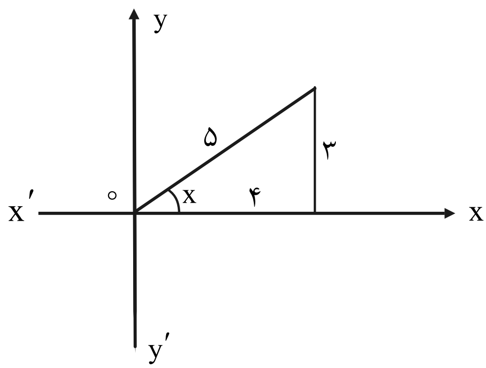
۳۲.۶.۱ وارون تابع $y = \mathrm{Cotg}\,x$ ، که با $\mathrm{Arc\,Cotg}\,x$ یا $\mathrm{Cotg}^{-۱}x$ نشان داده می‌شود از معادله $x = \mathrm{Cotg}\,y$ به دست می‌آید. قلمرو تابع کتانژانت معکوس $\mathbb{R}$ و بـرد آن $(۰,\pi)$ است. در شکل ۱۷.۱ نمودار $y = \mathrm{Arc\,Cotg}\,x$ رسم شده است :



شکل ۱۷.۱

۳۳.۶.۱ مثال. می‌خواهـیم مقـدار $\mathrm{Cos}\,(\mathrm{Arc\sin}\frac{۳}{۵})$ را بـه دست آوریم، فـرض کنـیم $\mathrm{Arc}\sin\frac{۳}{۵} = x$ ، پس $\sin x = \frac{۳}{۵}$ در نتیجه با توجه به شکل ۱۸.۱ داریم،

$$\mathrm{Cos}(\mathrm{Arc}\sin\frac{۳}{۵}) = \cos x = \frac{۴}{۵} \quad ، \quad \mathrm{Cos}x = \sqrt{۱-\sin^{۲} x} = \sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}} = \frac{۴}{۵}$$



شکل ۱.۱۸

۱.۶.۳۴ تمرین. درستی برابری‌های زیر را ثابت کنید :

۱. $\sin(\text{Arc}\sin\frac{۱}{۲})+\cos(\text{Arc}\cos(-\frac{۱}{۲}))=∘$

۲. $\text{Arc}\,\text{Cos}(\text{tg}(-\frac{۵\pi}{۴})+\text{Arc}\sin(\text{tg}\frac{۳\pi}{۴})=\frac{\pi}{۲}$

* ۳. $\sin(\text{Arc}\cos(-\frac{۲}{۳}))=\frac{\sqrt{۵}}{۳}$

* ۴. $\text{tg}(\text{Arc}\sin(\frac{-۳}{۴}))=\frac{-۳\sqrt{۷}}{۷}$

۱.۷ خودآزمایی

۱. اگر رابطه‌ی $f=\{(-۳,۲),(۳,a),(۳,-۱),(۳a,b)\}$ تابع باشد $a+b$ کدام است ؟

الف) ۱ — ب) ۱-

پ) ۲ — ت) ۲-

۲. کدام زوج مرتب را به تابع $f=\{(۳,۱),(۵,-۱),(۱,۲)\}$ اضافه کنیم تا یک تـابع یـک به یک به دست آید.

الف) $(۲,۵)$ — ب) $(۵,-۲)$

پ) $(۳,۲)$ — ت) $(۴,-۱)$

۳. اگر تابع $f=\{(-۳,a),(∘,∘),(a^۲+۲a,m)\}$ فرد باشد m کدام است ؟

الف) ۳- و ۱ — ب) ۳ و ۱-

پ) ۳ و ۱ — ت) ۳- و ۱-

۴. تابع $f(x)=\begin{cases}-1 & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ تابعی است

الف) زوج　　ب) فرد

پ) هم زوج و هم فرد　　ت) نه زوج نه فرد

۵. کدامیک از توابع زیر با تابع $y=1-x$ در فاصله‌ی $(-\infty,0]$ برابر است ؟

الف) $y=\dfrac{x^2-1}{1-|x|}$　　ب) $y=\dfrac{|x^2-x|}{1-x}$

پ) $y=\sqrt{x^2-2x+1}$　　ت) $y=1-\sqrt{x^2}$

۶. اگر $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ باشند مقدار $(2f-g)(3)$ کدام است ؟

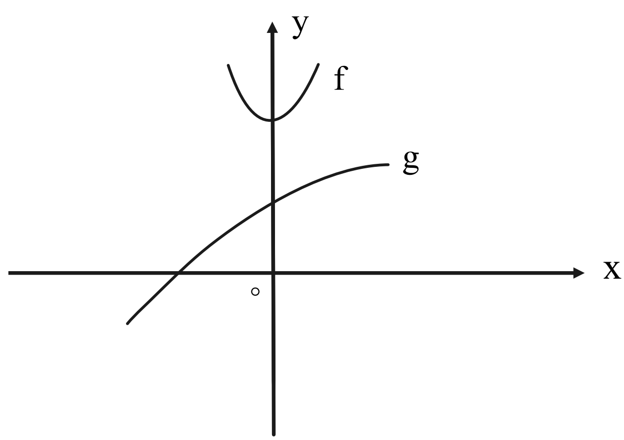
الف) ۱　　ب) ۲

پ) ۳　　ت) صفر

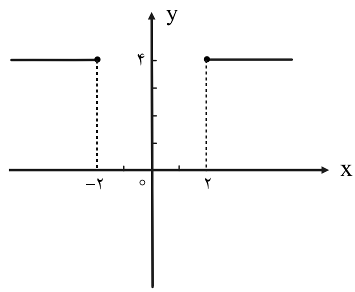
۷. نمودار f و g در زیر رسم شده است کدام تابع روی $\mathbb{R}$ تعریف نمی‌شود ؟

الف) $f+g$　　ب) fog

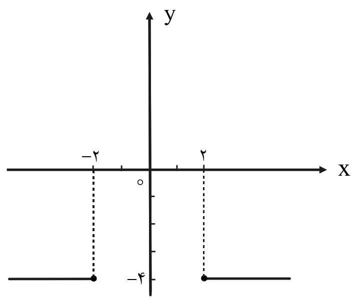
پ) $\dfrac{f}{g}$　　ت) $\dfrac{g}{f}$



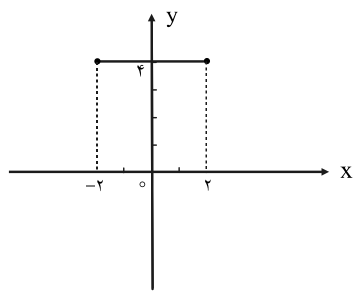
۸ . اگر $f(x)=x+\sqrt{x^2-4}$ و $g(x)=x-\sqrt{x^2-4}$ آنگاه نمودار تابع $f\times g$ شبیه کدام است؟



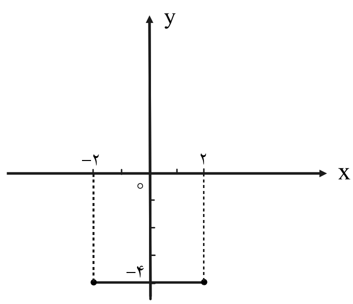
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

۹. اگر تابع $f:A\to[-1,2)$ با ضابطه‌ی $f(x)=1-2x$ پوشا باشد مجموعه‌ی A کدام است؟

الف) $[-\frac{1}{2},1)$ ب) $(-\frac{1}{2},1]$

پ) $[-1,\frac{1}{2})$ ت) $(-1,\frac{1}{2}]$

۱۰. اگر $f(x)=ax^3+b$ و $f(x)=\sqrt[3]{\frac{x+1}{2}}$ آنگاه $a+b$ کدام است ؟

الف) ۴ ب) ۳

پ) ۲ ت) ۱

۱۱. کدام مورد نادرست است ؟

الف) اگر $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ و $g(x)=\frac{1}{x^2}$ باشند آنگاه $D_{gof}=(-1,1)$.

ب) اگر $f(x)=\sqrt{4-x}$ و $g(x)=\sqrt{x-2}$ باشند آنگاه $D_{fog}=[2,18]$.

پ) اگر $g(x)=\sqrt{x}$ و $(fog)(x)=\frac{x}{x+1}$ باشند آنگاه $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2+1}$.

ت) اگر $f(x)=x^3-x$ و $g(x)=\sin 2x$ باشند آنگاه $(fog)(\frac{\pi}{12})=6$.

۱۲. کدام مورد نادرست است ؟

الف) وارون تابع $y=\frac{1-x}{1+x}$ برابرخودش است.

ب) وارون تابع $y=\frac{k}{x}$, $k\neq 0$ برابر خودش است.

پ) اگر تابع $y=\frac{x+2}{x+m}$ وارون خودش باشد داریم $m=-1$

ت) وارون تابع $y=\sin x-2$ ، $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$ برابر خودش است.

۱۳. کدام مورد نادرست است ؟

الف) اگر قلمرو تابع f برابر $[0,4]$ باشد آنگاه قلمرو تابع $y=f(\frac{x}{2})$ برابر $[0,2]$ است.

ب) اگر قلمرو تابع f برابر $[3,5]$ باشد آنگاه قلمرو تابع $y=f(x+1)$ برابر $[2,4]$ است.

پ) اگر قلمرو تابع f برابر $[\frac{1}{5},\frac{1}{2}]$ باشد آنگاه قلمرو تابع $y=f(\frac{1}{x})$ برابر $[2,5]$ است.

ت) اگر قلمرو توابع f و g به ترتیب برابر $(-\infty,4)$ و $[-3,+\infty)$ باشند آنگاه دامنه‌ی توابع $f+g$ ، $f-g$ و $f\times g$ برابر $[-3,4)$ است.

۱۴. اگر $-1\leq x\leq 1$ و $y=\frac{\pi}{2}-\cos^{-1}\frac{x}{2}$ باشد کدامیک از روابط زیر درست است ؟

الف) $x=\mathrm{Sin}^2 y\in$ ب) $x=\mathrm{Sin}2y$

پ) $x=2\mathrm{Sin}\,y$ ت) $x=\mathrm{Sin}\,y^2$

۱۵. کدامیک از روابط زیر یک تابع نیست ؟

الف) $|y|=-x^2+2x-1$ ب) $|x^2-1|+|y|=0$

پ) $|x^2-1|+(y-1)^2=0$ ت) $|y^2-1|+|x|=0$

۱۶. اگر $f(x)=\mathrm{Arc\,tg}(\log x)$ و $g(x)=\sqrt{x}$ باشد آنگاه حاصل $(fog)(100)$ کدام است؟

الف) صفر ب) $\frac{\pi}{4}$

پ) $\frac{\pi}{3}$ ت) $\frac{\pi}{2}$

۱۷. تابع $f=\{(a-1,0),(1,b-2),(0,c-1)\}$ هم فرد است هم زوج ، مقدار $a^2+b^2+c^2$ کدام است؟

الف) ۳ ب) ۵

پ) ۶ ت) ۸

۱۸. نشان دهید تابع $f(x)=۲+\sqrt{x+۸}$ ، $x\in[-۸,+\infty)$ وارون دارد. تابع وارون آن را بیابد.

* ۱۹. فرض کنیم x و $-x$ در قلمرو f باشند. نخست نشان دهید تابع $h(x)=f(x)+f(-x)$ تابعی زوج و تابع $g(x)=f(x)-f(-x)$ تابعی فرد است و از آنجا نتیجه بگیرید که هر تابع با دامنه‌ی متقارن را می‌توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت، سپس تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

۲۰. اگر $f(x)=x-۱$ و $g(x)=۲x+۱$ باشند هر یک از تابع‌های $f^{-۱}$ و $g^{-۱}$ و $(fog)^{-۱}$ و $g^{-۱}of^{-۱}$ را به دست آورده و درستی رابطه‌ی $(fog)^{-۱}=g^{-۱}of^{-۱}$ را بررسی کنید.

۲۱. ثابت کنید تابع $f(x)=\log\frac{۱-x}{۱+x}$ و $x\in(-۱,۱)$ تابعی فرد است.

۲۲. نشان دهید دو تابع $f(x)=\sqrt{x}\sqrt{x-۳}$ و $g(x)=\sqrt{x(x-۳)}$ برابر نیستند ولی دو تابع $h(x)=\sqrt{x}\sqrt{۳-x}$ و $k(x)=\sqrt{x(۳-x)}$ برابرند.
پاسخ خود را با ۹.۱ مقایسه کنید.

۸.۱ پاسخ سوالات متن

(۹.۳.۱). f و g و h تابع نیستند، k تابع است از $(x,y)\in k$ و $(x,z)\in k$ نتیجه بگیرید $y=z$.

(۱۲.۳.۱)

۱. $Q(x)=\frac{x^۲+۴x}{۲}$ ۲. طرف چپ $\frac{b^۳-a^۳}{b-a}$ است، آن را ساده کنید.

۳. $f(۴)=۰$ $f(x+۴)=\sqrt{x}$ $f(x^۲+۴)=|x|=x$ $f(f(۲۰))=۰$

(۳.۴.۱)

۱. برابر نیستند $D_f\neq D_g$ ۲. برابرند

(۵.۵.۱)

۱. $D_{fog}=[۱,+\infty)$ $(fog)(x)=\sqrt{\sqrt{x}-۱}$

$D_{gof}=[۱,+\infty)$ $(gof)(x)=\sqrt[۴]{x-۱}$

۲. $D_{fog}=(۰,۲]$ $\quad (fog)(x)=\sqrt{\frac{-x+۲}{x}}$

$D_{gof}=(۳,+\infty)$ $\quad (gof)(x)=\frac{۲\sqrt{x-۳}+۲}{\sqrt{x-۳}}$

(۲۰.۵.۱)

۱. f فرد ۲. g زوج

۳. h زوج ۴. k نه فرد نه زوج

(۲۶.۵.۱). $\frac{۱}{۴}(۲-۵a)$

(۳۰.۵.۱) دوره تناوب $\sin ax$ و $\cos ax$ برابر $\frac{۲\pi}{|a|}$ و دوره تناوب $\operatorname{tg} ax$ و $\cot ax$ برابر $\frac{\pi}{|a|}$ است.

(۶.۶.۱)

۱. یک به یک نیست $f(-۲)=f(۲)$ ۲. یک به یک است

۳. یک به یک نیست $f(۱)=f(۲)$ ۴. یک به یک است

۵. یک به یک نیست $f(\frac{\pi}{۲})=f(\frac{۳\pi}{۲})$

(۱۰.۶.۱)

۱. f پوشا نیست زیرا $f(x)\geq ۰$ ۲. g پوشا نیست

۳. h پوشا نیست ۴. k پوشا است

(۱۴.۶.۱)

۱. (ب) ۲. تابع ثابت نه صعودی است و نه نزولی.

(۲۰.۶.۱)

۱. کراندار $۱۳۸۷\leq f(x)\leq ۱۳۹۵ \rightarrow |f(x)|\leq ۱۳۹۵$

۲. کراندار $|g(x)|\leq ۴$ ۳. از بالا کراندار

۴. کراندار ۵. کراندار

(۲۵.۶.۱)

۱. وارون ندارد ۲. $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{\frac{x+۱۴}{۵}}$

۳. $f^{-۱}(x)=\frac{x+۳}{x-۲}$ ۴. $f^{-۱}(x)=\frac{۱-\sqrt[۳]{x}}{۴}$

(۳۴.۶.۱)

۱. راهنمایی $\text{Arc}\sin\frac{۱}{۲}=\frac{\pi}{۶}$ و $\text{Arc}\cos(-\frac{۱}{۲})=\frac{۲\pi}{۳}$

۲. $\text{Arc}\sin(-۱)=-\frac{\pi}{۲}$ و $\text{Arc}\cos(-۱)=\pi$

۳. قرار دهید $\text{Arc}\cos(-\frac{۲}{۳})=x$ و $\sin x$ را بیابید.

۴. قرار دهید $\text{Arc}\sin(-\frac{۳}{۴})=x$ و $\text{tg}x$ را بیابید.

۹.۱ پاسخ خود آزمایی

۱. (الف) ۲. (الف) ۳. (ب) ۴. (الف)

۵. (پ) ۶. ت) $۲f(۳)-g(۳)$ را حساب کنید.

۷. پ) در یک نقطه $g(x)=۰$ ۸. الف) $f.g=۴$

۹. ب) $-۱\le f(x)<۲$ ۱۰. (ت) ۱۱. (ت) ۱۲. (ت)

۱۳. (الف) ۱۴. (پ) ۱۵. (ت) ۱۶. (ب)

۱۷.ب) $f(x)=۰$ تنها تابعی است که هم فرد است و هم زوج.

۱۸. $f^{-۱}(x)=x^۲-۴x-۴$ ۱۹. $f(x)=\frac{x^۲+۱}{x^۲-۱}+\frac{۲x}{۱-x^۲}$

۲۰. $(fog)^{-۱}=\frac{x}{۲}$

۲۱. $f(x)+f(-x)=۰$ ۲۲. $D_f\ne D_g$ و $h(x)=k(x)$